UNIVERSIDAD DE BURGOS

Sistemas Inteligentes

Práctica 3. EM para segmentación de imágenes

Curso 2024-2025

Pedro Latorre Carmona
Depto. Ingeniería Informática – UBU

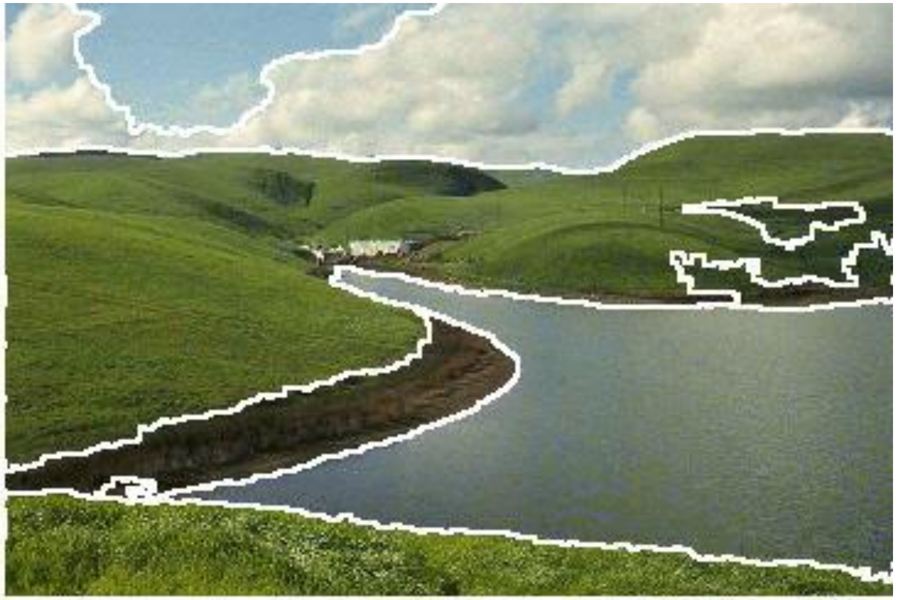
Índice

- Introducción. Qué es la segmentación de imágenes
- *Clustering* (o *agrupamiento*)
- Mixtura (mezcla) de Gausianas

Introducción

Introducción - Segmentación

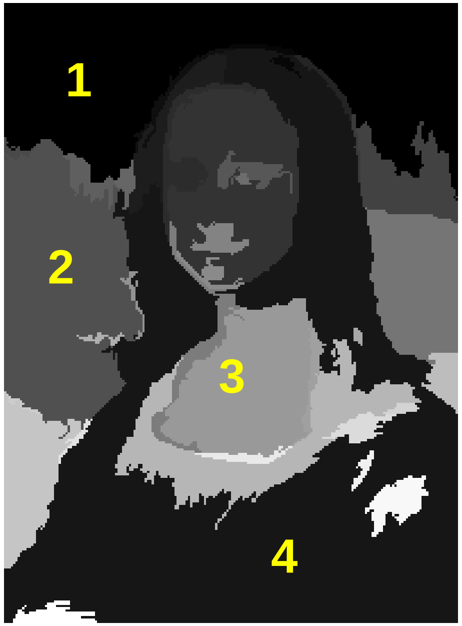
TENEMOS LO QUE PODRÍAMOS CONSIDERAR COMO DOS "IMÁGENES SEGMENTADAS"



* Imágenes de: Mean Shift: A Robust Approach toward Feature Space Analysis, by D. Comaniciu and P. Meer http://www.caip.rutgers.edu/~comanici/MSPAMI/msPamiResults.html

Introducción - Segmentación

Contorno



Etiquetas

Colores medios

Introducción - Segmentación

Podríamos definir la segmentación de imágenes como aquel proceso en el que se divide una imagen en un conjunto **conexo** (digital) de píxeles.

Existe una definición formal de conectividad aplicada a imágenes, denominada conectividad digital. Quien quiera saber un poco más:

http://topologiaparausuarios.es/GruposHH/GHH1-Conexidad.html

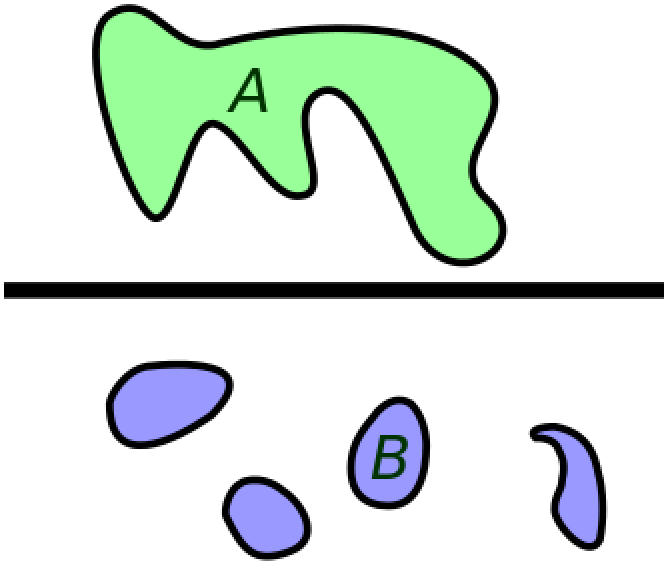
Introducción - Segmentación

De todas formas, existen formas más sencillas de entenderlo. Por ejemplo, teniendo en cuenta:

https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_conexo

A es conexo

B NO es conexo



Introducción - Segmentación

Podríamos considerar tres grandes grupos de casos:

1. Partición en regiones, las cuales terminan cubriendo toda la imagen

2. Estructuras lineales, tales como segmentos:
   - lineales
   - curvos

3. Estructuras 2D, como pueden ser:
   - círculos
   - elipses

Introducción - Segmentación

Criterios de segmentación:

El conjunto de regiones (S_i) en las que se divide una segmentación deben cumplir los siguientes criterios (entendidos en forma de **operadores matemáticos**):

FUNDAMENTAL

1. $\cup \, S_i = S$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i \neq j$
3. $\forall S_i, P(S_i) = \text{True}$
4. $P\left(S_i \cap S_j\right) = \text{False}, S_i \neq S_j, S_i \text{ adyacente a } S_j$

P es la función Predicado de homogeneidad (función matemática que define la similitud entre dos conjuntos)

Clustering o *agrupamiento*

Clustering

Imagina:

CRITERIO 1: PROGENIE

Tiburón
oveja perro
gato

gorrión
rana lagarto gaviota
víbora Mújol rojo
Carpa dorada

CRITERIO 2: EXISTENCIA DE PULMONES

tiburón
Mújol rojo
Carpa dorada

gorrión
gaviota
rana lagarto
oveja
víbora perro gato

CRITERIO 3: MEDIO DONDE LOS ANIMALES VIVEN

shark
Mújol rojo
Carpa dorada

rana

gaviota oveja
lagarto perro gato
gorrión
víbora

Clustering

Clustering significa “crear agrupaciones (clusters)”.

