



UNIVERZA
V LJUBLJANI

FMF

Fakulteta za matematiko
in fiziko

Linearno programiranje

Modelska analiza, vaja 2

Avtor: Urban Pečoler
Vpisna številka: 28242019

Oktober 2024

Kazalo

1	Uvod	1
2	Minimizacija kalorij	1
2.1	Omejitev Radenske in soli v dieti	3
3	Minimizacija maščob	4
4	Minimizacija cene	5
5	Omejitev vnosa količine živil	6
6	Minimalizacija energije v odvisnosti od cene	7
7	Low-carb diet	8
A	Tabela živil	11

1 Uvod

Linearno programiranje (LP) je matematična metoda za določanje najboljših možnih rezultatov v modelih, ki vključujejo linearne odnose. Pri linearnih optimizacijskih problemih iščemo ekstremne vrednosti (najmanjše ali največje) oblikovne funkcije,

$$\min(\mathbf{c}^T \mathbf{x}) \quad (1)$$

pri čemer je treba upoštevati omejitve (constraints), ki so prav tako podane v linearni obliki.

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (2)$$

Enačbi (1) in (2) lahko razpišemo v obliki sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n &= \min \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{Nn}x_n &\leq b_N \end{aligned}$$

Pri tem mora veljati, da $x_i \geq 0, \forall i = 1 \dots N$.

Pri sestavljanju diet z linearnim programiranjem modeliramo količine posameznih živil, da zadostimo določenim nutricejskim zahtevam, hkrati pa minimiziramo stroške. Naj bo vektor \mathbf{x} množica količin izbranih živil. Poleg tega mora biti zadostitev prehranskim zahtevam modelirana z omejitvami, kot so na primer dnevne potrebe po maščobah, ogljikovih hidratih, proteinih, kalciju in železu.

Matrika A v (2) predstavlja vsebnost posameznih hranil v vsakem živilu, vektor \mathbf{b} pa vsebuje zgornje meje za dnevne vnose teh hranil. Dodatno lahko omejimo posamezna živila, da se ne presežejo maksimalne količine vnosa, na primer za živila z visoko vsebnostjo maščob ali soli. Pri analizi naloge sem uporabil metodo linearnega programiranja za optimizacijo prehrane s pomočjo Pythonove knjižnice `scipy.optimize.linprog`, ki omogoča reševanje problemov z več omejitvami na linearni način. Kot seznam pa sem uporabil bazo podatkov podano na spletni učilnici. Glej dodatek A.

2 Minimizacija kalorij

Cilj prve naloge je poiskati optimalno količino vsakega od živil iz seznama, tako da minimiziramo vnos kalorij in zadostimo naslednjim pogojem.

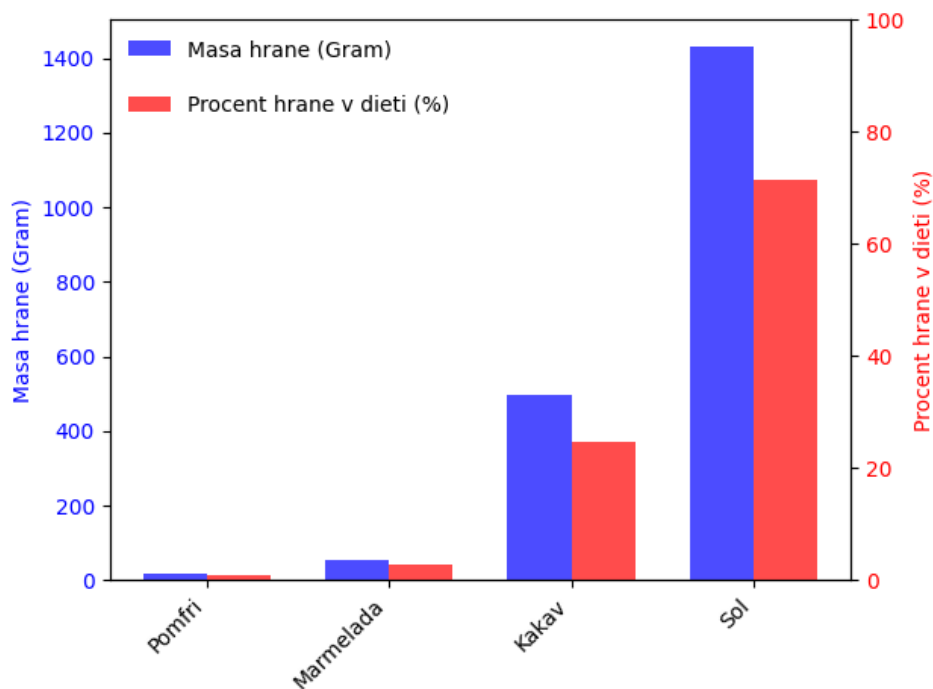
1. $m_{\text{maščobe}} \geq 70g$
2. $m_{\text{ogljikovi hidrati}} \geq 310g$
3. $m_{\text{proteini}} \geq 50g$
4. $m_{\text{kalcij}} \geq 1000g$
5. $m_{\text{železo}} \geq 18mg$
6. $m_{\text{Vitamin C}} \geq 60mg$
7. $m_{\text{kali}} \geq 3500mg$

