



Navadne diferencialne enačbe: robni problemi

Modelska analiza 2, vaja 2

Avtor: Urban Pečoler
Vpisna številka: 28242019

Februar 2025

Kazalo

1	Uvod	1
2	Navpično vpeta vrv	1
2.1	Nehomogena vrv	6
3	Henon-Heilesov potencial	7

1 Uvod

Pri reševanju robnih problemov diferencialnih enačb se pogosto srečamo z izzivom iskanja rešitve, ki zadosti podanim robnim pogojem. Ena izmed učinkovitih numeričnih metod za takšne probleme je strelska metoda. Gre za iterativni postopek, pri katerem začetni problem z robnimi pogoji preoblikujemo v več začetnih problemov ter nato s prilagajanjem začetnih pogojev poiščemo rešitev, ki zadosti želenim robnim pogojem.

Strelska metoda temelji na ideji ugibanja neznanih začetnih pogojev in nato reševanja začetnega problema z običajnimi metodami za reševanje diferencialnih enačb. Nato preverimo, ali dobljena rešitev ustrezava robnim pogojem, in če ne, uporabimo numerične metode, kot so iterativne tehnike iskanja ničel ali optimizacijski algoritmi, da izboljšamo začetno ugibanje. Jaz sem za to nalogo uporabil funkcijo `root` iz knjižnice `scipy`.

V tem poročilu bom s strelsko metodo raziskoval dva fizikalna problema:

točka

- Navpično vpeta vrteča se vrv: Gre za problem določanja oblike vrvi, ki je vpeta na obeh koncih in se vrti okoli svoje osi.
- Henon-Heilesov potencial

V nadaljevanju bom podrobno opisal implementacijo strelske metode in rezultate, pridobljene pri analizi teh dveh problemov.

2 Navpično vpeta vrv

Pri tem problemu se srečamo z neraztegljivo vrvjo dolžine $L = 1$. Za tak sistem lahko napišemo enačbe

$$\begin{aligned}\rho \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(F(s) \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \rho \omega^2 x, \\ \rho \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(F(s) \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \rho g, \\ 1 &= \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2\end{aligned}$$

kjer je ρ gostota vrvi, ω kotna hitrost vrtenja, s pa naravni parameter vrvi. V prvem delu analize bom gostoto pustil konstantno po celotni vrvi in sicer $\rho = 1$. Prav tako me bodo zanimala le stacionarna stanja, kar pomeni, da lahko vse časovne odvode postavim na 1.

Če transformiram parametre $s \rightarrow sL$, $x \rightarrow xL$ in $F \rightarrow Fl/(\rho g)$ in uvedem kot naklona vrvi α , lahko sistem prepišemo v

