



UNIVERZA  
V LJUBLJANI

FMF

Fakulteta za matematiko  
in fiziko

---

# Optimalno filtriranje

---

*Modelska analiza, vaja 11*

**Avtor:** Urban Pečoler  
**Vpisna številka:** 28242019

Januar 2025

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Podatki</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Kalmanov filter</b>	<b>3</b>
3.1	Redkejša vzorčenja . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Filter brez meritev hitrosti oz. koordinat</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Relativne koordinate</b>	<b>11</b>

# 1 Uvod

Kalmanov filter je metoda za obdelavo podatkov, ki omogoča napovedovanje in izboljševanje natančnosti meritve časovnega razvoja sistema, katerega dinamiko poznamo. Gre za algoritem, ki združuje napovedi iz modela sistema s surovimi meritvami, pri čemer zmanjšuje vpliv šuma in nenatančnosti. Metoda temelji na linearnem uteževanju med napovedjo stanja in novo meritvijo, pri čemer se sproti vodi ocena kovariančne matrike, ki opisuje negotovost sistema.

Pri tem je ključno, da Kalmanov filter deluje v dveh korakih. V prvem koraku izvedemo časovno evolucijo stanja na podlagi modela:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1}^- &= F_n \mathbf{x}_n^+ + \mathbf{c}_n, \\ P_{n+1}^- &= F_n P_n^+ F_n^T + Q_n,\end{aligned}$$

kjer je  $\mathbf{x}_n$  vektor stanja sistema ob času  $n$ ,  $P_n$  pripadajoča kovariančna matrika, ki opisuje statistično negotovost,  $F_n$  prehodna matrika sistema,  $\mathbf{c}_n$  kontrolni vektor,  $Q_n$  pa kovariančna matrika Gaussovega šuma  $\mathbf{w}_n$ .

V drugem koraku se stanje izboljša z vključitvijo novih meritev  $\mathbf{z}_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}K_{n+1} &= P_{n+1}^- H_{n+1}^T (H_{n+1} P_{n+1}^- H_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1}, \\ \mathbf{x}_{n+1}^+ &= \mathbf{x}_{n+1}^- + K_{n+1} (\mathbf{z}_{n+1} - H_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^-), \\ P_{n+1}^+ &= (I - K_{n+1} H_{n+1}) P_{n+1}^-.\end{aligned}$$

Te enačbe opisujejo, kako Kalmanov filter posodobi oceno stanja z uporabo nove meritve  $\mathbf{z}_{n+1}$ , pri čemer je  $H_{n+1}$  matrika opazovanja,  $R_{n+1}$  kovariančna matrika merilnega šuma,  $K_{n+1}$  pa faktor ojačanja, ki določa, koliko uteži nova meritev prispeva k popravku.

Za ilustracijo uporabe Kalmanovega filtra bomo rekonstruirali pot in hitrost vozila na podlagi GPS podatkov o lokaciji ter pospeškov iz akcelrometra. Sistem je podan s sledečimi enačbami:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [x \quad y \quad v_x \quad v_y]^T, \\ \mathbf{c} &= [0 \quad 0 \quad a_x \Delta t \quad a_y \Delta t]^T, \\ F &= \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \Delta t \\ 0 & I_{2 \times 2} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

kjer je  $\Delta t = 1.783$  s časovni interval med meritvami. Kovariančna matrika  $Q$  za šum časovne evolucije in  $R$  za šum meritve GPS sta določeni glede na standardne odklone  $\sigma$ :

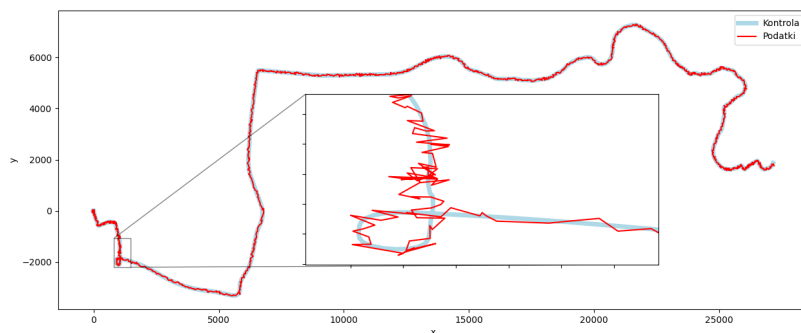
$$\begin{aligned}Q &= \text{diag}(0, 0, \sigma_a^2 \Delta t^2, \sigma_a^2 \Delta t^2), \\ R &= \text{diag}(\sigma_x^2, \sigma_y^2, 0, 0).\end{aligned}$$

Podatki so vzorčeni s frekvenco  $\Delta t = 1.783$  s, kjer je  $\sigma_a = 0.05$  m/s<sup>2</sup> standardni odklon pospeška,  $\sigma_v = 0.01$  m/s standardni odklon hitrosti,  $\sigma_{x,y} = 1$  m pa standardni odklon položaja.

S tem smo pripravili teoretične osnove za implementacijo Kalmanovega filtra, ki ga bomo uporabili za analizo podanih podatkov.

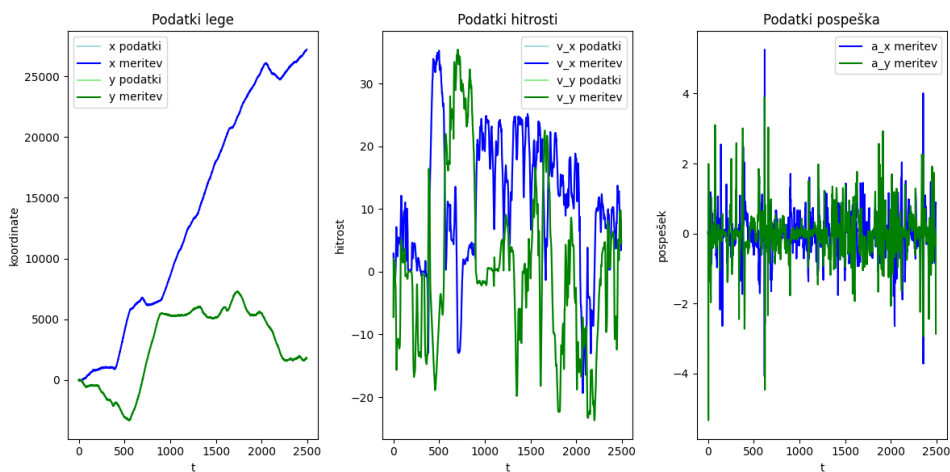
## 2 Podatki

Preden se lotimo analize, najprej pogledjmo, s kakšnimi podatki sploh imamo opravka. Na spletni učilnici smo dobili "pravilne" in zašumljene podatke, ki jih bomo filtrirali in se s filtrom čim bolj poskušali približati pravi vrednosti. Najprej sem narisal trajektorijo, ki jo naredi delec.