$$8. \ m_{\text{natrij}} \geq 500\text{mg}$$

$$9. \ m_{\text{natrij}} \leq 2400\text{mg}$$

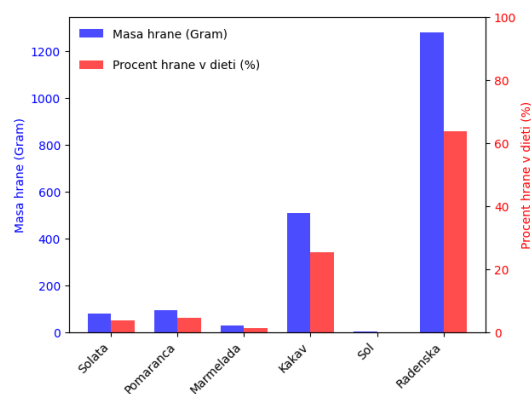
$$10. \ m_{\text{hrana}} \leq 2\text{kg}$$

Kot že razloženo v uvodu, sem te omejitve postavil v vektor **b**. Najprej sem upošteval pogoje 1-5 in 10, saj se v življenju kot lajiki najbolj oziramo na le-te. Rezultate bom pri celotni analizi predstavljal s histogramom, kjer modra barva predstavlja količino zaužite hrane in rdeča barva procent hrane v dieti.

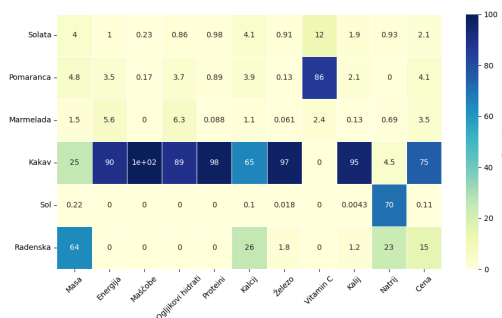


Slika 1: Izračunan vnos hranilnih vrednosti predstavljen v gramih zaužite hrane (modra barva) in procentu hrane v dieti (rdeča barva)

Iz slike 1 je razvidno, da je jedilnik popolnoma nesmiseln, saj pravi, da bi morali zaužiti 1.4 kg soli na dan. Če hočemo dobiti bolj smiselne rezultate, je potrebno upoštevati še pogoje za druge za nas lajike pogosto spregledane nutriende (pogoji 6-8).



Slika 2: Izračunan vnos hranilnih vrednosti predstavljen v gramih zaužite hrane (modra barva) in procentu hrane v dieti (rdeča barva), pri pogojih 1-10.



Slika 3: Heatmap optimalnega jedilnika, ki zadošča pogojem 1-10, kjer barva za vsako hrano predstavlja doprinos nutrienda k dieti (v procentih)

Iz slike 2 vidimo, da smo se uspešno žnebilišoli, vendar pa nam sedaj velik problem predstavlja Radenska, saj dieta pravi, da naj bi je zaužili kar 1.2 kg na dan. Zakaj je temu tako, se še bolj nazorno vidi v tabeli 1, kjer predstavim maso in energijsko vrednost vsakega živila. Na sliki 3 pa je še bolj podrobno razdelan doprinos vseh nutrientov vsake hrane k dieti. Vidimo, da je pomaranča v dieti nujno potrebna zaradi vitamina C, Radenska zaradi nizke vsebnosti kalorij in kakav, ki skoraj že sam po sebi zadosti vsem ostalim pogojem. Pri analizi sem tudi opazil, da pogoj omejitev natrija na vsaj 500 mg (pogoj 8), sploh ni potrebna. Ne glede na upoštevanje pogoja dobimo enake rezultate.

