Raketa

Urban Gajšek, Luka Kosec Mikić, Matic Šinigoj

25.5.2024

Opis problema

V orbito Mednarodne vesoljske postaje bi radi poslali raketo, z maso 800 kg, njeni motorji porabijo 60 kg goriva vsako sekundo. Tok izgorelih plinov brizga skozi potisne šobe s hitrostjo $5500 m/s^{-1}$, dokler goriva ne zmanjka.

Na raketo ves čas delujejo tri sile:

Sila gravitacije - Sila, ki privlači raketo proti središču Zemlje.

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$$

kjer je:

- m masa rakete,
- $\mathbf{g}$ gravitacijski pospešek (približno -9.81 m/s²).

Sila potiska - Sila, ki jo ustvarjajo raketni motorji s pomočjo izgorevanja goriva.

$$\mathbf{F}_t = \dot{m}\vec{v}_e$$

kjer je:

- $\dot{m}$ hitrost porabe goriva (-60 kg/s),
- v_e hitrost izpušnih plinov (5500 m/s).

Sila upora - Sila, ki je odvisna od hitrosti rakete in gostote zraka.

$$\mathbf{F}_u = -\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|SC_u$$

kjer je:

- $\mathbf{v}$ hitrost rakete,
- S prečni prerez rakete (0.5 m²),
- C_u koeficient upora (0.2),
- $\rho_z = \rho_0 \frac{1}{e^{\frac{h}{8200}}}$ gostota zraka pri višini h

Gostota zraka z višino pada eksponento. Višino delimo z 8200, da zračni tlak pada kot v realnosti.

Za uspešen vzlet mora biti rezultanta sil usmerjena navzgor, torej mora biti sila potiska večja od sile gravitacije in sile zračnega upora.

$$\mathbf{F}_{rez} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_u$$

Rezultanta sil mora biti pozitivna in večja od nič, da lahko raketa pospeši navzgor:

$$\mathbf{F}_{rez} > 0$$

Predpostavke in konstante

Predpostavke:

- Zemlja je idealna krogla.
- Ni vetra in vlažnost je konstantna (pritisk in gostota se z višino spreminjata).
- Raketni motorji izgorevajo s konstantno porabo, dokler delujejo.
- Zanemarimo gravitacijo drugih nebesnih teles (npr. Mesec).

Konstante:

- $m_0 = 800\,\mathrm{kg}$
- $\dot{m} = -60\,\mathrm{kg/s}$
- $v_p = 5500\,\mathrm{m/s}$
- $S = 0.5\,\mathrm{m}^2$
- $C_u = 0.2$
- $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2)$
- $M = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- $R = 6.37 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$
- $\rho = 1.20\,\mathrm{kg/m}^3$ (pri 20 °C, morska gladina)
- $h_{MVP} = 408000\,\mathrm{m}$

Diferencialna enačba

Na podlagi teh sil lahko zapišemo diferencialno enačbo, ki opisuje gibanje rakete:

$$\mathbf{F}_u = -\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|SC_u$$
$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$$
$$\mathbf{F}_t = \dot{m}\vec{v}_e$$

Rezultanta vseh sil je enaka masi rakete pomnoženi s pospeškom rakete:

$$(m_0 + \dot{m}t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_u$$

To lahko zapišemo kot:

$$(m_0 + \dot{m}t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{m}\vec{v}_e + (m_0 + \dot{m}t)\mathbf{g} + \left(-\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|SC_u\right)$$

Poenostavimo enačbo:

$$(m_0 + \dot{m}t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{m}\vec{v}_e + (m_0 + \dot{m}t)\mathbf{g} - \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|SC_u$$

Diferencialna enačba, ki opisuje gibanje rakete, je torej:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\dot{m}\vec{v}_e}{(m_0 + \dot{m}t)} + \mathbf{g} - \frac{1}{2(m_0 + \dot{m}t)}\rho\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|SC_u$$

Orbitalna hitrost

Za določitev orbitalne hitrosti na višini Mednarodne vesoljske postaje (MVP) moramo enačiti gravitacijsko silo z centripetalno silo. Na višini 408 km je sila upora zanemarljiva zaradi zelo redke atmosfere ($\rho_0 \frac{1}{e^{\frac{408000m}{8200}}} \approx 0$). Sile potiska tudi ni več, ker je goriva zmanjkalo in je zato tudi masa konstanta (predpostavljamo, da se gorivo vedno porabi pred vstopom v orbito).

Gravitacijska sila (F_g):

$$\vec{F}_g = \frac{GMm}{r^2}$$

kjer je: - G gravitacijska konstanta ($6.67430 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$), - M masa Zemlje ($5.972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$), - m masa rakete, - r razdalja od središča Zemlje (zemeljski radij plus višina MVP: $6371\,\mathrm{km} + 408\,\mathrm{km} = 6779\,\mathrm{km}$).

