



Navadne diferencialne enačbe: začetni problem

Modelska analiza 2, vaja 1

Avtor: Urban Pečoler

Vpisna številka: 28242019

Februar 2025

Kazalo

1	Uvod	1
2	Problem dveh teles	2
3	Dve sonci	7
4	Sistem z mimobežno zvezdo	9

1 Uvod

V tej nalogi obravnavam začetne probleme navadnih diferencialnih enačb na primeru gravitacijsko vezanih sistemov. Modeliram gibanje teles pod vplivom gravitacijskega potenciala oblike $V(r) = -\frac{1}{r}$ in analiziram tri različne konfiguracije sistema:

1. **Planet kroži okoli Sonca:** Modeliram gibanje planeta okoli masivne centralne zvezde (Sonce) v gravitacijskem potencialu $V(r) = -\frac{1}{r}$. Pri tem numerično rešujem Newtonove gibalne enačbe in preverjam ohranitvene zakone sistema, kot sta ohranitev energije in vrtilne količine.
2. **Dvojna zvezda s planetom:** Obravnavam sistem dveh masivnih zvezd, ki krožita okoli skupnega težišča, in dodaten planet, ki se nahaja na neki začetni razdalji od sistema z določeno začetno hitrostjo. Analiziram stabilnost planetove orbite in vpliv gravitacijskih motenj dveh zvezd na njegovo gibanje.
3. **Mimobežna zvezda in centralna zvezda:** Simuliram prehod masivne zvezde mimo druge stacionarne zvezde in analiziram trajektorijo mimobežne zvezde ter učinek gravitacijskega vzajemnega privlaka.

Za numerično reševanje gibalnih enačb uporabljam dve metodi: **RK45** in **Radau**, ki sta del funkcije `solve_ivp()` iz knjižnice `scipy`, in lastno implementiran Verletov algoritem.

Metoda RK45 je eksplisitna metoda Runge-Kutta višjega reda z adaptivnim časovnim korakom. Osnovana je na dveh različicah Runge-Kutta sheme, četrtega in petega reda, kar omogoča oceno napake in avtomatsko prilagajanje velikosti koraka Δt . Njena prednost je visoka natančnost za gladke funkcije, vendar je manj primerna za dolgoročne simulacije sistemov, kjer je ključno ohranjanje energije.

Verletov algoritem je eksplisitna numerična metoda, ki se pogosto uporablja za reševanje gibalnih enačb v gravitacijskih sistemih. Temelji na zamisli, da lahko novo lego telesa izračunam neposredno iz prejšnjih vrednosti brez potrebe po neposrednem računanju hitrosti.

Uporabljam tako imenovano *velocity Verlet* različico algoritma, ki jo razdelim na tri korake:

- **Prvi kick (posodobitev hitrosti na polovici koraka):**

$$\mathbf{v} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \mathbf{v}(t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}(t),$$

kjer je $\mathbf{a}(t)$ pospešek, ki ga določam iz gravitacijskega zakona.

- **Drift (posodobitev lege):**

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta t \mathbf{v} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right).$$

- **Drugi kick (zaključek posodobitve hitrosti):**

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}(t + \Delta t).$$

Prednost Verletove metode je, da je simplektična, kar pomeni, da ohranja energijo sistema mnogo bolje kot klasične eksplisitne metode. Poleg tega omogoča stabilno integracijo dolgotrajnih orbitalnih simulacij.

2 Problem dveh teles

Najprej sem obravnaval problem dveh teles, ki je analogen planetu ki kroži okrog sonca. Sistem opisuje gibalna enačba

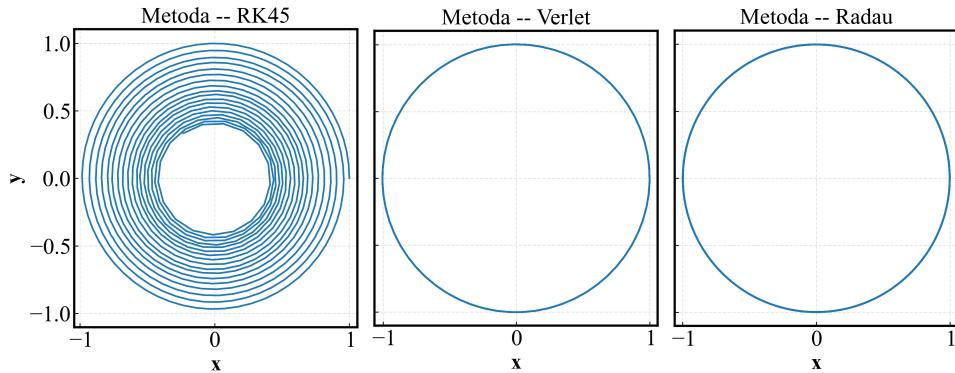
$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \quad (1)$$

Pri celotni analizi naloge sem delal v dveh dimenzijah. Tako sem prevedel (1) na sistem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \\ \dot{u} &= -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \dot{v} &= -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