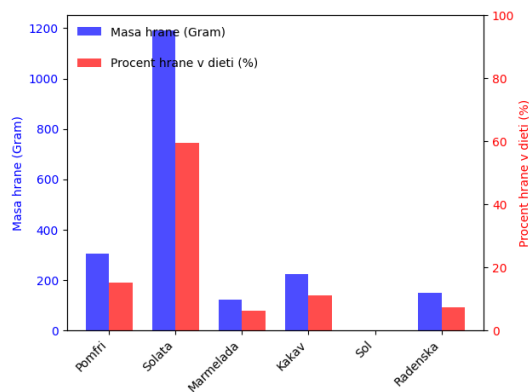
Živilo	Energija [kcal]	Masa [g]	Cena (EUR)
Solata	13.54	79.67	0.09
Pomaranca	45.41	96.62	0.17
Marmelada	72.85	29.73	0.15
Kakav	1165.47	508.94	3.16
Sol	0.00	4.36	0.00
Radenska	0.00	1280.67	0.64
Skupaj	1306.65	2000	3.72

Tabela 1: Tabela živil ter njihove energijske vrednosti, mase in cene.

Tabela 1 prikazuje energijski vrednost, maso in ceno za vsako živilo v dieti. Iz tega se še bolj vidi, da smo uspešno minimizirali kalorije na le 1306 kcal. Vidimo tudi, zakaj "moramošpiti toliko radenske, saj je brez kalorij.

2.1 Omejitev Radenske in soli v dieti

Po podatkih the National Health Service (NHS), je največja priporočena količina soli dnevno za odraslega človeka 6g [2]. Radensko pa sem omejil na 150g, saj nisem našel nobenih podatkov glede priporočene dnevne doze. S tema dvema dodatnima pogojema, pa naš jedilnik kar na enkrat izgleda veliko bolj smiseln, kljub preprostosti modela, ki ga uporabljamo.



Slika 4: Izračunan vnos hranilnih vrednosti predstavljen v gramih zaužite hrane (modra barva) in procentu hrane v dieti (rdeča barva), pri pogojih 1-10.



Slika 5: Heatmap optimalnega jedilnika, ki zadošča pogojem 1-10 in omejitvam radenske ter soli, kjer barva za vsako hrano predstavlja doprinos nutrienta k dieti (v procentih)

Živilo	Energija [kcal]	Masa [g]	Cena (EUR)
Pomfri	285.70	307.20	0.31
Solata	202.49	1191.12	1.31
Marmelada	304.41	124.25	0.62
Kakav	514.06	224.48	1.39
Sol	0.00	2.95	0.00
Radenska	0.00	150.00	0.08
Skupaj	1306.65	2000	3.70

Tabela 2: Tabela živil ter njihove energijske vrednosti, mase in cene.

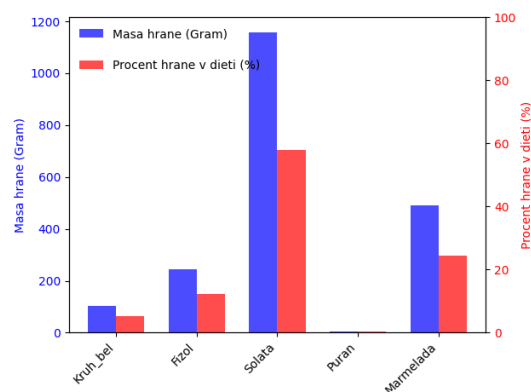
Na slikah 4 in 5 ter v tabeli vidimo, da vsebnost radenske zamenja predvsem solata, kar pa ima vpliv tudi na to, da kakav ni več glavni doprinašalec nutritivskih vrednosti. To se sedaj razdeli med kakav in solato. Še vedno smo uspešno minimalizirali kalorije na 1306 kcal. Kar pa je zelo zanimivo pa je to, da cena ostane približno enaka, kljub temu, da imamo sedaj druga živila v dieti.

3 Minimizacija maščob

V prejšnjem poglavju smo minimizirali energijsko vrednost. Rezultat se je v vseh primerih gibal okrog 1200 kcal dnevnega vnosa, kar pa je za odraslega človeka čisto premalo. Zato je morda bolj smiselno, da minimiziramo vnos maščobe. V modelu se bo tako pogoj 1 spremenil iz $m_{\text{maščobe}} \geq 70g$ v

$$1. E_{\text{kcal}} \geq 2000 \text{kcal}$$

Vse ostalo pa ostane enako. Prav tako, ne bom več upošteval omejitve vnosa soli in Radenske.



Slika 6: Izračunan vnos hranilnih vrednosti predstavljen v gramih zaužite hrane (modra barva) in procentu hrane v dieti (rdeča barva), pri pogojih 1-10.



Slika 7: Heatmap optimalnega jedilnika, ki zadošča pogojem 1-10, kjer barva za vsako hrano predstavlja doprinos nutrienda k dieti (v procentih)

Vidimo, da se hrana v dieti povsem spremeni. Od prvega primera ostane le solata, ki ima visoko vsebnost Kalcija, Železa in vitamina C. K bolj smiselni dieti pa pripomore tudi puran, kruh z marmelado in fizol. Prav tako je očitna tudi razlika v energijski vrednosti diet, le-ta je v tem primeru 2000 kcal.