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \tag{1}$$

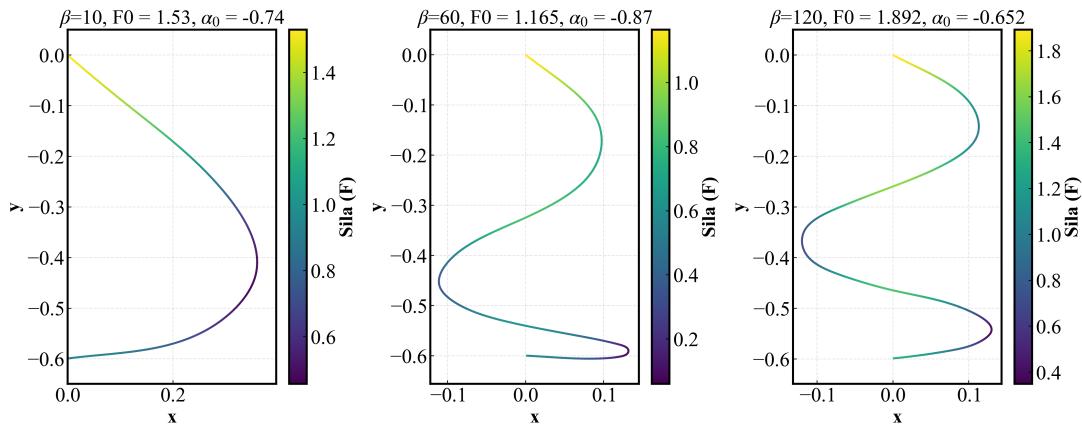
$$\frac{dy}{ds} = \sin \alpha \tag{2}$$

$$\frac{dF}{ds} = \sin \alpha - \beta x \cos \alpha \tag{3}$$

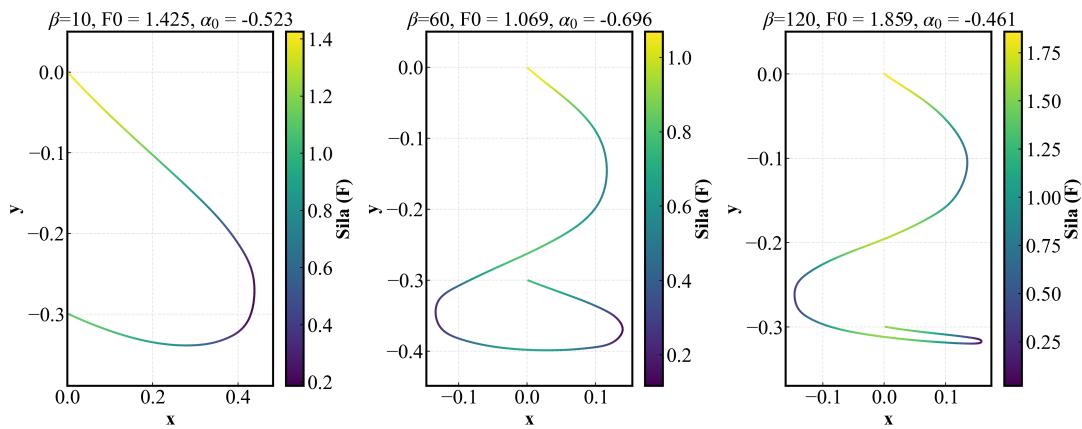
$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{F} (\cos \alpha + \beta x \sin \alpha) \tag{4}$$

kjer parameter $\beta = \omega^2 L/g$. Kot omenjeno je vrv vpeta na obeh koncih, kar nam da robne pogoje našega sistema diferencialnih enačb in sicer $x(s=0) = 0, y(s=0) = 0, x(s=1) = 0, y(s=1) = y_f$. Seveda mora veljati, da $y_f < 1$ zaradi tega, ker sem postavil dolžino vrvi na 1.

Reševanja problema sem se lotil z strelske metodo. Najprej sem ročno nastavil začetne pogoje $F(s=0)$ in $\alpha(s=0)$ na neke (na oko) smiselne vrednosti in z njimi rešil sistem. Sistem z začetnimi pogoji sem reševal s funkcijo `solve_ivp`, knjižnjice `scipy`, nato sem izračunal razdaljo med končno točko izračunane trajektorije in točko $(0, y_f)$. Če je bila razdalja manjša od določene tolerance, sem začetne pogoje sprevzel kot prave, če pa je bila večja sem dinamično prilagodil začetne pogoje in poskušal še enkrat. Za prilagoditev začetnih pogojev sem se odločil za preprosto iterativno metodo, kjer sem jim prištel razdalja $* 0.1$. Med programiranjem sem razmišljal tudi o drugih metodah (kot so `gradient_descent` vendar sem precenil, da je moja preprosta metoda "good enough" in da nebi z kakšnimi bolj kompleksnimi pristopi nič pridobil). Najprej sem se odločil narisati nekaj oblik vrvi za različne vrednosti β pri $y_f = 0.8$ in 0.3 . Na graf pa sem z barvo označil tudi silo, ki deluje na vsak delček vrvi. Priakovano je pri maksimalni oddaljenosti vrvi sila največja, pri $x = 0$ pa najmanjša. Za začetne pogoje sem najprej izbral $F_0 = 2, \alpha_0 = -0.6$.