Slika 1: Rekonstrukcija poti vozila iz podatkov `kalman_cartesian_datadat` in `kalman_cartesian_kontroladat`

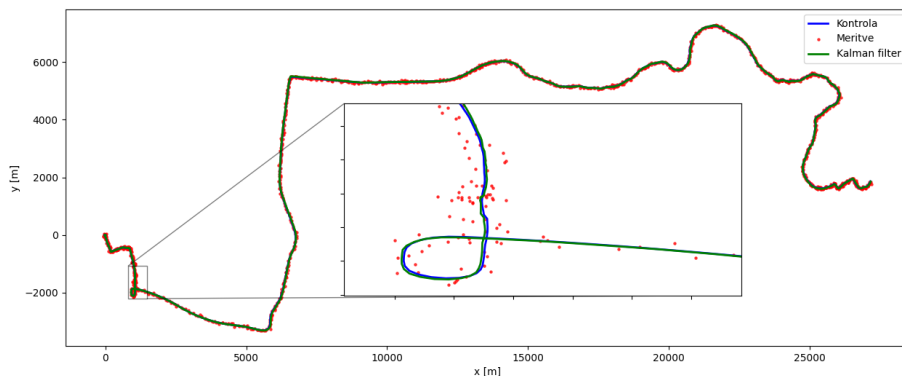
Na sliki 1 vidimo, da delec ob nekem času naredi krog in nato zavije. Ker so tam spremembe smeri najbolj očitne, sem ta del približal, saj se mi zdi da se iz tega dela trajektorije najlepše vidi "pravilnost" filtra, potem ko ga bomo analizirali. Poleg trajektorije, pa sem izrisal še vse podatke koordinat, hitrosti in pospeškov.



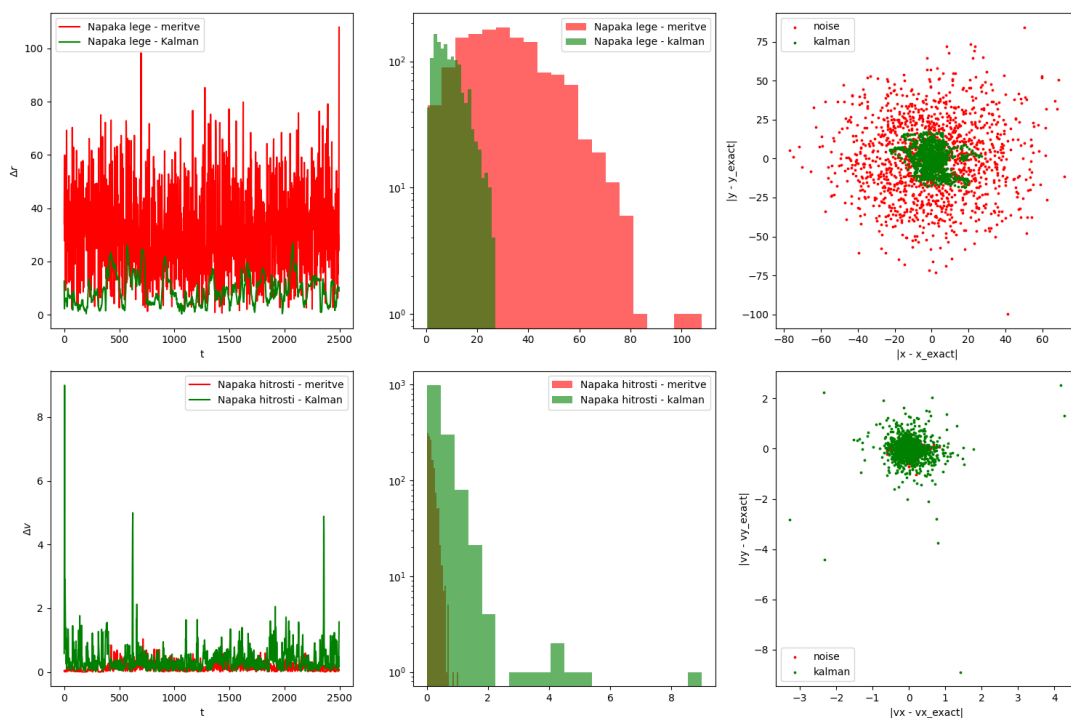
Slika 2: Narisani podatki iz datotek `kalman_cartesian_datadat` in `kalman_cartesian_kontroladat`

### 3 Kalmanov filter

Sedaj ko smo se spoznali z podatki, pa se lahko lotimo Kalmanovega filtra. Algoritem zanj in parametre, ki jih bom uporabil sem opisal že v uvodu. Začeli bomo z najlažjim primerom, kjer filtriramo vsako točko.



