FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 12: ONDAS ELÁSTICAS

INTRODUCCIÓN – PROPAGACIÓN DE PERTURBACIONES – TIPOS DE ONDAS – EXPRESIÓN ANALÍTICA – MODELO DE ONDA PROGRESIVA – ONDAS SONORAS – INTENSIDAD Y AMPLITUD – SUPERPOSICIÓN DE ONDAS, INTERFERENCIA, ONDAS ESTACIONARIAS.

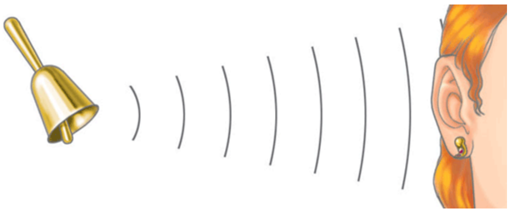
Introducción:

Seguramente usted alguna vez ha tirado una piedra en un estanque y observó lo que es una onda. Justamente en el punto en donde la piedra impacta con el agua se crean las ondas. Dichas ondas se mueven hacia afuera en forma de círculos concéntricos que se expanden, a partir del punto de creación.

Si se coloca un trocito de corcho que flote en el agua en la situación planteada anteriormente, se verá que el corcho se mueve verticalmente y horizontalmente en torno a su posición original, pero no experimenta desplazamiento alguno. Con este pequeño modelo se deduce que las moléculas de agua sólo vibran y se van agitando entre sí, pero no se trasladan de un lugar a otro conforme se va propagando la onda.

El movimiento oscilatorio aparece prácticamente en todas las ramas de la física. En general estamos bastantes familiarizados con las ondas de agua y las ondas sonoras. No obstante, algo similar sucede con las ondas electromagnéticas que, si bien son más difíciles de imaginar, tenemos muchos ejemplos en la vida cotidiana, como es el caso de las ondas de radio, TV, luz, rayos X, etc.

La intención en esta sección es concentrarnos en las ondas que se producen y propagan en medios elásticos deformables. Precisamente, dentro de este grupo están las denominadas **ondas mecánicas**, es decir las ondas de agua y las ondas sonoras.



En Física II, el año que viene, usted estudiará con mucha profundidad a las ondas electromagnéticas e incluso observará que las mismas no necesitan de un medio para poder propagarse.

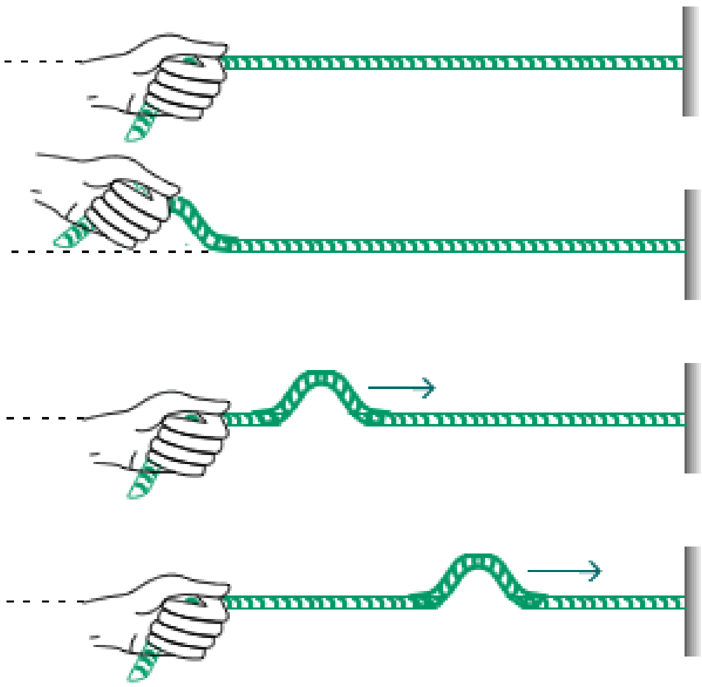
Propagación de las perturbaciones:

Esta sección está íntimamente relacionada con la energía mecánica y su permanente transferencia entre la energía cinética y potencial gravitatoria.

