



UNIVERZA
V LJUBLJANI

FMF

Fakulteta za matematiko
in fiziko

Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

Modelska analiza, vaja 1

Avtor: Urban Pečoler
Vpisna številka: 28242019

Oktober 2024

Kazalo

1	Naloga	1
2	Brezdimenzijska oblika	1
3	Radar pri semaforju	3
4	Višje potence absolutne vrednosti pospeška	5
5	Kvadratični člen v funkcionalu	6
6	Zaporedni semaforji	8
7	Zaključek	9

1 Naloga

Varčno vožnjo lahko definiramo s pogojem, da je pospeševanja in zaviranja čim manj. To lahko dosežemo z minimizacijo kumulativnega kvadrata pospeška.

$$\int_0^{t_0} a^2(t) dt = \min$$

Iščemo optimalni režim vožnje v situaciji, ko poskušamo razdaljo do semaforja prevoziti ravno v trenutku, ko se prižge zelena luč. Nalogo si lahko zastavimo na naslednji način. Z avtomobilom smo na razdalji L od semaforja, ki s časom t_0 menja med rdečo in zeleno lučjo. Predpostavimo, da ob času 0, ko smo z avtomobilom na razdalji L semafor ravno preklopi na rdečo luč, tako da imamo t_0 sekund časa, da pridemo mimo semaforja. Minimalizacijo integrala kvadrata pospeška rešujemo z Lagrangevimi multiplikatorji

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v, \dot{v}) = \dot{v}^2 - \lambda v \quad (1)$$

Splošno rešitev problema dobimo z Euler-Lagrangevimi enačbami (E-L enačbami)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right) = 0$$

Rešitev E-L enačb za naš \mathcal{L} je

$$\begin{aligned} \ddot{v} &= -\frac{\lambda}{2} \\ v &= \frac{\lambda}{4} t^2 + At + B \end{aligned}$$

Integracijski konstanti A in B dobimo z upoštevanjem začetnih in robnih pogojev, ki jih bomo tekom študije naloge spreminjali. Parameter λ pa dobimo iz lastnosti problema, da moramo v času t_0 prevoziti razdaljo L

$$L = \int_0^{t_0} v(t) dt \quad (2)$$

2 Brezdimenzijska oblika

Preden se lotimo določanja robnih problemov in risanja grafov, bomo definirali še brezdimenzijske količine, v katerih bomo lahko tudi vizualno predstavili rezultate. Za brezdimenzijsko časovno spremenljivko vpeljemo τ , za brezdimenzijsko hitrost ν in za brezdimenzijsko pot χ . Zveze pa so naslednje

$$\tau = \frac{t}{t_0} \quad (3)$$

$$\nu = \frac{v}{v_0} \quad (4)$$

$$\chi = \frac{l}{v_0 t_0} = \frac{l}{L} \quad (5)$$

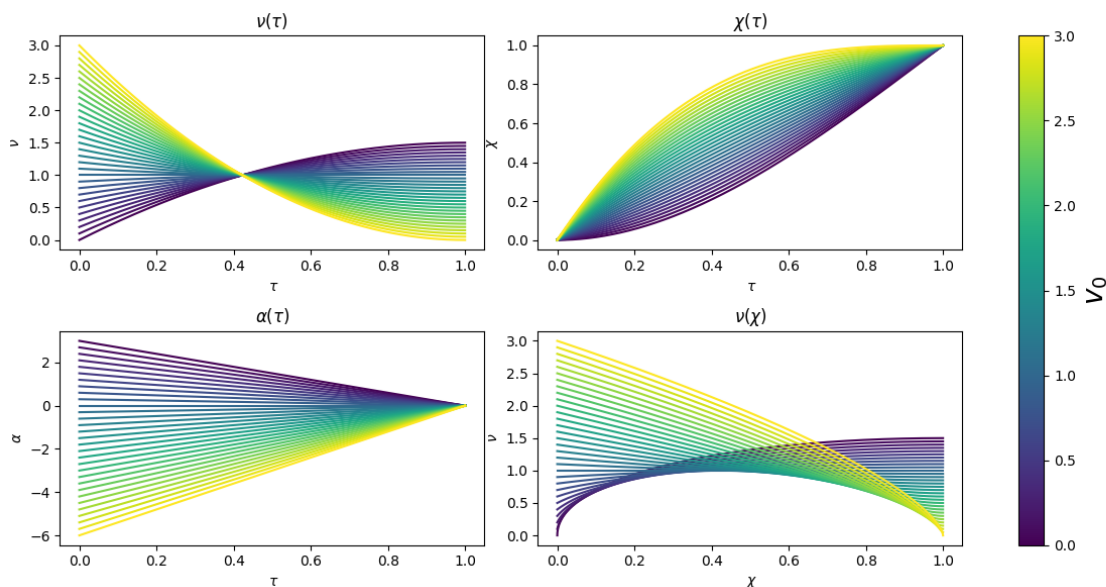
Najprej bomo v naši analizi pogledali obnašanje avtomobila, če lahko mimo semaforja pelje z poljubno hitrostjo, ampak brez pospeška. Za določitev konstant upoštevamo (2) in robna pogoja