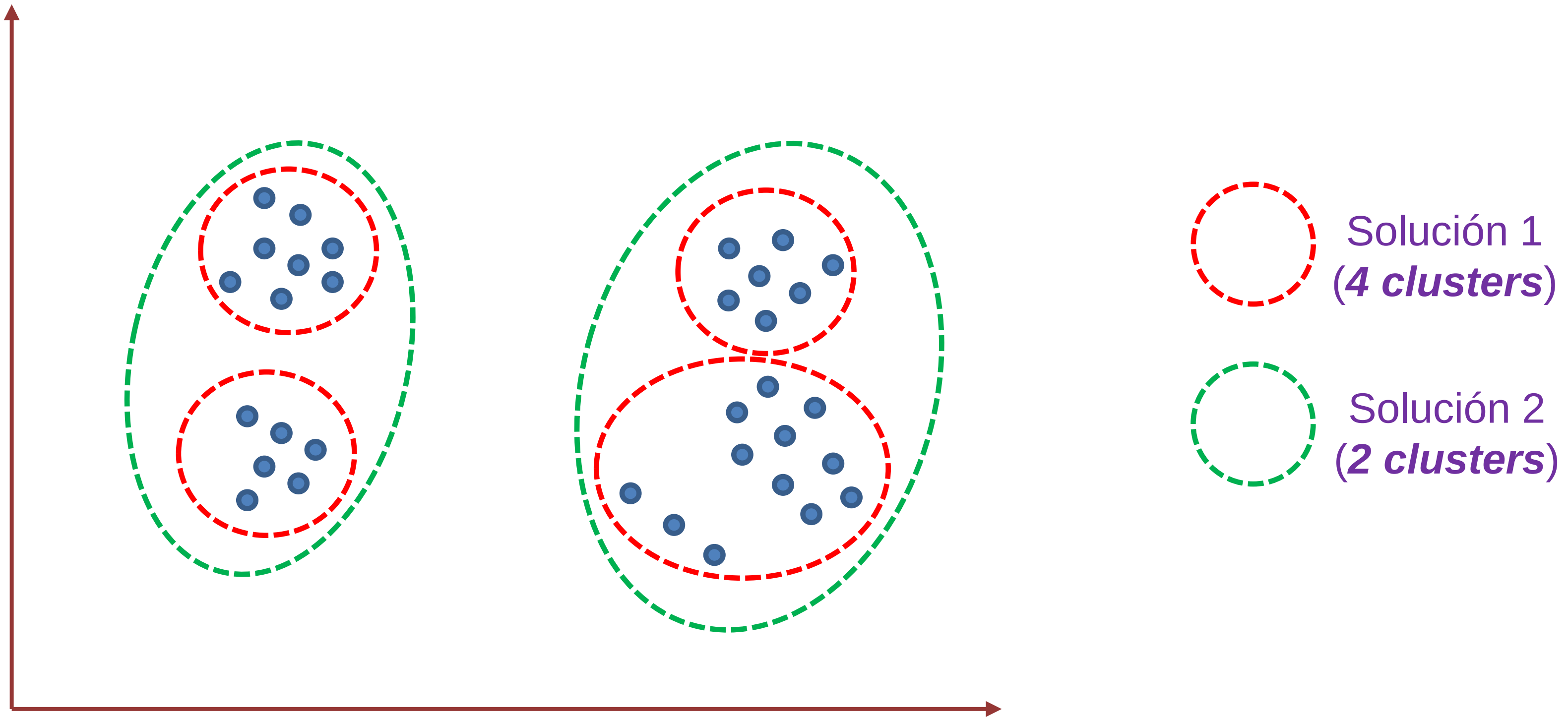
Para poder hacerlo:

- Necesitamos un **criterio**.
- Una vez se han creado los *grupos*, necesitamos una **regla de validación**.
- Por último, necesitamos **interpretar** los resultados.

Clustering

¿Por qué necesitamos validar los resultados?

Respuesta: *Porque a veces es posible obtener varias soluciones.*

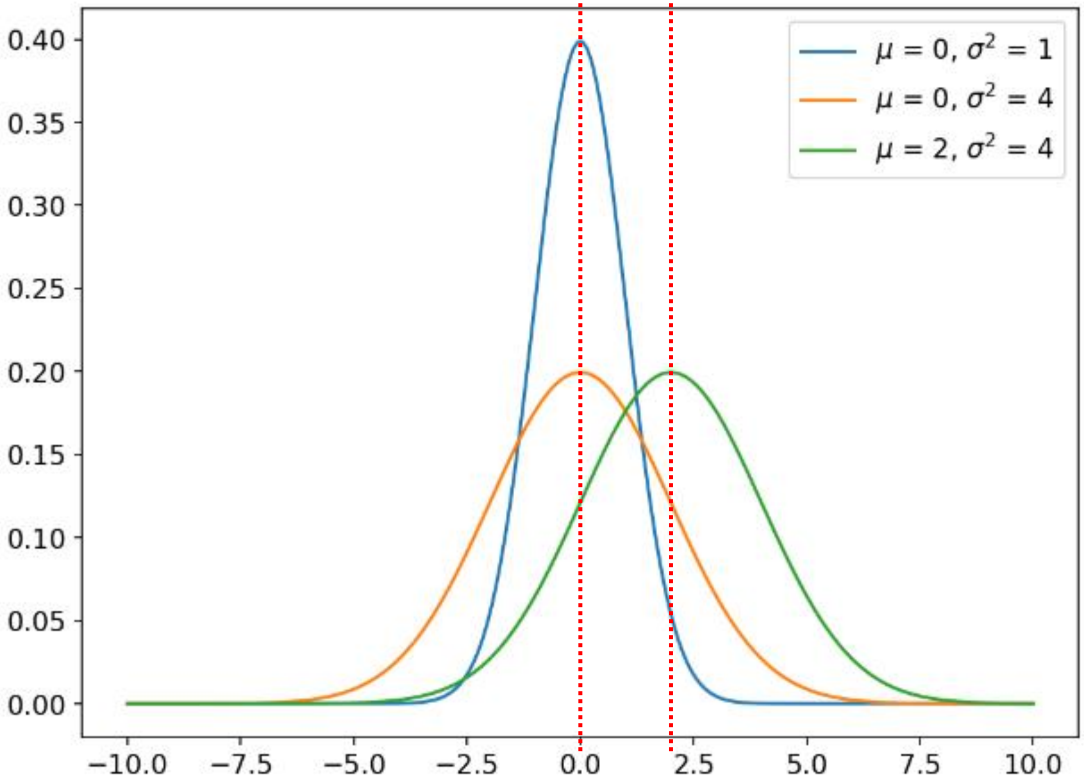


Mixtura de Gausianas y Método EM

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

¿Qué es una **(función) Gausiana**?



$$N(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

¿Qué ocurre en el caso 2D?

$$N(x \mid \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{|\Sigma|}} exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu))$$

$$N\left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right]$$

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

¿Qué propiedades tiene la matriz de covarianza?

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \sigma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