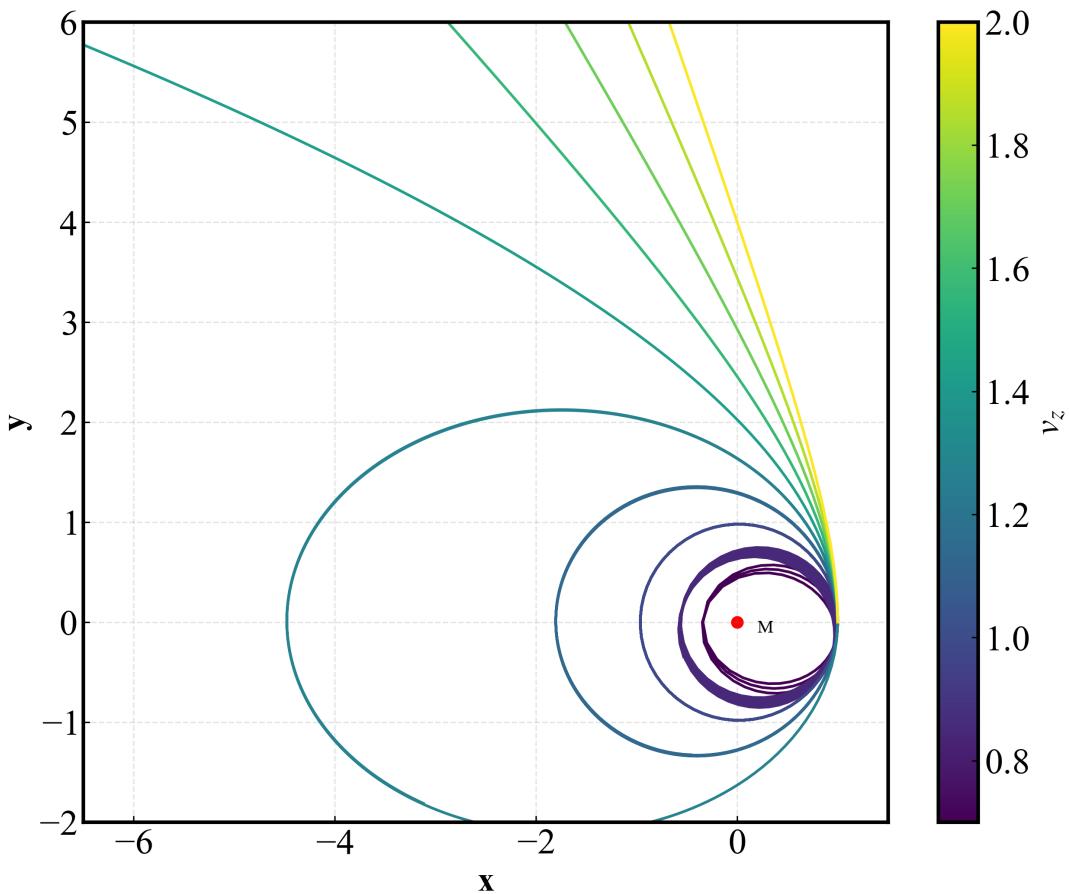
Da je bilo manj računanja in pisanja v kodi, sem postavil $M = G = m = 1$ skozi celotno analizo naloge, prav tako pa sem postavil začetno oddaljenost planeta na $R = 1$. Tako so začetni pogoji planeta spravljeni v vektor $(1, 0, 0, v_z)^T$.

Da sem videl, kako se obnašajo različni integratorji, sem najprej narisal najpreprostejši primer, kjer je $v_z = 1$. Takšna začetna hitrost bi nam morala dati krožnico.



Slika 1: Izračunana trajektorija planeta z začetnimi pogoji $(1, 0, 0, 1)$ s pomočjo algoritmov RK45, Verlet in Radau.

Kot je razvidno iz slike 1, je trajektorija planeta v tem primeru krožnica, vendar pa metoda RK45 kar hitro začne šepati in že po par obhodih izgubimo obliko, saj zelo slabo ohranja energijo. Za izris ostalih trajektorij v odvisnosti od v_z sem uporabil Verletov integrator.

