Реферат по статье "Passive Underwater Target Tracking: Conditionally Minimax Nonlinear Filtering with Bearing-Doppler Observations"

Шурыгин Всеволод, группа 416

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра Математической статистики

Преподаватель: Горшенин Андрей Константинович

Содержание

Описание модели

Решается задача о слежении за маневрированием подводного аппарата. Движение аппарата описывается следующей системой:

$$\begin{cases} dX_t = dx_t = v_t \cos\varphi_t dt \\ dY_t = dy_t = v_t \sin\varphi_t dt \\ dZ_t = dz_t = 0 \\ dv_t = 0 \\ d\varphi_t = \frac{a_t^n}{v_t} dt \\ da_t^n = (-\lambda a_t^n + \nu)\, dt + \mu dW_t \end{cases}$$

x_t, y_t, z_t — координаты подводного аппарата в его системе отсчета, X_t, Y_t, Z_t — координаты системы отсчёта в системе наблюдателя. Для простоты возьмём единичную матрицу поворота, а сдвиг пусть отвечает начальным условиям на x_t, y_t, z_t.

Система наблюдения

Каждый из датчиков наблюдает следующие величины:

$$\xi^i_{t_k} = \frac{Z_{t_k} - Z^i}{R^i_{t_k}} + v^{\xi^i}_k \tag{1}$$

$$\eta^i_{t_k} = \frac{X_{t_k} - X^i}{r^i_{t_k}} + v^{\eta^i}_k \tag{2}$$

где $i = 1, .., N$ и

$$R^i_{t_k} = \sqrt{(X_{t_k} - X^i)^2 + (Y_{t_k} - Y^i)^2 + (Z_{t_k} - Z^i)^2},$$
$$r^i_{t_k} = \sqrt{(X_{t_k} - X^i)^2 + (Y_{t_k} - Y^i)^2}$$

расстояние от наблюдателя до цели и длина проекции на плоскость $Z = 0$ соответственно.

Последняя компонента наблюдений описывает эффект Доплера из-за движения аппарата относительно сенсора.

Система наблюдения

$$\omega^i_{t_k} = \frac{\omega_0}{1 - V^i_{t_k}/C} + v_k^{\omega^i} \qquad (3)$$

где $V^i_{t_k} = \frac{V^X_{t_k}(X_{t_k} - X^i) + V^Y_{t_k}(Y_{t_k} - Y^i) + V^Z_{t_k}(Z_{t_k} - Z^i)}{R^i_{t_k}}$ — скорость аппарата относительно наблюдателя. Последовательность $\left(v_k^{\xi^1}, v_k^{\eta^1}, v_k^{\omega^1}, \ldots, v_k^{\xi^N}, v_k^{\eta^N}, v_k^{\omega^N}\right)^T$ описывает погрешность показаний датчиков и состоит из независимых и одинаково распределенных векторов с некоррелированными компонентами.

Формализация

Получили задачу фильтрации с дискретно-непрерывной системой:

$$d\mathcal{X}(t) = a(\mathcal{X}(t))dt + b(t)dW_t,$$
$$\mathcal{X}(0) = \mathcal{X}_0 \sim \pi_0 : \mathbb{E}\left[\mathcal{X}_0\right] = \mu_0$$

$$\operatorname{cov}\left(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_0\right) = \mathrm{D}_0$$

$$\mathcal{Y}\left(t_k\right) = A\left(\mathcal{X}\left(t_k\right)\right) + B_{t_k} W_{t_k}, k \in \mathbb{N}$$

В нашей задаче

$$a\left(\mathcal{X}_t\right) = \begin{pmatrix} v_t \cos\left(\varphi_t\right) \\ v_t \sin\left(\varphi_t\right) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a_t^n}{v_t} \\ -\lambda a_t^n + \nu \end{pmatrix}$$

Формализация

$$b(t) = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

Комбинированные пеленгово-доплеровские наблюдения:

$$Y_k = \mathrm{col}\left(\left(\xi^i_{t_k}, \eta^i_{t_k}, \omega^i_{t_k}\right)^T\right)$$

$$A\left(\mathcal{X}_t\right) = \mathrm{col}\left(\left\{\left(\frac{Z_t - Z^i}{R^i_t}, \frac{X_t - X^i}{r^i_t}, \frac{\omega_0}{1 - V^i_t / C}\right)\right\}\right),$$

Формализация

$$B_{t_k} = B = \operatorname{diag}\left(\operatorname{col}\left(\left\{\left(\sigma_{i,1}^2, \sigma_{i,2}^2, \sigma_{i,3}^2\right)\right\}\right)\right), i = 1, \ldots, N$$

где col() — конкатенация векторов в один, $i = 1, \ldots, N$, N — число датчиков.