Centripetalna sila (F_c):

$$\vec{F}_c = \frac{m\vec{v}^2}{r}$$

kjer je: - m masa rakete, - v orbitalna hitrost, - r razdalja od središča Zemlje (enaka kot pri gravitacijski sili).

Ker mora biti gravitacijska sila enaka centripetalni sili, da ostane raketa v krožni orbiti

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Iz tega izrazimo hitrost v:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Višina MVP je 408 km nad površjem Zemlje, kar skupaj z zemeljskim radijem daje $r = 6779\,\mathrm{km} = 6.779 \times 10^6\,\mathrm{m}$. Sedaj vstavimo podatke:

$$v = \sqrt{\frac{6.67430 \times 10^{-11} \times 5.972 \times 10^{24}}{6.779 \times 10^6}}$$

Izračunana orbitralna hitrost je: $v \approx 7660\,\mathrm{m/s}$

Pripadajoča kotna hitrost ω je definirana kot hitrost kroženja po orbiti glede na radij orbite:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Vstavimo izračunano orbitalno hitrost in radij orbite:

$$\omega = \frac{7660}{6.779 \times 10^6}$$

Izračunana kotna hitrost je:

$$\omega \approx 1.13 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad/s}$$

Nagibanje rakete

Nagib rakete bomo merili s kotom α glede na navpičnico. Sprva bomo poskušali doseči orbito s konstantnim kotom α. Nato bomo izvedli še poskuse, kjer bo začetni kot $\alpha = 0$, ki pa ga bomo začeli linearno spreminjati po času $t0$.

Doseganje orbite z konstantnim α

Simulacijo smo večkrat zagnali pod različnimi pogoji in s konstantnim kotom α , vendar nam kljub temu ni uspelo doseči in vzdrževati orbite.

Iskanje optimalnih parametrov za prihod v orbito

Za uspešen prihod v orbito s primerno hitrostjo je potrebno skrbno izbrati naslednje parametre:

1. m_{gor}: Masa goriva, ki ga ima raketa ob vzletu.

2. t_0: Čas, ob katerem začnemo nagibati raketo.

3. ω: Kotna hitrost, s katero nagibamo raketo po času t_0.

Optimalne vrednosti teh parametrov smo poskusili poiskati z uporabo *Broydenove metode*. Ta metoda vrne parametre, pri katerih je vrednost podane funkcije napake enaka 0, vendar zahteva tudi začetni približek. Našo funkcijo napake smo definirali takole:

$$F([m_{gor}; t_0; omega]) = (h - h_{MVP})^2 + (\alpha - \frac{\pi}{2})^2 + (v - 7665)^2$$

kjer so:

- h oddaljenost rakete od površja Zemlje,

- α kot med smerjo hitrosti rakete in premico, ki gre skozi središče Zemlje in krajevni vektor rakete,

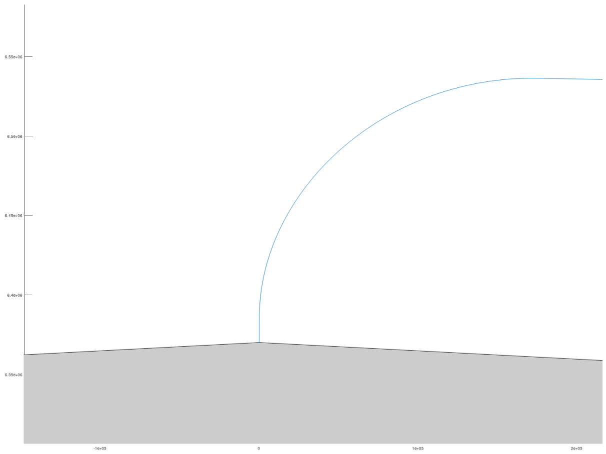
- v hitrost rakete.

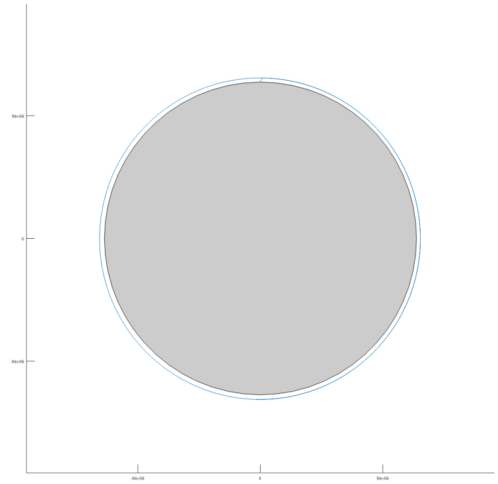
Vrednosti h, α in v smo pridobili z *metodo Runge-Kutta(4),* ki smo jo pognali s parametri $[m_{gor}; t_0; \omega]$, ter jo prekinili, ko je raketa dosegla višino Mednarodne vesoljske postaje ali ko je njen kot glede na Zemljo presegel 90°