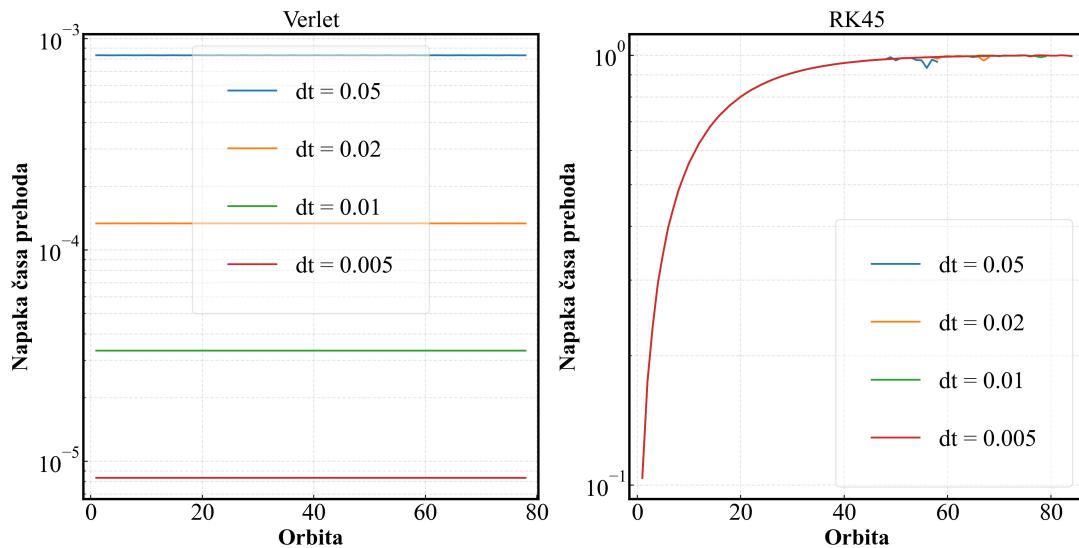


Slika 2: Izračunana trajektorija planeta z začetnimi pogoji $(1, 0, 0, v_z)$, za različne v_z . Kot rezultat vidimo vse možne krivulje (parabola, hiperbola, elipsa in krožnica).

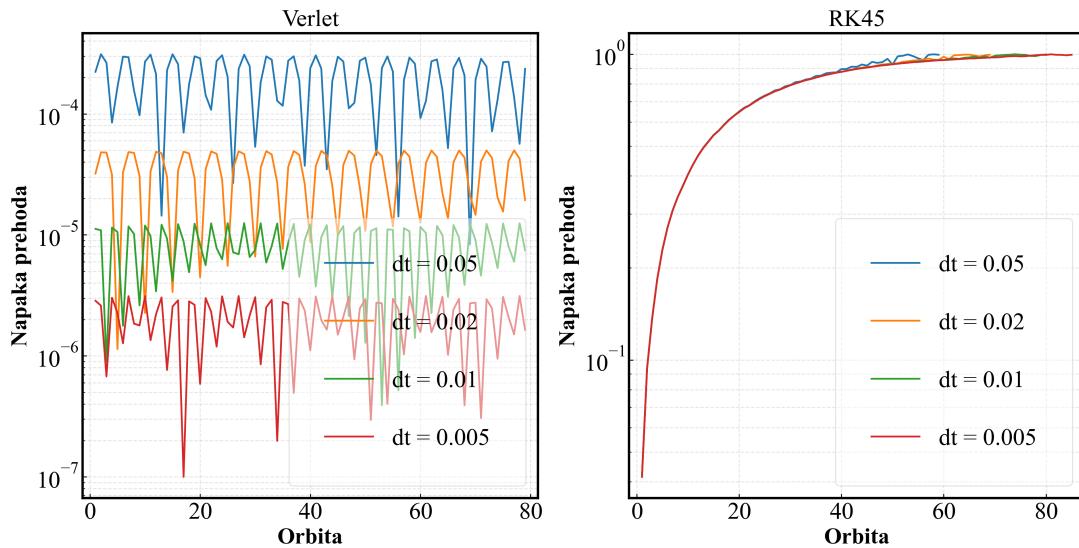
Iz slike 2 vidimo, da je orbita planeta močno odvisna od njegove hitrosti. Da se izračunat točno obliko orbite glede na v_z in sicer

$$\begin{aligned}
 v_z = 1 &\rightarrow \text{krožnica} \\
 v_z < 1 &\rightarrow \text{elipsa} \\
 1 < v_z < \sqrt{2} &\rightarrow \text{elipsa} \\
 v_z = \sqrt{2} &\rightarrow \text{parabola} \\
 v_z > \sqrt{2} &\rightarrow \text{hiperbola}
 \end{aligned}$$

Grafično je najlažje pokazati stabilnost metode tako, da izračunamo ohranitev razdalje planeta pri kroženju in časa ene periode. Ker integrator računa diskretne točke v odvisnosti od časovnega koraka, sem najprej preveril, da je točka y_{i+1} večja od 0 in hkrati točka y_i manjša od nič ob pogoju da je $x_i > 0$. Tako sem vedel da sem ravno na prehodu čez x-os. Nato pa sem z uporabo linearne interpolacije izračunal natančnejšo oceno časa in lege prehoda čez $y = 0$. Čas prehoda t_{cross} sem določil iz linearne aproksimacije med zaporednima točkama (t_{i-1}, y_{i-1}) in (t_i, y_i) . Podobno sem linearno interpoliral x -koordinato pri času t_{cross} , da sem določil tudi lego pri prehodu.



Slika 3: Stabilnost metode Verlet in RK45. Graf prikazuje napako časa prehoda $T - 2\pi$ v odvisnosti od zaporedne orbite.



Slika 4: Stabilnost metode Verlet in RK45. Graf prikazuje napako lege prehoda $R-1$ v odvisnosti od zaporedne orbite.