Посчитаем для реализации EKF-1 матрицы Якоби для a и A:

$$\frac{\partial a\left(\mathcal{X}_t\right)}{\partial\left(\mathcal{X}_t\right)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_t & -v_t\sin\varphi_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\varphi_t & v_t\cos\varphi_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_t^n/v_t^2 & 0 & 1/v_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Формализация

$$\frac{\partial A\left(\mathcal{X}_t\right)}{\partial\left(\mathcal{X}_t\right)} = \operatorname{col}\left(\left\{\begin{pmatrix} \xi_X^i & \xi_Y^i & \xi_Z^i & 0 & 0 & 0 \\ \eta_X^i & \eta_Y^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_X^i & \omega_Y^i & \omega_Z^i & \omega_v^i & \omega_\phi^i & 0 \end{pmatrix}\right\}_{i=1}^N\right),$$

где производные, обозначенные в матрице Якоби $\frac{\partial A(\mathcal{X}_t)}{\partial(\mathcal{X}_t)}$:

$$\xi_X^i = -\frac{\left(Z_t - Z^i\right)\left(X_t - X^i\right)}{\left(R_t^i\right)^3}$$

$$\xi_Y^i = -\frac{\left(Z_t - Z^i\right)\left(Y_t - Y^i\right)}{\left(R_t^i\right)^3}$$

Формализация

$$\xi_Z^i = \frac{R^2 - \left(Z_t - Z^i\right)^2}{\left(R_t^i\right)^3}$$

$$\eta_X^i = \frac{\left(r_t^i\right)^2 - \left(X_t - X^i\right)^2}{\left(r_t^i\right)^3}$$

$$\eta_Y^i = -\frac{\left(X_t - X^i\right)\left(Y_t - Y^i\right)}{\left(r_t^i\right)^3}$$

$$\omega_X^i = -\omega_0 \frac{V_{t_k}^X \left(X_t - X^i\right) - V_{t_k}^i R}{R^2 C \left(1 - V_{t_k}^i / C\right)^2}$$

Формализация

$$\omega_Y^i = -\omega_0 \frac{V_{t_k}^Y \left(Y_t - Y^i\right) - V_{t_k}^i R}{R^2 C \left(1 - V_{t_k}^i / C\right)^2}$$

$$\omega_Z^i = -\omega_0 \frac{\left(Z_t - Z^i\right) V_{t_k}^i}{R^2 C \left(1 - V_{t_k}^i / C\right)^2}$$

$$\omega_v^i = \omega_0 \frac{V_{t_k}^i}{v_t C \left(1 - V_{t_k}^i / C\right)^2}$$

$$\omega_\phi^i = \omega_0 \frac{(v_t \cos\varphi_t)_t \left(Y_t - Y^i\right) - (v_t \sin\varphi_t)_t \left(X_t - X^i\right)}{RC \left(1 - V_{t_k}^i / C\right)^2}$$

EKF-1 — Расширенный фильтр Калмана первого порядка

Расширенный фильтр Калмана — это линеаризованный фильтр Калмана, в котором в качестве опорной траектории выступает оценка на предыдущем шаге, т.е. $_t = \hat{X}(t-1)$.
В нашей задаче используется EKF первого порядка для непрерывно-дискретных систем наблюдения, в котором уравнение динамики является СДУ, а наблюдения дискретны.
Для моделирования динамики и прогнозов используется метод Эйлера-Маруямы.

