FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 6: DINÁMICA DE LOS SISTEMAS

CENTRO DE MASAS – MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS – LEYES FÍSICAS ASOCIADAS – APLICACIONES

(TERCERA PARTE)

Introducción:

Si bien este tema se encuentra al principio de la Unidad 6 del programa de Física I, como les comenté vez pasada en nuestras clases teóricas, por una cuestión pedagógica he decidido darlo al final de esta unidad porque entiendo que es preciso comprender previamente el concepto de Cantidad de Movimiento, para luego abordar el Movimiento de un Centro de Masas con más herramientas a nuestra disposición.

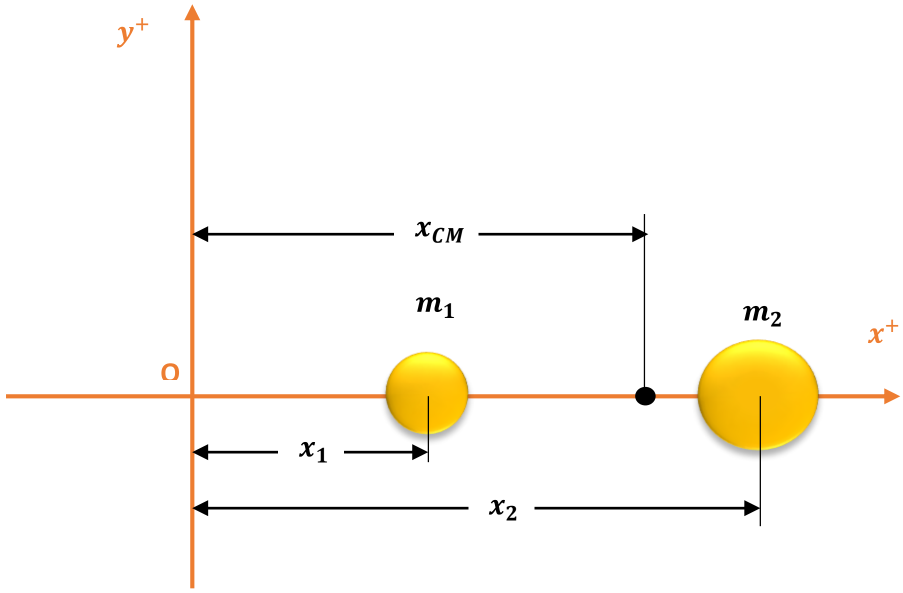
Precisamente, en esta sección **se describe el movimiento global de un Sistema**, en términos de un punto especial denominado **Centro de Masas**. Cuando nos referimos a un Sistema, el mismo puede ser un par de partículas o muchas partículas macroscópicas, un conjunto de átomos o un cuerpo conformado por infinitas partículas como el de un deportista que realiza una determinada acrobacia en el aire, etc.

En cualquiera de los casos se podrá observar que, el movimiento traslacional del Centro de Masas del Sistema, es equivalente a como si toda la masa del mismo estuviese concentrada en dicho punto. Es decir, el **sistema** u **objeto** se mueve como si la resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre él, se aplicara en un único punto que está representado por el Centro de Masas.

El movimiento del Centro de Masas (punto de color amarillo) del destornillador, es representativo de todo el cuerpo. En el caso de la figura se observa que la trayectoria es parabólica.

Centro de Masas:

Para entender como calcular el Centro de Masas de un Sistema de Partículas que se encuentran distribuidas en un espacio tridimensional, iniciemos con algo más sencillo, que es imaginarnos solamente a un par de partículas de masas m_1 y m_2 alineadas entre sí a lo largo de un eje de abscisas y, con posiciones x_1 y x_2 medidas respecto del origen de un sistema de coordenadas como muestra la siguiente figura:



entonces la posición del centro de masas se obtiene haciendo,

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$

y como se observa, se ubica más cerca de la partícula de mayor masa… con lo cual de una manera cualitativa es interesante reflexionar al respecto.

