Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. M. Müller
Priv.-Doz. Dr. S.R. Manmana
SoSe 2018

Übungen zur Vorlesung
Computergestütztes Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 7

Lernziel dieses Übungsblattes

- Struktur der Herangehensweise bei der numerischen Behandlung eines physikalischen Problems trainieren.
- Finite-Differenzen-Verfahren für zeitunabhängige partielle Differentialgleichungen.

Aufgabe 1 ** Magnus-Effekt (Optional)*

Rotierende Körper erfahren in einem Luftstrom eine Kraft senkrecht zur Strömungsrichtung. Dieses Phänomen wird Magnus-Effekt genannt und spielt eine große Rolle in Kernbereichen unseres Lebens, wie zum Beispiel dem Fussball. Auf einen fliegenden und rotierenden Fussball wirken die Schwerkraft, die Luftreibung und die Magnuskraft

$$\mathbf{F} = -m_{\mathrm{B}} g \hat{\mathbf{e}}_z - 1.1 \cdot 10^{-2} \left[\frac{kg}{m}\right] |\mathbf{v}|\mathbf{v} + 1.35 \cdot 10^{-3} \, [kg] \, \omega \times \mathbf{v} \, . \tag{1}$$

Dabei ist $\hat{\mathrm{e}}_z$ der Einheitsvektor in z-Richtung (senkrecht zum Boden), ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Eigendrehung des Balls, $g = 9.81 \frac{kg\,m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung. Die Masse des Fussballs ist $m = 420\,g$.

Wir vereinfachen das Modell durch die Annahme, dass die Rotationsgeschwindigkeit des Balls sich während des Flugs nicht verändert.

Nehmen Sie den auf StudIP veröffentlichten Code zum Problem und verdeutlichen Sie sich folgende Aspekte, um Probleme dieser Art schrittweise in ein Programm umzusetzen.

a) Verdeutlichen Sie sich, wie die Differentialgleichung, die sie in dieser Aufgabe lösen müssen, aussieht. Schauen Sie dazu z.B. in Ihren Aufzeichnungen zur Vorlesung nach. Welche Daten müssen vom Programm eingelesen und ausgegeben werden?

b) Überlegen Sie sich zunächst auf dem Papier, welche Variablen Sie benötigen werden und wie Sie diese organisieren möchten. Vergleichen Sie mit dem Vorgehen beim Code aus der Vorlesung

c) Überlegen Sie sich eine Strategie, wie sie eine möglichst übersichtlich benutzbare Funktion F für die Kräfte, die auf den Ball wirken, aufstellen können und vergleichen auch hier mit dem Code aus der Vorlesung.

Bei einem Eckstoß soll nun der Ball genau auf einem der Eckpunkte liegen und mit einem Fusstritt über eine entsprechend gekrümmte Flugbahn direkt ins Tor geschossen werden. Da das Problem in unserem Modell dreidimensional ist, gibt es streng genommen 6 Parameter, die Komponenten in den drei Raumrichtungen der Bewegung und der Eigendrehung des Balls. Sie können zunächst annehmen, dass der Ball nur um die Achse senkrecht zum Boden rotiert und so die Anzahl der Parameter auf 4 reduzieren (Vektorkomponenten der Startgeschwindigkeit und der Drehgeschwindigkeit um die z-Achse).

Bestimmen Sie durch Ausprobieren einen Satz Startwerte, für die der Ball mittels einer bananenförmigen Flugbahn ins Tor fliegt. Wählen Sie einen beliebigen regelkonformen Platz, die Torhöhe ist $2.44\,m$. Der Radius r des Fussballs sei $11\,cm$.

Aufgabe 2 *Elektrostatik*

Ziel dieser Aufgabe ist es, das elektrische Feld zwischen zwei kreisförmigen metallischen Elektroden zu bestimmen, an die unterschiedliche Spannungen angelegt sind und die in einer geerdeten metallischen Box liegen ($V_g = 0$, s. Abbildung).