Slika 3: Trajektorija iz kontrolnih podatkov ter trajektorija Kalmanovega filtra. V rdeči so razpršeni podatki s šumom

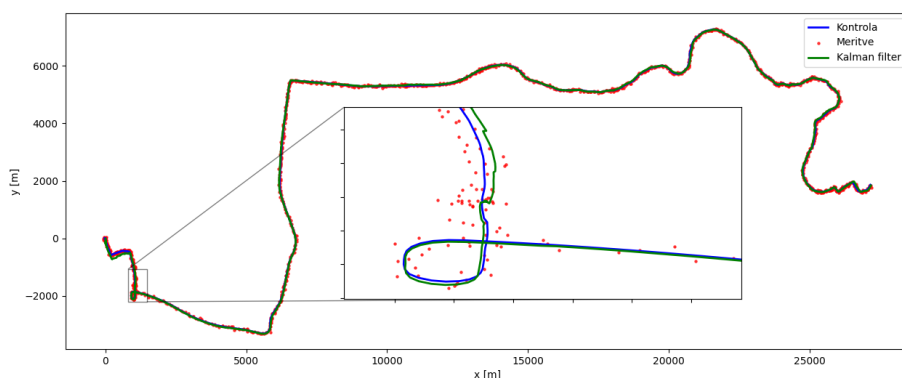


Slika 4: [ZGORAJ] 1) Razdalja koordinat do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napak. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak razdalje meritev in Kalmanovega filtra [SPODAJ] 1) Razdalja velikosti hitrosti do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napake hitrosti. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak hitrosti meritev in hitrosti izračunanih z Kalmanovim filtrom

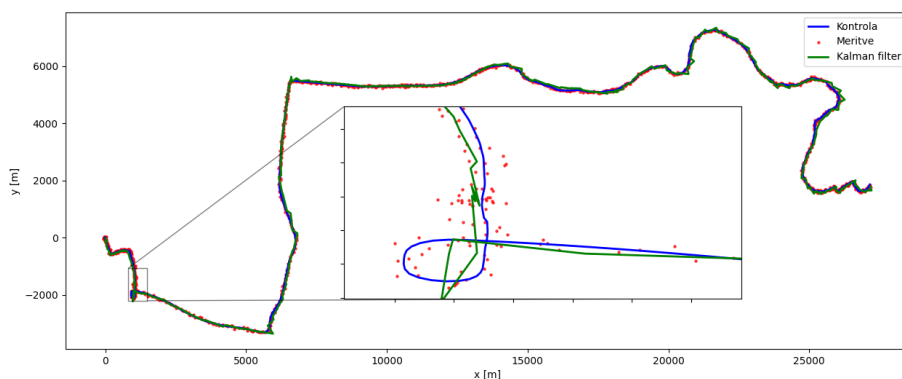
Na sliki 3 vidimo, da smo z Kalmanovim filtrom kar dobro usepli zadeti "pravilno" trajektorijo. Na sliki 4 pa lahko vidimo analizo napak s pomočjo preprostega grafa v odvisnosti od časa, histograma in korelacije. Očitno smo precej dobro izboljšali lego, torej smo se dobro znebili šuma, medtem ko pa vektor hitrosti bolj odstopa od pravih vrednosti, kot smo imeli odstopanje hitrosti pri meritvah.

### 3.1 Redkejša vzorčenja

Zanimalo me je, kaj se zgodi z trajektorijo in napakami, če imamo redkejša vzorčenja. To sem storil tako, da sem matriko  $H_n$  postavil na 0, razen za vsak  $\Delta n$  korak. Zanimalo me pa je tudi, kaj se zgodi, če poleg matrike  $H_n$  na 0 postavim še kontrolni vektor  $\mathbf{c}_n$ , v katerem se skrivajo meritve pospeška. Torej za vsak korak  $\Delta n$  sem ohranil obliko  $\mathbf{c}_n = (0, 0, a_x \Delta t, a_y \Delta t)$ .  $\Delta n$  sem postavil na 10.



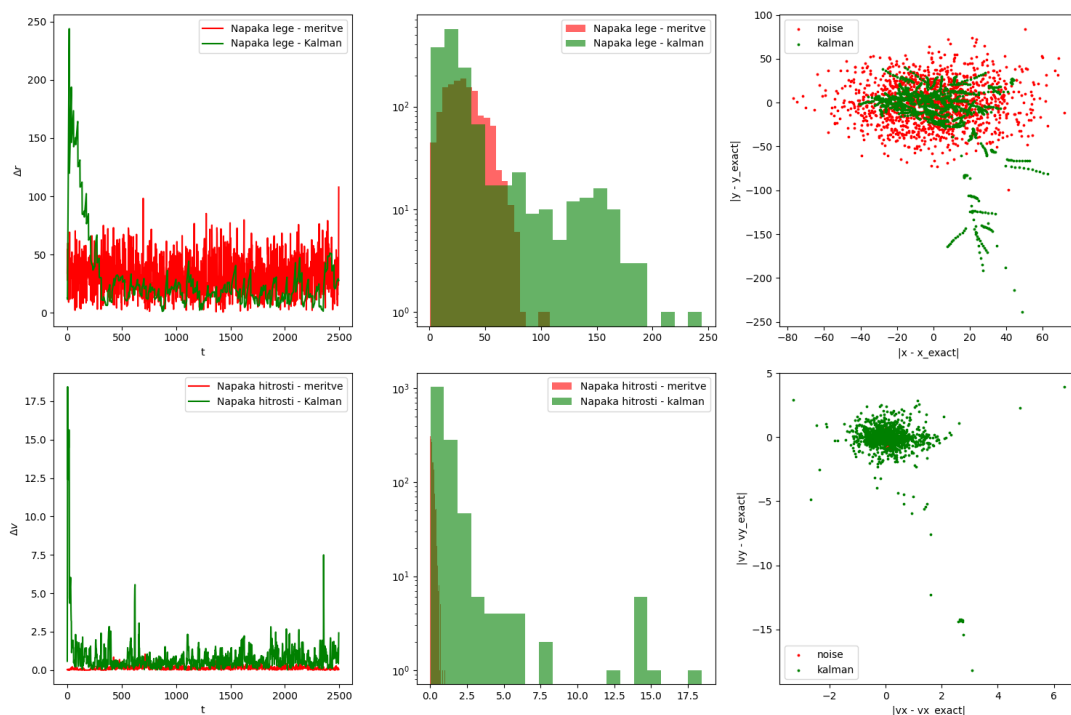
Slika 5: Trajektorija iz kontrolnih podatkov ter trajektorija Kalmanovega filtra z modificirano matriko  $H$ . V rdeči so razpršeni podatki s šumom



Slika 6: Trajektorija iz kontrolnih podatkov ter trajektorija Kalmanovega filtra z modificirano matriko  $H$  in vektorjem  $\mathbf{c}$ . V rdeči so razpršeni podatki s šumom

Iz zgornjih dveh grafov vidimo, da nam da primer, kjer je tudi  $\mathbf{c}_n = \mathbf{0}$ , izredno slabše rezultate. Zato bom nadaljno analizo v tem sklopu opravil tako, da na 0 postavim le matriko  $H_n$ .