$$\begin{aligned} v(0) &= v_0 \\ \dot{v}(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Ob upoštevanju robnih pogojev dobimo enačbo hitrosti, če pa le-to odvajamo oz. integriramo, pa lahko izračunamo še pospešek in pot v odvisnosti od časa.

$$\begin{aligned}\nu(t) &= \nu_0 + \frac{3}{2}(1 - \nu_0)(2\tau - \tau^2) \\ \alpha(t) &= 3(1 - \nu_0)(1 - \tau) \\ \chi(t) &= \nu_0\tau + \frac{1}{2}(1 - \nu_0)(3\tau^2 - \tau^3)\end{aligned}$$

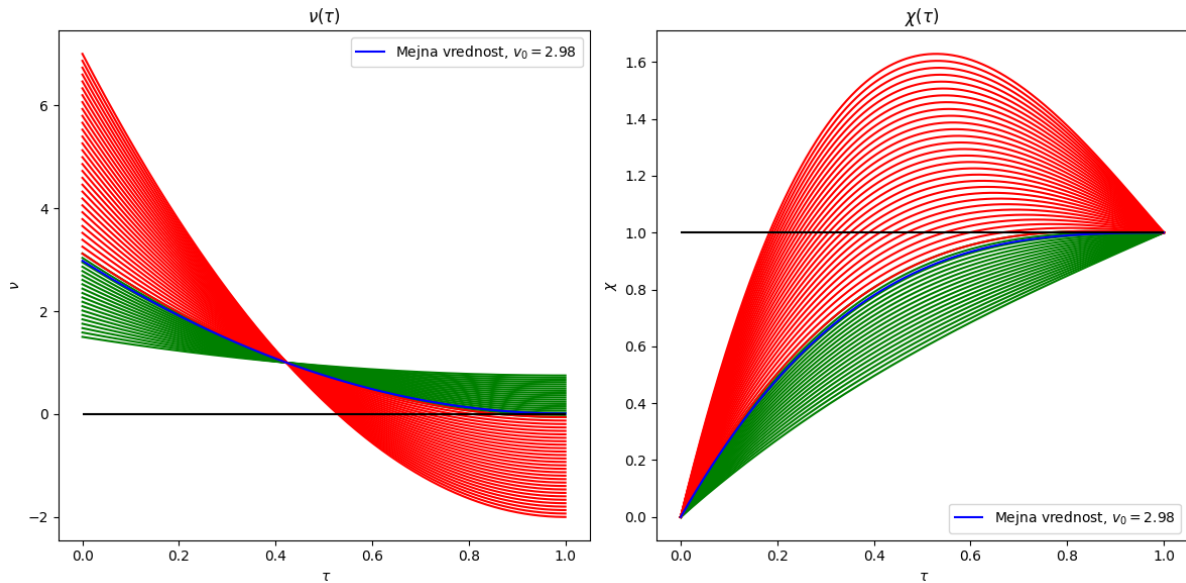
Ob spreminjanju začetne hitrosti, dobimo družino funkcij, predstavljeno na Sliki 1.



Slika 1: [LEVO ZGORAJ] Graf brezdimenzijske hitrosti v odvisnosti od brezdimenzijskega časa
 [DESNO ZGORAJ] Graf brezdimenzijske poti v odvisnosti od brezdimenzijskega časa
 [LEVO SPODAJ] Graf brezdimenzijskega pospeška v odvisnosti od brezdimenzijskega časa
 [DESNO SPODAJ] Graf brezdimenzijske hitrosti v odvisnosti od brezdimenzijske poti

Na sliki 1 so prvi trije grafi narisani iz enačb izpeljanih zgoraj, graf spodaj desno $\nu(\chi)$, pa je narisani numerično, kjer sem za vsako časovno točko prebral vrednost ν in χ ter jih narisal na nov graf, saj je bilo to veliko lažje kot izpeljevanje analitične enačbe. Pri grafu $\nu(\tau)$ je potrebno narediti še dva komentarja in sicer, vidimo, da se vse krivulje sekajo v isti točki, to pomeni, da ima avto ob času τ^* vedno enako hitrost, ne glede na začetno vrednost hitrosti. Razmišljamo lahko celo dlje in sicer, če bi zmerili hitrost avtomobila ob času τ^* ne bi znali o njem povedati nič, pa čeprav poznamo dinamiko sistema. Če pa zmerimo hitrost avtomobila ob katerem koli drugem času, pa lahko zaradi znane dinamike izračunamo začetno, končno hitrost in ostale lastnosti.