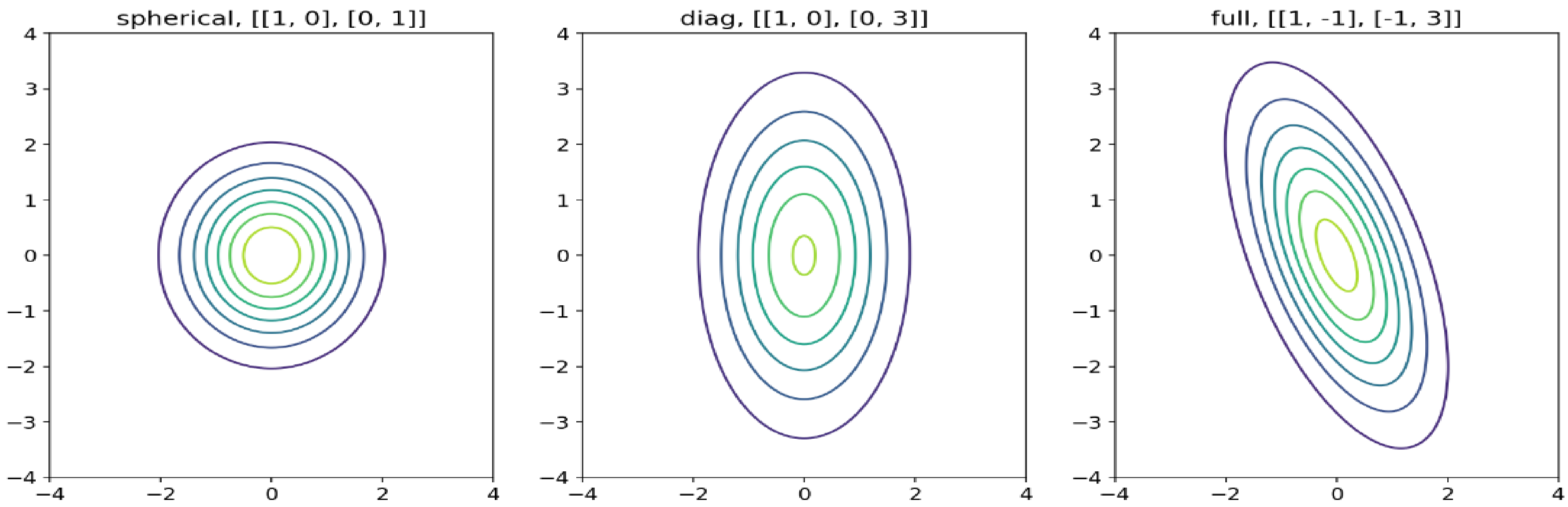
Se puede demostrar que: $\rho_{ij} = \rho_{ji} \Rightarrow \Sigma = \Sigma^T$

T representa el símbolo de **operador TRASPUESTA**.

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

¿Cómo pueden ser las **matrices de covarianza**?



Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

¿Cómo sería en 3D?

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \sigma_{22}^2 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \sigma_{33}^2 \end{pmatrix}$$

En este caso, y en general: $\rho_{ij} = \rho_{ji} \Rightarrow \Sigma = \Sigma^T$

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

Por otro lado, se puede demostrar que:

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{\sigma_{11}^2} & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{\sigma_{22}^2} \end{pmatrix}$$

Y lo mismo para 3 o más dimensiones.

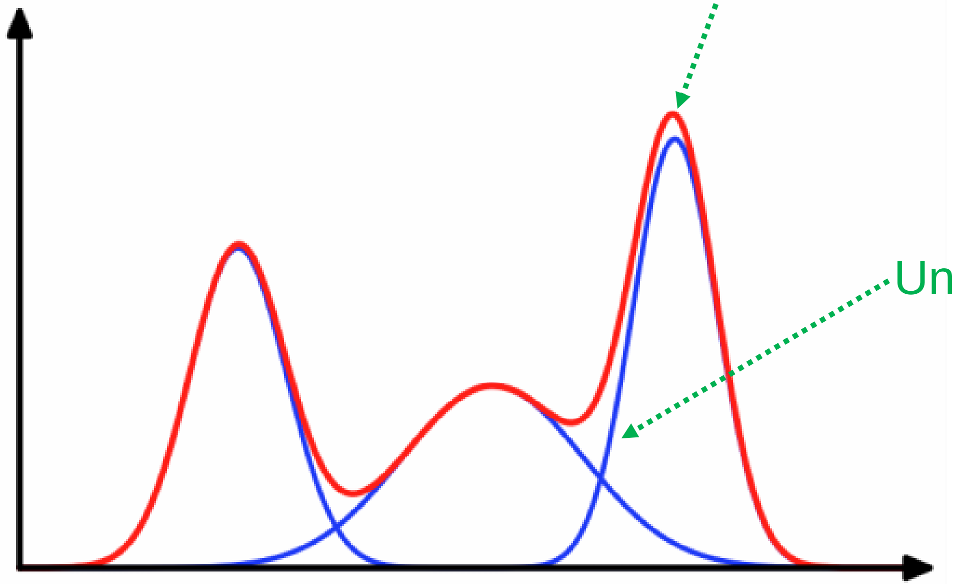
Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

¿Qué es una **Mixtura de Gausianas (*MoGs*)**?

$$p(x) = \sum_{j=1}^{M} p(\Omega_j) \cdot p(x|\Omega_j)$$

Curva envolvente–
Combinación lineal de Gausianas

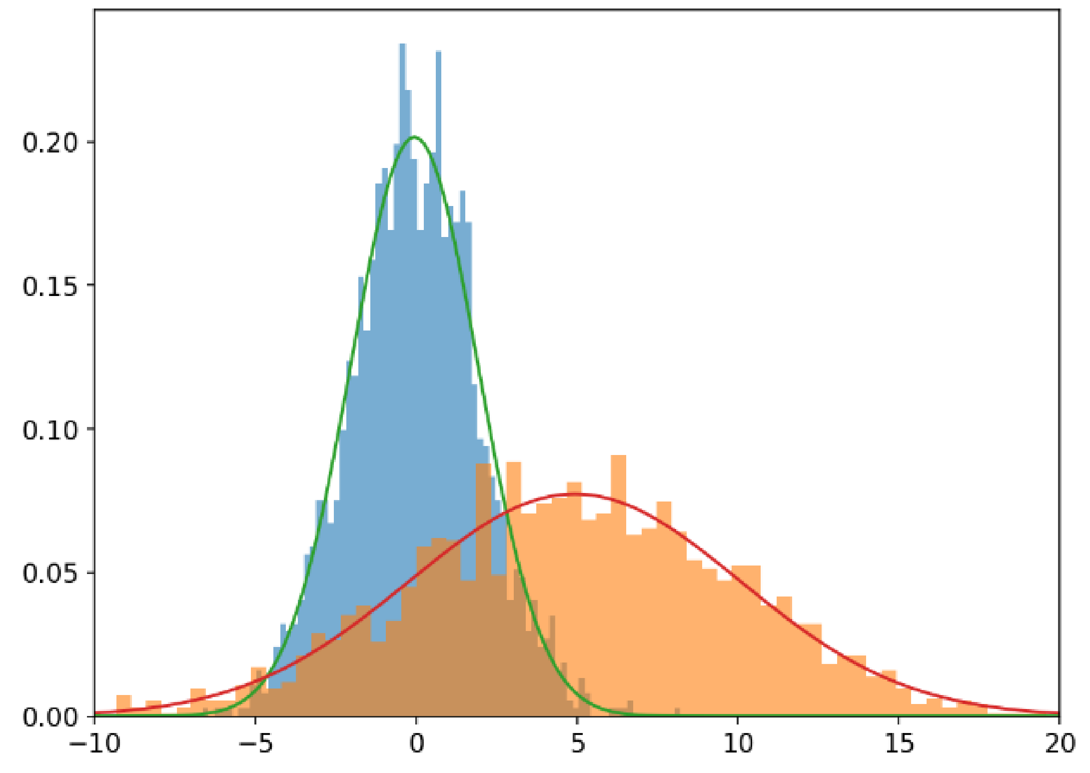


Una Gausiana 1D

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

Si tengo un histograma:



Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

¿Qué es una **Mixtura de Gausianas (*MoGs*)**?