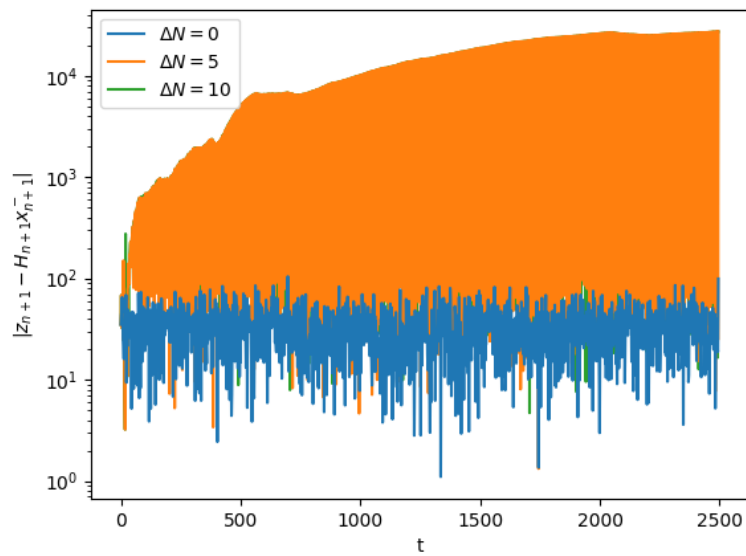
Spet si lahko pogledamo grafe napak lege in hitrosti. Pričakovano so napake večje kot pri "osnovnem" Kalmanovem filtru.



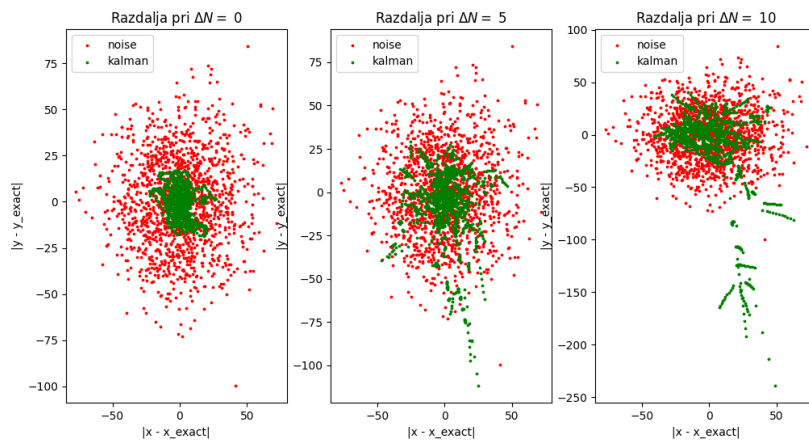
Slika 7: [ZGORAJ] 1) Razdalja koordinat do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napak. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak razdalje meritev in Kalmanovega filtra [SPODAJ] 1) Razdalja velikosti hitrosti do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napake hitrosti. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak hitrosti meritev in hitrosti izračunanih z Kalmanovim filtrom

Vidimo, da je največja napaka lege na začetku, potem pa se filter nekako "najde" in se začne približevati "pravim" podatkom. Prav zaradi tega je tudi histogram napak nekoliko bolj širok.

Pri filtriranju je koristno spremljati residue  $\|\mathbf{z}_n - H_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}^-\|$ . V kontekstu Kalmanovega filtra je residual razlika med izmerjenimi podatki in napovedanimi podatki na podlagi trenutne ocene stanja. Gre za količino, ki prikazuje, kako dobro trenutna ocena stanja sistema ustreza dejansko izmerjenim vrednostim.



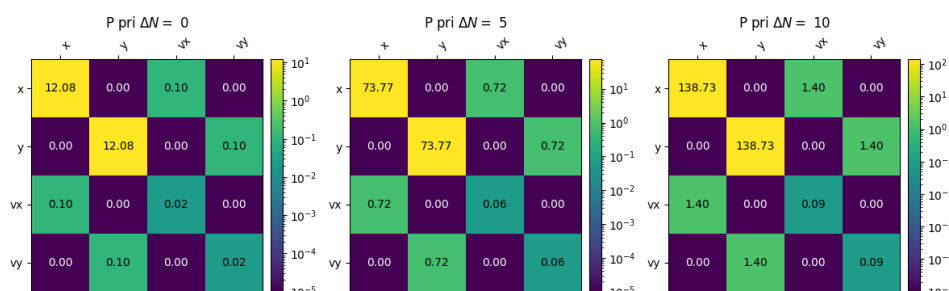
Slika 8: Residuali za primere vzorčenja pri  $\Delta n = 0, 5, 10$



Slika 9: Razpršitev napake razdalje meritev od kontrole (v rdečem) in Kalmanovega filtra (v zelenem), za primere vzorčenja  $\Delta n = 0, 5, 10$ , pri modifikaciji matrike  $H$

Iz slike 9 je lepo razvidno, kako se večja nenatančnost razdalje če manjšamo koliko točk vzorčimo. Komplementarno Sliki 9, pa sem narisal še kovariančne matrike za te tri primere vzorčenja.

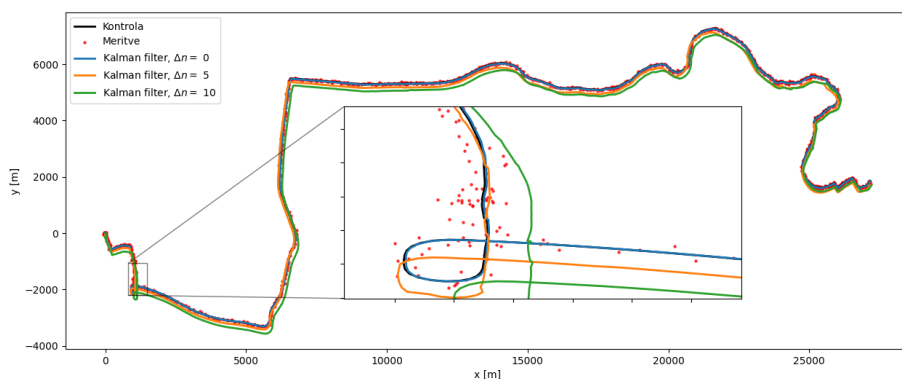


Slika 10: Kovariančne matrike pri vzorčenju  $\Delta n = 0, 5, 10$ 

Matrike so po pričakovanjih simetrične, prav tako pa po pričakovanjih  $\sigma_x$  in  $\sigma_y$  oz.  $\sigma_x$  in  $\sigma_{v_y}$  nista korelirani (kar je razvidno tudi iz točkastih grafov razdalje od prave vrednosti).

