
Rapport mini-projet

Modélisation – Représentations et analyse des modèles

Sujet No. 25

Un système proie-prédateur qui tourne au chaos

Réalisé par le groupe no. 25A :

Théo SCHNEIDER

Urbain SCHNEIDER

Tom VIDAL

15 janvier 2023

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte et objectif	1
1.2	Etat de l'art	1
1.3	Contribution	1
1.4	Structure du rapport	1
2	Modèle à état discret	2
2.1	Modèle proposé	2
2.2	Etude théorique des points d'équilibre	2
2.3	Hypothèses du modèle	3
3	Résultats de simulation et analyse du modèle à état discret	4
3.1	Obtention du diagramme de bifurcation	4
3.2	Analyse de la simulation	4
4	Modèle à évènements discrets	6
5	Conclusion	7
5.1	Conclusion sur les modèles proposés	7
5.2	Perspectives	7
	Annexes	7
	Annexe 1	8

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte et objectif

La modélisation des dynamiques de populations a toujours été un sujet d'intérêt majeur afin de comprendre l'évolution de la biodiversité. En effet, la modélisation de l'évolution d'une population permet d'anticiper les espèces en danger et de planifier la protection de la biodiversité.

En particulier, les systèmes proie-prédateurs permettent de modéliser les interactions entre différentes espèces. On peut ainsi prévoir la prolifération d'espèces dangereuses en modélisant la dynamique de chasse entre des proies et des prédateurs. La formalisation à travers un système d'équations différentielles multiples permet aussi de prendre en compte l'influence de l'environnement.

Le principal défi avec de tels systèmes est l'étude de la stabilité, et donc de la pertinence, des solutions trouvées sur le temps long. En effet, les systèmes proie-prédateur ont tendance à avoir des comportements chaotiques.

1.2 Etat de l'art

Historiquement, l'étude de systèmes proie-prédateur est très liée à la modélisation des populations. En particulier, comme le rappelle [1]. En effet, dans un tel système, on considère que la population de proie seule est capable de proliférer. Se pose donc la question du modèle à utiliser afin de représenter la disponibilité des ressources. Les modèles les plus classiques afin de décrire des systèmes proie-prédateurs sont rappelés dans [4] sous la forme générale :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - \phi(x(t))y(t) \\ \dot{y}(t) = -by(t) + c\phi(x(t))y(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

avec différents choix possibles pour la fonction ϕ en fonction de la modélisation choisie.

Après avoir obtenu un système différentiel cohérent, il s'agit ensuite de le transformer en un système à temps discret. En effet, on peut dans une bonne approximation étudier les interactions proie prédateur de manière discrète dans le temps, tous les six mois par exemple.

1.3 Contribution

Ce rapport se propose d'étudier un système proie-prédateur dans lequel on prend en compte le nombre fini de ressource à disposition de chaque espèce. Cela revient à dire que s'il y a plus de proies à ressources constantes, alors les différents membres de cette espèce vont rentrer en compétition les uns avec les autres pour les ressources disponibles. Concrètement, cela revient à ajouter un facteur d'atténuation de la forme $-x(t)^2$ (resp. $-y(t)^2$) à l'équation régissant la population de proies (resp. de prédateurs).

Afin de mieux mettre en évidence l'influence de ce facteur, l'équation de base choisie est assez simple. Comme on le verra ci-après, le modèle étudié se base sur une variation du modèle proposé traditionnellement par Lotka et Volterra.

1.4 Structure du rapport

Le Chapitre 2 présente le *modèle mathématique à état discret*. Le Chapitre 3 porte sur l'*analyse des résultats de simulation obtenus en utilisant le modèle présenté au chapitre précédent*. Le Chapitre 4 se focalise sur le développement du *modèle à événements discrets*. Finalement, les conclusions et perspectives sont présentées.

Chapitre 2

Modèle à état discret

Ce chapitre se propose d'étudier le système présenté en (2.1) en le transformant sous la forme d'un système à temps discret, puis en étudiant les points d'équilibre et leur stabilité. Enfin, les hypothèses sous-jacentes du modèle proposé seront étudiées plus en détail dans 2.3

2.1 Modèle proposé

Le système continu d'origine du modèle étudié ici est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) - \gamma x(t)^2 \\ \dot{y}(t) = -\rho y(t) + \sigma x(t)y(t) - \nu y(t)^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma$ et ν sont des constantes positives.