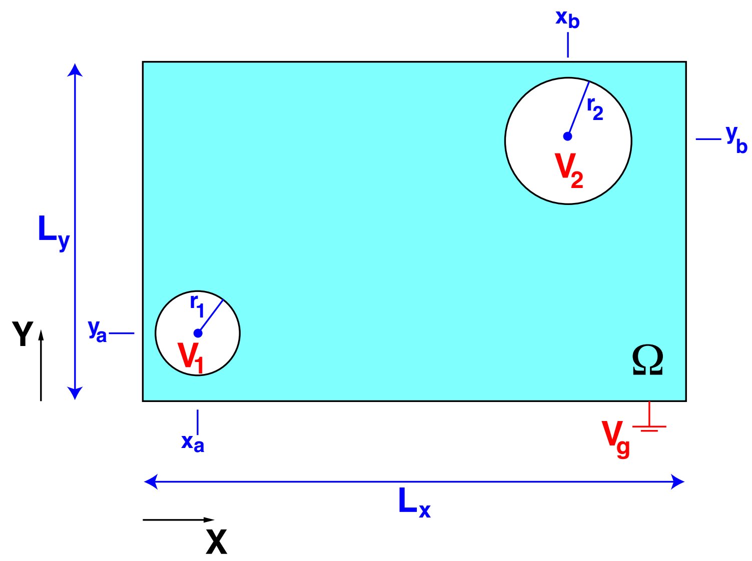

Abbildung 1: Geometrie des Problems.

Das statische elektrische Potential $\phi(\vec{x})$ im türkisfarbenen Gebiet Ω (Ränder ausgenommen) genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = 0, \tag{2}$$

die auch Laplace-Gleichung genannt wird. An den Rändern $\partial\Omega$ der Box und der Elektroden ist $\phi(\vec{x})$ gegeben durch V_g, V_1 und V_2. Das elektrische Feld erhält man über $\vec{E}(\vec{x}) = \nabla\phi(\vec{x})$ und soll auf einem diskreten Gitter ausgerechnet werden; dazu wird die Differentialgleichung wie in der Vorlesung besprochen mittels der Methode der finiten Differenzen 2. Ordnung zu einem linearen Gleichungssystem der Art $\mathbf{A}\underline{\phi} = \underline{b}$ umgeformt, dessen Lösung das elektrische Potential $\phi_{i,j}$ auf den Gitterplätzen und damit das elektrische Feld in der Box bestimmt.

In dieser Aufgabe soll der Ansatz nach Jakobi umgesetzt werden. Das Verfahren ist iterativ, d.h. ausgehend von einer Lösung $\phi_{i,j}^{(n)}$ im Iterationsschritt n wird eine verbesserte Lösung des Systems $\phi_{i,j}^{(n+1)}$ im nächsten Iterationsschritt $n+1$ berechnet. Als Abbruchkriterium wird die mittlere quadratische Änderung der Lösung berechnet

$$\mathrm{MSD} = \frac{1}{N_x \times N_y} \sum_{i,j=0}^{i=N_x,\, j=N_y} \left(\phi_{i,j}^{(n+1)} - \phi_{i,j}^{(n)} \right)^2 , \tag{3}$$

wobei N_x und N_y jeweils die Anzahl der Gitterpunkte in x- bzw. y-Richtung ist. Die Iteration wird abgebrochen, sobald $\mathrm{MSD} < \varepsilon$, mit ε der gewünschten Genauigkeit, oder falls die vorgegebene maximale Anzahl an Iterationen erreicht ist.

Wir wollen folgende Parameter für das System behandeln: $L_x = 1.6\mathrm{m}$, $L_y = 1\mathrm{m}$, $V_g = 0\mathrm{V}$, $V_1 = -1\mathrm{V}$, $V_2 = 1\mathrm{V}$; die Positionen und Radien der Elektroden sind: $x_a = 0.4\mathrm{m}$, $y_a = 0.6\mathrm{m}$, $r_1 = 0.2\mathrm{m}$, $x_b = 1.1\mathrm{m}$, $y_b = 0.4\mathrm{m}$ und $r_2 = 0.3\mathrm{m}$. Wir wählen eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-3}$.

- Führen Sie Simulationen für folgende Gittergrößen durch: $N_x \times N_y = 31 \times 21$, $N_x \times N_y = 61 \times 41$, $N_x \times N_y = 121 \times 81$ und $N_x \times N_y = 241 \times 161$. Plotten Sie jeweils das sich ergebende elektrische Potential. Plotten Sie die Anzahl der benötigten Iterationen als Funktion von N_x. Welche Komplexität hat der Algorithmus als Funktion von N_x?
- Bestimmen Sie die Komponenten des elektrischen Feldes E_x und E_y durch Approximation der Ableitung durch finite Differenzen in der Mitte zwischen den Gitterpunkten und plotten Sie das Ergebnis. Welche Energie ist im elektrischen Feld enthalten?

Selbsttest

- Womit fängt man am besten an, wenn man ein physikalisches Problem numerisch simulieren möchte?
- Welche Elemente kennen Sie, um dem Programm eine logische (und nachvollziehbare) Struktur zu geben?
- Was versteht man unter *Finite-Differenzen-Verfahren*?
- Welche numerischen Verfahren kennen Sie, um lineare Gleichungssysteme zu lösen?
- Worauf muss man achten, damit eine numerische Rechnung nicht zu zeitintensiv wird?