$$\boxed{p(x) = \sum_{j=1}^{M} p(\Omega_j) \cdot p(x|\Omega_j)}$$

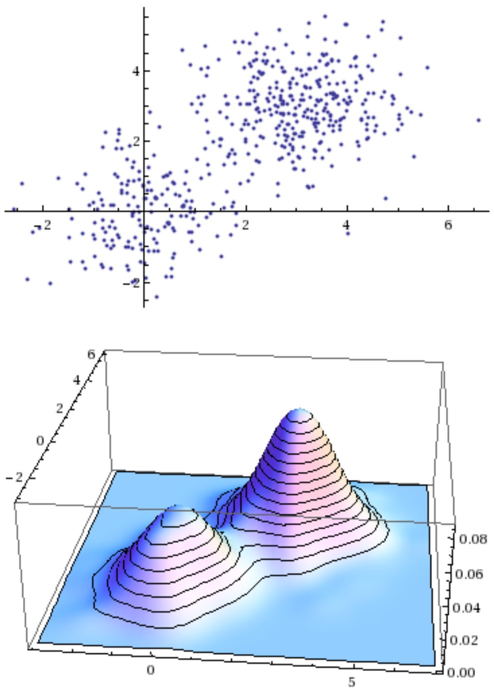
$$p(x|\Omega_j) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\left|\Sigma_j\right|^{1/2}} e^{\left[-\frac{1}{2}\cdot\left((x-\mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x-\mu_j)\right)\right]}$$

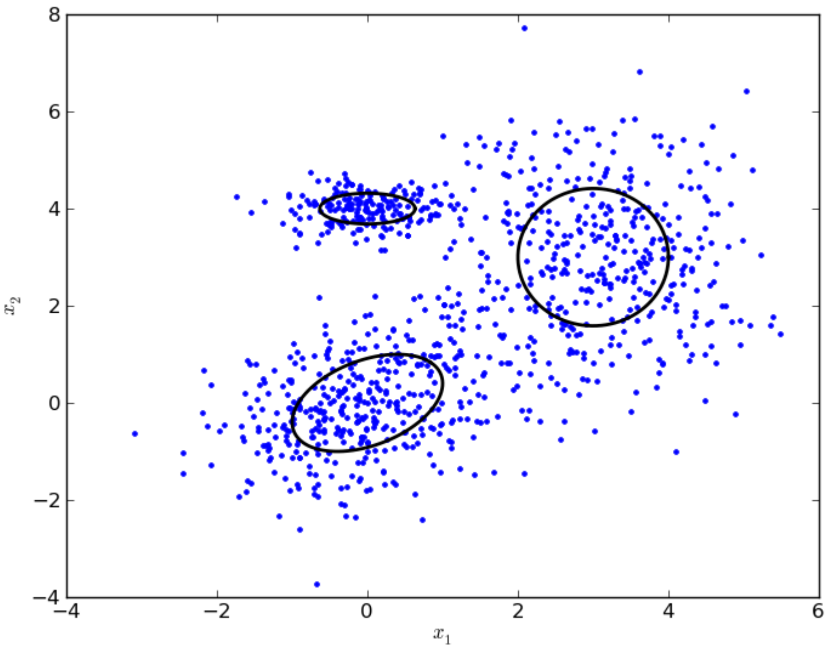
$$p(\Omega_j) \equiv \text{Pesos}$$

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

¿Qué tendríamos en 2D?





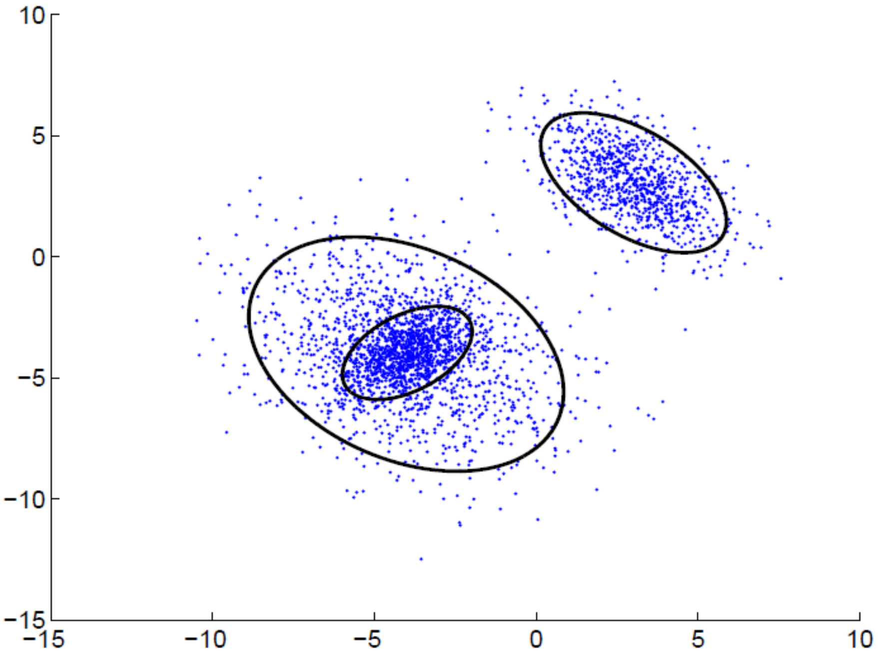
Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

En una Mixtura de Gausianas, tenemos:

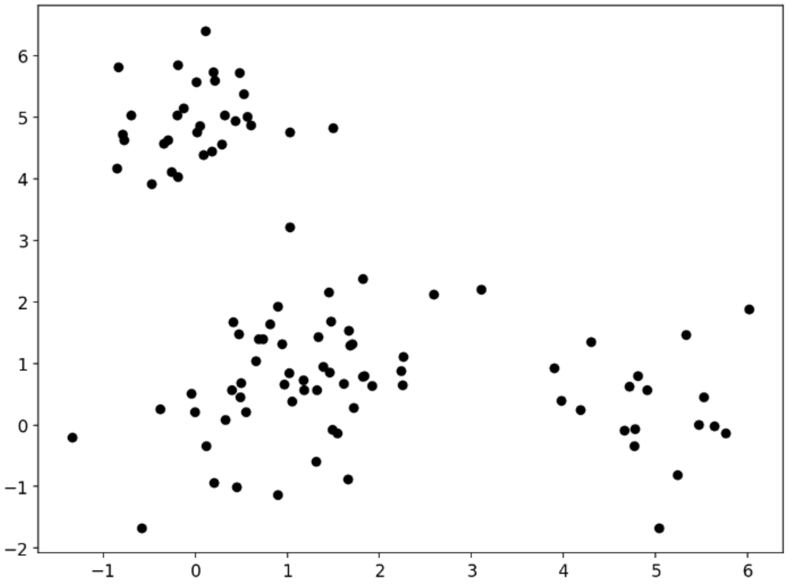
$$p(x) = \sum_{j=1}^{M} p(\Omega_j) \cdot p(x|\Omega_j)$$

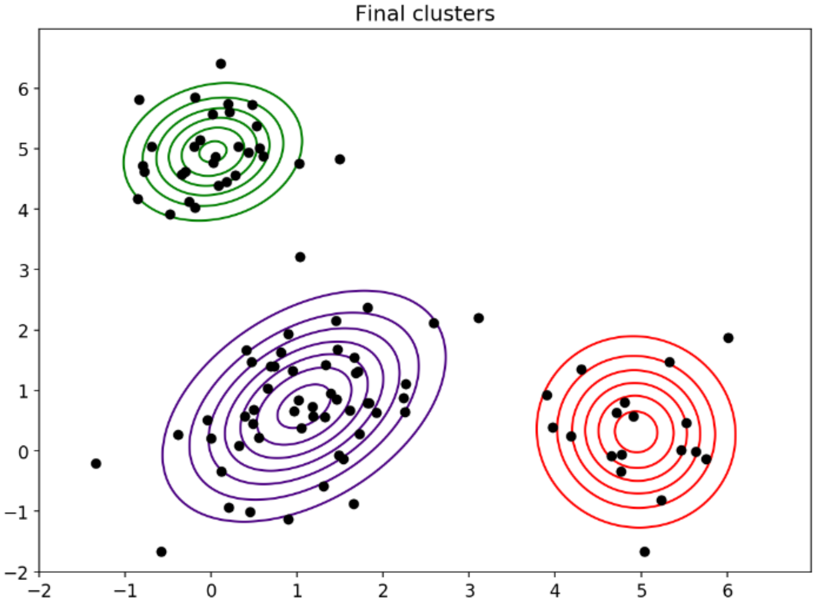
$$p(x|\Omega_j) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma_j|^{1/2}} e^{\left[-\frac{1}{2} \cdot \left((x-\mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x-\mu_j)\right)\right]}$$



Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

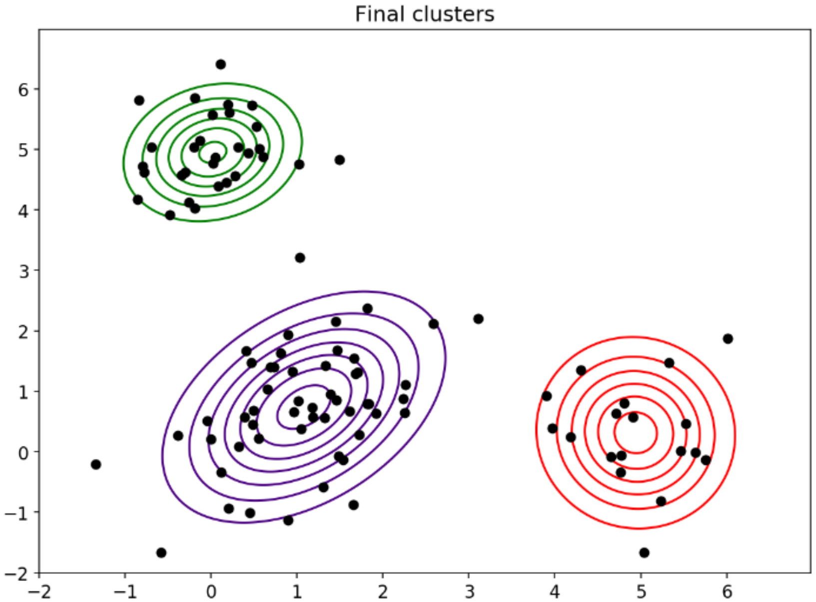


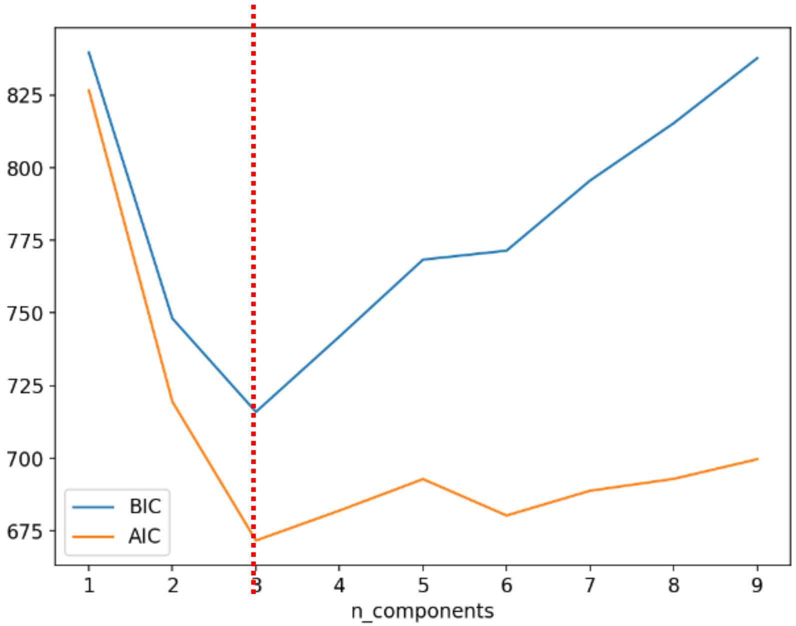


Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

¿Podemos saber el número de grupos que sería más adecuado tener?

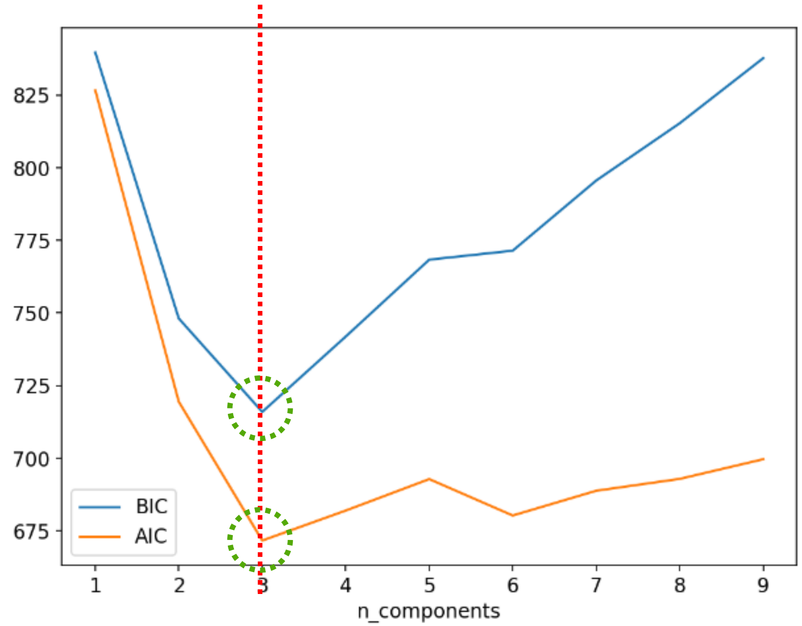




Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

¿Podemos saber el número de grupos que sería más adecuado tener, o que su distribución “permite explicar”?

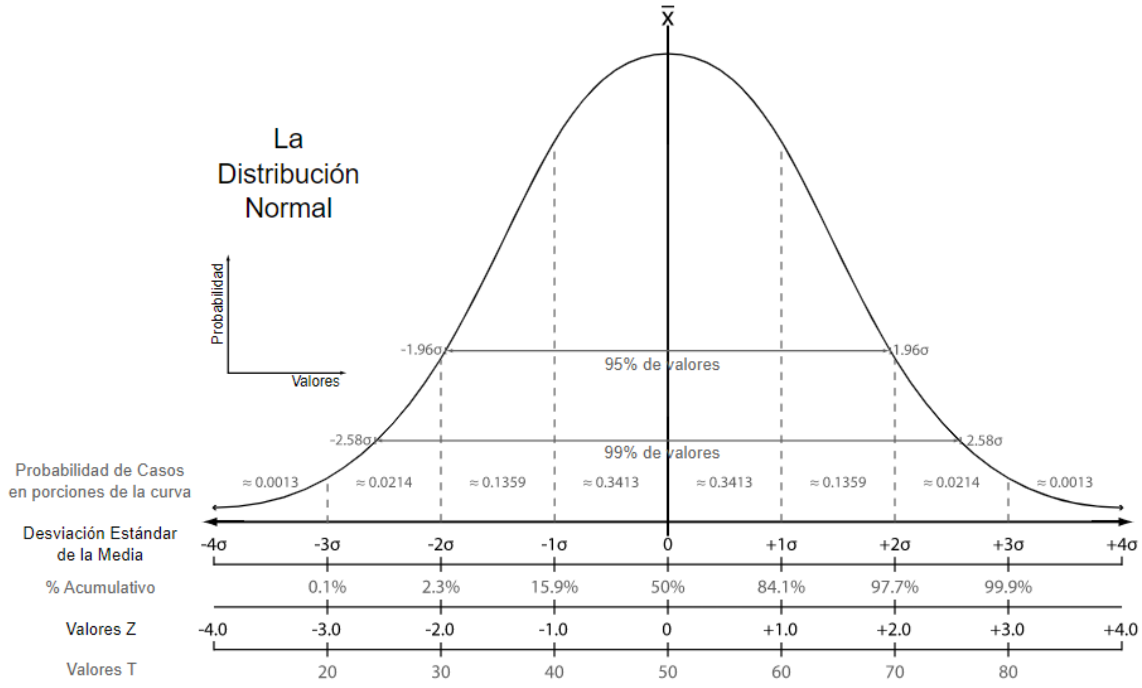


BIC: Bayes Information Criterion

AIC: Akaike Information Criterion (lo propuso el matemático/estadístico *Hirotsugu Akaike*)