Pour un système réel, α représente le taux de naissance des proies dans l'hypothèse où elles ont accès à autant de ressources que nécessaires. Le facteur β traduit la probabilité qu'une proie se fasse dévorer par un prédateur et le facteur σ traduit cette même interaction du point de vue du prédateur, tout en prenant en compte la valeur nutritive de la proie. En effet, dans des milieux réels, on observe qu'un prédateur doit se nourrir de plusieurs proies afin de se reproduire avec succès. Le facteur ρ représente quant à lui le taux de décès des prédateurs. En effet, on considère que les prédateurs se nourrissent exclusivement des proies de l'espèce x . En l'absence de proies, la population de prédateurs diminue donc progressivement proportionnellement au facteur ρ . Enfin, γ et ν modélisent la compétition qui a lieu à l'intérieur d'une espèce pour s'approprier les ressources nécessaires à la croissance.

Afin de pouvoir mener une étude plus approfondie de ce système, on cherche ensuite à le discrétiser dans le temps sous la forme de deux suites chaînées définies par récurrence.

En utilisant l'approximation $\dot{x}(t) = x_{n+1} - x_n$ (resp. $\dot{y}(t) = y_{n+1} - y_n$), on obtient immédiatement le système à temps discret suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 + \alpha)x_n - \beta x_n y_n - \gamma x_n^2 \\ y_{n+1} = (1 - \rho)y_n + \sigma x_n y_n - \nu y_n^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

2.2 Etude théorique des points d'équilibre

Maintenant que nous disposons d'un système d'équations modélisant la dynamique de deux populations de proies et de prédateurs, il s'agit d'en étudier les points d'équilibre.

On peut tout d'abord remarquer que le point $(x_n, y_n) = (0, 0)$ est un point d'équilibre trivial assez peu intéressant pour le système 2.2.

Si l'on cherche ensuite d'autres potentiels points d'équilibre, on est amené à résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x^* = (1 + \alpha)x^* - \beta x^* y^* - \gamma (x^*)^2 \\ y^* = (1 - \rho)y^* + \sigma x^* y^* - \nu (y^*)^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

d'inconnues x^* et y^* supposées positifs et non nuls.

Il reste alors trois cas à traiter : $x^* = 0$ et $y^* > 0$; $x^* > 0$ et $y^* = 0$ et enfin $x^* > 0$ et $y^* > 0$. Pour les deux premiers cas, on obtient après résolution les points d'équilibre suivant : $(0, -\frac{\nu}{\rho})$ qui n'est pas cohérent car on doit avoir $y^* > 0$ et $(\frac{\alpha}{\gamma}, 0)$, que l'on va noter par la suite $(\bar{x}, 0)$.

Sans se soucier pour l'instant des conditions d'existence, en simplifiant les deux lignes par x^* (resp. y^*) puis en résolvant, on obtient une solution possible :

$$\begin{cases} x^* = \frac{1}{\gamma}(\alpha - \beta y^*) \\ y^* = \frac{\sigma\alpha - \rho\gamma}{\sigma\beta + \nu\gamma} \end{cases} \quad (2.4)$$

Or pour qu'un tel point d'équilibre existe, il doit vérifier $x^* > 0$ et $y^* > 0$, c'est-à-dire les deux conditions : $\sigma\alpha > \rho\gamma$ et $\alpha > \beta y^*$.

On s'intéresse maintenant à la stabilité des deux points d'équilibre ainsi obtenus.

Pour cela, on va chercher à calculer le linéarisé tangent du système 2.2 aux points d'équilibre $(0,0)$ et 2.4. Avant cela, on va poser les notations suivantes :

$$f : (x, y) \rightarrow (1 + \alpha)x - \beta xy - \gamma x^2 \quad (2.5)$$

$$g : (x, y) \rightarrow (1 - \rho)y + \sigma xy - \nu y^2 \quad (2.6)$$

de sorte qu'on a : $x_{n+1} = f(x_n, y_n)$ et $y_{n+1} = g(x_n, y_n)$.

Alors on a les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + \alpha - \beta y - 2\gamma x \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\beta x \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \sigma y \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 1 - \rho + \sigma x - 2\nu y \quad (2.10)$$

D'où les matrices suivantes pour le linéarisé tangent aux trois points d'équilibre :

$$J_1(0,0) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \rho \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J_2(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 1 - \alpha + \beta y^* & -\beta x^* \\ \sigma y^* & 1 - \rho + \sigma x^* + 2\nu y^* \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J_3(\bar{x}, 0) = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & -\beta \bar{x} \\ 0 & 1 - \rho + \sigma \bar{x} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

On peut alors calculer l'expression du polynôme caractéristique de ces deux matrices et en déduire par le critère de Jury une condition de stabilité pour ces points d'équilibre.