Slika 1: Postavitev vrvi pri $\beta = 10, 60, 120$ in $y_f = 0.8$

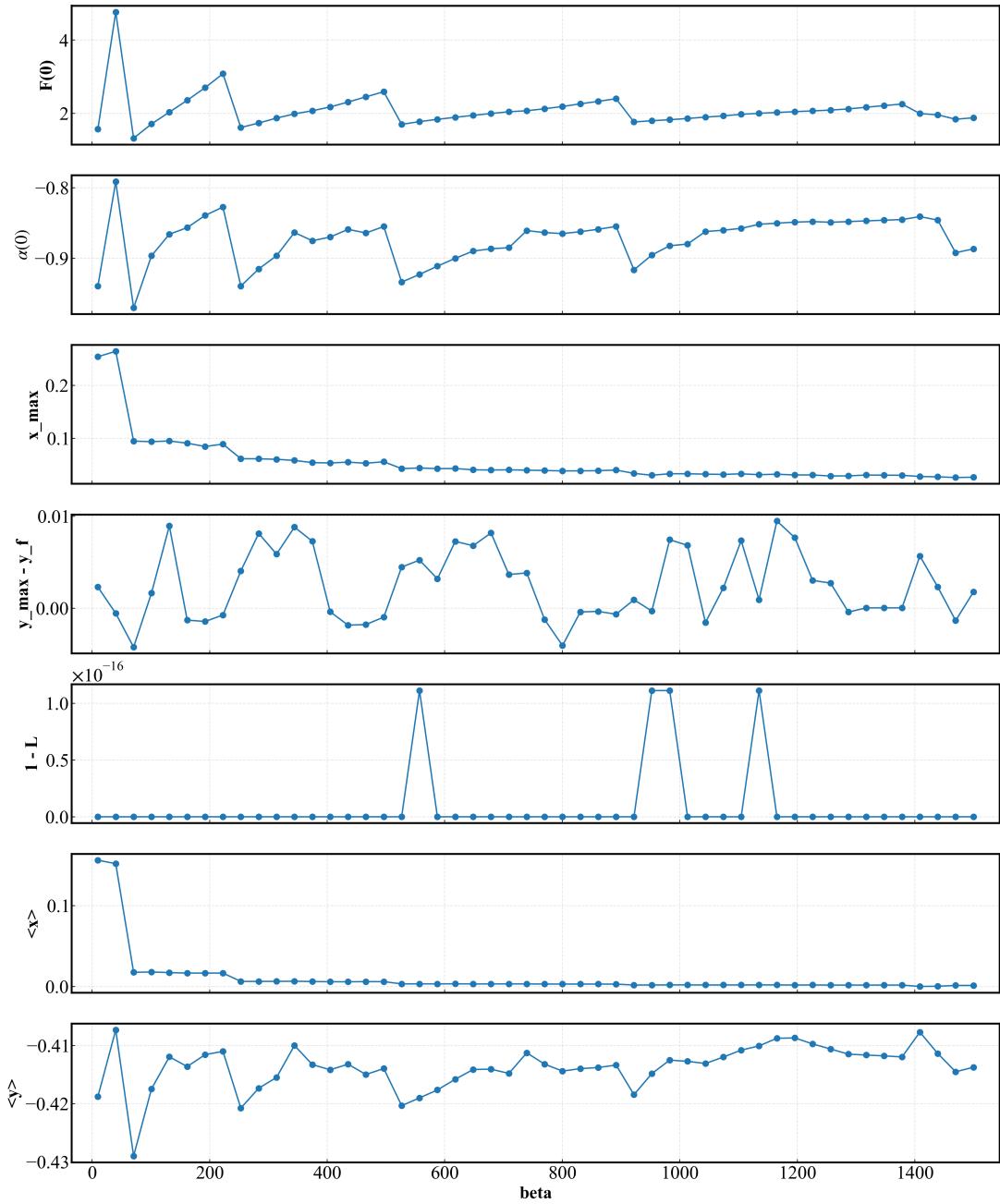


Slika 2: Postavitev vrvi pri $\beta = 10, 60, 120$ in $y_f = 0.3$. Vidimo, da se vrv spusti nižje, kot je točka y_f

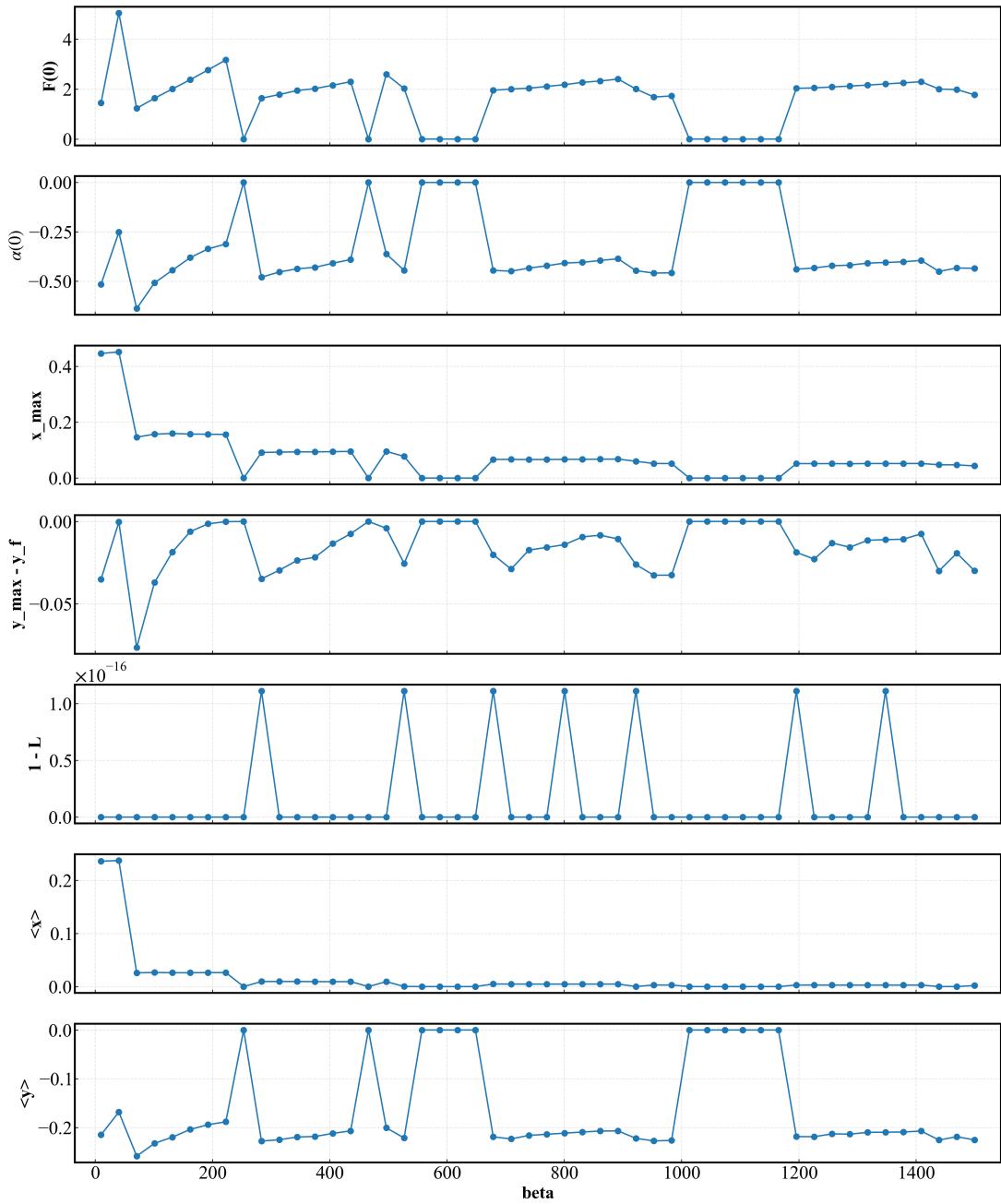
Če primerjamo slili 1 in 2 vidimo, da je oblika vrvice precej drugačna za manjše vrednosti y_f . Če je y_f bližje 1, je vrvica bolj raztegnjena in ne pade pod koordinato y_f . Za manjše vrednosti,