Opazili smo, da je v našem primeru Broydenova metoda zelo občutljiva na začetni približek in nestabilna, saj so se pogosto pojavljale singularne matrike, rezultati pa so divergirali. Kljub temu je bila kombinacija Broydenove metode in poskušanja zelo koristna, saj smo uspeli najti ustrezne parametre za vzlet in orbitiranje rakete:

- $m_{gor} : 5601 kg$
- $t_0 : 22.0441 s$
- $\omega : 0.0350585 s^{-1}$

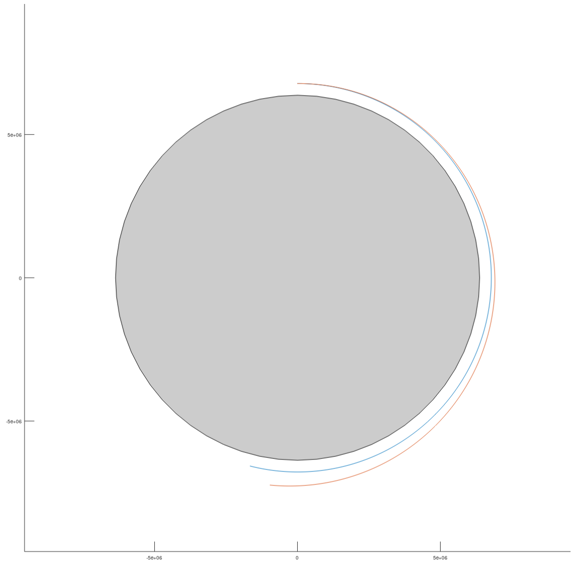
Na levi sliki spodaj je predstavljen vzlet rakete z zgornjimi parametri, na desni sliki pa je prikazan vzlet in obhod zemlje.

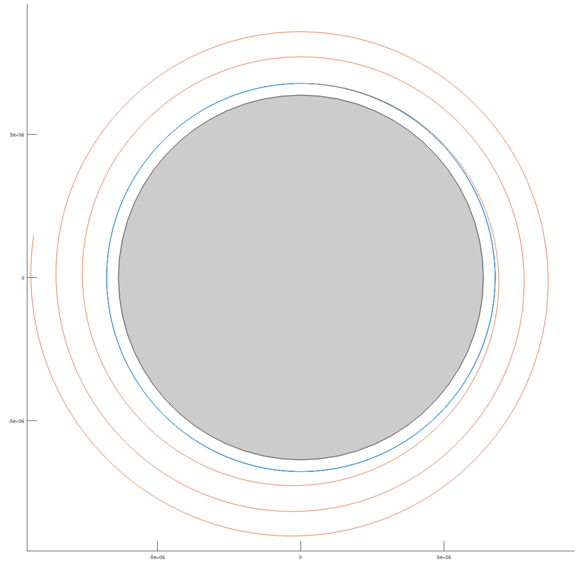




Orbitiranje z Eulerjevo ali Runge-Kutta metodo

Pri majhnih korakih in majhnih intervalih se obe metodi obneseta v redu. Pri daljši dolžini simulacije pa se pokažejo očitne razlike, kot je razvidno s spodnjih slik. Modra krivulja predstavlja trajektorijo rakete računano z Runge-Kutta metodo, rdeča pa z Eulerjevo metodo.





Numerične metode

Eulerjeva metoda

Eulerjeva metoda je ena najpreprostejših numeričnih metod za reševanje navadnih diferencialnih enačb. Uporablja se za približno reševanje diferencialnih enačb ob danem začetnem pogoju. Ideja metode je preprosta: izračunamo naslednjo točko na osnovi trenutne točke in naklona (odvod funkcije) v tej točki. Eulerjeva metoda ima linearno natančnost, kar pomeni, da je napaka sorazmerna s korakom h. Večji kot je korak, večja je napaka.

```
function [t, Y] = euler(f, interval, Y0, h)
t = interval(1):h:interval(2);
Y = zeros(length(Y0), length(t));
Y(:, 1) = Y0;
for k = 2:length(t)
    Y(:, k) = Y(:, k-1) + h*f(t(k-1), Y(:, k-1));
end
```

V tej funkciji:

- f je funkcija, ki določa diferencialno enačbo $Y' = f(t, Y)$.
- $interval$ je časovni interval $[t0, tk]$.
- $Y0$ je začetni pogoj.
- h je korak integracije.
- t je vrstica časovnih točk.
- Y so vrednosti rešitve pri posameznih časovnih točkah.