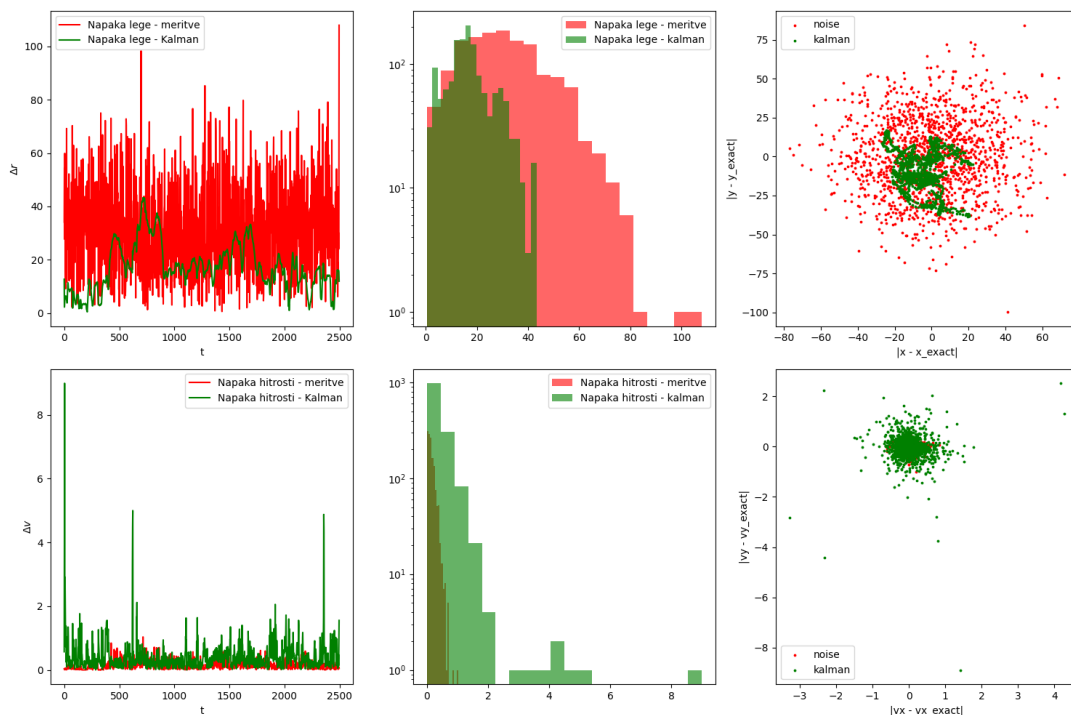
## 4 Filter brez meritev hitrosti oz. koordinat

V naslednjem delu analize bom pogledal kaj se zgodi če v filtru sploh ne upoštevamo hitrosti ali koordinat, oziroma jih upoštevamo vsako  $n$ -to točko. Podobno kot prej, bom modificiral okensko matriko  $\mathbf{H}_n$ . Najprej pogledjmo, kaj se zgodi, če damo stran vse meritve hitrosti, lego pa vzorčimo pri vsaki točki, vsaki 5 točki in vsaki 10 točki.

Slika 11: Trajektorija iz kontrolnih podatkov ter trajektorija Kalmanovega filtra v primeru ko imamo samo podatke poti, ki so vzorčeni z  $\Delta n = 0, 5, 10$ 

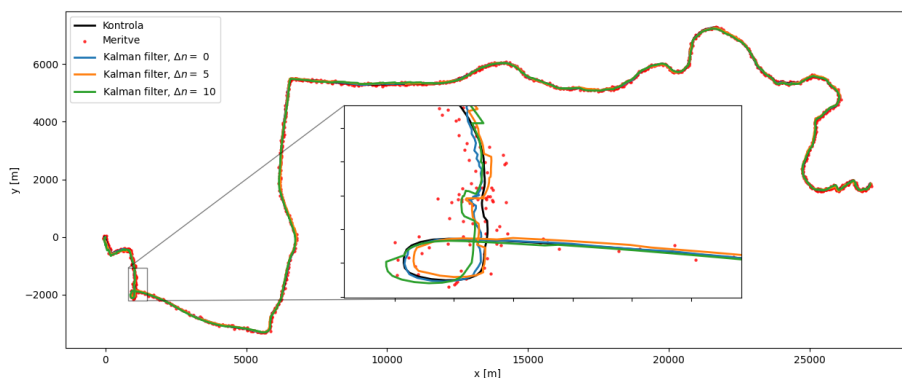
Vidimo, da trajektorija začne zaostajati za pravilnimi rezultati, redkejša kot so meritve poti, bolj zaostaja, bolj se večja napaka.

Analizo napak sem opravil le za primer ko nimamo vzorčene hitrosti, pot pa vzorčimo na vsakem koraku.