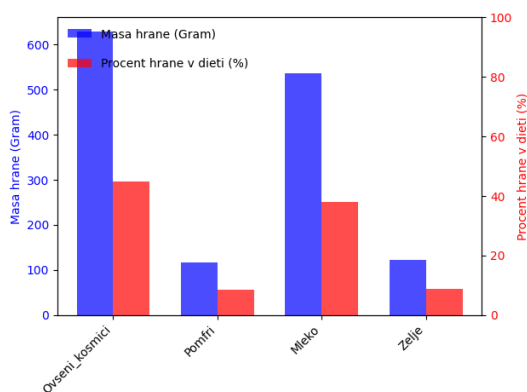
Živilo	Energija [kcal]	Maščobe [g]	Masa [g]	Cena (EUR)
Kruh bel	271.92	3.72	102.23	0.17
Fizol	323.71	1.32	245.24	0.86
Solata	196.68	2.31	1156.93	1.27
Puran	5.79	0.08	5.03	0.05
Marmelada	1201.90	0.00	490.57	2.45
Skupaj	1999.99	7.43	2000	4.81

Tabela 3: Tabela živil ter njihove energijske vrednosti, vsebnosti maščob, mase in cene.

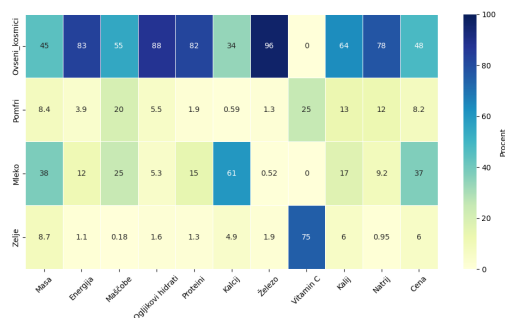
4 Minimizacija cene

Pri sestavljanju diete oz. pri nakupovanju hrane nasploh je zelo pomembna tudi cena. Zato sem naredil še izračun, kjer sem minimiziral le-to. V tabeli, ki je bila podana na spletni učilnici so cene za leto 2018, tako da rezultati na žalost niso več najbolj realistični.

Ker tokrat minimiziram ceno imam 11 pogojev, torej pogoji 1-10 opisani v poglavju 2 in pogoj 1 opisan v poglavju 3.



Slika 8: Izračunan vnos hranilnih vrednosti predstavljen v gramih zaužite hrane (modra barva) in procentu hrane v dieti (rdeča barva), pri pogojih 1-10.



Slika 9: Heatmap najcenejšega jedilnika, ki zadošča pogojem 1-10, kjer barva za vsako hrano predstavlja doprinos nutienta k dieti (v procentih)

Najcenejši jedilnik je sestavljen predvsem iz ovsenih kosmičev in mleka. Očitno je to najcenejša kombinacija z potrebnimi hranilnimi vrednostmi.

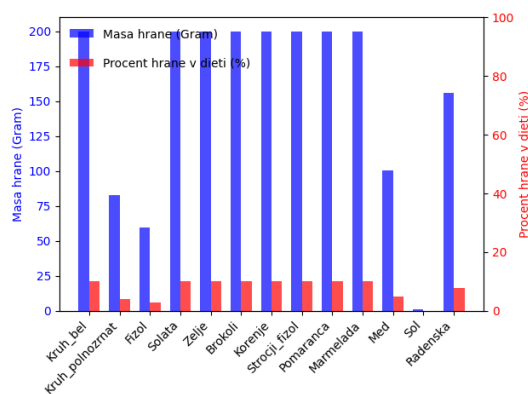
Živilo	Energija [kcal]	Masa [g]	Cena (EUR)
Ovseni kosmici	2320.59	628.89	0.69
Pomfri	109.30	117.53	0.12
Mleko	321.45	535.75	0.54
Zelje	30.71	122.83	0.09
Skupaj	2782.0	1404.99	1.43

Tabela 4: Tabela živil ter njihove energijske vrednosti, vsebnosti maščob, mase in cene.

