

## 2. naloga – Navadne diferencialne enačbe: robni problemi

1. Izračunaj obliko vrvi, ki je obešena v dveh točkah na vrteči se navpični osi. Znan sistem

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \left( F \frac{dx}{ds} \right) + \rho \omega^2 x &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left( F \frac{dy}{ds} \right) - \rho g &= 0 \\ \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 &= 1\end{aligned}$$

pretvorimo s substitucijami  $s \rightarrow s/l$ ,  $x \rightarrow x/l$ ,  $y \rightarrow y/l$ ,  $F \rightarrow F/\rho gl$ ,  $dx/ds = \cos \alpha$ ,  $dy/ds = \sin \alpha$ ,  $\beta = \omega^2 l/g$ , če je  $l$  dolžina vrvi, v sistem

$$\begin{aligned}\frac{dF}{ds} &= -\beta x \cos \alpha + \sin \alpha & \frac{dx}{ds} &= \cos \alpha \\ F \frac{d\alpha}{ds} &= \beta x \sin \alpha + \cos \alpha & \frac{dy}{ds} &= \sin \alpha\end{aligned}$$

Zanj poznamo koordinate enega obesišča  $(0, 0)$  in bi radi zadeli drugo obesišče, pri čemer pa ne poznamo začetnega naklona vrvi  $\alpha(0)$  in sile v pritrdišču  $F(0)$ . Razišči mnogoterost dobljenih rešitev.

2. Pri študiju gibanja zvezd skozi galaksijo sta Hénon in Heiles vpeljala 3-števno simetrični potencial

$$U(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3.$$

Za energije  $E < \frac{1}{6}$  je gibanje omejeno znotraj enakostraničnega trikotnika. V odvisnosti od energije in začetnih pogojev je gibanje periodično, kvaziperiodično ali kaotično.

S strelesko metodo določi periodične tire pri različnih energijah. Zaradi simetrije lahko začetni pogoj omejiš na daljico med izhodiščem in točko  $(0, 1)$ . Začetne pogoje lahko poiščeš s pomočjo Poincaréjevega preseka.

Poskusi najti količine, s pomočjo katerih lahko tire razporediš v razrede – na primer obhodno število.

---

Streleska metoda je pravzaprav večdimenzionalno iskanje ničle funkcije, ki je sama rezultat integracije. Iskanje ničel v knjižnici *GSL* najdete v headerju `gsl_multiroots.h`, ali pa v modulu `scipy.optimize` (*Python*, na primer `root` in sorodne funkcije).