pa he $y_{max} > y_f$.

Za te dve vrednosti y_f sem naredil tudi podrobnejšo analizo. Pogledal sem kaj se zgodi z začetnimi pogoji, največjo vrednostjo koordinat x in y, dolžino ter povprečnima vrednostima koordinat x in y, v odvisnosti od parametra β . Spet sem ohranil začetna pogoja $F_0 = 2, \alpha_0 = -0.6$.



Slika 3: Analiza začetnih pogojev (F_0 in α_0), maksimalne oddaljenosti koordinate x, razdalje med najnižjo točko vrvi in končno točko y_f , izračunane dolžine vrvi ter povprečnih vrednosti koordinat x in y. Analiza je narejena pri odvisnosti od β , za $y_f = 0.8$

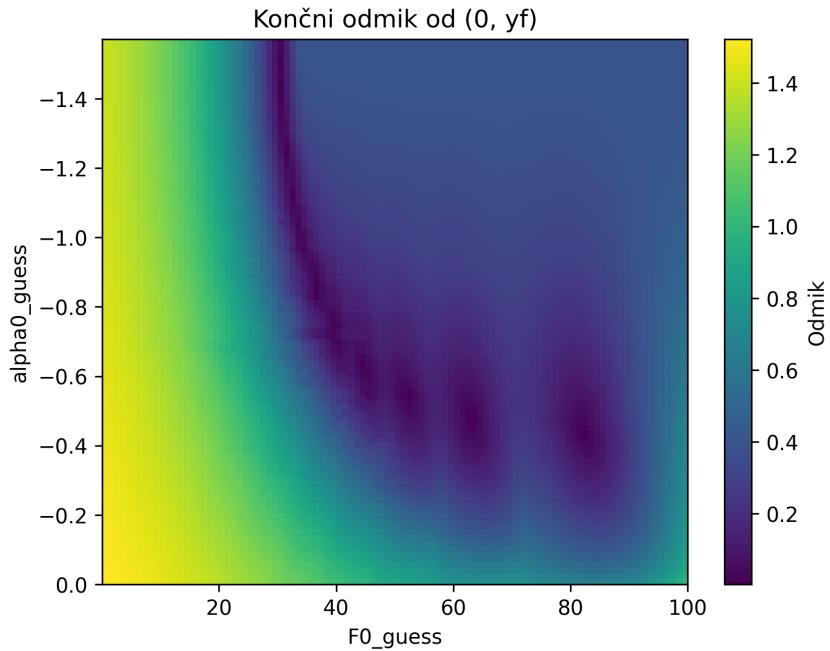


Slika 4: Analiza začetnih pogojev (F_0 in α_0), maksimalne oddaljenosti koordinate x, razdalje med najnižjo točko vrvi in končno točko y_f , izračunane dolžine vrvi ter povprečnih vrednosti koordinat x in y. Analiza je narejena pri odvisnosti od β , za $y_f = 0.3$