Primerjal sem metodo RK45, ki se je "na oko" odrezala najslabše in metodo Verlet, ki sem jo napisal sam, pri različnih časovnih korakih. Videti je, da je Verlet precej stabilen, logično da so rezultati boljši pri manjših časovnih korakih, saj sem za interpolacijo izbral zelo primitivno metodo. RK45 pa vidimo da zelo hitro narašča k napaki reda začetne oddaljenosti od koordinatnega središča.

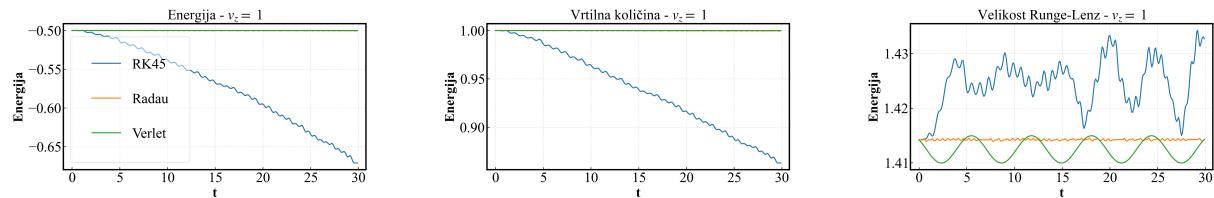
Poleg stabilnosti metod, pa je bilo zanimivo pogledati tudi ohranjanje drugih količin, kot so

energija, vrtilna količina in Runge-Lentzov vektor. Količine sem izračunal po enačbah

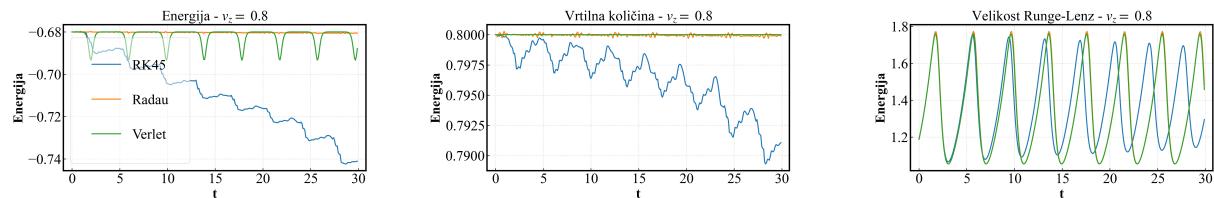
$$\mathbf{E} = T + V = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

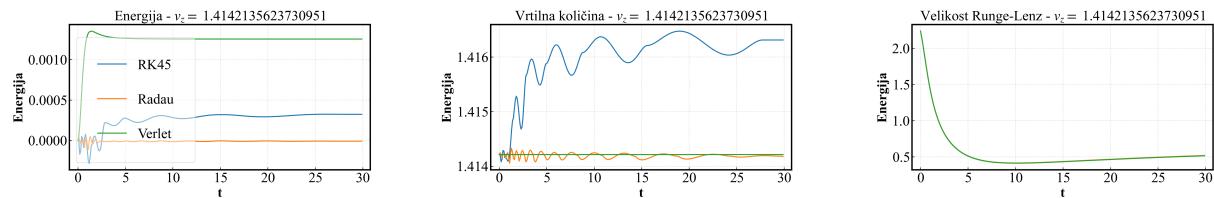
$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$



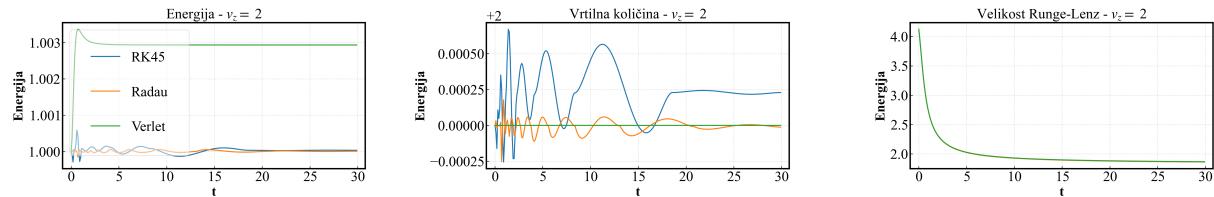
Slika 5: Ohranitev energije, vrtilne količine in velikosti Runge-Lentzovega vektorja za tri različne integratorje (Verlet, Radau in RK45) pri začetni hitrosti $v_z = 1$



Slika 6: Ohranitev energije, vrtilne količine in velikosti Runge-Lentzovega vektorja za tri različne integratorje (Verlet, Radau in RK45) pri začetni hitrosti $v_z = 0.8$



Slika 7: Ohranitev energije, vrtilne količine in velikosti Runge-Lentzovega vektorja za tri različne integratorje (Verlet, Radau in RK45) pri začetni hitrosti $v_z = \sqrt{2}$



