



Übungen zur Vorlesung Computergestütztes Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 10

Lernziel dieses Übungsblattes

- (Pseudo-)zufallszahlengeneratoren: Implementation, grundlegende Eigenschaften sowie Qualität der erzeugten Zufallszahlen.
- Einfache Monte-Carlo-Verfahren.

Aufgabe 1 Zufallszahlen

Ziel dieser Aufgabe ist es Pseudozufallszahlengeneratoren (PZG) selbst zu implementieren, Tests im Bezug auf ihre Zufälligkeit durchzuführen, und sie anschließend für einige Berechnungen einzusetzen.

- (a) Implementieren Sie einen linearen Kongruenzgenerator,

$$y_i = (a y_{i-1} + b) \bmod m .$$

- (b) Implementieren Sie den Schieberegister-Zufallsgenerator R250. Benutzen Sie den bereits programmierten Kongruenzgenerator um den dafür benötigten Satz Zufallszahlen zu erzeugen.
- (c) Kombinieren Sie die zwei Zufallszahlengeneratoren, indem Sie den ersten benutzen, um eine Initialisierungszahl (seed) für den zweiten zu bestimmen, um dann mit diesem eine Pseudozufallszahl zu generieren.
- (d) Berechnen Sie für die verschiedenen PZG die Paar- und Tripletkorrelationsfunktionen und stellen Sie diese grafisch dar.
- (e) Berechnen Sie mit den verschiedenen PZG ganzzahlige Zufallszahlen im Intervall $[0 : 99]$. Erzeugen Sie jeweils 1 000 000 Zufallszahlen und zählen Sie wie häufig die einzelnen Werte $0, 1, 2, \dots, 99$ erzeugt werden. Stellen Sie diese Verteilung als Histogramm grafisch dar. Berechnen Sie die Shannon Entropie dieser Verteilung,

$$S_{Shannon} = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \ln p(x_i) .$$

$p(x_i)$ ist dabei die Wahrscheinlichkeitsfunktion für jeden der hundert möglichen Werte von x (dabei ist $\int p(x) = 1$). Sie brauchen also das bereits erzeugte Histogramm lediglich zu normieren.

- (f) Schreiben Sie nun ein Programm, das mittels einer Monte-Carlo Methode, für die Sie die selbst implementierten PZG benutzen, das Volumen einer d -dimensionalen Kugel bestimmt. d verlaufe dafür im Intervall von $[1 : 15]$.

(g) Benutzen Sie die Ergebnisse für $d = 2$ und $d = 3$ um die Kreiszahl π zu bestimmen.

Selbsttest

- Wieso handelt es sich um die erzeugten “Zufallszahlen” um keine ‘echten’ Zufallszahlen?
- Was macht einen guten Zufallszahlengenerator aus?
- Welche Tests muss man durchführen, um festzustellen, ob ein PZG ‘gut’ ist?
- Was ist die Grundidee von Monte-Carlo-Verfahren?
- Was kann passieren, wenn man in einer Monte-Carlo-Rechnung einen ‘schlechten’ PZG einsetzt?
- Was kann man tun, um sich zu vergewissern, dass die Ergebnisse einer Monte-Carlo-Rechnung OK sind?