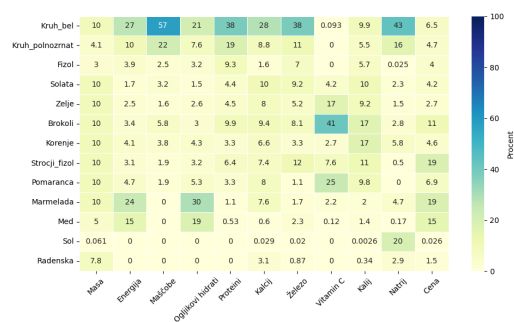
Zanimivo je, da se energijska vrednost tokrat ne minimizira na 2000 kcal, kakor smo to videli v prejšnjih primerih, prav tako količina hrane ne doseže 2kg. Vendar pa je model res izbral najcenejša živila z potrebnimi hranilnimi vrednostmi, da je skupna cena diete le 1,43 EUR.

5 Omejitev vnosa količine živil

Poglejmo si še, kako se spremeni dieta, če omejimo vnos posamezne hrane na 150 g, z drugimi besedami, želimo jesti bolj raznoliko. Analizo sem naredil za modela, kjer minimiziram maščobe in ceno, za minimizacijo energije, se mi je zdelo brezveze, saj smo dobili zelo "nečloveške" diete. V obeh primerih sem vnos posamezne hrane omejil na 150g. Če bi želeli biti še bolj natančni, bi lahko vsako vrsto hrane omejili na sebi določeno vrednost, vendar pa se mi je zdelo, da kot približek dobro deluje tudi globalna omejitev na 200 g.

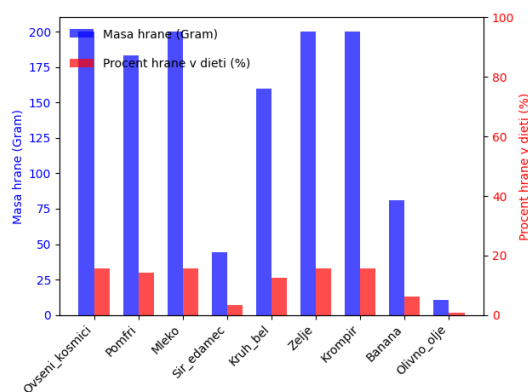


Slika 10: Izračunan vnos hranilnih vrednosti predstavljen v gramih zaužite hrane (modra barva) in procentu hrane v dieti (rdeča barva), pri pogojih 1-10, pri minimizaciji maščob.



Slika 11: Heatmap optimalnega jedilnika, ki zadošča pogojem 1-10, kjer barva za vsako hrano predstavlja doprinos nutrienta k dieti (v procentih), pri minimizaciji maščob

Sliki 10 in 11 prikazujeta jedilnik, pri katerem minimiziramo maščobe. V primerjavi z grafi v poglavju 3, je dieta veliko bolj raznolika. Vidimo, da kar pri 8 vrstah hrane pridemo do pogoja 200 g in v dieti imamo 13 različnih živil, zanimivo pa je, da dobimo vegeterjansko dieto, saj v dieti ni niti ene vrste mesa.



Slika 12: Izračunan vnos hranilnih vrednosti predstavljen v gramih zaužite hrane (modra barva) in procentu hrane v dieti (rdeča barva), pri minimizaciji cene.