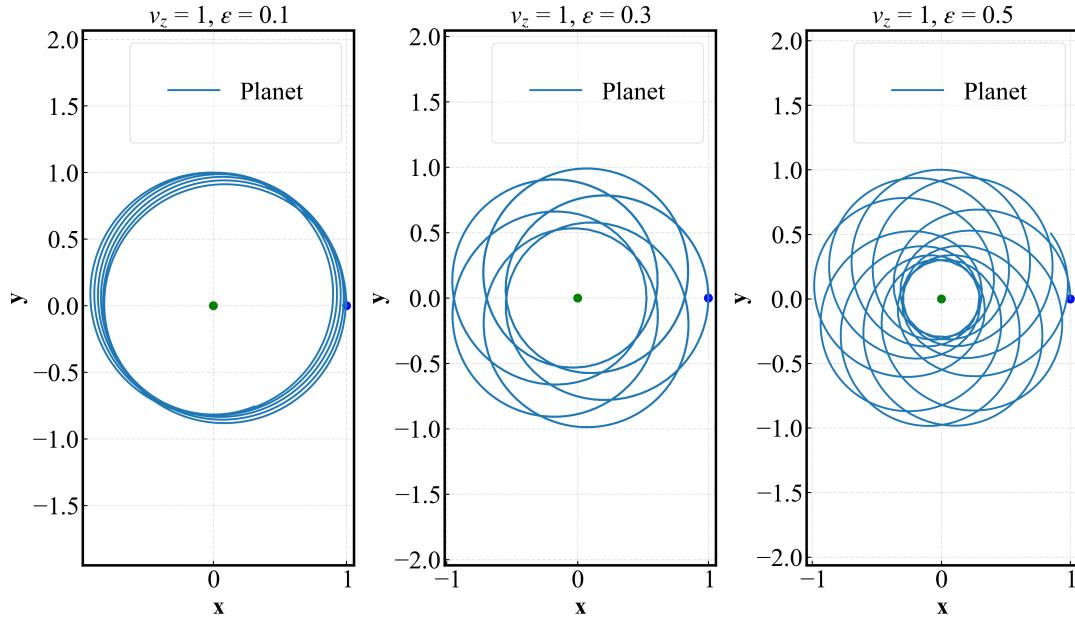
Slika 8: Ohranitev energije, vrtilne količine in velikosti Runge-Lentzovega vektorja za tri različne integratorje (Verlet, Radau in RK45) pri začetni hitrosti $v_z = 2$

Slike kažejo podobno zgodbo kot analiza stabilnosti orbit, RK45 odstopa, medtem ko sta Verlet in Radau precej konstantni in ohranjata vrtilno količino ter energijo. Malo se zaplete pri Runge-Lentzovem vektorju, ki je pri krožni in eliptični orbiti precej "razigran". Treba je omeniti še, da sem risal velikost RL vektorja in ne po komponentah.

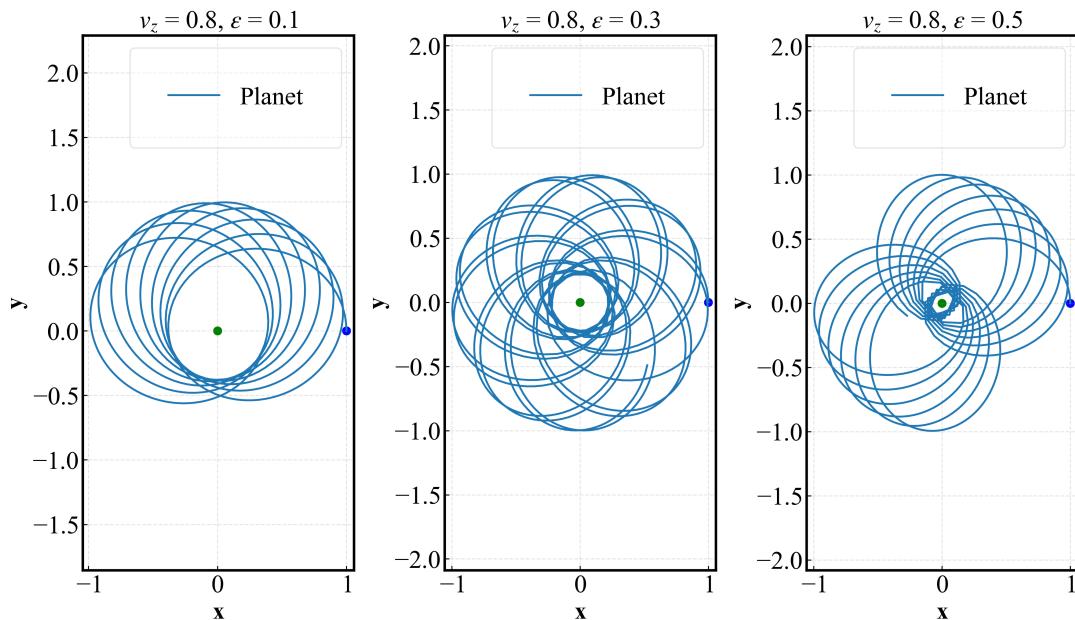
Za konec prve naloge pa sem si pogledal še kakšne orbite bi dobili, če bi potencial modificirali iz $1/r$ v

$$V = \frac{1}{r^{1+\epsilon}}$$

kjer je ϵ neka majhna vrednost. Dobimo kar nekaj zanimivih orbit, nekaj sem jih narisal na sliki 9 (za začetno hitrost $v_z = 1$) in na sliki 10 (za začetno hitrost $v_z = 0.8$).