Si ahora se cuenta con una cantidad **"n"** de partículas alineadas a lo largo del eje **"x"** con distintas masas y a distintas posiciones, se puede generalizar la fórmula anterior escribiendo:

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \cdots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i \qquad (23)$$

En donde **"M"** representa la masa total de todo el Sistema, es decir, la suma de todas las masas que participan, a saber:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

Luego, suponiendo que la distribución de partículas se da en el contexto de un plano cartesiano, se debe calcular también la posición y_{CM}, bajo la idea de la fórmula **(23)**:

$$y_{CM} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + \cdots + m_n \cdot y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i \qquad (24)$$

Y si en cambio esa distribución de masas es en el espacio, aparece la tercera dimensión y se calcula el z_{CM}, de la siguiente manera:

$$z_{CM} = \frac{m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + \cdots + m_n \cdot z_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i \qquad (25)$$

Así, y de manera escalar el Centro de Masas referenciado a una terna de ejes: **"x,y,z"** se posiciona y calcula en el espacio tridimensional, con las fórmulas **(23)**, **(24)** y **(25)**. Lo que significa que su ubicación viene dada por las coordenadas: $(x_{CM}\,;y_{CM};z_{CM})$.

No obstante, de manera vectorial la posición del Centro de Masas de un Sistema de Partículas también se puede escribir como:

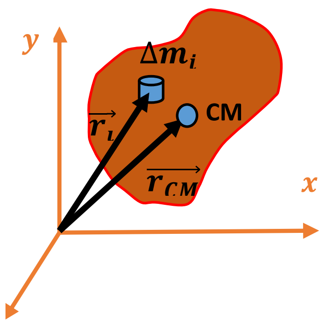
$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{m_1 \cdot \vec{r_1} + m_2 \cdot \vec{r_2} + \cdots + m_n \cdot \vec{r_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r_i} \qquad (26)$$

y la expresión **(26)**, resume a las fórmulas **(23)**, **(24)** y **(25)** en una sola!

Si en cambio tomáramos un Objeto Sólido en cual se considera una distribución de pequeños elementos de masa Δm_i , el Centro de Masas se posiciona de acuerdo a la fórmula **(27)**, que se obtiene con el siguiente razonamiento y cálculo:

$$x_{CM} \cong \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Delta m_i$$

Si se hace que el número **"n"** de elementos de masa Δm tienda a cero y se calcula el límite para la expresión anterior, se tiene:



$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Delta m_i = \frac{1}{M} \int x \cdot dm$$

De igual manera, para y_{CM} y z_{CM} se obtiene:

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \cdot dm \qquad y \qquad z_{CM} = \frac{1}{M} \int z \cdot dm$$

Entonces, la posición del Centro de Masas expresada de manera vectorial, es:

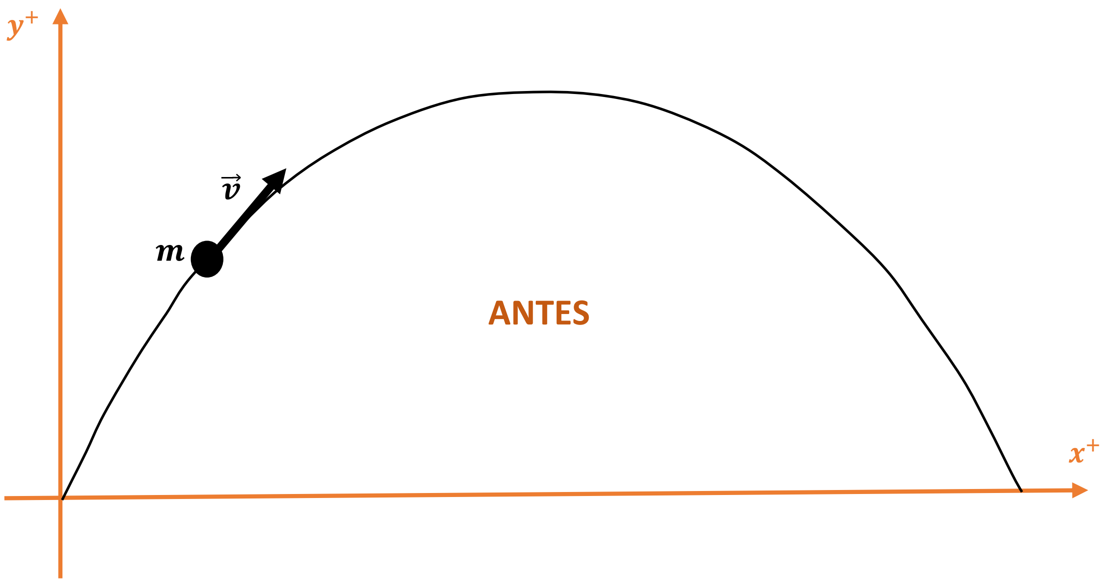
$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot dm \qquad (27)$$