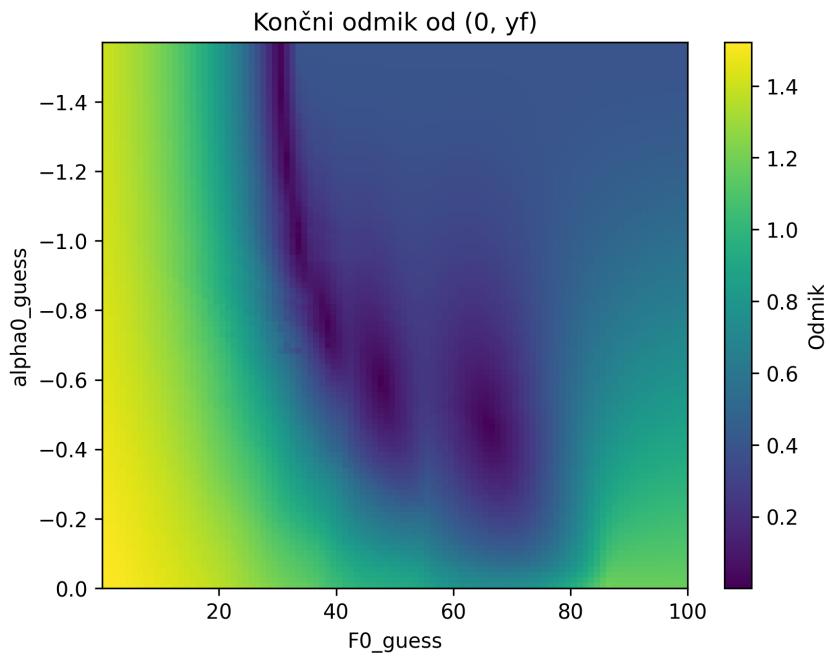
Na grafih vidimo razne skoke količin, kot so $F(s=0)$, $\alpha(s=0)$, maksimalna oddaljenost vrvi od osi x_{max} itd. Izkaže se, da ti skoki ravno ustrezajo temu, da smo z višanjem frekvence prešli na rešitev z enim dodatnim prevojem vrvi. Vidimo tudi da dolžina izračunane vrvice ostaja na 1, kar pomeni, da naš IVP solver dobro deluje. Vidno je tudi, da pri nižjih y_f minimum res gre pod končno točko.

Do sedaj sem vedno brez argumentov izbral začetne pogoje in iz njih dobil rešitev, vendar pa se izkaže, da vrv z določenimi robnimi pogoji nima ene same rešitve, ampak jih lahko ima več. Da dobimo občutek, koliko rešitev lahko ima, in kakšni so začetni pogoji teh rešitev, lahko na "brute force" prečešemo cel spekter začetnih pogojev in za vsak par (F_0, α_0) izračunamo razdaljo

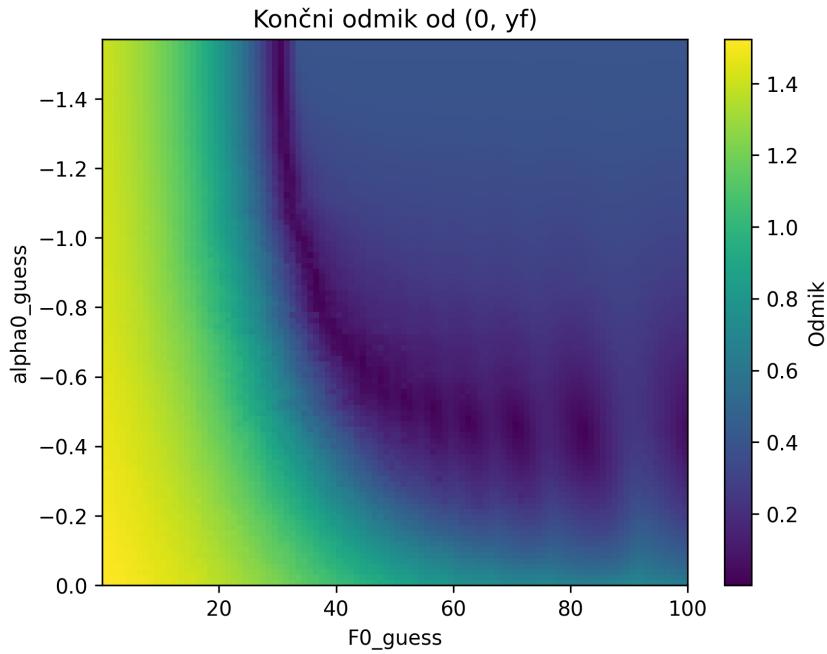
med končno točko in robnimi pogoji. Na tak način predvidimo koliko rešitev ima problem. Na naslednjih slikah sem narisal nekaj takšnih spektrov.