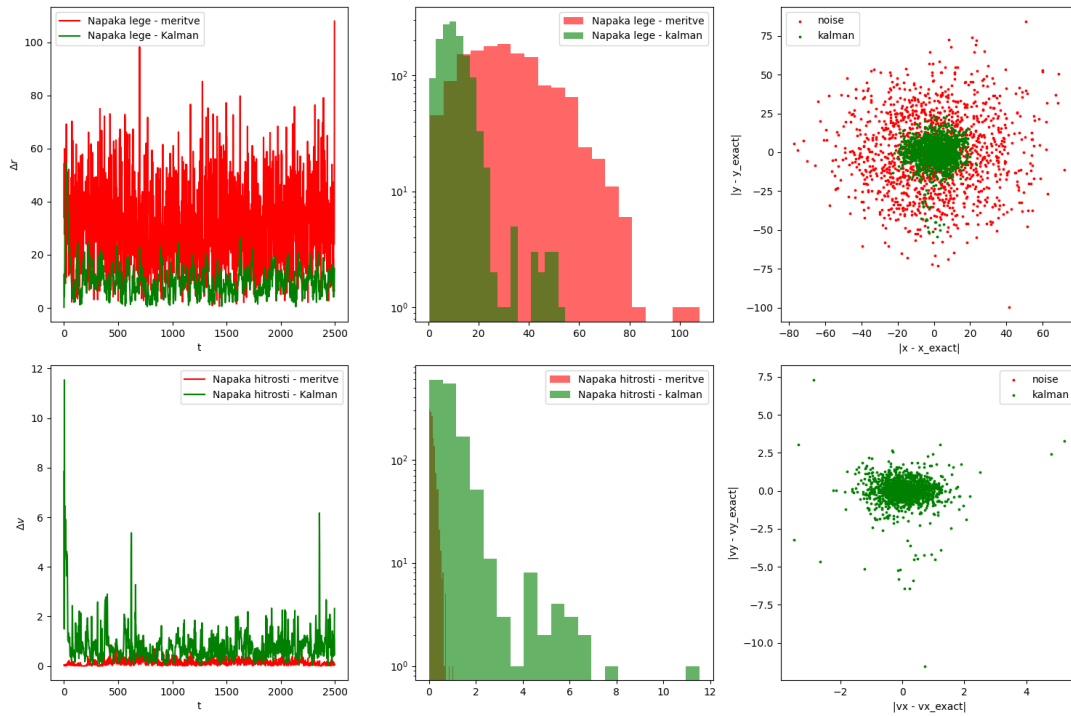


Slika 12: [ZGORAJ] 1) Razdalja koordinat do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napak. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak razdalje meritev in Kalmanovega filtra [SPODAJ] 1) Razdalja velikosti hitrosti do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napake hitrosti. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak hitrosti meritev in hitrosti izračunanih z Kalmanovim filtrom

Enako analizo sem nato naredil še za primer ko imamo vse meritve hitrosti, stran pa damo meritve lege. Zopet vzorčimo na vsaki točki, na vsaki 5 točki in na vsaki 10 točki. Napako pa sem ponovno analiziral za primer ko hitrost vzorčimo na vsaki točki.

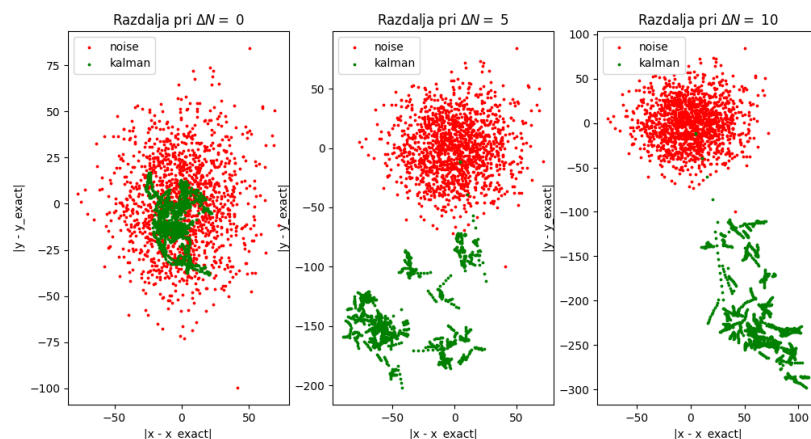


Slika 13: Trajektorija iz kontrolnih podatkov ter trajektorija Kalmanovega filtra v primeru ko imamo samo podatke hitrosti, ki so vzorčeni z  $\Delta n = 0, 5, 10$

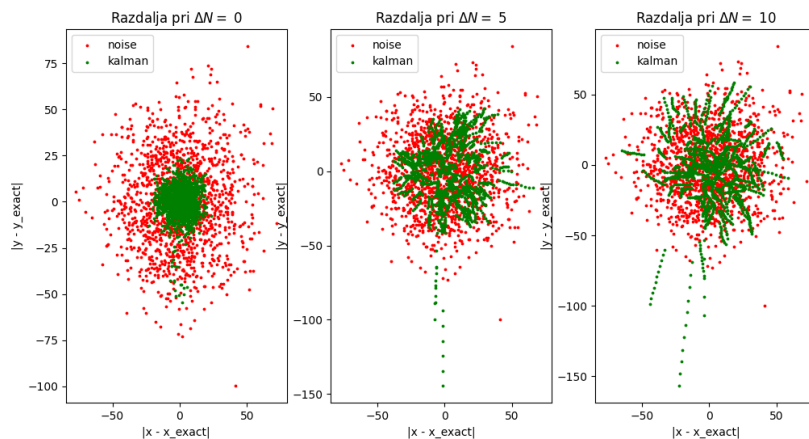


Slika 14: [ZGORAJ] 1) Razdalja koordinat do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napak. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak razdalje meritev in Kalmanovega filtra [SPODAJ] 1) Razdalja velikosti hitrosti do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napake hitrosti. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak hitrosti meritev in hitrosti izračunanih z Kalmanovim filtrom

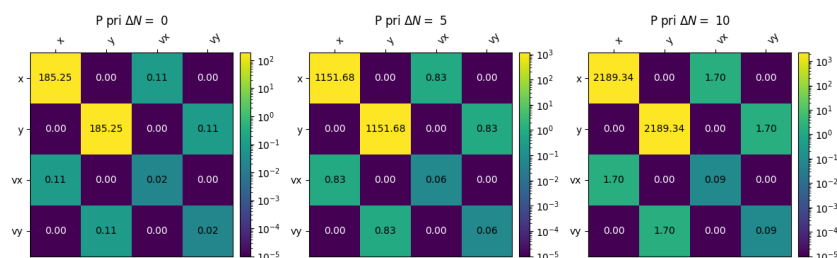
Vidimo, da je razlika v napakah kar precejšnja, in dobimo bolj natančen filter, če podatke vzorčimo brez hitrosti kot pa brez poti. Za primerjavo sem narisal še razpršenost napake in vrednost kovariančne matrike za oba primera pri  $\Delta n = 0, 5, 10$