Drug komentar, ki ga je vredno omeniti pa je ta, da model ni najbolj smiseln za poljubne začetne hitrosti. Če je ν_0 prevelik, bo avtomobil zapeljal mimo semaforja z negativno hitrostjo, z drugimi besedami se bo najprej odpeljal mimo semaforja in se nato vrnil nazaj, v času ko se prižge zelena luč. To je prikazano na sliki 2.



Slika 2: Nekatere rešitve niso fizikalno smiselne, saj vključujejo negativne hitrosti. V rdečem so prikazane nesmiselne rešitve, v zelenem smiselne rešitve, modra krivulja pa prikazuje rešitev, kjer se avto pri semaforju ustavi. Levi graf prikazuje hitrost v odvisnosti od časa, desni pa pot v odvisnosti od časa

3 Radar pri semaforju

Še vedno ostajamo pri enakih privzetkih, vendar bomo model nastavili malo drugače. Vprašajmo se, kaj bi se zgodilo, če bi bil ob semaforju radar, zaradi katerega, lahko avto pelje mimo semaforja s končno hitrostjo. Robni pogoji se nam zato spremenijo v

$$\begin{aligned} v(0) &= v_0 \\ \dot{v}(0) &= v_{max} \end{aligned}$$

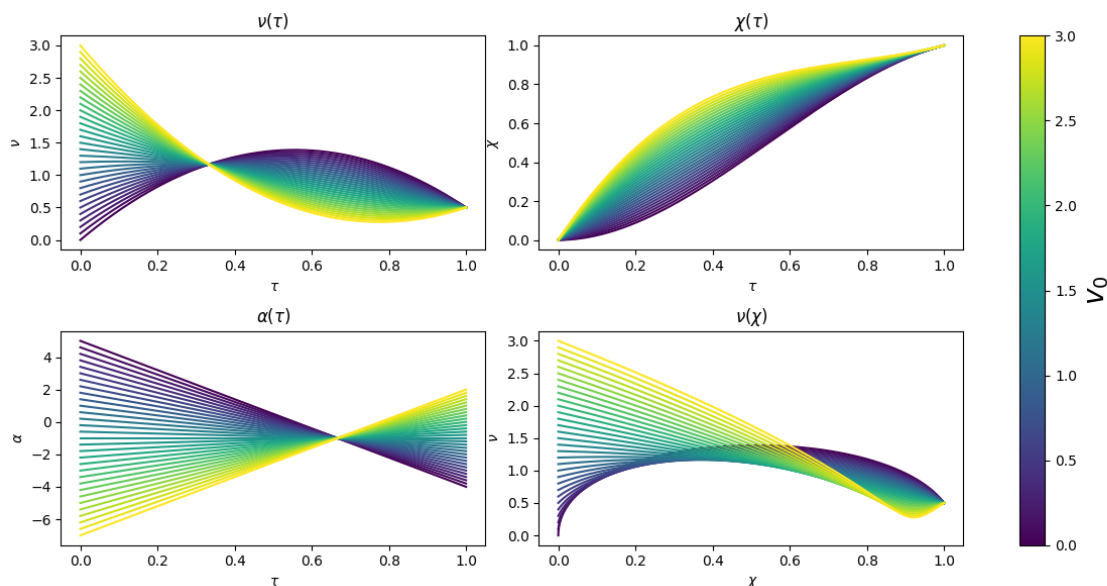
Postopek izračuna ostane enak, spremenijo se nam le vrednosti konstant skladno z robnimi pogoji.

$$B = v_0; \quad A = \frac{v_{max} - v_0}{t_0} + \frac{\lambda t_0}{4}; \quad \lambda = \frac{12}{t_0^3}(2l - v_0 t_0 - v_{max} t_0)$$

dinamične enačbe ki opišejo sistem pa so potem

$$\begin{aligned} v(\tau) &= 3(2 - v_0 - v_{max})(\tau - \tau^2) + (v_{max} - v_0)\tau + v_0 \\ \chi(\tau) &= (2 - v_0 - v_{max})\left(\frac{3}{2}\tau^2 - \tau^3\right) + \frac{1}{2}(v_{max} - v_0)\tau^2 + v_0\tau \\ \alpha(\tau) &= 3(2 - v_0 - v_{max})(1 - 2\tau) + v_{max} - v_0 \end{aligned}$$