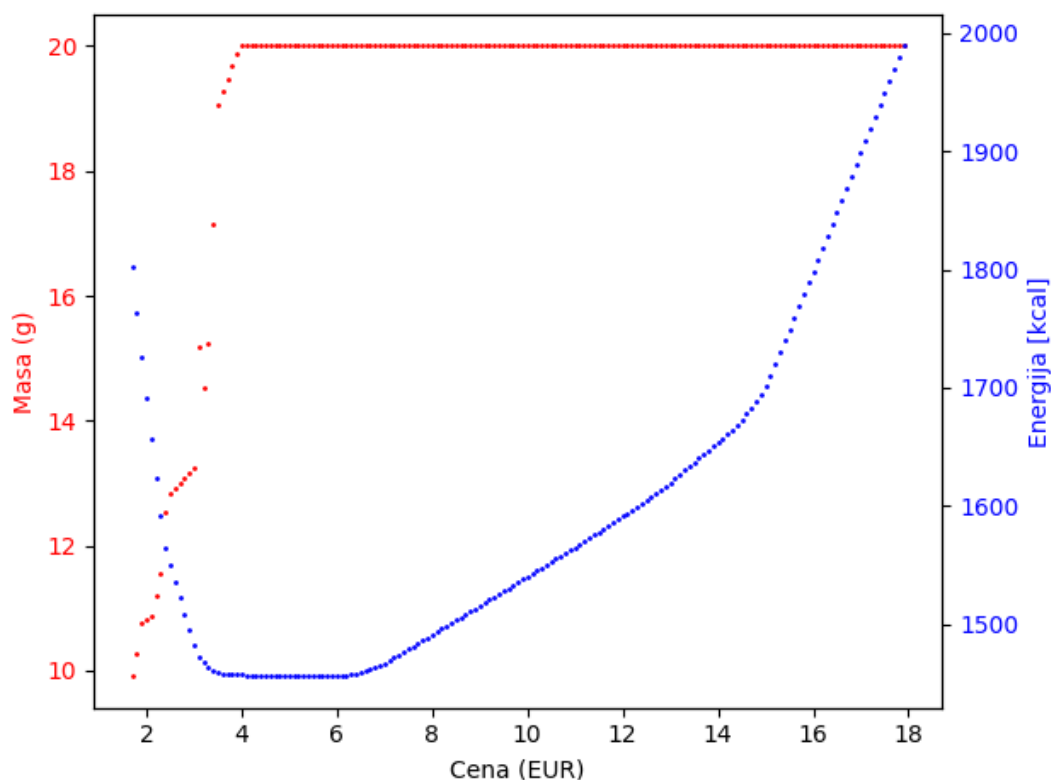


Slika 13: Heatmap najcenejšega jedilnika, ki zadošča pogojem 1-10, kjer barva za vsako hrano predstavlja doprinos nutrienta k dieti (v procentih)

Dieta, pri kateri minimaliziramo ceno ob pogoju da je maksimalna masa zaužite posamezne hrane 200 g (Slika 12 in 13) je manj raznolika. V tem primeru imamo le 9 vrst živil. Dieta je na prvi pogled manj smiselna kot tista z minimizacijo maščob, vendar pa je zelo poceni, saj stane le 1,43 €.

6 Minimalizacija energije v odvisnosti od cene

Za na konec sem še pogledal, kaj se zgodi, če minimiziram energijo v odvisnosti od cene. Zanimalo me je tudi, kako se ob vsem tem spreminja masa konzumirane hrane.



Slika 14: Graf minimizirane energije v odvisnosti od cene (v moderem) ter graf mase zaužite hrane pri minimizaciji energije v odvisnosti od cene (v rdečem)

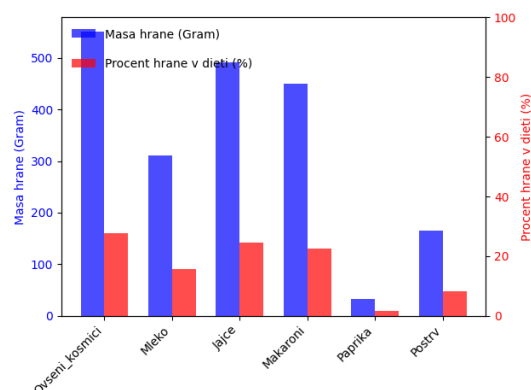
Masa se pri ceni slabih 6 EUR ustali na 2 kg, saj je to pogoj modela, da te vrednosti ne sme preseči. Energijska vrednost pa narašča vedno bolj strmo, ko se viša cena. Zanimivo je, da je energijska vrednost do cene 4 EUR pada, kar bi lahko pomenilo, da je bolj energijsko polna a nezdrava hrana cenejša kot bolj kvalitetna hrana.

7 Low-carb diet

Za konec pa sem pogledal še drugo vrsto diete in sicer "low-carb diet", kjer je ideja, da imaš v svoji dieti 35 % proteinov, 25 % ogljikovih hidratov ter 40 % maščob. S pomočjo macro-nutrients kalkulatorja, ki sem ga našel na internetu [1], sem izračunal mase makro nutrientov za dieto, če je želja da se na dan konzumira 2500 kcal. Na žalost mi je zmanjkalo časa, da bi poiskal kakšno bolj "fitnesersko" bazo živil, zato sem iz obstoječe baze izbrisal jedi, ki niso najbolj zdrave (npr. Ameriška pica, vino, Nutella, ...). Ostale nutriende pa sem pustil pri enakih pogojih kot pri celotni analizi naloge, saj sem tudi po svojem "Googlanju" ugotovil, da je to priporočen dnevni vnos. Z [1] sem izračunal

1. $m_{\text{maščobe}} \geq 111g$
2. $m_{\text{ogljikovi hidrati}} \geq 156g$
3. $m_{\text{proteini}} \geq 218g$
4. $E_{\text{kcal}} \geq 2500kcal$

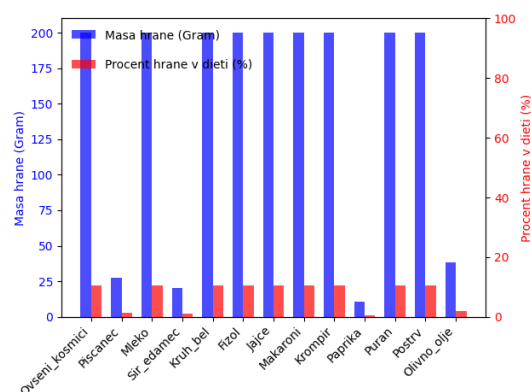
Model sem žagnalža dva primera, in sicer brez omejitve količine zaužitega posameznega živila (Slika 15 in 16) in z omejitvijo, da je lahko maksimalna količina zaužitega posameznega živila 200 g (Slika 17 in 18)