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

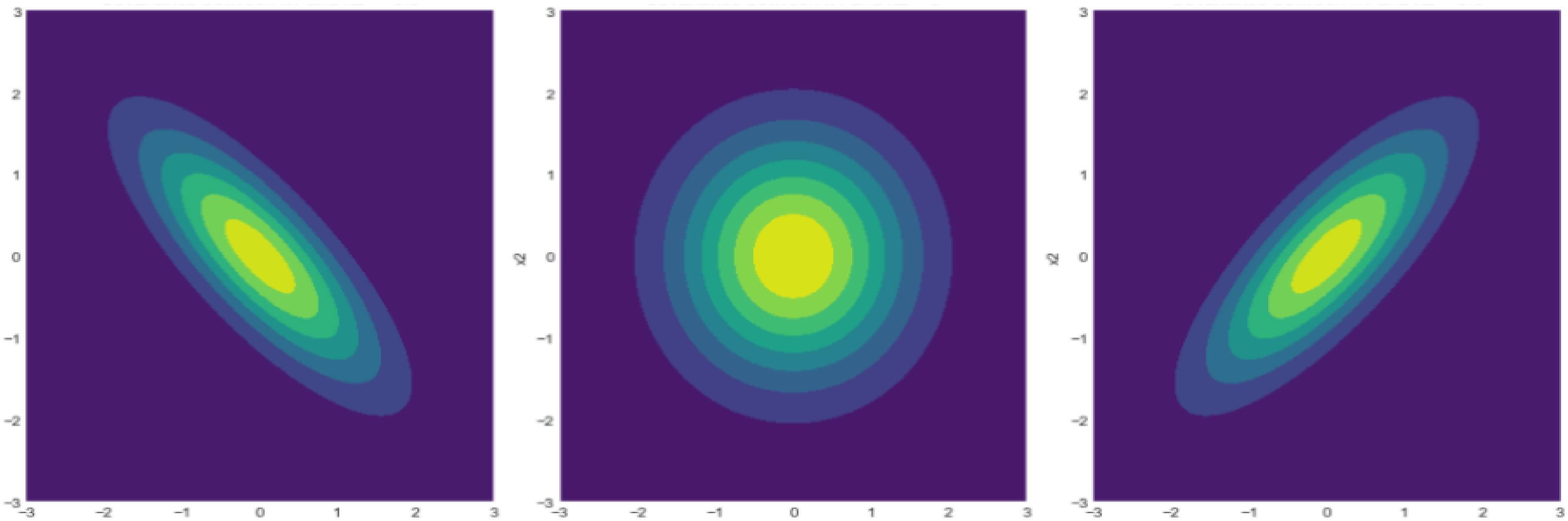
¿Qué es esa especie de “curvas de nivel que se representa?



Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

¿Qué es esa especie de “curvas de nivel” que se representa?



Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

El algoritmo de mixturas de Gausianas funciona utilizando la **REGLA DE BAYES**

¿Por qué?

Porque nos da un marco perfecto para “introducir información adicional”.

Veamos qué es esto.

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

Imaginémonos la siguiente situación:

Un colegio está formado por un 60% de chicos y un 40% de chicas. Elegimos aleatoriamente un estudiante.

¿Cuál es la probabilidad que sea un chico?

Respuesta: $\boldsymbol{p(Chico) \equiv p(\omega_1) = 0.6}$

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas. Expectación - Maximización (EM)

Imaginémonos ahora:

Partamos del caso anterior. Se nos proporciona información adicional. Nos dicen que en este colegio, todos los chicos (100%) llevan pantalones y el 50% de las chicas, también.

Si una cámara observa un estudiante, con esta información adicional, ¿qué podemos decir sobre la probabilidad de que sea chico? ¿Cambiará el valor de $\mathbf{0.6}$?

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas. Expectación - Maximización (EM)

$$p(\text{Chico}|\text{Pantalones}) \equiv p(\omega_1|x)$$

$$p(\omega_1|x) = \frac{p(x|\omega_1)\cdot p(\omega_1)}{p(x)} = \frac{p(x|\omega_1)\cdot p(\omega_1)}{p(x|\omega_1)\cdot p(\omega_1) + p(x|\omega_2)\cdot p(\omega_2)} = \frac{1\cdot 0.6}{1\cdot 0.6 + 0.5\cdot 0.4} = \mathbf{0.75}$$

REGLA DE BAYES

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}}$$

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas. Expectación - Maximización (EM)

¿Qué ha ocurrido?

Que nuestra probabilidad de acierto sobre la elección de chico/chica ha cambiado:

$$\mathbf{0.6 \rightarrow 0.75}$$

Por el hecho de tener información adicional sobre el tanto por ciento de personas que llevan pantalones, dependiendo del género.

Y, para este colegio en concreto, **$\mathbf{0.75}$ debería ser una mejor estimación que $\mathbf{0.6}$**

Mixturas de Gausianas. Expectación - Maximización (EM)

APLIQUEMOS AHORA LA REGLA DE BAYES AL CASO QUE NOS OCUPA

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

Aplicando la Regla de Bayes, y:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{M} p(\Omega_j) \cdot p(x|\Omega_j); \qquad p(x|\Omega_j) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma_j|^{1/2}} e^{\left[-\frac{1}{2}\cdot\left((x-\mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x-\mu_j)\right)\right]}$$

tenemos:

$$\boldsymbol{p(\Omega_j|x) = \frac{p(\Omega_j) \cdot p(x|\Omega_j)}{\sum_{k=1}^{M} p(\Omega_k) \cdot p(x|\Omega_k)}}$$

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

Expectación (E):

$$p\left(\Omega_j|x_i\right)^{(t)} = \frac{p\left(\Omega_j\right)^{(t)} \cdot p\left(x_i|\Omega_j\right)^{(t)}}{\sum_k p\left(\Omega_k\right)^{(t)} \cdot p\left(x_i|\Omega_k\right)^{(t)}}$$

Maximización (M):

$$p\left(\Omega_j\right)^{(t+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{p\left(\Omega_j|x_i\right)^{(t)}\right\}$$