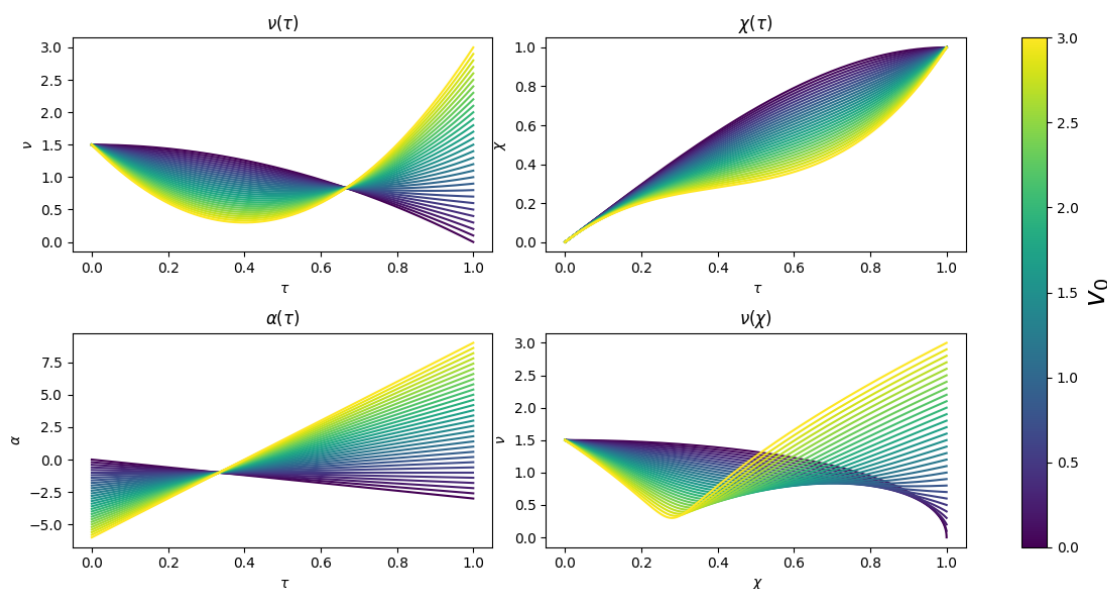
Najprej si pogledajmo grafe, kjer tako kot prej spreminjamo začetno hitrost, končna hitrost pa je $v_{max} = 0.5$. Tako kot prej sem narisal grafe hitrosti, poti ter pospeška v odvisnosti od časa in hitrosti v odvisnosti od pospeška.



Slika 3: [LEVO ZGORAJ] Graf brezdimenzijske hitrosti v odvisnosti od brezdimenzijskega časa
 [DESN0 ZGORAJ] Graf brezdimenzijske poti v odvisnosti od brezdimenzijskega časa
 [LEVO SPODAJ] Graf brezdimenzijskega pospeška v odvisnosti od brezdimenzijskega časa
 [DESN0 SPODAJ] Graf brezdimenzijske hitrosti v odvisnosti od brezdimenzijske poti

Vidimo, da imamo tudi v tem primeru čas τ^* , kjer so vse hitrosti enake, neodvisno od začetne. Prav tako je razlika tega modela s prejšnjim ta, da je ekstrem parabole nekje "na sredini" in ne na robu. Prav tako kot prej, pa je tudi ta model nesmiseln za visoke začetne hitrosti.

Pogledamo si pa lahko še primer, ko fiksiramo začetno hitrost $v_0 = 1.5$ in spreminjamo končno hitrost.