Slika 9: Orbite pri modificiranem potencialu za $\epsilon = [0.1, 0.3, 0.5]$ in pri začetni hitrosti $v_z = 1$



Slika 10: Orbite pri modificiranem potencialu za $\epsilon = [0.1, 0.3, 0.5]$ in pri začetni hitrosti $v_z = 0.8$

3 Dve sonci

Pri tem delu naloge sem obravnaval sistem, kjer dve sonci enakih mas krožita okrog skupnega težišča na razdalji R_s . Medsebojni vpliv sonc zanemarimo, tako da bo njuna orbita vedno krožnica. Planet pa postavimo na enake začetne pogoje kot pri prvi naloge $(1, 0, 0, v_z)^T$. Sonci, ki krožita imata nek obhodni čas t_0 , lega sonc ob času t pa je (R, θ) , kjer je θ

$$\theta = \theta_0 + \frac{2\pi}{t_0} t$$

Tako so kartezične koordinate prvega sonca

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \theta = R \cos \left(\theta_0 + \frac{2\pi}{t_0} t \right) \\ y_1 &= R \sin \theta = R \sin \left(\theta_0 + \frac{2\pi}{t_0} t \right) \end{aligned}$$

Zaradi simetrije sistema pa za drugo sonce velja preprosto

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_1 \\ y_2 &= -y_1 \end{aligned}$$

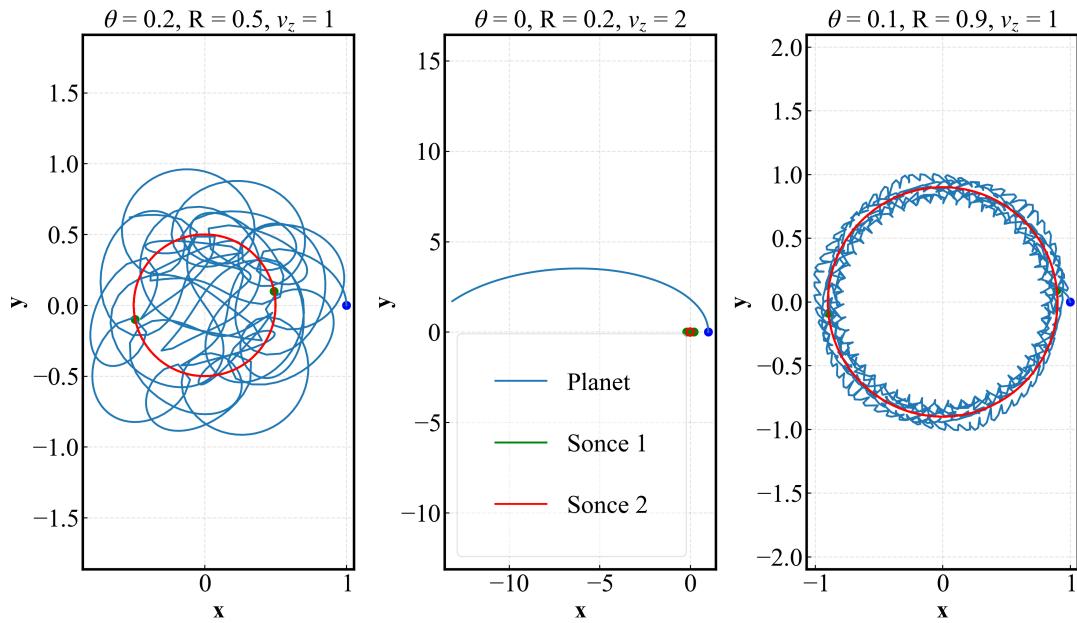
Ker zdaj delamo z dvema zvezdama, moramo preureediti tudi gibalno enačbo (1):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}$$

kjer \mathbf{r}_1 in \mathbf{r}_2 predstavljata razdaljo sonc do planeta. Spet lahko iz gibalne enačbe dobimo sistem diferencialnih enačb:

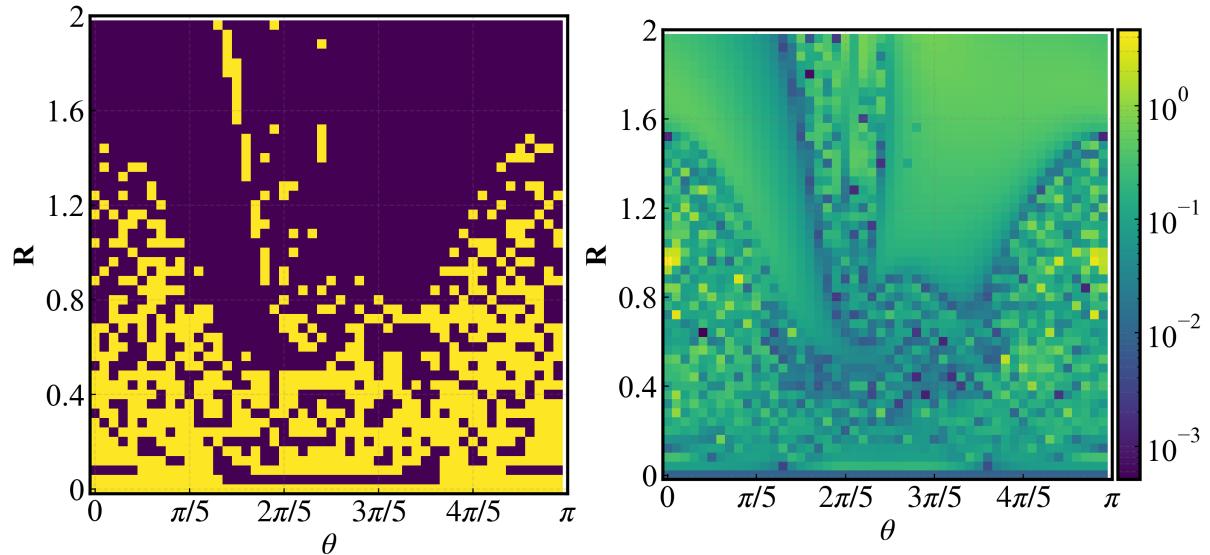
$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \\ \dot{u} &= \frac{x_1 - x}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^{3/2}} + \frac{x_2 - x}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^{3/2}} \\ \dot{v} &= \frac{y_1 - y}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^{3/2}} + \frac{y_2 - y}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Z manipulacijo začetnih pogojev se lahko najde nekaj "karakterističnih" trajektorij.



Slika 11: Trajektorije planeta v sistemu dveh sonc v odvisnosti od začetnih pogojev θ , R in v_z

Slika 11 prikazuje orbite za vezan sistem, sistem, kjer je planet pobegnil in sistem kjer se je planet ”vezal z enim” izmed dveh sonc. Za konec pa sem naredil še analizo, ali je sistem vezan ali ne po času simulacije $t_k = 100$. Sistem sem klasificiral da je vezan, če je njegova končna energija bila manjša od 0 in nevezan če je bila večja od 0. Simuliral sem za različne polmere krožnice sonc (od 0 do 2) in za različne začetne pozicije sonc (θ med 0 in π). Prav tako pa sem narisal še matriko energij pri teh začetnih pogojih.



Slika 12: [LEVO] Usoda sistema ob času $t_k = 100$, kjer rumena barva predstavlja vezan sistem (energija > 0) in vijolična barva nevezan sistem (energija ≤ 0), [DESNO] Absolutna vrednost energije pri času $t_k = 100$

4 Sistem z mimobežno zvezdo

V tej nalogi raziskujemo interakcijo med planetnim sistemom in mimo prihajajočo zvezdo z enako maso, ki se premika po ravni črti. Mimobežna zvezda pridrvi v tirni ravnini z dvakratno obodno hitrostjo planeta in potuje na razdalji 1.5 radija planetnega tira, pri čemer zanemarimo keplerski tir prihajajoče zvezde. Nalogo poenostavimo tako, da predpostavimo, da vpadna zvezda začne svoje gibanje, ko je 10 radijev planetnega tira daleč od svojega perihelija, in jo spremojamo do trenutka, ko se znajde v točki, ki je simetrična na začetno.

Za opis gibanja obeh zvezd uporabimo enačbi gibanja v dveh dimenzijah, kjer sta koordinati $x(t)$ in $y(t)$ obeh zvezd povezani z njihovimi pospeški in medsebojno gravitacijsko privlačnostjo. Sistem lahko opišemo z naslednjimi enačbami gibanja:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{GM_2}{r^2} \frac{x_1 - x_2}{r}, \quad \ddot{y}_1 = -\frac{GM_2}{r^2} \frac{y_1 - y_2}{r}, \quad (2)$$

za planetno zvezdo (zvezda 1), kjer je r razdalja med obema zvezdama:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Pri tem je M_2 masa mimo prihajajoče zvezde, x_1 in y_1 pa sta koordinate planeta. Za mimo prihajajočo zvezdo uporabimo podobne enačbe:

$$\ddot{x}_2 = -\frac{GM_1}{r^2} \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad \ddot{y}_2 = -\frac{GM_1}{r^2} \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad (3)$$