Para que las ondas mecánicas se originen, se requiere:

1.- alguna fuente de perturbación.
2.- un medio elástico que contenga elementos que sean factibles de perturbación.
3.- algún mecanismo físico a partir del cual los elementos del medio elástico puedan interactuar entre sí.

Una manera bastante sencilla de demostrar el movimiento ondulatorio es agitar el extremo de una soga bastante larga que está bajo tensión y que tenga su otro extremo amurado a una pared. De esta manera se genera un pulso que viaja a lo largo de la cuerda con una rapidez conocida. La siguiente figura muestra para varias fotos o instantáneas, la creación y propagación del pulso viajero.



La cuerda es el medio a través del cual viaja el pulso; éste alcanza una altura y una rapidez de propagación definidas a lo largo del medio y se observa que la forma del mismo cambia muy poco con el tiempo.

Tipos de ondas:

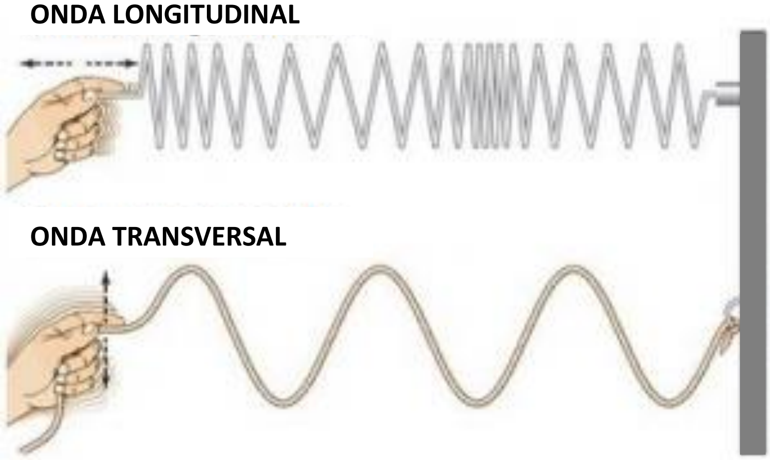
Podemos distinguir diferentes clases de ondas mecánicas considerando en como vibran las partículas de la materia elástica, en relación con la dirección de propagación de la onda.

Si el movimiento de las partículas de materia que trasportan las ondas es perpendicular a la dirección de propagación de la misma, se tiene una **Onda Transversal**. Por ejemplo, la cuerda de un instrumento musical se comporta de esta manera.

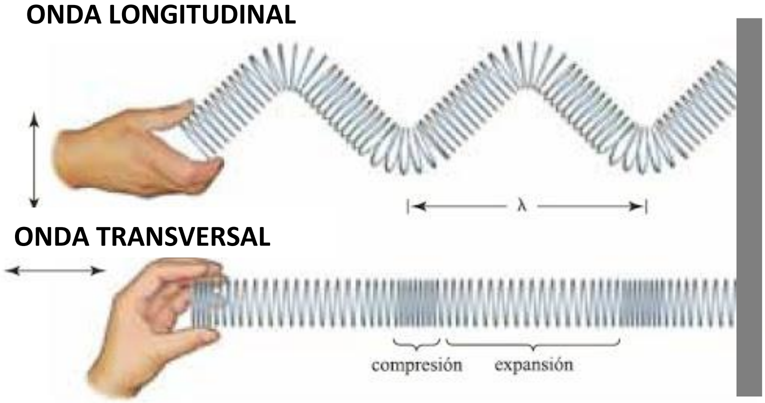
Si en cambio el movimiento de las partículas que trasmiten la onda mecánica es hacia adelante y hacia atrás, es decir, paralelo a la dirección de propagación de la onda, se tiene una **Onda Longitudinal**. El caso del sonido, es un ejemplo de una onda de estas características.