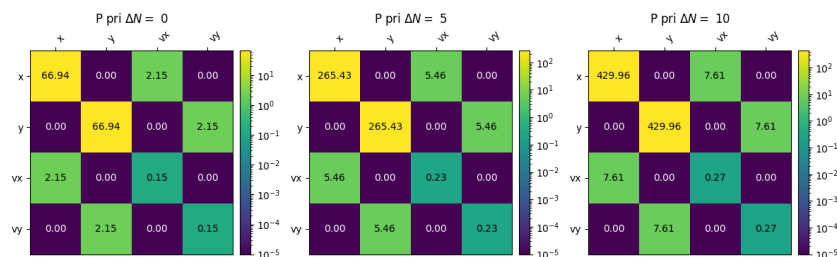
Slika 15: Razpršitev napake razdalje meritev od kontrole (v rdečem) in Kalmanovega filtra (v zelenem), za primere vzorčenja  $\Delta n = 0, 5, 10$ , pri primeru, ko imamo na voljo le podatke o poziciji



Slika 16: Razpršitev napake razdalje meritev od kontrole (v rdečem) in Kalmanovega filtra (v zelenem), za primere vzorčenja  $\Delta n = 0, 5, 10$ , pri primeru, ko imamo na voljo le podatke o hitrosti



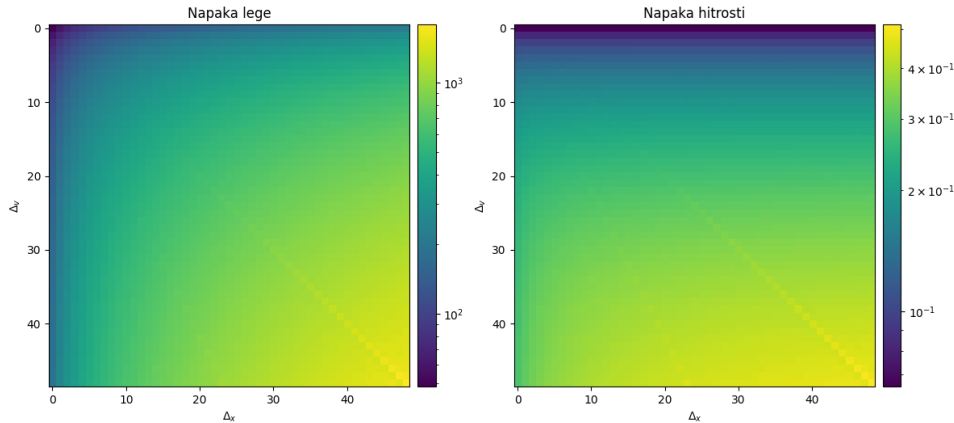
Slika 17: Kovariančne matrice pri vzorčenju  $\Delta n = 0, 5, 10$ , ko imamo le podatke lege



Slika 18: Kovariančne matrice pri vzorčenju  $\Delta n = 0, 5, 10$ , ko imamo le podatke hitrosti

Pogledal sem še napako razdalje in hitrosti, če filtriramo za vse kombinacije pogostosti vzorčenja

hitrosti in poti. To nam da celovit pregled nad tem, kako hitro tak način filtriranja divergira od optimalnega.



Slika 19: [LEVO] Velikost napake lege od kontrolnih podatkov za vse kombinacije vzročenja lege in hitrosti [DESNO] Velikost napake hitrosti od kontrolnih podatkov za vse kombinacije vzročenja lege in hitrosti

## 5 Relativne koordinate

V zadnjem delu analize sem obravnaval bolj natančni model, kjer akcelerometer podaja pospeške  $\mathbf{a} = (a_t, a_r)$  glede na trenutno orientacijo vozila. Med kontrolnim vektorjem  $\mathbf{u}_n$  in nehomogenim delom dinamičnega modela je vključena linearna preslikava  $\mathbf{B}_n$ , definirana kot  $\mathbf{c}_n = \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n$ . Matrika  $\mathbf{B}_n$  ustreza ortogonalni transformaciji, podani z:

$$\mathbf{u}_n = (0, a_n \Delta t), \quad \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_n^{vv} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_n^{vv} = \frac{1}{\|\mathbf{v}_n\|} \begin{bmatrix} v_x & -v_y \\ v_y & v_x \end{bmatrix}.$$

Pri tem je  $\mathbf{B}_n^{vv}$  matrika, ki rotira hitrost  $\mathbf{v}_n = (v_x, v_y)$  v smeri orientacije vozila.

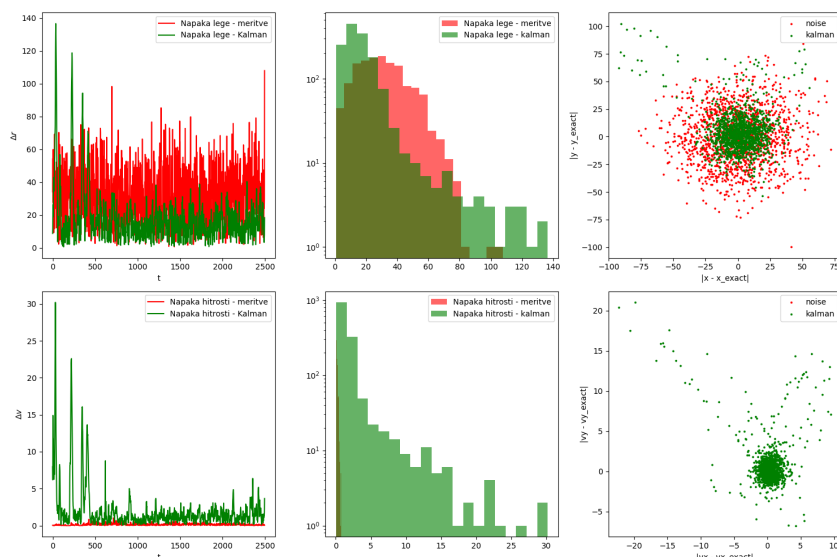
Za natančno oceno trenutne hitrosti je treba upoštevati kovarianco meritve pospeška  $\mathbf{Q}_n^{vv}$ , ki vključuje naslednje prispevke:

$$\mathbf{Q}_n^{vv} = \Delta t^2 \left\{ \sigma_a^2 \mathbf{I}_{2 \times 2} + \frac{\mathbf{v}_n^\perp \mathbf{P}_n^{vv} \mathbf{v}_n^\perp}{\|\mathbf{v}_n\|^4} \left[ (\mathbf{B}_n^{vv} \mathbf{a}_n^\perp) \otimes (\mathbf{B}_n^{vv} \mathbf{a}_n^\perp) \right] \right\}.$$