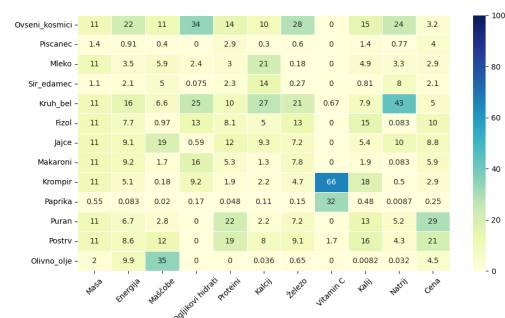
Slika 15: Izračunan vnos hranilnih vrednosti predstavljen v gramih zaužite hrane (modra barva) in procentu hrane v dieti (rdeča barva), pri minimizaciji cene za "low carb" dieto.



Slika 16: Heatmap najcenejšega jedilnika, ki zadošča pogojem low carb diete, kjer barva za vsako hrano predstavlja doprinos nutienta k dieti (v procentih)



Slika 17: Izračunan vnos hranilnih vrednosti predstavljen v gramih zaužite hrane (modra barva) in procentu hrane v dieti (rdeča barva), pri minimizaciji cene za "low carb" dieto.



Slika 18: Heatmap najcenejšega jedilnika, ki zadošča pogojem low carb diete, kjer barva za vsako hrano predstavlja doprinos nutienta k dieti (v procentih)

Obe dieti, ki jih dobimo izgledata precej smiselno. Morda je celo boljša dieta, kjer ne omejimo količine konzumiranega živila na 200g, saj je realistično zelo težko pojesti 13 različnih živil vsak dan. Nadgradnja tega modela bi lahko bila, da sestavimo tedenski menu, kjer imamo vsak dan druga živila.

Za konec pa me je zanimala še cena obeh diet, le-to sem predstavil v tabeli 5, kjer sem za obe dieti razčlenil ceno po posameznem živilu in v zadnji vrstici izračunal skupno ceno.

Živilo	Masa [g]	Cena (EUR)
Ovseni kosmici	200.00	0.22
Piscanec	27.20	0.27
Mleko	200.00	0.20
Sir edamec	19.95	0.14
Kruh bel	200.00	0.34
Fizol	200.00	0.70
Jajce	200.00	0.60
Makaroni	200.00	0.40
Krompir	200.00	0.20
Paprika	10.46	0.02
Puran	200.00	2.00
Postrv	200.00	1.40
Olivno olje	38.30	0.31
Skupaj	1895.91	6.79

Živilo	Masa [g]	Cena (EUR)
Ovseni kosmici	550.92	0.61
Mleko	310.32	0.31
Jajce	491.03	1.47
Makaroni	449.67	0.90
Paprika	32.25	0.05
Postrv	165.82	1.16
Skupaj	2000	4.50

Na levi tabeli so napisana živila, ki smo jih omejili na 200 g, na desni strani pa je dieta brez te omejitve. Vidimo, da čeprav smo minimizirali ceno v modelu, je cena še vseeno precej višja od diet, kjer nimamo posebnih pogojev za ogljikove hidrate, maščobe in beljakovine. Pričakovano pa je cena tudi veliko manjša pri dieti, kjer imamo manj različne hrane kot pri dieti, kjer imamo 13 živil.

Literatura

- [1] Fittr. *Macro Calculator*. Accessed: 2024-10-16. 2024. URL: <https://www.fittr.com/tools/macro-calculator/>.
- [2] NHS. *Salt in your diet*. Accessed: 2024-10-16. 2024. URL: <https://www.nhs.uk/live-well/eat-well/food-types/salt-in-your-diet/>.