Slika 4: [LEVO ZGORAJ] Graf brezdimenzijske hitrosti v odvisnosti od brezdimenzijskega časa
 [DESN0 ZGORAJ] Graf brezdimenzijske poti v odvisnosti od brezdimenzijskega časa
 [LEVO SPODAJ] Graf brezdimenzijskega pospeška v odvisnosti od brezdimenzijskega časa
 [DESN0 SPODAJ] Graf brezdimenzijske hitrosti v odvisnosti od brezdimenzijske poti

4 Višje potence absolutne vrednosti pospeška

Naš model lahko prilagodimo tudi tako, da enačbo (1) spremenimo tako, da upoštevamo tudi višje sode potence pospeška

$$\mathcal{L} = \dot{v}^2 p - \lambda v \quad (6)$$

kjer je $p \in \mathbb{Z}^+$. Rešitev E-L enačba za nov \mathcal{L} je potem

$$v(t) = -\frac{2p-1}{\lambda} \left(A - \frac{\lambda t}{2p} \right)^{\frac{2p}{2p-1}} + B \quad (7)$$

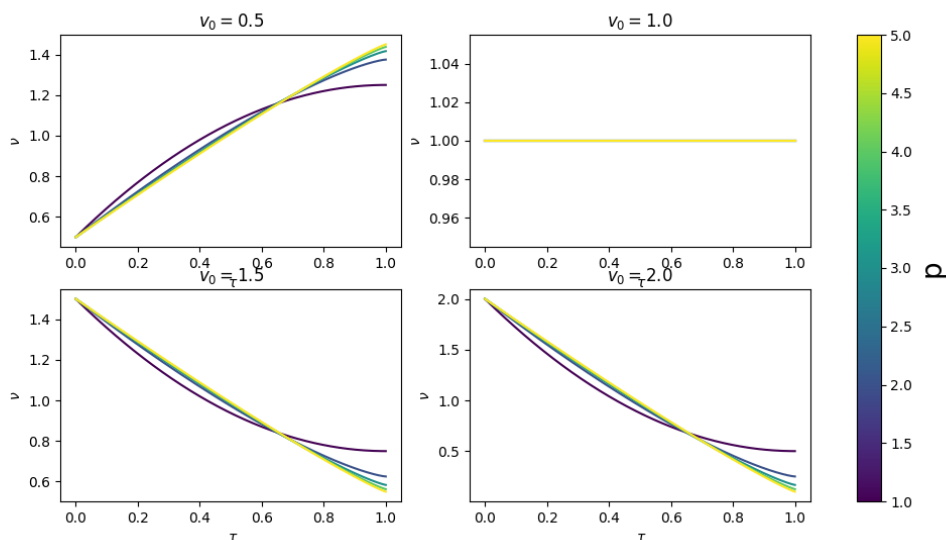
Vzamemo enake robne pogoje kot v prvem primeru, torej pospešek pri semaforju je enak 0. Vrednosti parametrov so tako:

$$A = v_0; \quad B = v_0 - \frac{2p-1}{\lambda} v_0^{\frac{2p}{2p-1}}; \quad \lambda = \left(\frac{2p}{t_0} \right)^{2p} \left[\frac{L/t_0 - v_0}{(2p-1)(1 - \frac{2p-1}{4p-1})} \right]^{2p-1}$$

S pomočjo teh vrednosti pa lahko izračunamo še hitrost v odvisnosti od časa

$$\nu(\tau) = \nu_0 + \frac{4p-1}{2p} (1 - \nu_0) \left[1 - (1 - \tau)^{\frac{2p}{2p-1}} \right] \quad (8)$$

Slika 5 prikazuje obnašanje modela za različne vrednosti p , pri različnih začetnih hitrostih, $\nu_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$.



Slika 5: Enačba (8) za različne vrednosti p , pri različnih začetnih vrednostih hitrosti ($\nu_0 = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$)

Iz grafa lahko razberemo različne zanimive stvari. Najbolj očitna je, da pri začetni hitrosti $\nu_0 = 1$, vrednost p na gibanje ne vpliva, kar je logično, saj je $1^p = 1$ za vse vrednosti p . Opazimo tudi, da če vzamemo $p = 1$, dobimo ravno enake enačbe, kot pri prvem delu analize problema. Prav tako pa je zanimivo pogledati tudi limito, ko gre p proti neskončnosti.