1. Начальное условие

$$\hat{X}(0) = m_0,$$
$$k(0) = D_0.$$

2. Шаг прогноза.

$$d\hat{X}(t) = a(\hat{X}(t))dt, \quad t \in (t_{k-1}, t_k) \tag{4}$$

3. Шаг коррекции.

$$\hat{X}\left(t_k\right) = \hat{X}\left(t_{k-}\right) + k\left(t_{k-}\right)\left(\frac{\partial A_t(x)}{\partial x}\bigg|_{\hat{X}\left(t_{k-}\right)}\right)^T \Bigg(\frac{\partial A_t(x)}{\partial x}\bigg|_{\hat{X}\left(t_{k-}\right)} k\left(t_{k-}\right) \times$$

$$\left(\frac{\partial A_t(x)}{\partial x}\bigg|_{\hat{X}\left(t_{k-}\right)}\right)^T + B_{t_{k-}} B_{t_{k-}}^T \Bigg)^{-1} \times \left(Y_k - A_t\left(\hat{X}\left(t_{k-}\right)\right)\right) \qquad (6)$$

$$k\left(t_k\right) = k\left(t_k\right) - k\left(t_{k-}\right)\left(\frac{\partial A_t(x)}{\partial x}\bigg|_{\hat{X}\left(t_{k-}\right)}\right)^T \Bigg(\frac{\partial A_t(x)}{\partial x}\bigg|_{\hat{X}\left(t_{k-}\right)} k\left(t_{k-}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial A_t(x)}{\partial x}\bigg|_{\hat{X}\left(t_{k-}\right)}\right)^T + B_{t_{k-}} B_{t_{k-}}^T \Bigg)^{-1} \times \frac{\partial A_t(x)}{\partial x}\bigg|_{\hat{X}\left(t_{k-}\right)} k\left(t_{k-}\right) \qquad (7)$$

Корневой аналог расширенного фильтра Калмана

1. Начальное условие

$$\hat{X}(0) = m_0$$
$$\tilde{s}_0 = cholecky\left(cov(m_0, m_0)\right)$$

2. Шаг прогноза.

$$\tilde{X}_t = a_t \hat{X}_{t-1} + c_t \tag{8}$$

$$N\{[\underbrace{\tilde{s}_t}_{N} \quad \underbrace{0}_{M}] = \begin{bmatrix} a_t s_{t-1} & \left(b_t b_t^T\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tilde{T}_t \tag{9}$$

где $\tilde{T}_t$ - ортогональная матрица, обеспечивающая выполнение равенства. В работе найдена с помощью процедуры Грама-Шмидта, а точнее с помощью использований QR-разложений для ортогонализации (реализация в коде ниже).

Корневой аналог расширенного фильтра Калмана

3. Шаг коррекции (вариант последовательной обработки скалярных измерений):

$$i = 1, \ldots, M, \quad s_t^0 = \tilde{s}_t, \quad s_t = s_t^M, \quad \hat{X}_t^0 = \tilde{X}_t, \quad \hat{X}_t = \hat{X}_t^M :$$

$$D_t^i = A_t^i s_t^{i-1},$$

$$\mu_t^i = \left(D_t^i \left(D_t^i\right)^T + B_t^1 \left(B_t^1\right)^T\right)^{-1}$$

$$v_t^i = \left(1 + \sqrt{\mu_t^i B_t^1 \left(B_t^1\right)^T}\right)^{-1}$$

$$\hat{X}_t^i = \hat{X}_t^{i-1} + \mu_t^i s_t^{i-1} \left(D_t^i\right)^T \left(Y_t^i - A_t^i \hat{X}_t^{i-1} - C_t^i\right) \tag{10}$$

$$s_t^i = s_t^{i-1} - \mu_t^i v_t^i s_t^{i-1} \left(D_t^i\right)^T D_t^i \tag{11}$$

CMNF — Условно-минимаксный нелинейный фильтр

1. Начальное условие.

Моделируется выборка синтетического состояния $\left\{X_0^{(i)}\right\}_{i=1,N} \sim \pi_0(x)$.

Вычисляются $\hat{X}_0$ - целевая оценка фильтрации в начальный момент времени, $\hat{K}_0^{XX}$ - ковариационная матрица ошибки оценки фильтрации в начальный момент времени. Формируется выборка синтетических оценок фильтрации в начальный момент времени $\left\{\hat{X}_0^{(i)}\right\}_{i=1,N} : \hat{X}_0^{(i)} \equiv \hat{X}_0$.