Slika 5: Kvadrat odstopanja končne točke rešitve začetnega problema za različne začetne pogoje α_0 in F_0 , pri parametru $\beta = 200$



Slika 6: Kvadrat odstopanja končne točke rešitve začetnega problema za različne začetne pogoje α_0 in F_0 , pri parametru $\beta = 80$



Slika 7: Kvadrat odstopenja končne točke rešitve začetnega problema za različne začetne pogoje α_0 in F_0 , pri parametru $\beta = 1000$

2.1 Nehomogena vrv

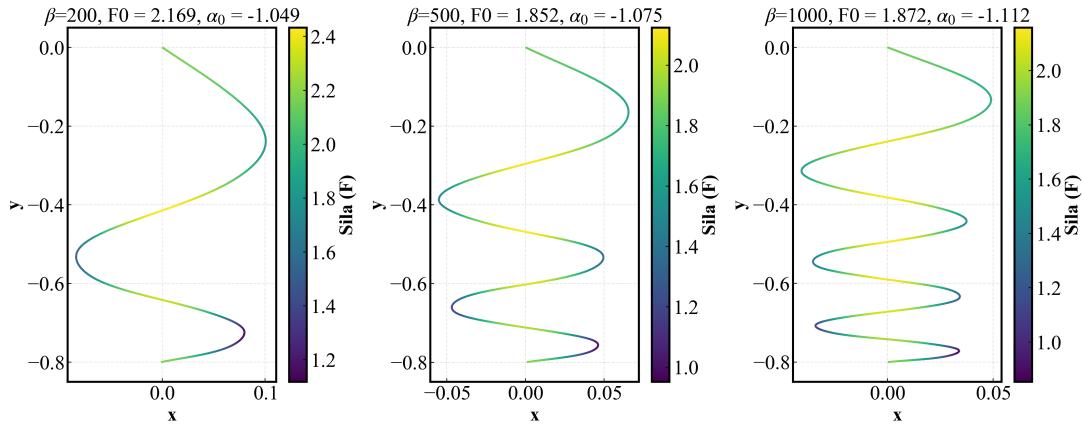
Za konec sem pogledal še kaj se zgodi, če vrv ni homogena, bolj specifično sem pogledal linearno spremenjanje gostote $\rho = 5s$. Sistem enačb, ki ga računam v tem primeru je sedaj

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad (5)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\frac{dF}{ds} = \rho(\sin \alpha - \beta x \cos \alpha) \quad (7)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\rho}{F}(\cos \alpha + \beta x \sin \alpha) \quad (8)$$



Slika 8: Postavitev vrvi pri $\beta = 200, 500, 1000$ in $y_f = 0.8$ ter funkciji gostote $\rho(s) = 2s$. Vidimo, da se amplituda odmika manjša, ko se bližamo točki y_f

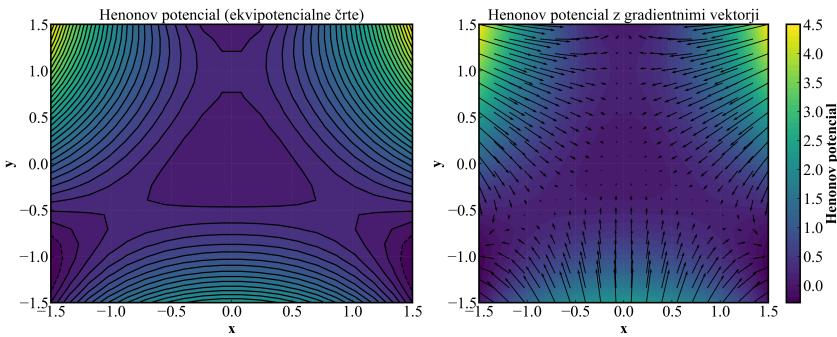
Narisal sem vrvi za tako velike vrednosti β , saj imajo le te več vozlov in je tako efekt nehomogene gostote bolj viden. Amplituda x koordinate se manjša, bolj ko se bližamo y_f .

3 Hénon-Heilesov potencial

V drugi nalogi obravnavamo Hénon-Heilesov potencial, ki ima obliko

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \quad (9)$$

Za lažjo predstavo potenciala sem narisal graf z ekvipotencialnimi črtami in graf vektorskega polja potenciala.



Slika 9: Henon-Heilesov potencial narisani z dodatkom ekvipotencialnih črt ter vektorskega polja

V tem potencialu bomo gledali gibanje točkastega telesa. Telo ima energijo $H = T + U$, kjer je $T = 1/2(u^2 + v^2)$ kinetična energija. Da se dokazat, da je gibanje omejeno znotraj ekvipotencialne črte okrog središča, če ima telo energijo $E < 1/6$. Pri računanju bomo uporabili sistem diferencialnih enačb

$$\dot{x} = u \quad (10)$$

$$\dot{y} = v \quad (11)$$

$$\dot{u} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x - 2xy \quad (12)$$

$$\dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -y - x^2 + y^2 \quad (13)$$