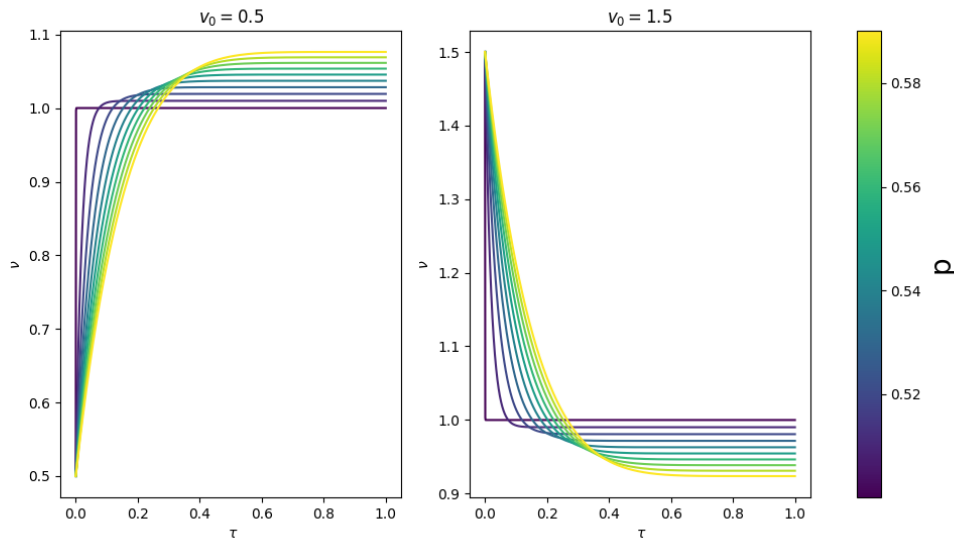
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \nu(\tau) = \nu_0 + 2(1 - \nu_0)\tau \quad (9)$$

Kot je razvidno iz enačbe in grafa, funkcija limitira k linearni, z začetno vrednostjo ν_0 in naklonom $2(1 - \nu_0)$.

Zanimivo pa bi si bilo pogledati tudi limito v drugo smer. Torej, če vzamemo, da $p \in \mathbb{R}^+$, kakšna je minimalna vrednost p in kako se tam obnašajo krivulje. Numerično sem preveril, da ta vrednost limitira k $p = 1/2$, to je enako, kot če bi reševali funkcional oblike

$$\int_0^{t_0} = \dot{v} dt = \min$$

Končni funkciji se lahko tako približamo z $\lim_{p \rightarrow 1/2} \nu_0(\tau)$



Slika 6: Konvergenca funkcije $\nu(\tau)$, ko gre $p \rightarrow 1/2$

5 Kvadratični člen v funkcionalu

Naslednja prilagoditev modela je, da upoštevamo energijske izgube zaradi sile upora na avtomobilu. To lahko storimo tako, da v Lagrangian dodamo še kvadratični člen hitrosti

$$\mathcal{L}(v, \dot{v}) = \dot{v}^2 + Cv^2 - \lambda v \quad (10)$$

E-L enačbe nam nato dajo rešitev:

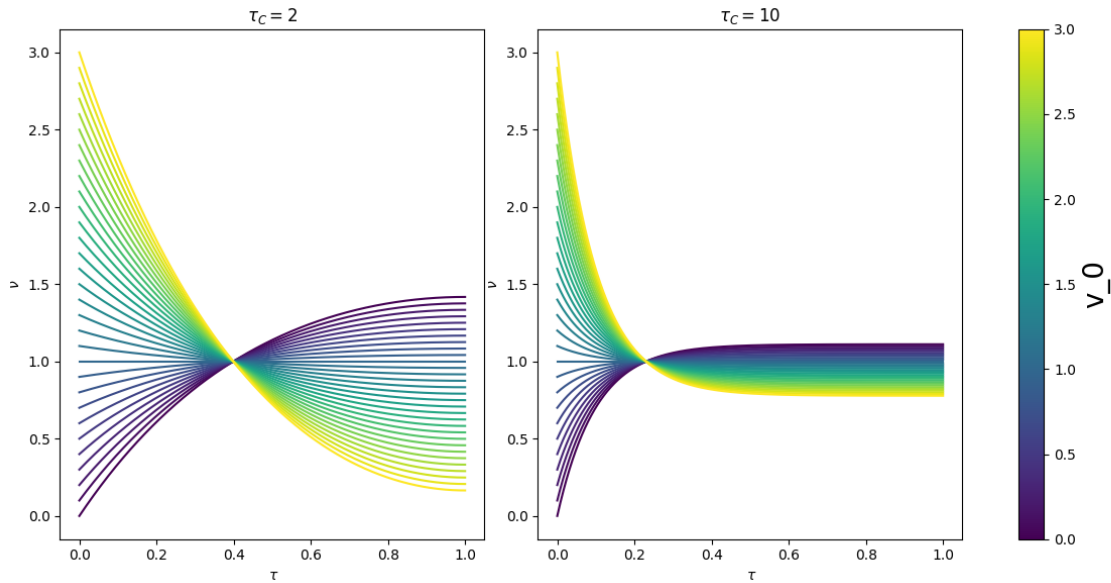
$$2Cv - \lambda - 2\ddot{v} = 0 \quad (11)$$