2. Шаг прогноза.
Пусть на предыдущем шаге $k-1$ имеются оценка состояния $\hat{X}_{k-1}$, выборки синтетических состояний $\left\{X_{k-1}^{(i)}\right\}_{i=\overline{1,N}}$ и синтетических оценок фильтрации $\left\{\hat{X}_{k-1}^{(i)}\right\}_{i=\overline{1,N}}$.
2.1. Методом Эйлера-Маруямы с малым шагом моделируем выборку синтетического состояния $\left\{X_k^{(i)}\right\}_{i=\overline{1,N}}$ в следующий момент времени t_k. По ней строим наблюдения $\left\{Y_k^{(i)}\right\}_{i=\overline{1,N}}$.
2.2. Вычисляем выборки синтетических базовых прогнозов $\left\{\alpha_k\left(\hat{X}_{k-1}^{(i)}\right)\right\}_{i=\overline{1,N}}$ и синтетических

$$\hat{X}_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_0^{(i)}, \quad \hat{K}_0^{XX} = \frac{1}{N-n}\sum_{i=1}^{N}\left(X_0^{(i)} - \hat{X}_0\right)\left(X_0^{(i)} - \hat{X}_0\right)^T \tag{12}$$

базовых коррекций $\left\{\gamma_k\left(\hat{X}_{k-1}^{(i)}, \beta_k\left(Y_k^{(i)}\right)\right)\right\}_{i=\overline{1,N}}$.

CMNF — Условно-минимаксный нелинейный фильтр

2.3. По пучку синтетических объектов
Строим выборочные моменты $m_k, \bar{R}_k$. В качестве верхней оценки в работе взяли R с занесением отрицельных элементов
2.4. По целевой оценке фильтрации $\hat{X}_{k-1}$ и наблюдениям Y_k вычисляем целевой базовый прогноз $\alpha_k\left(\hat{X}_{k-1}\right)$ и целевую базовую коррекцию $\gamma_k\left(\hat{X}_{k-1}, \beta_k\left(Y_k\right)\right)$.
2.5. Модифицируем выборку синтетических прогнозов $\left\{\alpha_k\left(\hat{X}_{k-1}^{(i)}\right)\right\}_{i=\overline{1,N}}$ и синтетических коррекций $\gamma_k\left(\hat{X}_{k-1}, \beta_k\left(Y_k\right)\right)$.

3. Шаг коррекции.

3.1. По выборке синтетических объектов
строим выборку синтетических оценок фильтрации $\left\{\hat{X}_k^{(i)}\right\}_{i=\overline{1,N}}$.

3.2. По модифицированным целевым прогнозу и коррекции $\begin{bmatrix} \breve{X}_k \\ \breve{\gamma}_k \end{bmatrix}$
строим оценку состояния $\hat{X}_k$ и ковариационную матрицу ее ошибки $\bar{R}_k^{XX}$.

Моделируются состояния с помощью метода Эйлера-Маруямы:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T, \quad h = T/N$$

Получаем стохастическую динамическую систему наблюдения с дискретным временем:

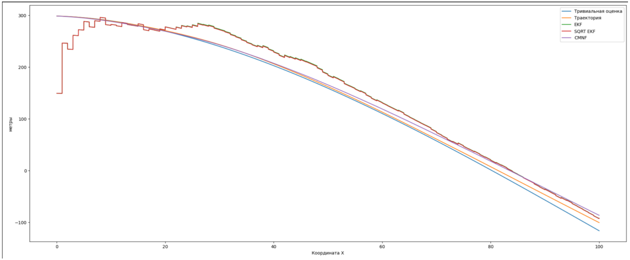
$$X_0 = X(0)$$

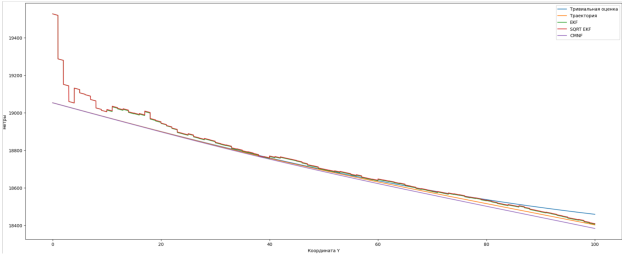
$$b(X_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}, X_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$X_{t+1} = X_t + a(X_t) \cdot h_1 + b(X_t) * V_t \cdot \sqrt{h} \tag{13}$$