Pour l'équilibre en $(0,0)$, on trouve : $\chi_{(0,0)}(X) = (X - (1 + \alpha))(X - (1 - \rho))$ et on remarque que $(1 + \alpha)$ est une valeur propre de module strictement supérieur à 1. Ainsi, le point $(0,0)$ est un point d'équilibre instable pour le système considéré.

Pour ce qui est de l'équilibre en (x^*, y^*) , on peut utiliser le critère de Jury, présenté dans [2] au chapitre 4.4.2.3.2, pour obtenir une série d'inégalités entre les différents paramètres du problème qui caractérisent exactement les conditions d'équilibre stable.

2.3 Hypothèses du modèle

Le modèle proposé plus haut se base implicitement sur plusieurs hypothèses qui simplifient considérablement l'évolution d'une population.

En premier lieux, il suppose que l'évolution des populations de proies et de prédateurs ne dépend que des conditions initiales imposées au système. En particulier, ce modèle considère que tous les facteurs multiplicatifs présents dans le système (2.2) sont des constantes. Ainsi, on ne prend pas en compte l'influence de facteurs environnementaux comme les saisons ou les événements météorologiques extraordinaires.

De plus, le modèle de compétition intra-espèce suppose que les deux espèces sont parfaitement isolées du reste de l'univers. Par exemple, on ne suppose pas la présence d'une deuxième espèce de prédateurs qui viendrait réduire la population de proies.

Chapitre 3

Résultats de simulation et analyse du modèle à état discret

Afin de valider les constats émis au chapitre 2, cette partie se propose d'effectuer des simulations numériques afin d'étudier la stabilité des différents points d'équilibre.

Pour ce faire, ce chapitre se consacre à l'analyse de bifurcation, comme déjà utilisée dans [3]. Le code fourni en complément du rapport est fortement basé sur le tutoriel d'analyse de bifurcation pour Python présenté en [5] avec l'exemple de l'équation logistique.

3.1 Obtention du diagramme de bifurcation

Afin d'obtenir un diagramme de bifurcation, il a fallu décider d'un paramètre pertinent à faire varier et choisir les valeurs auxquelles fixer tous les autres paramètres. En repartant de l'équation logistique présentée dans [5], nous avons décidé de faire varier le paramètre α , mais aussi d'imposer les deux conditions suivantes :

- $\gamma = \alpha$ comme dans l'équation logistique ;
- $\beta = 0.1\alpha$, car plus les proies se reproduisent vite, plus la probabilité qu'un prédateur chasse une proie avec succès est grande.

Mathématiquement, le diagramme de bifurcation revient à chercher les valeurs d'adhérence des deux suites (x_n) et (y_n) . Pour cela, le programme proposé en complément de ce rapport calcule 1000 itérations du système 2.2 pour chaque valeur de α et affiche les 100 dernières valeurs obtenues. Pour une configuration stable, les simulations effectuées avec tous les paramètres fixés (voir figure 3.2) nous montrent que le système se stabilise avant la 900ème itération, ce qui assure l'obtention de valeurs cohérentes.

3.2 Analyse de la simulation

Afin d'analyser les résultats obtenus à la figure 3.1, on peut comparer les conditions de stabilité mises en lumière sur le diagramme de bifurcation avec les conditions de stabilités sur les valeurs propres du linéarisé tangent à l'équilibre (x^*, y^*) , comme décrit en (2.11).

Par lecture graphique, on trouve que la valeur limite de bifurcation est $\alpha = 2.2$. Vérifions par le calcul la pertinence de cette valeur par rapport au modèle théorique.

Après calculs (menés dans la seconde partie du fichier '*Diagramme_Bifurcation.py*'), on obtient tout d'abord comme valeurs pour x^* et y^* les valeurs suivantes : $x^* = 0.894$ et $y^* = 2.904$, ce qui est cohérent avec ce que l'on observe sur le diagramme de bifurcation aux alentours de $\alpha = 2.2$.

Ensuite, on cherche à vérifier que le point $\alpha = 2.2$ est un point critique pour la stabilité de l'équilibre (x^*, y^*) . Pour cela, on applique le critère de Jury avec l'ensemble des paramètres fixés. Cependant, les calculs à la fois du critère de Jury et de l'obtention des valeurs propres de la matrice linéarisée tangent avec le module numpy indiquent que l'équilibre est sensé être instable.