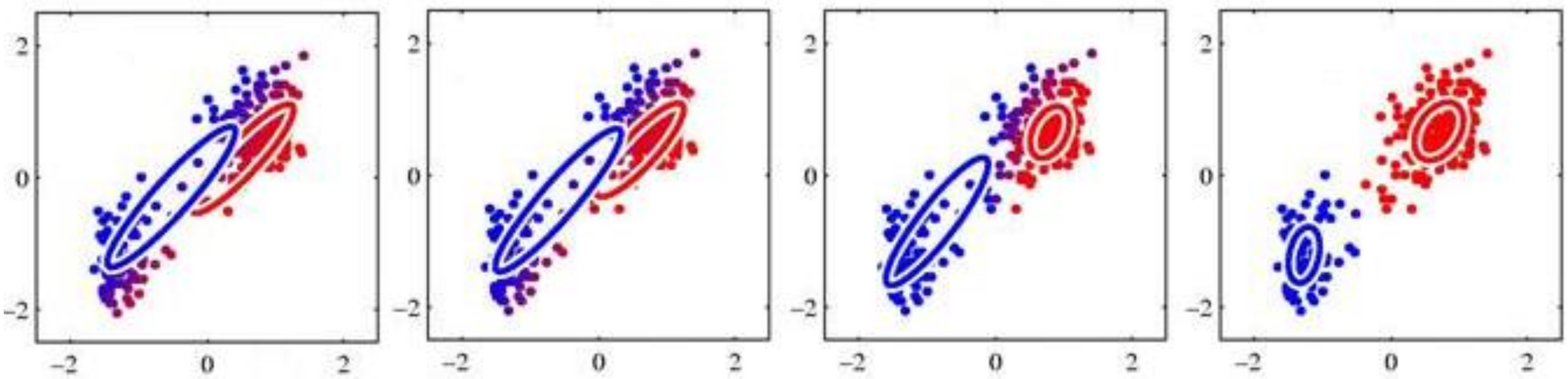
$$\mu_j^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{x_i p\left(\Omega_j|x_i\right)^{(t)}\right\}}{\sum_{i=1}^{n}\left\{p\left(\Omega_j|x_i\right)^{(t)}\right\}}$$

$$\Sigma_j^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{p\left(\Omega_j|x_i\right)^{(t)}\right\}\left(x_i-\mu_j^{(t+1)}\right)\left(x_i-\mu_j^{(t+1)}\right)^T}{\sum_{i=1}^{n}\left\{p\left(\Omega_j|x_i\right)^{(t)}\right\}}$$

Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

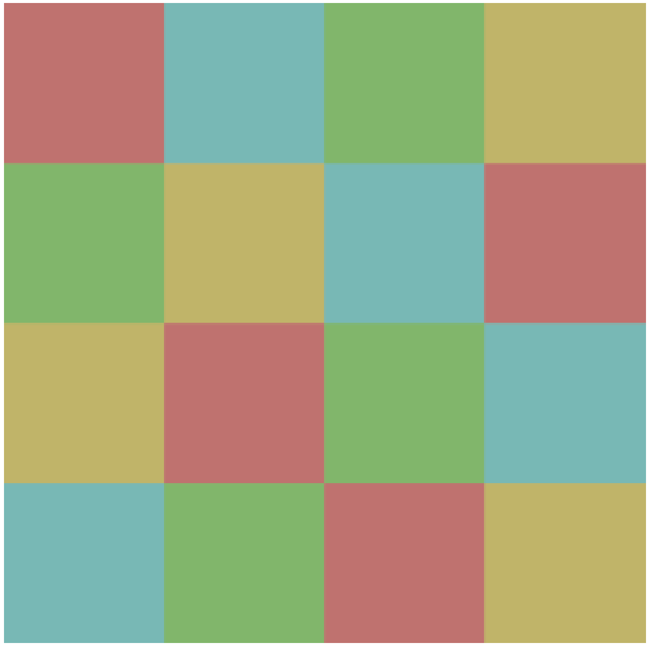
$k = 1$ $k = 2$ $k = 5$ $k = 20$

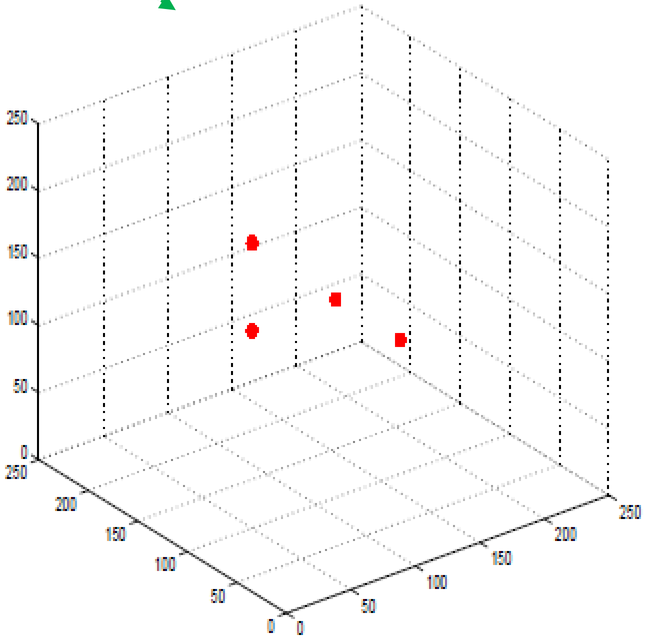


Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

Partimos de una imagen sin ruido

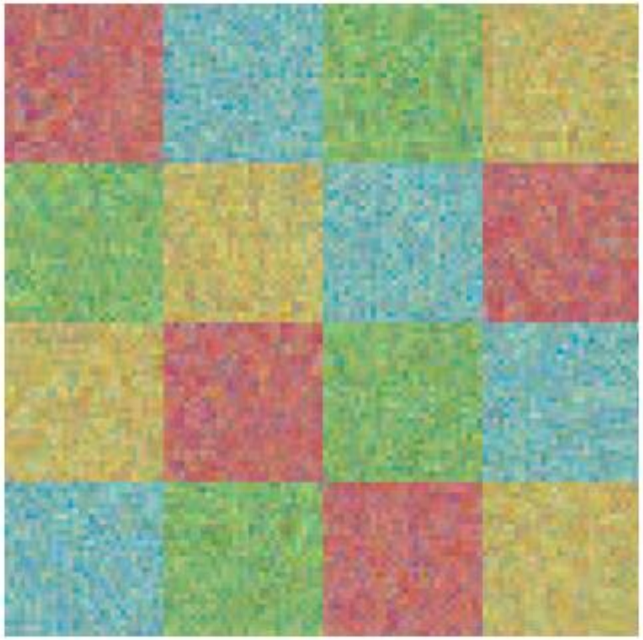


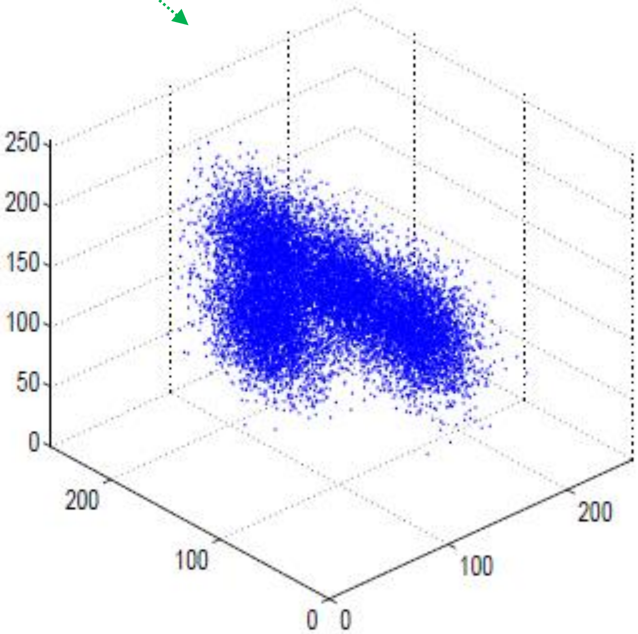


Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

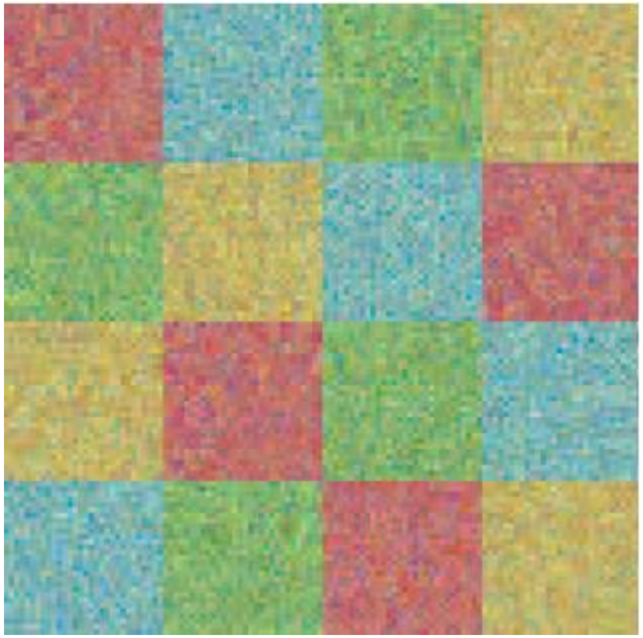
Introducimos “ruido Gausiano”