Runge-Kutta metoda 4. reda (RK4)

Runge-Kutta metoda 4. reda (RK4) je ena najbolj uporabljanih metod za reševanje navadnih diferencialnih enačb zaradi svoje natančnosti in stabilnosti. Ta metoda izboljšuje natančnost glede na Eulerjevo metodo z uporabo povprečenih naklonov, ki temeljijo na vrednostih funkcije v več točkah.

Runge-Kutta metoda 4. reda ima napako reda $O(h^4)$ na korak in globalno napako reda $O(h^3)$. To pomeni, da je metoda zelo natančna za majhne korake h in omogoča natančne rešitve z zmerno količino računalniških virov. Natančnost metode je bistveno večja kot pri Eulerjevi metodi.

```
function [t, Y] = rk4(f, interval, Y0, h)
t = interval(1):h:interval(2);
Y = zeros(length(Y0), length(t));
Y(:, 1) = Y0;
for k = 1:(length(t) - 1)
    k1 = h*f(t(k), Y(:, k));
    k2 = h*f(t(k) + h/2, Y(:, k) + k1/2);
    k3 = h*f(t(k) + h/2, Y(:, k) + k2/2);
    k4 = h*f(t(k) + h, Y(:, k) + k3);
    Y(:, k + 1) = Y(:, k) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
end
```

V tej funkciji:

- f je funkcija, ki določa diferencialno enačbo $Y' = f(t, Y)$.
- *interval* je časovni interval [t0, tk].
- $Y0$ je začetni pogoj.
- h je korak integracije.
- t je vrstica časovnih točk.
- Y so vrednosti rešitve pri posameznih časovnih točkah.

Runge-Kutta metoda 4. reda uporablja povprečje štirih naklonov ($k1, k2, k3, k4$) za izračun naslednje vrednosti funkcije, kar povečuje natančnost glede na preprostejše metode, kot je Eulerjeva metoda.

Broydenova metoda

Broydenova metoda je iterativna metoda za reševanje nelinearnih sistemov enačb. Gre za posplošitev Newtonove metode, kjer se Jacobijeva matrika ne računa na novo v vsaki iteraciji, temveč se sproti popravlja, kar omogoča bolj učinkovito reševanje velikih sistemov.

Enačbe

1. **Začetni izračun Jacobijeve matrike (enostranske končne razlike):**

$$J_{ij} \approx \frac{F(x_0 + \delta e_j) - F(x_0)}{\delta}$$

kjer je: - J Jacobijeva matrika, - δ majhen korak, - e_j standardni bazni vektorji.

2. **Iterativna formula za posodobitev rešitve:**

$$d = -J^{-1}F(x_0)$$
$$x = x_0 + d$$

3. **Broydenov popravek Jacobijeve matrike:**

$$J_{k+1} = J_k + \frac{(F(x) - F(x_0) - J_k d)d^T}{d^T d}$$

4. **Kriterij za konvergenco:**

$$\|d\| < \text{tol}$$

```
function x = broyden(x0, F, tol, maxit)
n = length(x0);
e = eye(n);
delta = sqrt(tol);
Fx0 = feval(F, x0);
for j = 1:n
    jac(:,j) = (feval(F, x0 + delta*e(:,j)) - Fx0)/delta;
end
for k = 1:maxit
    d = -jac\Fx0;
    x = x0 + d;
    if(norm(d) < tol)
        break;
    end
    Fx = feval(F, x);
    dF = Fx - Fx0;
    jac = jac + 1/(d'*d)*(dF - jac*d)*d';
    x0 = x;
    Fx0 = Fx;
end
```

V tej funkciji:

- x_0 je začetni približek.
- F je funkcija, ki določa nelinearni sistem enačb $F(x) = 0$.
- tol je toleranca za konvergenco.
- $maxit$ je največje število iteracij.
- x je rešitev nelinearnega sistema enačb.

Broydenova metoda sproti popravlja Jacobijevo matriko, kar omogoča učinkovitejše reševanje nelinearnih sistemov brez potrebe po ponovnem izračunu celotne Jacobijeve matrike v vsaki iteraciji.

Rezultati in komentarji rezultatov

Raketo smo uspešno spravili v Zemljino orbito na višino Mednarodne vesoljske postaje. Najbolj nas je omejevala Broydenova metoda, zaradi njene počasnosti in nestabilnosti nismo uspeli računati z dovolj majhnim korakom. Morda bi imeli boljše rezultate, če bi za sestavo algoritma uporabili hitrejši programski jezik, na primer C++.

Razdelitev dela v skupini

Pri delu na projektu smo večino časa sodelovali, saj je pomembno, da je vsak član ekipe seznanjen s celotnim potekom naloge, tako pri pisanju kode kot pri pripravi poročila. Kljub temu smo si delo delno razdelili. Urban in Luka sta več časa namenila pisanju kode, medtem ko je Matic pripravljal poročilo. Vseeno smo se redno sestajali, da smo skupaj pregledali kodo in poročilo.