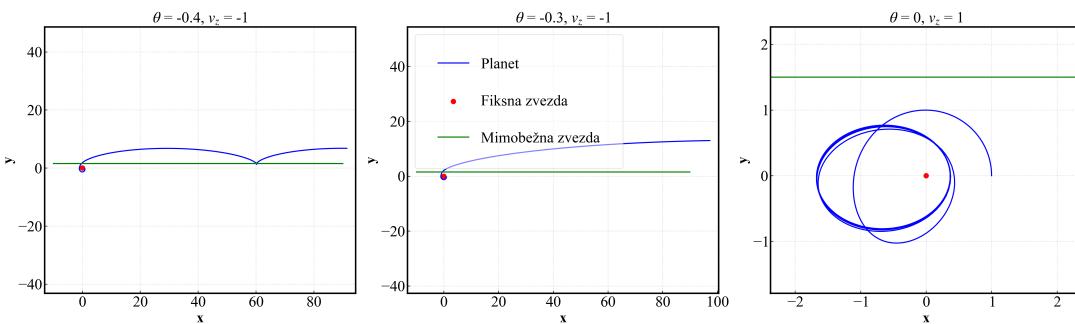
kjer je M_1 masa planetnega sistema.

Za začetne pogoje predpostavljamo, da je mimo zvezda na začetku v točki $x_2 = -10$ in se premika s hitrostjo $\mathbf{v}_2 = (0, 2v_z)$.

Spet lahko izpišemo sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \\ \dot{u} &= \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x - x_z(t)}{((x - x_z(t))^2 + (y - y_z(t))^2)^{3/2}} \\ \dot{v} &= \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y - y_z(t)}{((x - x_z(t))^2 + (y - y_z(t))^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

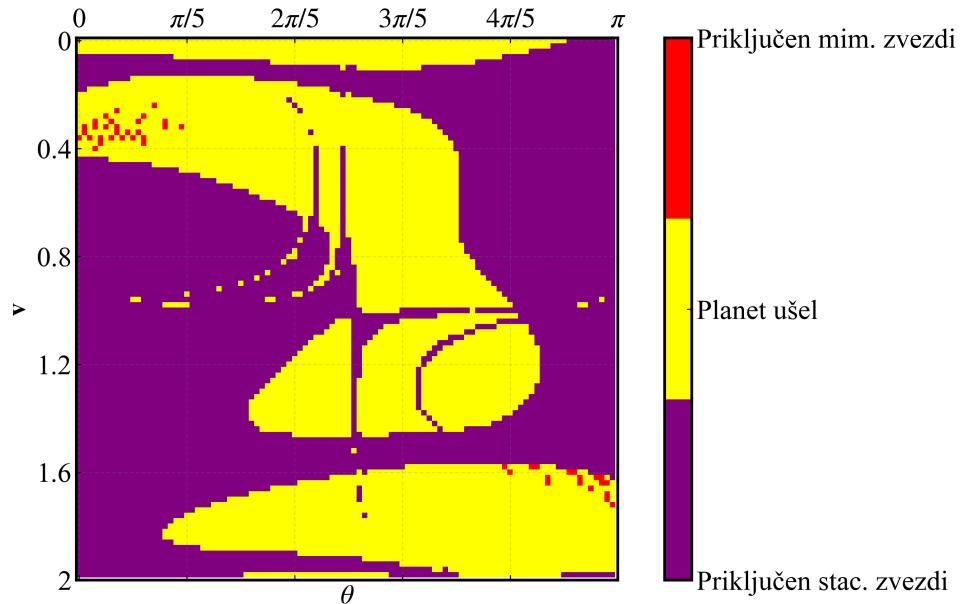
Kjer sta $x_z(t) = -10 + 2 * |v_z|t$ in $y_z(t) = 1.5$ enačbi gibanja mimobežne zvezde. Po simulaciji dobimo nekaj različnih in zanimivih orbit.



Slika 13: Trajektorije planeta v sistemu dveh sonc v odvisnosti od začetnih pogojev θ in v_z

Slika 13 prikazuje različne ureditve sistema, v odvisnosti od začetnih pogojev. Planet se lahko priključi mimobežni zvezdi, lahko uide iz potenciala obeh zvezd, lahko pa še naprej kroži okrog stacionarne zvezde, v tem primeru vidimo, da se mu "pokvari" orbita in spremeni obliko.

Tako kot v prejšnji nalogi sem tudi tukaj narisal matriko "usodešistema po času $t_k = 150$. S tem da imamo zdaj 3 različne končne primere, planet uide iz sistema, planet se priključi prvi zvezdi, planet se prkiljuči drugi zvezdi. To sem računsko pogledal tako, da sem izračunal energijo in v primeru, da je bila končna energija negativna, sem izračunal razdaljo planeta do obeh zvezd ob času t_k . Tisti zvezdi ko je bil planet takrat bližje, tisti zvezdi se je priključil.



Slika 14: Usoda sistema ob času $t_k = 100$, kjer rumena barva predstavlja nevezan sistem (energija $\dot{e} < 0$), vijolična barva vezan planet na stacionarno zvezdo (energija $\dot{e} > 0$) in rdeča barva predstavlja vezan planet na mimobežno zvezdo (energija $\dot{e} = 0$)