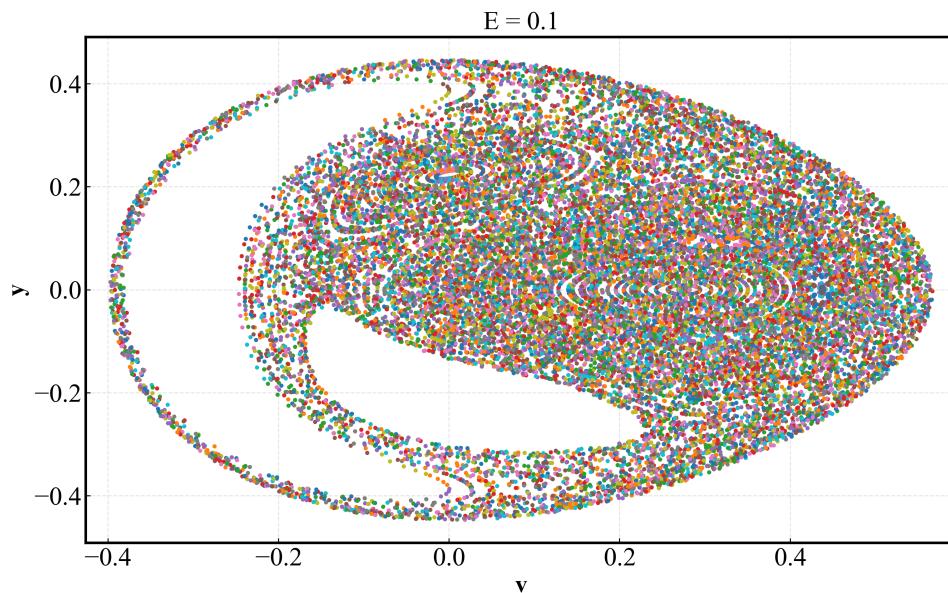
$$(14)$$

Začetni pogoj bom postavil nekam na daljico, ki gre iz koordinatnega izhodišča $(0, 0)$ do točke $(0, 1)$. Prav tako pa sem pri analizi izračunal začetno hitrost kot

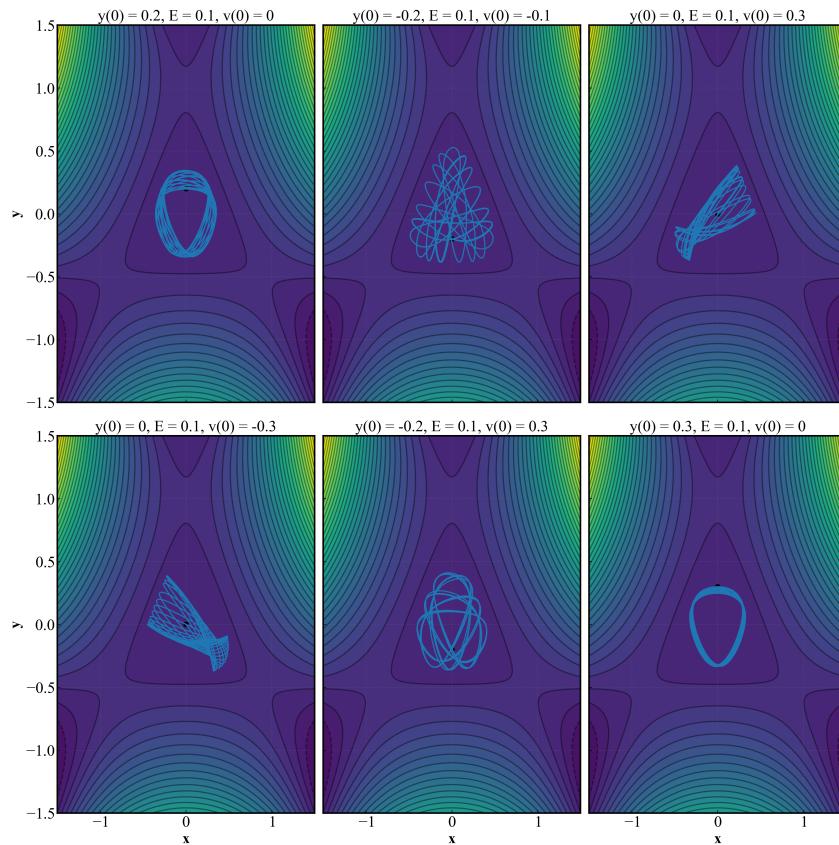
$$\dot{x}(0) = \sqrt{2E - y^2(0) + \frac{2}{3}y^3(0) - \dot{y}^2(0)}$$

Pri problemu imamo torej tri parametre (y, \dot{y} in E). Tako da bom lahko analiziral in risal grafe v dveh dimenzijah za izbrano vrednost energije.

Podobno kot pri prejšnji nalogi, tudi tukaj obstaja način, kako klasificirati orbite glede na začetne pogoje. Za preučevanje dinamike sistema lahko uporabimo Poincarjev presek. V tem primeru sem Poincarjev presek implementiral tako: najprej sem rešil sistem diferencialnih enačb s pomočjo metode `solve_ivp`, nato sem izbrane začetne pogoje integriral do določenega maksimalnega časa in beležil preseke z ravnino $x = 0$. Dobljene točke so nato prikazane v faznem prostoru (y, v) , kar omogoča analizo tipov orbit pri različni energijah in začetnih pogojih.