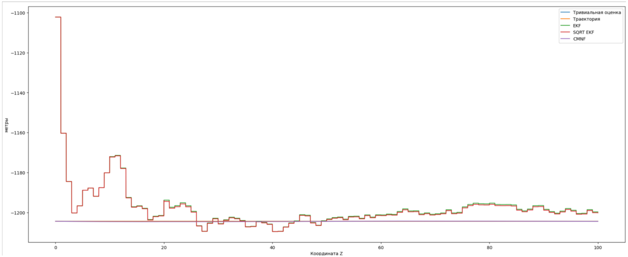
- Шаг для наблюдений шаг $\delta_3 = 1$ секунда.
- Шаг фильтрации для прогноза шаг $\delta_2 = 10^{-2}$ секунд.
- Шаг для моделирования траектории $\delta_1 = 10^{-3}$ секунд.

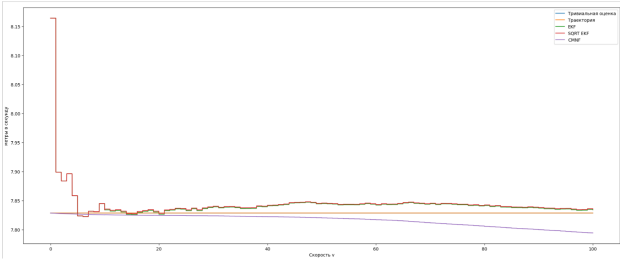
Компоненты и их оценки



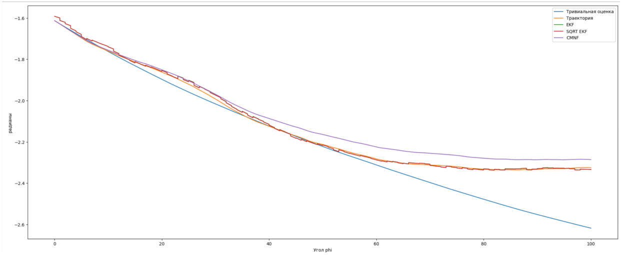


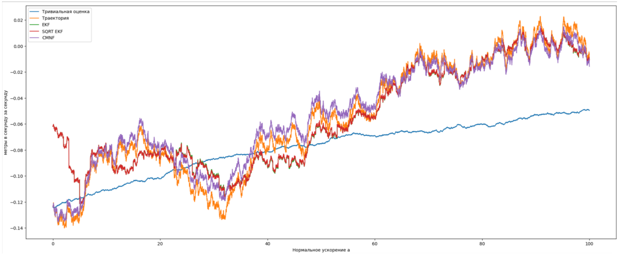
Компоненты и их оценки



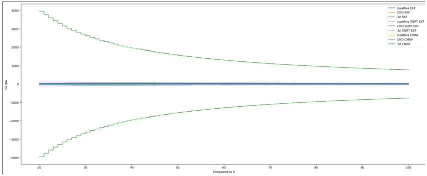


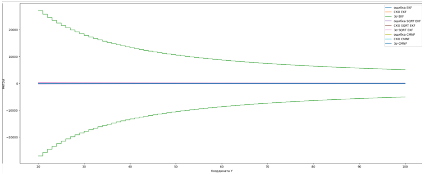
Компоненты и их оценки

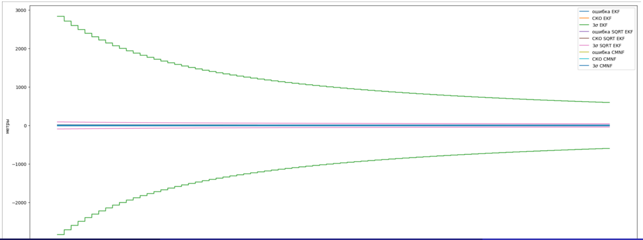




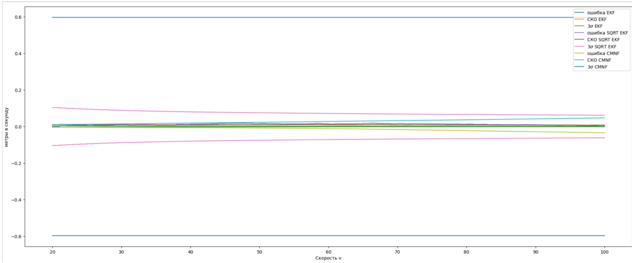
Ошибки оценивания и оценки СКО по алгоритмам