Las siguientes figuras muestran lo explicado en los párrafos anteriores:

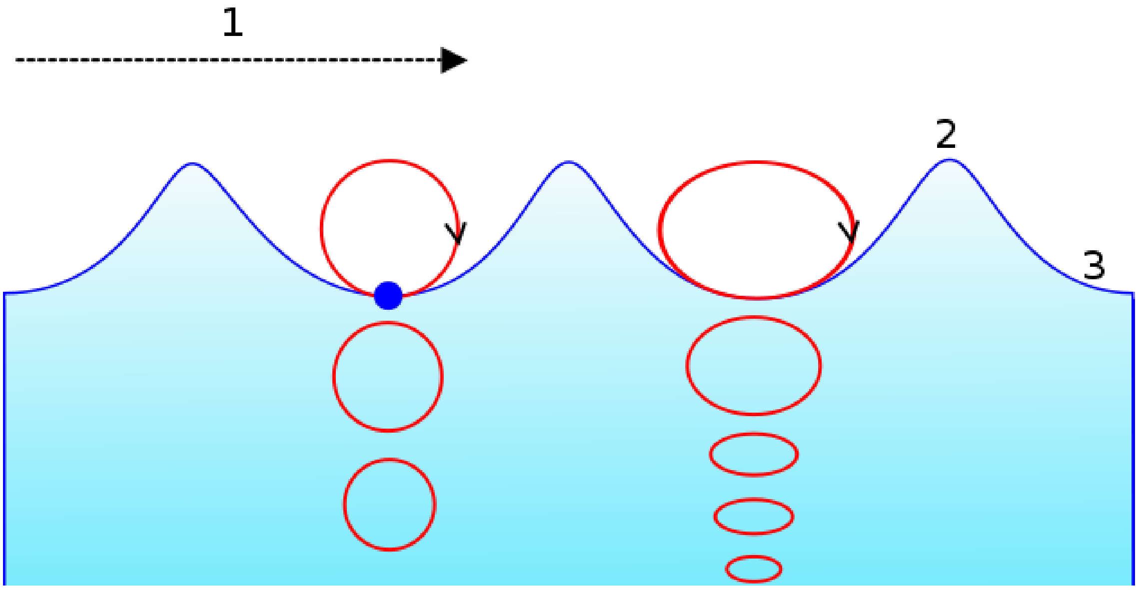
ONDA LONGITUDINAL



ONDA LONGITUDINAL

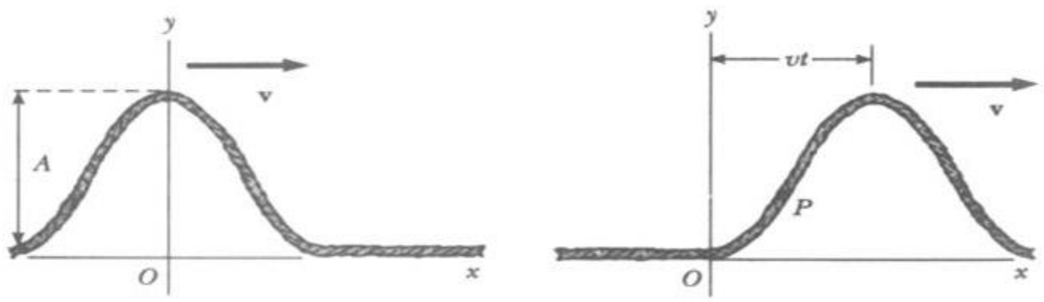


Por otro lado, algunas ondas no son exclusivamente longitudinales ni transversales, por ejemplo, las ondas que se generan sobre la superficie del agua. En este caso las partículas del agua se mueven simultáneamente tanto hacia arriba y abajo, como hacia adelante y atrás, trazando trayectorias elípticas… casi circulares. Ver la siguiente figura:



Expresión Analítica de una onda – Ondas viajeras:

Consideremos una cuerda larga estirada en la dirección **"x"** a lo largo de la cual se mueve una onda transversal correspondiente a un pulso unidimensional hacia la derecha con una rapidez **"v"**.



a) Pulso en $t = 0$ b) Pulso en el tiempo t

En un cierto instante inicial, digamos para $\boldsymbol{t_0 = 0}$ $(\boldsymbol{seg})$, la "forma" de la cuerda se puede representar por:

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \textbf{(1)}$$

en donde **"y"** es el desplazamiento vertical o transversal de la cuerda para la posición **"x"**

Experimentalmente se observa que, a medida que el tiempo transcurre, la onda se mueve a lo largo de la cuerda sin cambiar su forma, considerando que las pérdidas de energía por fricción interna son muy pequeñas.