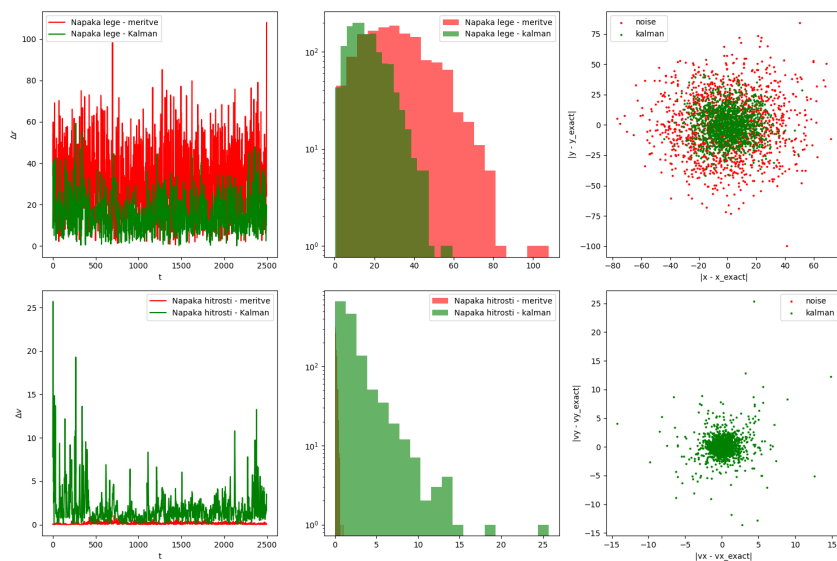
Tu  $\mathbf{P}_n^{vv}$  predstavlja kovariančno matriko hitrosti,  $\mathbf{v}_n^\perp$  pa je hitrost, zavrnjena v smer za  $\pi/2$ . Prvi člen matrike  $\mathbf{Q}_n^{vv}$  upošteva negotovost pospeška, medtem ko drugi člen kvantificira vpliv projekcije negotovosti hitrosti na prečno smer gibanja, kar zmanjša zanesljivost ocene pospeška.

Za preizkus tega modela sem rekonstruiral pot vozila z uporabo podatkov iz datoteke `kalman_relative_data.dat`, ki vsebuje stolpce za čas  $t$ , GPS položaje  $(x, y)$  in pospeške  $(a_t, a_r)$ . Izbral sem tudi različne intervale za razpoložljivost meritev in izvedel analizo vpliva na rezultate.

Pri analizi sem pogledal dva režima, in sicer poenostavljen model, kjer v matriki  $\mathbf{B}_n^{vv}$  izpustim člen s tenzorskim produktom in točni model, kjer upoštevam tudi ta člen.



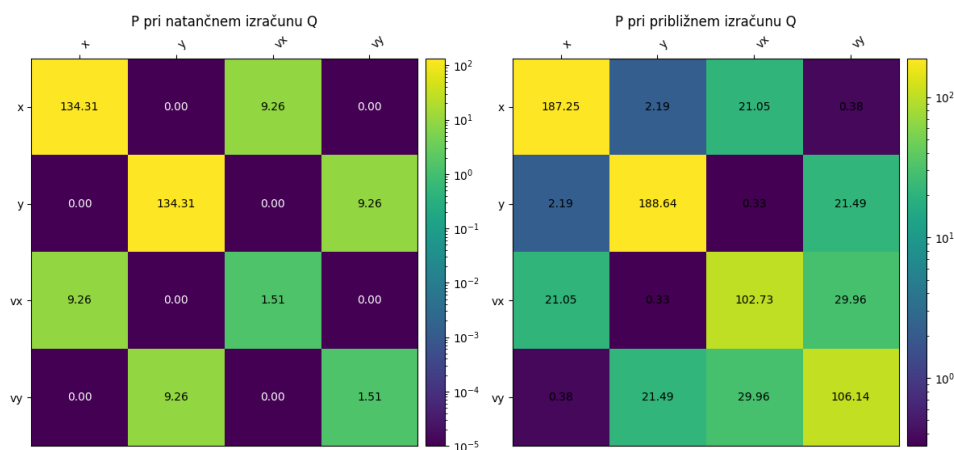
Slika 20: [ZGORAJ] 1) Razdalja koordinat do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napak. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak razdalje meritev in Kalmanovega filtra [SPODAJ] 1) Razdalja velikosti hitrosti do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napake hitrosti. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak hitrosti meritev in hitrosti izračunanih z Kalmanovim filtrom



Slika 21: [ZGORAJ] 1) Razdalja koordinat do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napak. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak razdalje meritev in Kalmanovega filtra [SPODAJ] 1) Razdalja velikosti hitrosti do kontrole v odvisnosti od časa za surove meritve in Kalmanov filter. 2) Histogram velikosti napake hitrosti. Na x osi narisana velikost napake, višina histograma pa predstavlja pogostost te velikosti. 3) Razpršenost napak hitrosti meritev in hitrosti izračunanih z Kalmanovim filtrom

Iz histograma vidimo, da so velikosti pri poenostavljenem modelu veliko bolj razpršene kot pri

bolj točnem modelu. To se dobro vidi tudi pri kovariančni matriki.



Slika 22: [LEVO] Kovariančne matrike za "natančen"izračun Kalmanovega filtra [DESNO] Kovariančne matrike za "približen"izračun Kalmanovega filtra