Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. M. Müller
Priv.-Doz. Dr. S.R. Manmana
SoSe 2018

Übungen zur Vorlesung
Computergestütztes Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 5

Lernziele dieses Übungsblattes

- Velocity-Verlet Algorithmus, auch mit adaptivem Zeitschritt.
- Numerische Lösung von Zentralkraftproblemen, Dreikörperproblem.
- Stabile Trajektorien im Zentralkraftfeld.

Aufgabe 1 *Kommandozeilenbefehle*

Auf den vorherigen Zetteln haben Sie schon einige übliche und wichtige Kommandozeilenbefehle kennengelernt. Führen Sie nun folgende Schritte durch:

1. Erstellen Sie einen Ordner,
2. Gehen Sie in diesen und erstellen Sie eine leere Datei mit *touch*.
3. Beschreiben Sie die Datei mit dem Inhalt einer anderen (*cat* und $>$). Bleiben Sie dabei in dem Verzeichnis!
4. Benennen Sie die Datei mithilfe von *mv* um. (Mit *cp* lässt sich die Datei kopieren.)
5. Gehen Sie einen Ordner höher und verschieben Sie den erstellten Ordner in ein anderes Verzeichnis.
6. Gehen Sie zuletzt ins *home*-Verzeichnis und erstellen Sie mit *ln* einen symbolischen Link zum erstellten Ordner.

Hinweise:
i) Durch *einfaches* Löschen eines symbolischen Links mit *rm* wird nicht die referenzierte Datei oder Ordner gelöscht.
ii) Informationen zu den einzelnen Befehlen lassen sich u.a. in den Manpages finden.

Aufgabe 2 *Mondlandung*

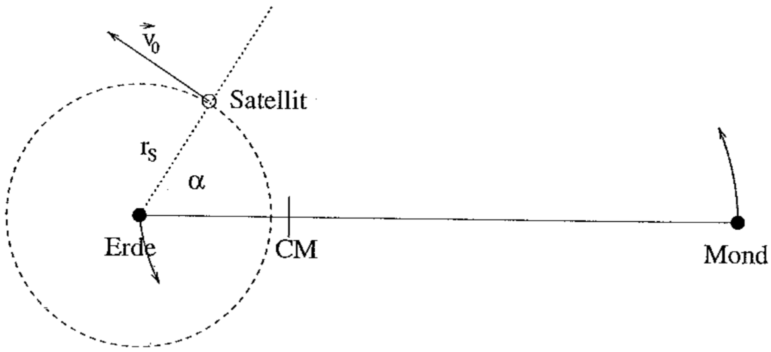
Ein Satellit nähert sich dem Ende seiner Lebensdauer. Da eine Radionuklidbatterie eingebaut ist, soll der Satellit durch eine Kollision mit dem Mond "entsorgt" werden. Da der Massenunterschied so gross ist, vernachlässigen wir im Folgenden den Effekt des Satelliten auf die Trajektorien von Erde und Mond. Wir gehen daher davon aus, dass Erde und Mond jeweils auf Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt laufen, der der Koordinatenursprung ist. Ihre Bahnen in der Ebene sind also gegeben durch

$$\mathbf{r}_{\text{Mond}} = R_M \left(\cos(\omega t), \sin(\omega t)\right) \tag{1}$$

und

$$\mathbf{r}_{\text{Erde}} = R_E \left(\cos(\omega t), \sin(\omega t)\right) \tag{2}$$

und sollen nicht aus der DGL berechnet werden. Der Satellit startet aus einer Parkbahn um die Erde mit Radius r_s zur Zeit $t = 0$ beim Winkel α durch Feuern der Triebwerke. Wir nähern diesen Vorgang an, indem wir sagen, dass der Satellit instantan eine zusätzliche tangentiale Geschwindigkeitskomponente v_0 erhält.