En un cierto instante **“t”** posterior, la onda ha recorrido una distancia **“v.t”** hacia la derecha, en donde se supone que **v=constante**. Por lo tanto la nueva ecuación se puede representar por:

$$\boldsymbol{y(x,t) = f(x - v.t)} \qquad \textbf{(2)}$$

Y de esta manera quedan descriptos los pulsos para ambos instantes de tiempo.

Entonces la última fórmula representa al pulso viajero que va hacia la derecha.

Si en cambio ese pulso viajero se mueve hacia la izquierda, la expresión matemática que lo identifica es:

$$\boldsymbol{y(x,t) = f(x + v.t)} \qquad \textbf{(3)}$$

La función $\boldsymbol{y(x,t)}$ es llamada **función de onda** y representa la coordenada **“y”**, es decir, la posición transversal de cualquier elemento **“P”** ubicado en la posición **“x”** para cualquier instante de tiempo **“t”**.

EJEMPLO 1:

Un pulso que se mueve hacia la derecha a lo largo del eje **“x”** se representa mediante la función:

$$y(x,t) = \frac{2}{(x-3.t)^2+1} \qquad \textbf{(4)}$$

En donde **“x”** e **”y”** se miden en centímetros y **“t”** en segundos. Encuentre las expresiones para la función de onda, cuando:

a) t=0 (seg)
b) t=1 (seg)
c) t=2 (seg)

Al analizar la fórmula **(4)**, se observa por inspección que la función de onda dato es un pulso que se dirige hacia la derecha y que su rapidez $\boldsymbol{v = 3\ (m/s)}$.

Además al hacer $x - 3.t = 0$, se encuentra que el valor máximo de **“y”** está dado por $\boldsymbol{A = 2\ (cm)}$.

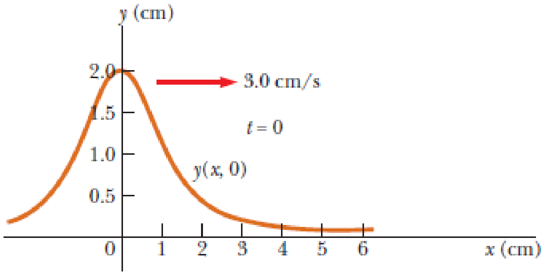
Luego reemplazando los tiempos datos obtenemos:

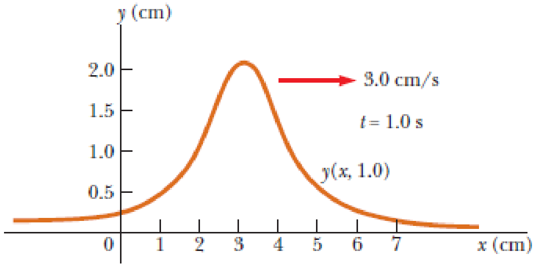
a) $y(x,0) = \frac{2}{(x-3.0)^2+1} = \frac{2}{x^2+1}$

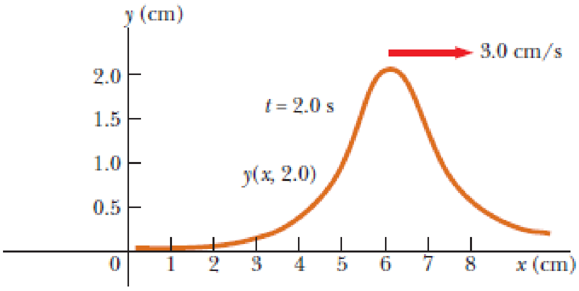
b) $y(x,1) = \frac{2}{(x-3.1)^2+1} = \frac{2}{(x-3)^2+1}$

c) $y(x,2) = \frac{2}{(x-3.2)^2+1} = \frac{2}{(x-6)^2+1}$

Y para cada una de estas expresiones se pueden sustituir varios valores de **"x"** y graficar la función de onda. Este procedimiento produce las funciones de onda que se muestran en las siguientes tres figuras.