$$\ddot{v} - Cv = \frac{\lambda}{2} \quad (12)$$

V tem primeru pa imamo nehomogeno diferencialno enačbo 2. reda. Homogeno rešitev lahko poiščemo z nastavkom $v_{HOM} = Ae^{\sqrt{C}t} + Be^{-\sqrt{C}t}$, partikularno rešitev pa "uganemo" $v_{PART} = \lambda/(2C)$. Robni pogoji so zopet enaki kot v prvem primeru, λ pa dobimo iz enačbe (2). Ko izračunamo koeficiente in enačbo pretvorimo v brezdimenzijsko obliko, dobimo dinamiko sistema

$$\nu(\tau) = \frac{1 - \frac{\nu_0}{\tau_C} \tanh \tau_C}{1 - \frac{1}{\tau_C} \tanh \tau_C} \left(1 - \frac{\cosh(\tau_C(\tau - 1))}{\cosh \tau_C} \right) + \nu_0 \frac{\cosh(\tau_C(\tau - 1))}{\cosh \tau_C} \quad (13)$$

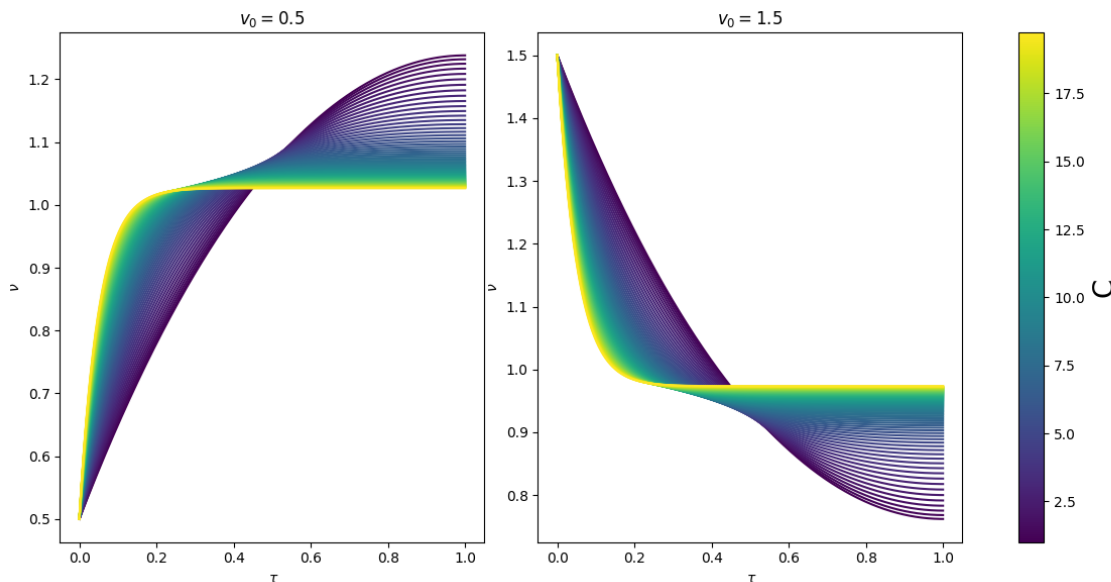
kjer sem časovno konstanto sistema označil z $\tau_C = \sqrt{C}t_0$. Ko τ_C limitira proti 0, gre naša rešitev proti rešitvi iz prvega primera (torej rešitvi brez kvadratičnega člena), ko pa τ_C limitira proti neskončnosti, pa pričakujemo, da se bo hitrost hitro ustalila na konstantno.



Slika 7: Brezdimenzijska hitrost v v odvisnosti od brezdimenzijskega časa za primer kjer imamo v funkcionalu kvadratičen člen hitrosti. Levi graf prikazuje manjši koeficient, medtem ko desni graf prikazuje krivulje z višjo vrednostjo koeficienta C v funkcionalu

Iz slike 7 je razvidno, da pri manjših vrednostih časovne konstante τ_C model res konvergira k enakim rešitvam kot v prvem primeru, večji kot je τ_C , hitreje se bo hitrost ustalila na konstanto in hitrost pri semaforju bo konvergirala k $v_z = 1$.

Narisal pa sem še grafe v obratni smeri, kjer sem fiksiral v_0 in spreminjal vrednost τ_C .