En effet, on obtient comme valeurs propres pour la matrice :

$$J_2(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 1 - \alpha + \beta y^* & -\beta x^* \\ \sigma y^* & 1 - \rho + \sigma x^* + 2\nu y^* \end{bmatrix} \text{ (déjà vue au chapitre 2)} \quad (3.1)$$

les deux valeurs propres suivantes $\lambda_1 = -0.94668619$ et $\lambda_2 = 1.33001952$. Or on a $|\lambda_2| > 1$, donc le système devrait être instable, ce qui ne correspond pas au résultat de la simulation en figure 3.2, effectuée avec les mêmes paramètres que les calculs précédents.

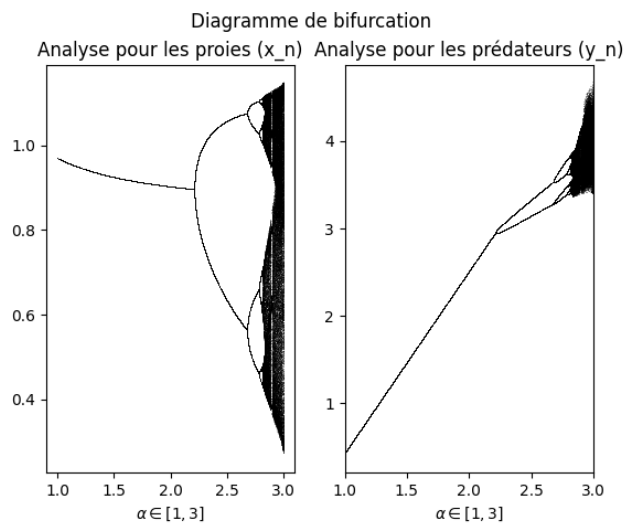


FIGURE 3.1 – Analyse de bifurcation pour les paramètres $\alpha \in [1, 3]$; $\beta = 0.08$; $\gamma = \alpha$; $\rho = 0.08$; $\sigma = 0.1\alpha$ et $\nu = 0.04$ avec les conditions initiales $x_0 = 1.1$ et $y_0 = 1$

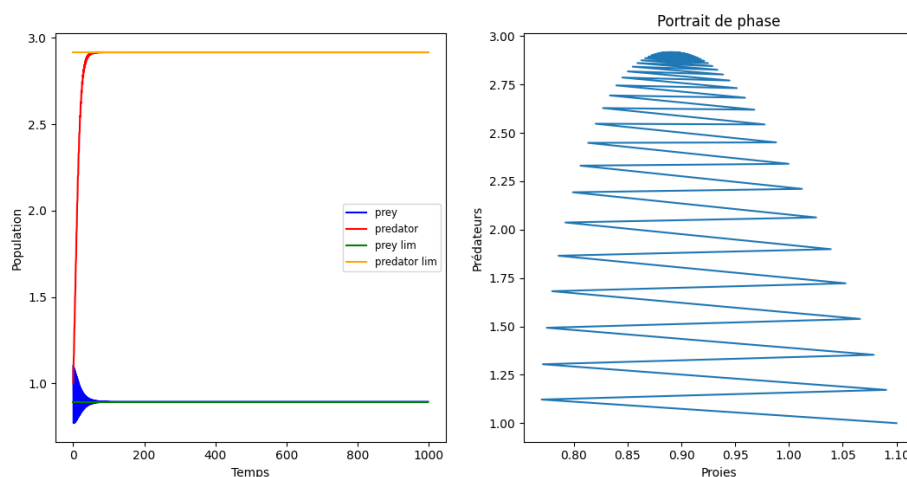


FIGURE 3.2 – Simulation du système pour les paramètres $\alpha = 2.2$; $\beta = 0.08$; $\gamma = \alpha = 2.2$; $\rho = 0.08$; $\sigma = 0.1\alpha = 0.22$ et $\nu = 0.04$ avec les conditions initiales $x_0 = 1.1$ et $y_0 = 1$

Une explication possible à cette contradiction entre le calcul théorique et la simulation est peut-être la différence entre l'étude du système linéarisé tangent au point d'équilibre à travers la matrice 3.1 et l'étude du véritable système non-linéaire 2.2. En effet, le passage à la jacobienne implique une perte d'information qui pourrait expliquer la différence entre les résultats théoriques et la simulation.