Conclusión: Estas instantáneas muestran que el pulso se mueve hacia la derecha sin cambiar de forma y que tiene una rapidez constante de $\boldsymbol{v = 3\ (m/s)}$.

Además, si la función de onda hubiese sido:

$$y(x,t) = \frac{2}{(x+3.t)^2+1} \qquad \textbf{(5)}$$

¿Qué podría deducir?

Que se trata del mismo pulso, solo que viajaría hacia la izquierda!

El modelo de onda progresiva:

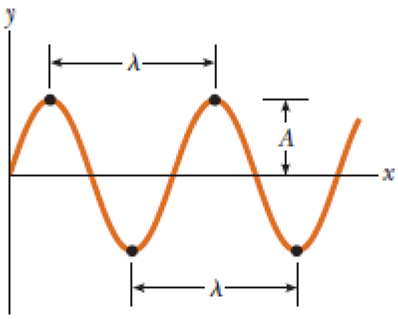
A continuación presentaremos una **función de onda** de forma sinusoidal que será el modelo matemático a utilizar para entender cómo se propaga una onda. Una onda sinusoidal se puede establecer por ejemplo con una soga, al agitarla desde uno de sus extremos hacia arriba y hacia abajo en **Movimiento Armónico Simple**.

Observando la siguiente gráfica que representa una instantánea de una onda móvil a través de un medio, las características o **elementos principales** del modelo de onda progresiva cuando la misma se mueve a través del espacio sin interactuar con otras ondas o partículas, son los siguientes:

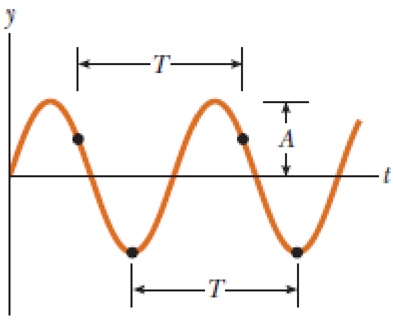
1) **Longitud de onda $\boldsymbol{\lambda}$**: es la distancia que va desde una cresta a otra cresta, o bien, desde un valle a otro valle y se la mide en metros.
2) **Período de una onda $\boldsymbol{T}$**: es el intervalo de tiempo que tarda una onda viajera en volver a reproducirse de manera idéntica, al de un estadio de tiempo inmediato anterior y se mide en segundos.
3) **Frecuencia de onda $\boldsymbol{f}$**: es la cantidad de picos o valles de una onda viajera que se registran en una unidad de tiempo. Si esa unidad de tiempo es el segundo, la frecuencia se mide en Hertz. Matemáticamente, la frecuencia es la inversa del período y se escribe como:

   $$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{T}} \quad \left(\frac{1}{seg}\right) = (Hertz) \qquad \textbf{(6)}$$
4) **Amplitud de onda $\boldsymbol{A}$**: es la máxima posición de un elemento del pico o valle relativo a su posición de equilibrio y se la mide en metros.
5) **Rapidez de propagación de onda $\boldsymbol{v}$**: cada onda viaja con una rapidez específica y esta depende de las propiedades del medio elástico perturbado. Su unidad de medida es (m/seg).

   En el caso de la onda sonora, su velocidad de propagación en el aire a temperatura ambiente es $v_s = 343\ (m/seg)$.



a)



b)

Para todo lo expresado y tomando como referencia las gráficas propuestas, consideremos ahora una onda sinusoidal como la de la figura a) que muestra la posición de la onda en un tiempo $t = 0$. Como la onda es sinusoidal se espera que la función de onda sea:

$$y(x, 0) = A.sen(a.x) \qquad \textbf{(7)}$$

En donde $\boldsymbol{A}$ es la amplitud y $\boldsymbol{a}$ es una constante a determinar.