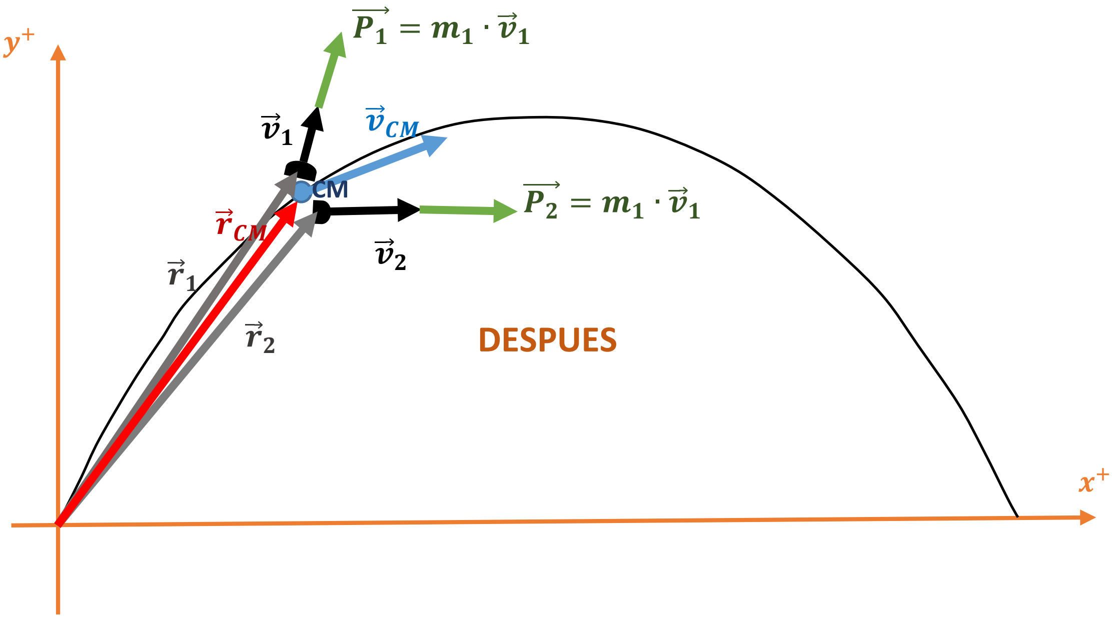
y resume a las tres fórmulas anteriores de color celeste!

Movimiento del Centro de Masas:

Un ejemplo sencillo para ilustrar esta sección es considerar el movimiento de un proyectil que luego de ser lanzado y al cabo de un cierto instante **"t"**, se lo hace estallar en el aire mientras describe una trayectoria parabólica. Partiendo del supuesto que tiene una masa **"m"** y al explotar se rompe en dos pedazos de masas m_1 y m_2, el movimiento de estas dos nuevas partículas en vez de estudiarse por separado, se lo puede hacer de una manera más sencilla, como equivalente al movimiento del Centro de Masas del Sistema y calcular la velocidad del Centro de Masas $\overrightarrow{v_{CM}}$ y la aceleración del Centro de Masas $\overrightarrow{a_{CM}}$. Esta última idea es la que presentamos en la introducción de este material cuando expresábamos que:

> en esta sección **se describe el movimiento global de un Sistema** en términos de un punto especial denominado **Centro de Masas**.





Cálculo de la velocidad del centro de masas:

Partiendo de la fórmula **(26)**,

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{r_i}$$

que a su vez se puede escribir de acuerdo a la figura de más arriba como:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{r_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{r_2}}{M}$$

con lo que, por despeje matemático se obtiene:

$$M.\overrightarrow{r_{CM}} = m_1 \cdot \overrightarrow{r_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{r_2}$$

y derivando en ambos miembros con respecto del tiempo, nos da:

$$\frac{d}{dt}(M.\overrightarrow{r_{CM}}) = \frac{d}{dt}(m_1 \cdot \overrightarrow{r_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{r_2})$$

entonces, aplicando reglas de derivación: de una constante por una función en el primer miembro y, de la suma de dos funciones en el segundo miembro:

$$M \cdot \frac{d}{dt}(\overrightarrow{r_{CM}}) = \frac{d}{dt} \cdot (m_1 \cdot \overrightarrow{r_1}) + \frac{d}{dt} \cdot (m_2 \cdot \overrightarrow{r_2})$$

en el primer miembro la derivada del vector centro de masas respecto del tiempo corresponde a la definición de la velocidad instantánea del centro de masas $\overrightarrow{v_{CM}}$; en tanto que en el segundo miembro se vuelve a aplicar la regla de la derivada de una constante por una función, y queda:

$$M \cdot \overrightarrow{v_{CM}} = m_1 \cdot \frac{d}{dt}(\overrightarrow{r_1}) + m_2 \cdot \frac{d}{dt}(\overrightarrow{r_2})$$

también es cierto ahora que la derivada del vector posición 1 con respecto al tiempo y la derivada del vector posición 2 con respecto al tiempo, corresponden a las velocidades instantáneas después de la explosión de las partículas 1 y 2 respectivamente, entonces:

$$M \cdot \overrightarrow{v_{CM}} = m_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{v_2} \qquad \textbf{(28)}$$

y despejando la velocidad del centro de masas,

$$\overrightarrow{v_{CM}} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{v_2}}{M} = \frac{\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2}}{M} \qquad \textbf{(29)}$$

que es lo que buscábamos!

Cálculo de la aceleración del centro de masas:

Partiendo de la fórmula **(28)**, y derivando nuevamente ambos miembros con respecto al tiempo, se obiene:

$$\frac{d}{dt}(M.\overrightarrow{v_{CM}}) = \frac{d}{dt}(m_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{v_2})$$

y aplicando reglas de derivación: de una constante por una función en el primer miembro y de la suma de dos funciones en el segundo miembro:

$$M \cdot \frac{d}{dt}(\overrightarrow{v_{CM}}) = \frac{d}{dt} \cdot (m_1 \cdot \overrightarrow{v_1}) + \frac{d}{dt} \cdot (m_2 \cdot \overrightarrow{v_2})$$

en el primer miembro, la derivada del vector velocidad del centro de masas respecto del tiempo corresponde a la definición de la aceleración instantánea del centro de masas $\overrightarrow{a_{CM}}$; en tanto que en el segundo miembro se vuelve a aplicar la regla de la derivada de una constante por una función, a saber:

$$M \cdot \overrightarrow{a_{CM}} = m_1 \cdot \frac{d}{dt}(\overrightarrow{v_1}) + m_2 \cdot \frac{d}{dt}(\overrightarrow{v_2})$$

y de nuevo se cumple que la derivada del vector velocidad instantánea 1 con respecto al tiempo y la derivada del vector velocidad instantánea 2 con respecto al tiempo, corresponden a las aceleraciones instantáneas después de la explosión de las partículas 1 y 2 respectivamente, entonces:

$$M \cdot \overrightarrow{a_{CM}} = m_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{a_2} \qquad \textbf{(30)}$$

y despejando la aceleración del centro de masas,

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{a_2}}{M} = \frac{\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}}{M} \qquad \textbf{(31)}$$

que es también lo que necesitábamos calcular!

Se observa además que la fórmula **(31)** no es otra cosa que la Segunda Ley de Newton aplicada a un Sistema de Partículas y se puede reescribir como,

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{\sum \overrightarrow{F_{ext.}}}{M}$$

o bien,

$$\sum \overrightarrow{F_{ext.}} = M \cdot \overrightarrow{a_{CM}}$$

Y de nuevo las Leyes de Newton son protagonistas!!!

Además se pudo comprobar que en un sistema aislado, en donde se cumple que la $\sum \overrightarrow{F_{ext.}} = 0$, la posición del centro de masas se conserva, es decir, se mantiene constante. Esto ocurre ciertamente porque la aceleración del centro de masas del sistema también es cero.