A Tabela živil

Živilo	energija[kcal]	mascobe[g]	ogljikovi hidrati[g]	proteini[g]	Ca[mg]	Fe[mg]	Vitamin C[mg]	Kalij[mg]	Natrij [mg]	Cena(EUR)
Ovseni kosmici	369	6.10	64.00	15.50	54	4.70	0.00	354	286.00	0.11
Jabolko	52	0.17	13.81	0.26	6	0.12	4.60	107	1.00	0.15
Pomfri	93	12.00	21.55	1.96	5	0.35	12.80	391	241.00	0.10
Govedina	254	20.00	0.00	17.17	18	1.94	0.00	295	66.00	1.30
Svinjina	236	17.99	0.00	17.18	15	1.05	0.70	302	65.00	1.10
Piscanec	114	1.65	0.00	23.20	12	0.73	0.00	239	68.00	1.00
Mleko	60	3.25	4.52	3.22	113	0.03	0.00	113	40.00	0.10
Sir edamec	357	27.80	1.43	24.99	731	0.44	0.00	188	965.00	0.70
Kruh _{el}	266	3.64	47.51	10.91	142	3.46	0.20	184	521.00	0.17
Kruh polnozrnat	247	3.35	41.29	12.95	107	2.43	0.00	248	472.00	0.30
Maslo	717	81.11	0.06	0.85	24	0.02	0.00	24	11.00	1.10
Skusa soljena	305	25.10	0.00	18.50	66	1.40	0.00	520	4450.00	1.50
Losos	142	5.34	0.00	19.84	12	0.80	0.00	490	44.00	4.00
Riz	130	0.21	28.59	2.38	3	1.49	0.00	29	0.00	0.30
Cokolada	563	33.00	55.00	9.00	220	4.00	0.00	559	24.00	1.10
Fizol	132	0.54	23.71	8.86	27	2.10	0.00	355	1.00	0.35
Rdeca pesa	37	0.00	8.00	2.00	16	0.79	4.80	325	78.00	0.20
Solata	17	0.20	3.35	1.25	52	0.83	9.00	194	28.00	0.11
Zelje	25	0.10	5.80	1.28	40	0.47	36.60	170	18.00	0.07
Pivo	43	0.00	3.55	0.46	4	0.02	0.00	27	4.00	0.20
Grozdje	69	0.00	18.00	1.00	10	0.40	3.60	191	2.00	0.20
Jagode	32	0.30	7.68	0.67	16	0.41	58.80	153	1.00	0.90
Jajce	155	10.61	1.12	12.58	50	1.19	0.00	126	124.00	0.30
Makaroni	158	0.93	30.86	5.80	7	1.28	0.00	44	1.00	0.20
Torta	399	16.00	60.00	4.00	116	3.60	0.00	140	315.00	1.60
Nutella	546	31.60	57.60	6.00	40	0.72	0.00	550	40.60	0.70
Krompir	87	0.10	17.47	2.10	12	0.78	19.70	421	6.00	0.10
Banana	89	0.33	22.84	1.09	5	0.26	8.70	358	1.00	0.12
Kokice	375	4.30	74.00	11.00	0	2.88	0.00	274	74.00	0.60
Brokoli	34	0.37	6.64	2.82	47	0.73	89.20	316	33.00	0.30
Tuna	184	6.00	0.00	30.00	10	1.30	0.00	323	50.00	1.50
Paradiznik	18	0.20	3.92	0.88	10	0.27	12.70	237	5.00	0.27
Paprika	27	0.21	6.32	1.00	11	0.46	183.50	212	2.00	0.16
Korenje	41	0.24	9.58	0.93	33	0.30	5.90	320	69.00	0.12
Stroci fizol	31	0.12	7.13	1.82	37	1.04	16.30	209	6.00	0.50
Kumara	12	0.16	2.16	0.49	14	0.22	3.20	136	2.00	0.15
Pomaranca	47	0.12	11.75	0.94	40	0.10	53.20	181	0.00	0.18
Puran	115	1.56	0.00	23.56	12	1.19	0.00	305	63.00	1.00
Mortadela	311	25.39	3.05	16.37	18	1.40	0.00	163	1246.00	1.00
Postrv	148	6.61	0.00	20.77	43	1.50	0.50	361	52.00	0.70
Olivno olje	884	100.00	0.00	0.00	1	0.56	0.00	1	2.00	0.80
Marmelada	245	0.00	66.00	0.30	38	0.15	4.80	37	56.00	0.50
Med	304	0.00	82.40	0.30	6	0.42	0.50	52	4.00	0.80
Kakav	229	13.70	54.30	19.60	128	13.86	0.00	1524	21.00	0.62
Sol	0	0.00	0.00	0.00	24	0.30	0.00	8	38758.00	0.11
Radenska	0	0.00	0.00	0.00	20	0.10	0.00	8	44.00	0.05
Vino cabernet	84	0.00	2.60	0.07	0	0.00	0.00	0	0.00	0.67
Vino traminec	82	0.00	2.60	0.07	0	0.00	0.00	0	0.00	0.90
Ameriska _{pica}	266	10.00	33.00	11.00	303	0.77	2.00	234	582.00	0.42

Tabela 5: Tabela živil podana na spletni učilnici