En $\boldsymbol{x = 0}$, se observa que:

$$y(0,0) = A.sen(a.0) = A.sen(0) = A.0 = 0$$

y es consistente con lo que muestra la figura a), es decir que $\boldsymbol{y = 0}$.

Luego el siguiente valor de $\boldsymbol{x}$ para que $\boldsymbol{y}$ se haga nuevamente cero, es $\boldsymbol{x = \lambda/2}$, según se puede observar en la figura a). Entonces la fórmula **(7)** queda:

$$y\left(\frac{\lambda}{2},0\right) = A.sen\left(a \cdot \frac{\lambda}{2}\right) = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Entonces para que la ecuación **(8)** se verifique, se tiene que cumplir que:

$a \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$ o que es lo mismo, despejando el valor de $\boldsymbol{a}$:

$$a = \frac{2\pi}{\lambda}$$

En consecuencia, la función **(7)** que describe las posiciones de los elementos del medio a través del que viaja la onda sinusoidal se puede escribir como:

$$y(x,0) = A.sen(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x) \qquad \textbf{(9)}$$

Es importante destacar en esta última fórmula que, la posición vertical $\boldsymbol{y}$ de un elemento del medio es siempre la misma en la medida que $\boldsymbol{x}$ sea un múltiplo de $\boldsymbol{\lambda}$**.**

Ahora, si la onda se mueve hacia la derecha con una rapidez $\boldsymbol{v}$, la función de onda para cualquier tiempo $\boldsymbol{t}$ se puede escribir:

$$y(x,t) = A.sen(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x - v.t)) \qquad \textbf{(10)}$$

Si por el contario la onda viajara hacia la izquierda, y de acuerdo a lo visto en párrafos anteriores, la función **(10)** se puede escribir de la siguiente manera:

$$y(x,t) = A.sen(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x + v.t)) \qquad \textbf{(11)}$$

Siguiendo con el análisis de la onda correspondiente a la fórmula **(10)**, como el período $\boldsymbol{T}$ es el tiempo que tarda la onda en recorrer una distancia de una longitud de onda, se pueden hacer los siguientes cálculos teniendo en cuenta la fórmula del Movimiento Rectilíneo Uniforme:

$x = v \cdot t$ que al adaptarla queda: $\lambda = v \cdot T$ y despejando la rapidez $\boldsymbol{v}$:

$v = \frac{\lambda}{T}$ **(12)**

por lo tanto, reemplazando **(12)** en **(10)** nos queda:

$y(x,t) = A.sen(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(x - \frac{\lambda}{T}.t\right))$ **(13)**

y distribuyendo el $\boldsymbol{\lambda}$ del denominador obtenemos:

$y = A.sen(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right))$ **(14)**

Entonces la ecuación de onda **(14)** ya quedó totalmente armada a partir de todos los **elementos principales** de una onda y muestra la naturaleza **periódica** de $\boldsymbol{y}$.

Advierta además que con frecuencia se utilizará $\boldsymbol{y}$ en lugar de $\boldsymbol{y(x,t)}$ como una notación más abreviada. En cualquier tiempo $\boldsymbol{t}$,se observa que $\boldsymbol{y}$ tiene el mismo valor en las posiciones $\boldsymbol{x}$**,** $\boldsymbol{x + \lambda}$**,** $\boldsymbol{x + 2\,\lambda}$ y así sucesivamente. Y por otro lado, en cualquier posición determinada $\boldsymbol{x}$, el valor $\boldsymbol{y}$ es el mismo en tiempos $\boldsymbol{t}$**,** $\boldsymbol{t + T}$**,** $\boldsymbol{t + 2\,T}$, y así sucesivamente.