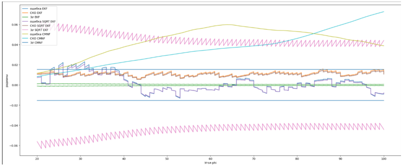


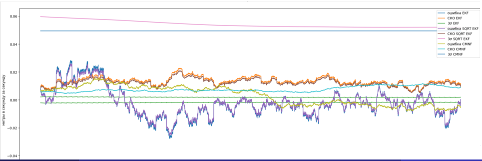




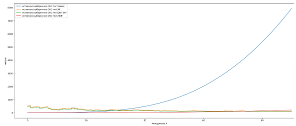
Ошибки оценивания и оценки СКО по алгоритмам

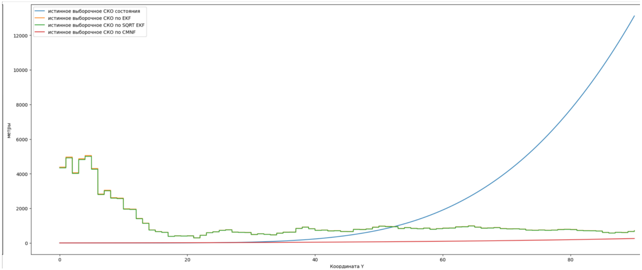


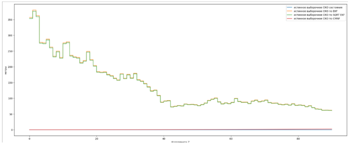




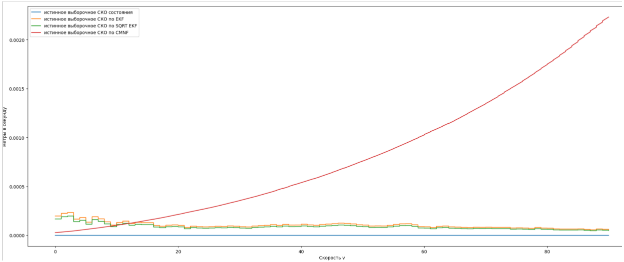
Истинные выборочные СКО

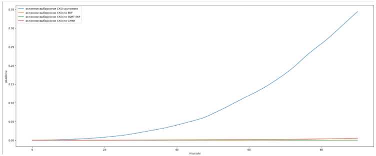


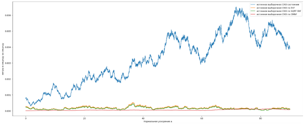




Истинные выборочные СКО







Выводы по результатам экспериментов

- Результаты работы расширенного фильтра Калмана и его корневого аналога оказались практически идентичны.
- Фильтры справляются с поставленной задачей оценивания лучше тривиальной оценки (безусловного матожидания) для всех компонент, кроме координаты Z и скорости v, потому что по условию задачи те не меняются. По остальным параметрам (X, Y, phi, a) преимущество особенно заметно с течением времени, когда тривиальное "усреднение"уже не позволяет обрабатывать накопившуюся ошибку.
- Если сравнивать результаты фильтров между собой, CMNF показал большую устойчивость по проценту расходящихся траекторий и более точную оценку координаты Z, но достаточно сильно со временем начинает ошибаться с оценкой скорости v.

Список использованных источников

- Borisov, A.; Bosov, A.; Miiler, B.; Miller, G. — "Passive Underwater Target Tracking: Conditionally Minimax Nonlinear Filtering with Bearing-Doppler Observations— Institute of Informatics Problems of Federal Research Center "Computer Science and Control", 2020.
- Bosov, A.; Borisov, A.; Semenikhin, K. — "Conditionally Minimax Prediction in Nonlinear Stochastic Systems.— IFAC PapersOnLine, 2015.
- Kalman, R.E. — "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems.— ASME Basic Eng, 1960.