Slika 8: Caption

6 Zaporedni semaforji

Kot zadnji del naloge, pa sem pogledal še, kaj se zgodi s hitrostjo, če imamo več zaporednih semaforjev. Kot poenostavitev, so vsi semaforji na razdalji L in se prižigajo ciklično s časom t_0 , torej, ko se na semaforju, ki je na sodem mestu v verigi prižge zelena luč, se na semaforjih na lihem mestu prižge rdeča in obratno. Ta pogoj zagotovi, da lahko samo zlepi skupaj rešitve za posamezen semafor in hkrati upoštevam pogoje zveznosti in zveznosti prvih odvodov hitrosti. Če napišem zgoraj povedano še malo bolj matematično. Minimalizirati želimo funkcional

$$\mathcal{L} = v_1^2 + \lambda_1 v_1 + v_2^2 + \lambda_2 v_2 + \cdots + v_n^2 + \lambda_n v_n$$

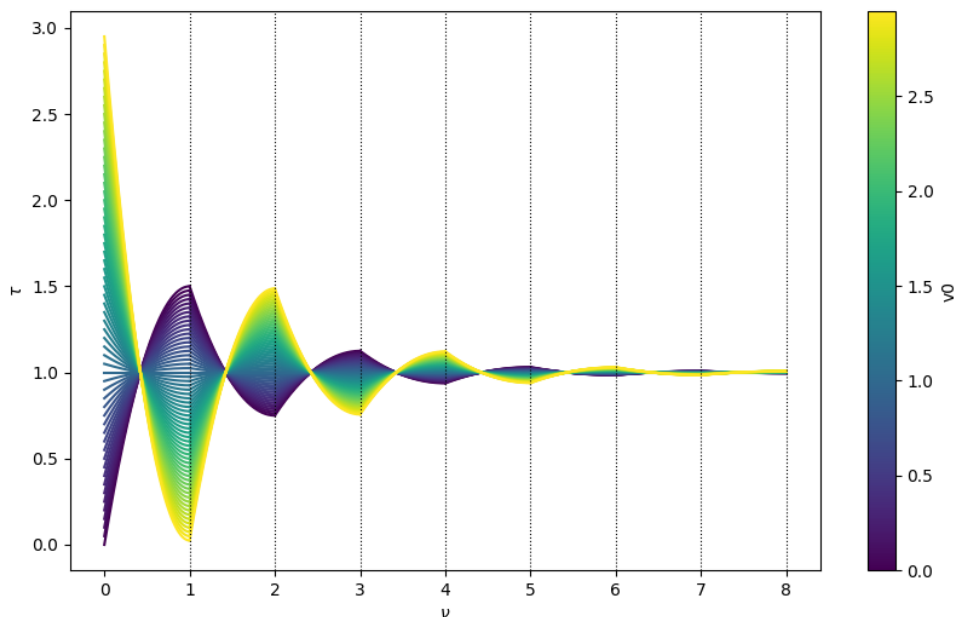
dobimo sistem enačb, ki so enake oblike kot tiste v prvem primeru

$$v_n(t) = -\frac{\lambda_n}{4}t^2 + A_nt + B$$

Robni pogoji pa so

$$\begin{aligned} v_1(0) = v_0; \quad v_2(t_0) = v_1(t_0); \quad v_3(2t_0) = v_2(2t_0); \quad \dots \quad v_n((n-1)t_0) = v_{n-1}((n-1)t_0) \\ \dot{v}_1(t_0) = \dot{v}_2(t_0); \quad \dot{v}_2(2t_0) = \dot{v}_3(2t_0); \quad \dots \quad \dot{v}_{n-1}((n-1)t_0) = \dot{v}_n((n-1)t_0) \end{aligned}$$

Narisal sem primer, ko imamo na naši poti 8 semaforjev na razdalji L



Slika 9: Zlapljen rešitev brezdimenzijske hitrosti ν skozi osem semaforje v odvisnosti od brezdimenzijskega časa τ .

Vidimo, da neodvisno od začetne hitrosti, $\nu(\tau)$ konvergira proti 1, kar je tudi smiselno, saj ko enkrat voznik ujame ritem spreminjanja luči semaforjev, bo najbolj udobna vožnja tista brez pospeškov.

7 Zaključek

Pri nalogi smo pogledali različne modele minimizacije pospeška pri primeru vožnje skozi semafor. Model smo prilagodili na radar pri semaforju, na višje potence minimizacije pospeška, na izgube zaradi sile upora in na primer zaporednih semaforjev. Grafično in računsko smo vse prilagoditve dobro predstavili. Definitivno pa tukaj še ni konec zgodbe. Če bi imel več časa bi lahko pogledal še druge prilagoditve, kot je naprimer razlika med sodimi in lihimi potencami pospeška, kaj se zgodi če je "radar" nekje na sredini in ne pri semaforju, kaj če zaporedni semaforji niso na enaki razdalji itd.