Entonces se puede escribir,

$$\boldsymbol{x_{CM}(o) = x_{CM}(f)} \qquad \textbf{(32)}$$

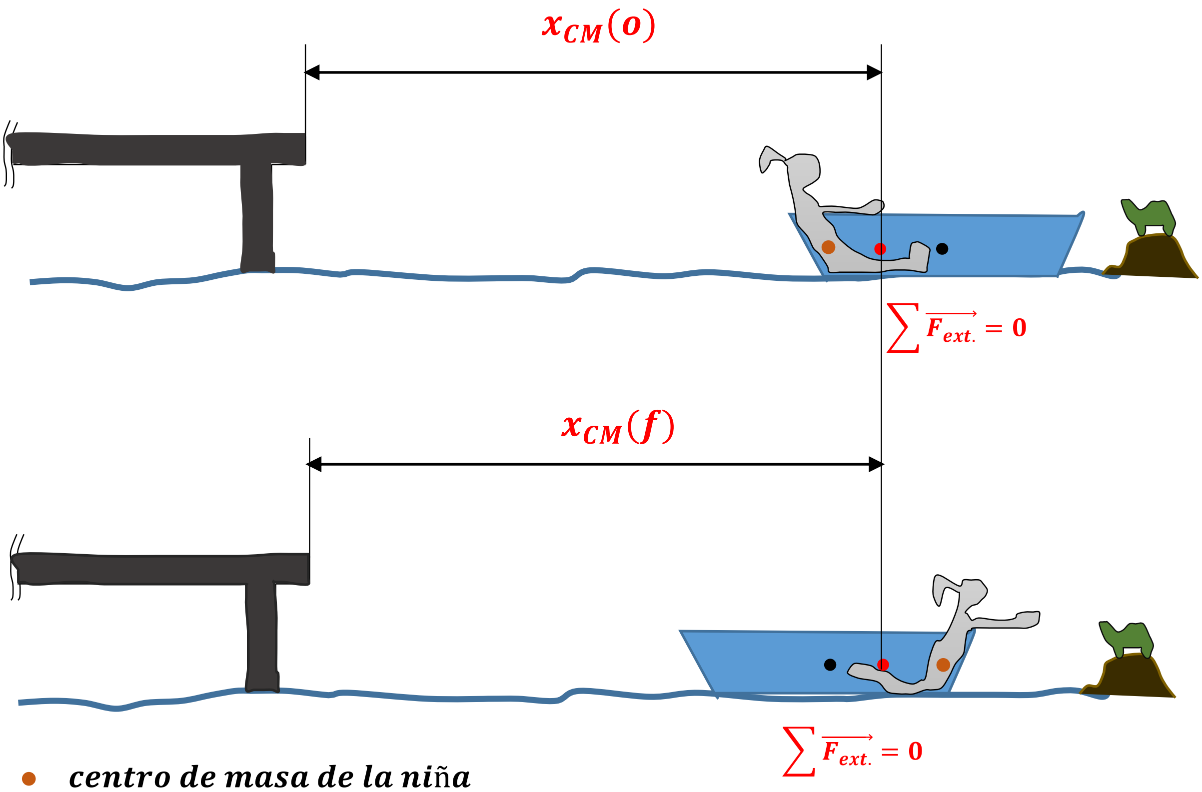
Lo mismo que habíamos visto en relación a la Cantidad de Movimiento o Momento Lineal:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P_{sist.}}}(\boldsymbol{o}) = \overrightarrow{\boldsymbol{P_{sist.}}}(\boldsymbol{f})$$

Veamos el siguiente caso de una manera cualitativa, pero al mismo tiempo muy interesante.

<u>EJEMPLO 6:</u>

Se trata de una niña que estando en un bote descansando y sentada en la popa, de repente ve una tortuga acuática parada arriba de una roca que aflora en el agua y decide incorporarse y caminar hacia la proa con la intención de tomarla... si aprecia el esquema siguiente, correspondiente al antes y al después, se observará que ¡la posición del centro de masas se conserva!



- *centro de masa de la niña*
- *centro de masa del sistema*
- *centro de masa del bote*

Bueno, es todo por ahora.

Con el desarrollo de estos contenidos curriculares hemos terminado con la Unidad 6.

Seguramente con su Profesor de Práctico realizará varios ensayos de resolución de problemas para afianzar estas leyes físicas.

¡Hasta la próxima y a seguir estudiando!

Ing. Juan Lancioni.

Nota: las fotos fueron tomadas desde internet y, las ilustraciones/esquemas fueron realizados por el profesor.