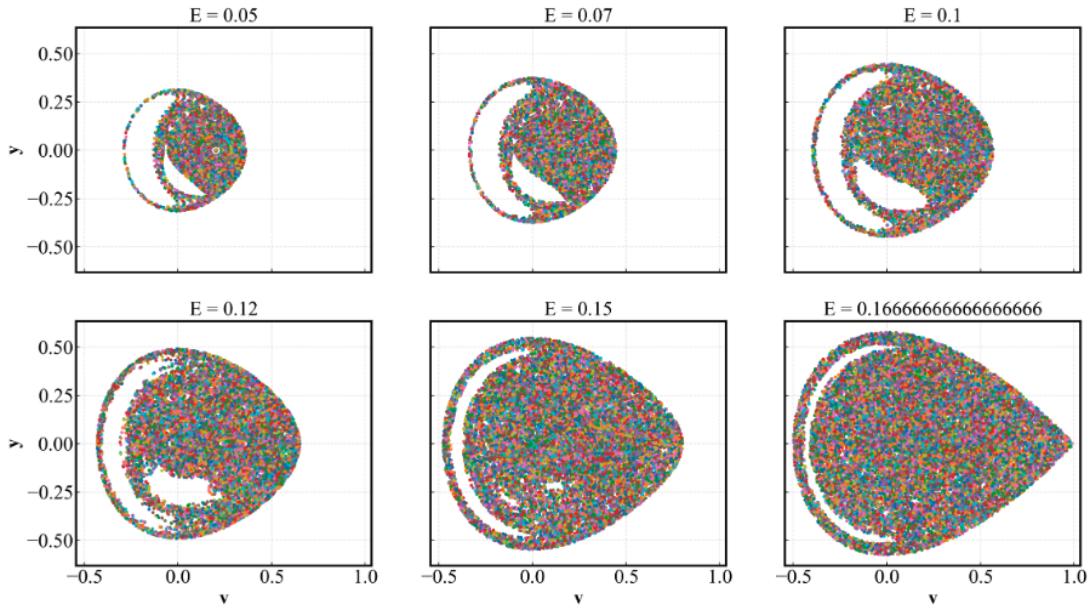
Slika 10: Poincarejev presek za $E = 0.1$

Iz tega preseka lahko najdimo nekaj stabilnih začetnih pogojev, iz katerih lahko potem narišemo različne periodične in neperiodične orbite. Nekaj zanimivih sem narisal spodaj



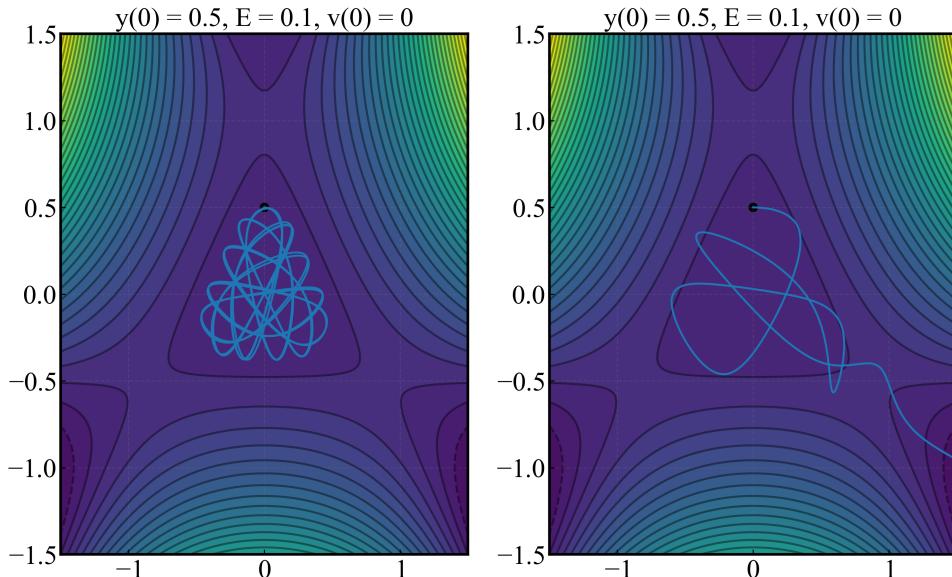
Slika 11: Različne rešitve problema, kjer sem začetne pogoje izluščil iz Poincarejevega preseka narisanega na sliki 10.

Prav tako pa sem narisal še poincarjeve preseke za različne vrednosti energije do $E = 1/6$.



Slika 12: Poincarejev presek za $E = 0.05, 0.07, 0.1, 0.12, 0.15$ in $1/6$

Na koncu pa me je zanimalo, kakšna bi bila orbita, če bi bila energija več kot ta magični threshold $1/6$, zato sem ob istih začetnih pogojih (y, \dot{y}) narisal trajektorije energij pri $E = 0.1$ in 0.2 . Vidimo, da po zelo kratkem času telo pobegne iz potenciala pri energiji 0.2



Slika 13: Primer orbite, ki pobegne iz potenciala.