Chapitre 4

Modèle à événements discrets

Le Chapitre 4 porte sur le développement d'un *modèle à événements discrets*. **On ne demande pas de simulateur pour le modèle à événements discrets.**

Ce chapitre permettra de répondre à la question II.1 du sujet.

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Conclusion sur les modèles proposés

Ce rapport se consacre à l'étude d'un système proie-prédateurs basé sur le système introduit par Lotka et Volterra, mais prenant en compte une compétition interne à chaque espèce.

L'étude mathématique de ce modèle a permis de mettre en évidence quels en sont les points d'équilibre et le calcul du linéarisé tangent à chaque point d'équilibre a permis d'énoncer des conditions de stabilité pour chacun d'entre eux. En particulier, cela a permis de mettre en avant l'existence d'un point d'équilibre non nul (le point noté (x^*, y^*)) auquel se consacre l'analyse numérique afin de rechercher des configurations stables.

Ces résultats informatiques ont ensuite été confrontés à l'analyse théorique de cette même configuration avec pour résultat une apparente contradiction. Cependant, celle-ci pourrait être expliquée par les différentes approximations adoptées pour l'étude théorique et la résolution informatique du problème.

paragraphe sur le SED

5.2 Perspectives

Plusieurs pistes sont envisageables afin de complexifier le modèle et de le rendre plus en accord avec la réalité.

On peut par exemple remplacer les constantes positives dans (2.1) par des fonctions continues afin de modéliser des changements environnementaux, comme la succession des saisons ou encore des périodes de sécheresse. On pourrait aussi ajouter des termes de migration au système.

Une autre piste serait d'ajouter d'autres espèces, ce qui pourrait introduire une compétition entre deux espèces de prédateurs pour une même proie ou bien permettrait de modéliser la prolifération des espèces végétales qui servent de nourriture aux proies afin de représenter une chaîne alimentaire plus complexe.

Enfin, afin de rendre les simulations plus réalistes, il pourrait être avantageux de faire des mesures dans un milieu naturel afin d'obtenir une estimation de la valeur que l'on pourrait assigner aux différents coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma$ et ν .

Annexe 1

Expression du critère de Jury à l'équilibre (x^*, y^*)

Comme mentionné à la fin de la section 2.2, on peut appliquer le critère de Jury à la matrice J_2 dans 2.11. Afin de faciliter le calcul, on pose les notations suivantes :

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 + \alpha - \beta y^* - 2\gamma x^* = 1 - \alpha + \beta y^* \\a_2 &= -\beta x^* \\a_3 &= \sigma y^* \\a_4 &= 1 - \rho + \sigma x^* + 2\nu y^*\end{aligned}$$

De sorte qu'on a l'égalité suivante :

$$J_2(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

Alors le polynôme caractéristique de $J_2(x^*, y^*)$ a pour expression :

$$\begin{aligned}\chi(X) &= (X - a_1)(X - a_4) - a_2 a_3 \\&= X^2 - (a_1 + a_4)X + a_1 a_4 - a_2 a_3\end{aligned}$$

On peut noter :

$$\begin{aligned}b_1 &= -(a_1 + a_4) \\b_2 &= a_1 a_4 - a_2 a_3\end{aligned}$$

De sorte que $\chi(X) = X^2 + b_1 X + b_2$.

Alors les trois conditions du critère de Jury pour les polynômes d'ordre 2 s'écrivent :

$$b_2 + b_1 + 1 > 0 \tag{5.1}$$

$$b_2 - b_1 + 1 > 0 \tag{5.2}$$

$$|b_2| - 1 < 0 \tag{5.3}$$

Bibliographie

- [1] F. Brauer and C. Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer New York, 2012.
- [2] T. Chevet, S. Font, M.-A. Lefebvre, V. Letort-Le Chevalier, H. Lhachemi, C. Maniu, G. Sandou, and C. Vlad. *Modélisation : Représentations et analyse des modèles*. Polycopié CentraleSupélec, 4ème édition, 2022.
- [3] Qamar Din. Complexity and chaos control in a discrete-time prey-predator model. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Volume 49(page 113-134), 2017.
- [4] C. Ji, D. Jiang, and N. Shi. Analysis of a predator-prey model with modified leslie-gower and holling-type ii schemes with stochastic perturbation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 359, Issue 2(page 482-498), 2009.
- [5] Cyrille Rossant. Plotting the bifurcation diagram of a chaotic dynamical system. <<https://ipython-books.github.io/121-plotting-the-bifurcation-diagram-of-a-chaotic-dynamical-system/>>. [Online; accessed 12-January-2023].