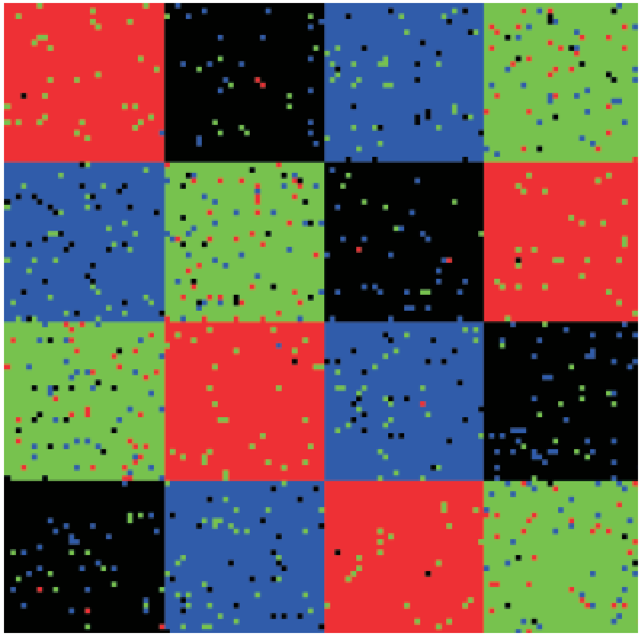




Clustering - ejemplos

Mixturas de Gausianas – Expectación Maximización (EM)

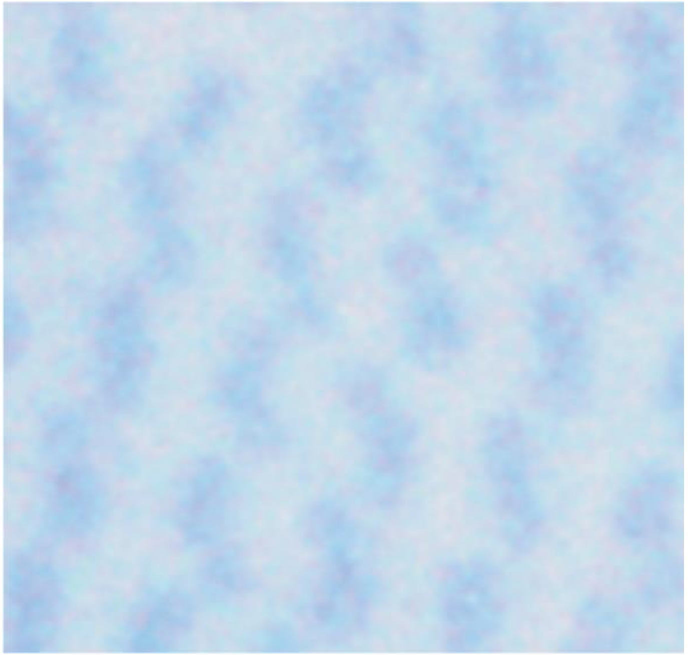


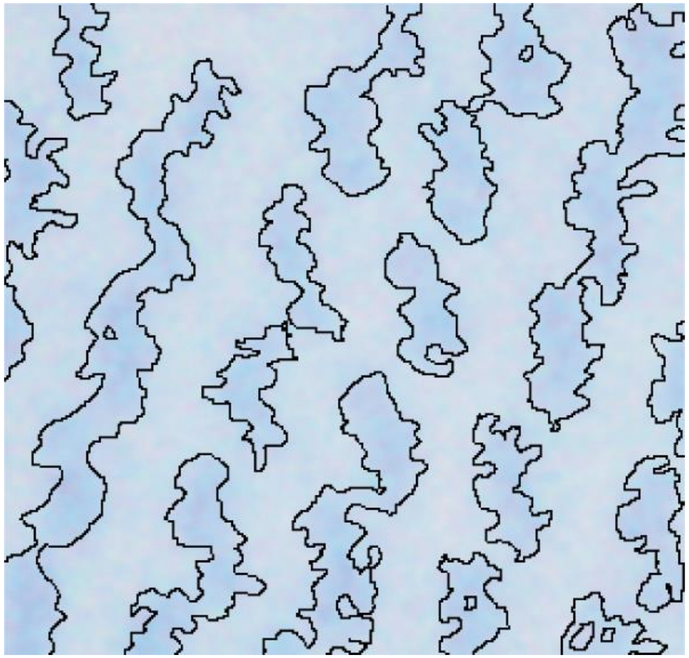


Medidas de evaluación de la calidad de la segmentación

Medidas de evaluación

Para poder evaluar la calidad de la segmentación de/en una imagen, necesitamos crear la llamada imagen "**GROUNDTRUTH**", o verdadera.





A veces ocurre que la segmentación manual NO es lo suficientemente precisa

Medidas de evaluación

Cuando tenemos una imagen formada por dos tipos de objetos, se puede definir:

- **TP: "True Positives"** → Número de píxeles que son de un grupo (se elige uno de los dos) en la imagen segmentada, y del mismo grupo en la imagen "groundtruth".

- **TN: "True Negatives"** → Número de píxeles que son del otro grupo en la imagen segmentada, y de ese mismo grupo en la imagen "groundtruth".

- **FP: "False Positives"** → Píxeles definidos por el método de segmentación como del grupo primero, siendo en realidad del segundo

- **FN: "False Negatives"** → Píxeles definidos por el método de segmentación como del segundo grupo, siendo del primero.

Medidas de evaluación

A partir de aquí, podemos definir:

- Sensibilidad = $\frac{TP}{TP+FN} \cdot 100$
- Especificidad = $\frac{TN}{TN+FP} \cdot 100$
- Precisión global = $\frac{TP+TN}{TP+TN+FP+FN} \cdot 100$

Medidas de evaluación

En el caso de **más de dos (tipos de) objetos**, tenemos:

Precisión global = $\frac{NTCC}{NTCC+NTCI} \cdot 100$

donde:

- NTCC: Número total de clasificaciones correctas
- NTCI: Número total de clasificaciones incorrectas

Referencias

[1] David A. Forsyth, Jean Ponce, Computer Vision: A Modern Approach, Prentice Hall, 2003.

[2] Christopher Bishop, Pattern Recognition and Machine Learning, Information Science and Statistics Series, Springer Verlag, 2006.

[3] Sergios Theodoridis, Konstantinos koutroumbas, Pattern Recognition, Academic press, 2009.

[4] Frank Höppner, Frank Klawonn, Rudolf Kruse, Thoms Runkler, Fuzzy Cluster Analysis, John Wiley & Sons, 2000.