La función de onda **(14)** se expresa en una más forma conveniente al definir otras dos cantidades físicas, a saber:

6) **El número de onda angular $\boldsymbol{k}$**: que por lo general de lo denomina simplemente número de onda y se define como:
   $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ **(15)**
7) **La frecuencia angular $\boldsymbol{\omega}$:** que ya se vio en el M.A.S. y se calcula así:
   $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ **(16)**

Entonces reformulando **(14)**, al distribuir el $\boldsymbol{2\pi}$ y reemplazando **(15)** y **(16)** se obtiene **(17)**:

$y = A.sen\left(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} - 2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) = A.sen(k \cdot x - \omega \cdot t)$, es decir:

$y = A.sen(k \cdot x - \omega \cdot t)$ **(17)**

Esta última expresión supone que la posición vertical $\boldsymbol{y}$ de un elemento de onda es cero en $\boldsymbol{x = 0}$ y $\boldsymbol{t = 0}$, por lo tanto si no sucede eso, al argumento de la función seno se le debe sumar un nuevo término denominado,

8) **Constante de fase $\boldsymbol{\varphi}$:** es un ángulo expresado en radianes.

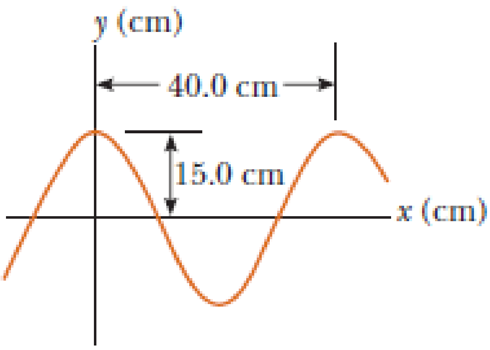
$\boldsymbol{y = A.sen(k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi)}$ **(18)**

En donde esta fórmula termina siendo muy similar a la del **M.A.S.!!!**

EJEMPLO 2:

Una onda progresiva sinusoidal en la dirección “x” positiva hacia la derecha tiene una amplitud de 15 (cm), longitud de onda de 40 (cm) y frecuencia de 8 (Hertz). La posición vertical de un elemento del medio en t= 0 y x=0, también es de 15 (cm), como se muestra en la siguiente figura.

a) Encuentre el número de onda “k”, el período “T”, la frecuencia angular “ω” y la rapidez "v" de la onda.
b) Determine la constante de fase “φ” y escriba una expresión general para la función de onda.



a)

A partir de la fórmula del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\ (rad)}{40\ (cm)} = 0{,}157\ (rad/cm)$$

Con una de las fórmulas del período:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8\ (seg^{-1})} = 0{,}125\ (seg)$$

A partir de la ecuación de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\big(8(seg^{-1})\big) = 50{,}3\ (rad/seg)$$

Y finalmente para calcular la rapidez utilizamos:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{40\ (m)}{0{,}125\ (seg)} = 320\ (cm/seg)$$

b)

Para calcular la constante de fase, desde la fórmula:

$$y = A.sen(k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi)$$

Si sustituimos: A=15 (cm), y=15 (cm), x=0 y t=0, nos queda:

$15 = 15.sen(k \cdot 0 - \omega \cdot 0 + \varphi)$, y operando matemáticamente:

$\frac{15}{15} = sen\varphi$, con lo cual $sen\varphi = 1,$ es decir:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}(rad)$$

Y finalmente la expresión general de la onda queda:

$$y = A.sen\left(k \cdot x - \omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = A.\cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

O sea:

$$\boldsymbol{y = 15\ (cm) \cdot cos(0,157 \cdot x - 50,3 \cdot t)}$$

NOTA:

Quedan pendientes de esta Unidad Temática los siguientes temas por desarrollar en vistas a rendir un examen final:

ONDAS SONORAS – INTENSIDAD Y AMPLITUD – SUPERPOSICIÓN DE ONDAS, INTERFERENCIA, ONDAS ESTACIONARIAS

porque se nos terminó el año académico… calculo que no debe ser más de un 2 % del programa de la asignatura.

Entiendo que hemos trabajado muchísimo hasta acá, ustedes y su profesor, no obstante ello a estos temas que quedan pendientes, le sugiero los prepare usted mismo.

Ha sido un gusto trabajar con ustedes en todo este tiempo.

Le deseo Éxitos en su estudio y me despido con un hasta siempre!!!

Ing. Juan Lancioni.