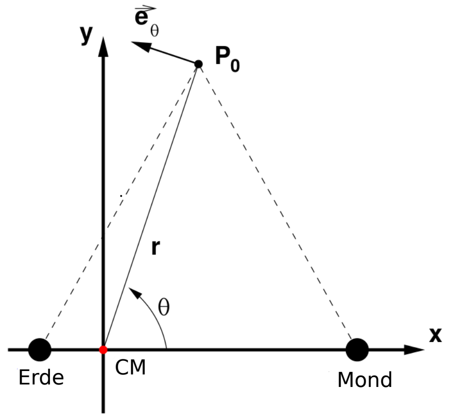
Die Längeneinheit ist $1\,EU(\text{earthunit}) = \text{Erdradius}\ \ (6400\text{km})$, die Zeiteinheit ist $1\,h = 1\,\text{Stunde}$. $GM_{\text{Erde}} = 20\,\frac{(EU)^3}{h^2}$. Die Parkbahn hat einen Radius $r_s = 1.06\,EU$, das Massenverhältnis $M_{\text{Erde}}/M_{\text{Mond}} = 81.3$. Die Umlaufzeit des Mondes beträgt $27.322 \cdot 24$h. Alles Weitere kann aus den angegebenen Informationen abgeleitet werden.

Benutzen Sie den Velocity-Verlet-Algorithmus zur Integration der Bewegungsgleichungen und stellen Sie sicher, dass die von Ihnen berechneten Trajektorien nicht mit einem zu großen Schritt berechnet wurden, indem Sie die Rechnung mit einem halb so großen Zeitschritt wiederholen und sich vergewissern, dass das selbe Ergebnis herauskommt.

a) Experimentieren Sie mit Satellitenbahnen. Finden Sie durch Probieren Anfangsbedingungen (α, v_0), so dass der Mond getroffen wird, d.h. dass der Satellit näher als 3500km an sein Zentrum kommt. Erstellen Sie ein Bahnbild mittels gnuplot. Überprüfen Sie, ob der Algorithmus die Zeitumkehrinvarianz erhält.

   Als zusätzliche Aufgabe: Finden Sie Anfangsbedingungen, die erst nach einer möglichst langen Zeit zum Absturz auf dem Mond führen. Speziell hier gilt die Notwendigkeit der Verifikation durch Variation des Integrationschrittes. Vergleichen Sie Ihre Flugbahnen mit denen Ihrer Kommilitonen.

b) Da in Zukunft wieder bemannte Mondmissionen geplant werden könnten, möchte man eine radioaktive Belastung des Erdtrabanten vermeiden. Daher wird als Alternative zum Absturz vorgeschlagen, den Satelliten im Lagrangepunkt L_4 (P_0 in der Skizze) des Systems Erde-Mond zu parken, um ihn dort langfristig zu entsorgen.



Bestimmen Sie mittels der Skizze die Position und Geschwindigkeit des Lagrange-Punktes P_0, wobei der Mond, die Erde und der Lagrange-Punkt ein gleichseitiges Dreieck bilden; die Winkelgeschwindigkeit des Systems Erde-Mond ist wegen der viel größeren Masse der Erde in guter Näherung die des Mondes. Platzieren Sie den Satelliten auf diesen Punkt. Führen Sie einige Simulationen (auch mit leicht veränderten Anfangswerten) aus und prüfen Sie, ob ein Parken auf diesem Lagrangepunkt sinnvoll ist. Stellen Sie dazu die Trajektorie des Satelliten relativ zum Lagrangepunkt dar.

c) Erweitern Sie den Integrator so, dass der Zeitschritt nicht konstant ist, sondern adaptiv gewählt wird.

Selbsttest

- Wie erhält man die Lösung zum nächsten Zeitschritt bei Runge-Kutta 2. Ordnung (RK2), wie beim Velocity-Verlet-Algorithmus (VV)?
- Wann empfiehlt es sich, den VV Algorithmus RK2 vorzuziehen?
- Wie geht man beim adaptieren des Zeitschritts vor?