

FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 14: DINÁMICA DE FLUIDOS

INTRODUCCIÓN – CAUDAL – ECUACIÓN DE CONTINUIDAD – TEOREMA DE BERNOULLI – APLICACIONES – VISCOCIDAD

Introducción:

Hasta ahora el estudio de los fluidos se restringió al caso de que los mismos se encuentren en reposo, o sea, la parte de la física denominada Hidrostática. A continuación vamos a presentar la situación en la que los fluidos se encuentren en movimiento, es decir, la Hidrodinámica.

Al principio pondremos especial atención a los fluidos denominados **líquidos ideales** que no presentan fricción, es decir que su viscosidad es nula. No obstante, al final de esta sección trataremos este tema, es decir, el de los **líquidos reales**.

Recordemos que un **fluido** es un conjunto de moléculas ordenadas aleatoriamente que se mantienen juntas a partir de fuerzas cohesivas débiles y fuerzas que le confiere el dispositivo que lo contiene.

En el tratamiento de esta parte de la **Mecánica de los Fluidos** se van a aplicar nuevamente muchos principios que ya se estudiaron/trabajaron a lo largo del dictado de esta asignatura.

Caudal o Gasto:

Si se dispone de una canilla abierta que deja escurrir agua y debajo de ella se coloca un recipiente de volumen conocido "**V**" y se mide el tiempo "**t**" para el cual el recipiente se llena, estamos en condiciones de calcular el Caudal o Gasto de esa canilla, que por definición se obtiene haciendo el volumen "**V**" dividido por el tiempo "**t**", es decir:

$$Q = \frac{V}{t} \quad (1)$$

Se observa entonces que, el Caudal en el Sistema Internacional de Unidades se mide en (m^3/s) y además, es una magnitud escalar.

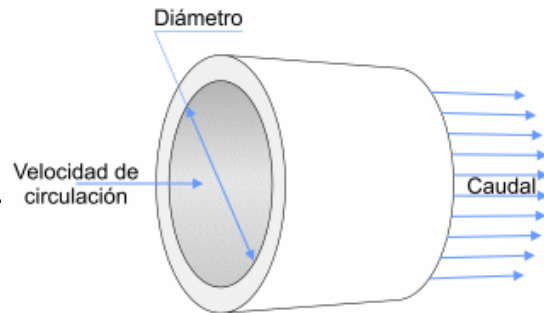


Otra manera de cuantificar el caudal de un líquido que se mueve por el interior de un ducto de sección transversal “**A**” a una rapidez conocida “**v**”, es multiplicando el área de la tubería por la rapidez del líquido en su eje axial, o sea:

$$Q = A \cdot v \quad (2)$$

En donde haciendo el análisis dimensional se observa que se obtiene nuevamente (m^3/s). Veamos entonces ese análisis de unidades:

$$Q = (m^2) \cdot \left(\frac{m}{s}\right) = (m^3/s)$$



Para el caso presentado en la figura, como cálculo auxiliar debemos recordar que el área de la parte interior del tubo se calcula por geometría haciendo:

$$A = \frac{\pi \cdot (\text{Diámetro})^2}{4}$$

EJEMPLO 1:

Si se dispone de un grifo por el cual escurre agua y se coloca debajo de él un balde de volumen $V = 20$ (litros) y el tiempo que tarda en llenarse es $t = 1$ (minuto), calcule:

- el caudal en $\left(\frac{\text{litro}}{\text{minuto}}\right)$, $\left(\frac{\text{litro}}{\text{seg}}\right)$ y $\left(\frac{m^3}{\text{seg}}\right)$
- la rapidez de escurrimiento del agua en (m/s) si se sabe que la sección transversal de la canilla es $A = 1,5$ (cm^2).

a) Con la fórmula (1) calculamos el caudal:

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{20}{1} = 20 \text{ (litros/min)}$$

como en 1 minuto hay 60 segundos, otra manera de expresar el caudal es haciendo:

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{20}{60} = 0,33 \text{ (litro/seg)}$$

y finalmente, como en 1 litro entran 10^{-3} metros cúbicos, se tiene que:

1 litro ----- $1 \cdot 10^{-3}$ metros cúbicos
 20 litros ----- $x = 20 \cdot 10^{-3}$ metros cúbicos, es decir: $0,02$ (m^3)

Entonces calculando:

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{0,02}{60} = 3,33 \cdot 10^{-4} \text{ (} m^3/s \text{)}$$

b) Con la fórmula (2) y despejando la rapidez se obtiene:

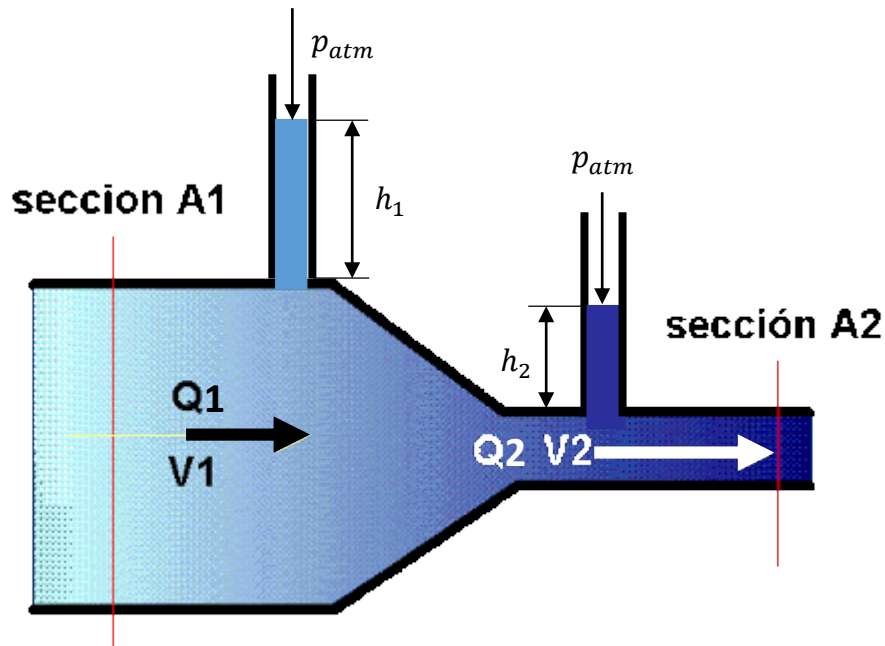
$$Q = A \cdot v \quad v = \frac{Q}{A} = \frac{3,33 \cdot 10^{-4}}{1,5 \cdot 10^{-4}} = 2,22 \text{ (m/s)}$$

Para entender completamente esta última cuenta, debe utilizar el siguiente factor de conversión de unidades:

$$\begin{array}{l} 10000 \text{ cm}^2 \text{-----} 1 \text{ m}^2 \\ 1,5 \text{ cm}^2 \text{-----} x = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 \end{array}$$

Ecuación de Continuidad o de Conservación de la masa:

Considere un fluido ideal que se mueve dentro de una cañería de diámetro no uniforme, como se ilustra en la siguiente figura.



Sabiendo que la zona de mayor diámetro tiene una sección transversal **A1** y la de menor diámetro otra sección transversal **A2**, por conservación de la masa se puede asegurar que el caudal que entra por la cañería **Q1**, es igual al caudal que sale **Q2**. Entonces se puede asegurar que:

$$Q1 = Q2 = Q = \text{constante} \quad (3)$$

es decir:

$$A1 \cdot v1 = A2 \cdot v2 = Q = \text{constante} \quad (4)$$

y a la expresión (4) se la conoce como la **Ecuación de Continuidad**.

Entonces, usted utiliza la Ecuación de Continuidad cada vez que riega el jardín y coloca su dedo pulgar en el extremo de la manguera por donde sale el agua. Al obturar parcialmente la abertura de salida hace que la rapidez del chorro v_2 sea mayor que la rapidez del agua v_1 dentro de la manguera. Finalmente, al ser la rapidez de salida bastante grande, usted podrá rociar con agua a su jardín a una gran distancia desde donde se encuentra.

Además del cambio de las rapidezces, hay otro tema importante para destacar en relación a este fenómeno físico, que está vinculado a las **presiones laterales** que se registran en las paredes del tubo en cada una de las secciones antes descriptas. Para ello se ha colocado un par tubitos que muestran el ascenso de las distintas columnas de agua en el interior de ellos. Así se puede constatar que en el **tubito 1** ubicado a la altura de la sección **A1**, la columna de líquido sube un valor h_1 ; en tanto que en el **tubito 2**, localizado a la altura de la sección **A2**, la columna de agua asciende otro valor h_2 . Como h_2 es menor a h_1 (ver figura), se puede deducir que la presión lateral p_2 es menor que la presión lateral p_1 .

Finalmente podemos concluir que:

**A menor sección, mayor rapidez del fluido y menor presión lateral
y viceversa...**

A mayor sección, menor rapidez del fluido y mayor presión lateral

EJEMPLO 2:

Un jardinero utiliza una manguera de diámetro $d = 2,50$ (cm) para llenar una cubeta de $V = 30$ (litros). El jardinero nota que tarda un $t = 1$ (min) para llenar la cubeta. Luego acopla un boquilla a la manguera de $A_2 = 0.5$ (cm^2) de área de sección transversal. La boquilla se sostiene de tal manera que el agua se proyecta horizontalmente desde una altura $h = 1$ (m) sobre el piso. ¿Cuánto vale la distancia horizontal " x " a la que llega el agua desde que sale de la boquilla?

Primero: encuentre la rapidez del agua en la manguera a partir de la información de llenado de la cubeta...

$$A_1 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4} = \pi \cdot \left[\frac{(2,5 \text{ cm})^2}{4} \right] = 4,91 \text{ (cm}^2\text{)}$$

entonces:

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{30 \text{ (litros)}}{1 \text{ (min)}} = \frac{30 \cdot 10^3 \text{ (cm}^3\text{)}}{60 \text{ (seg)}} = 500 \text{ (cm}^3\text{/s)}$$

con los cual, si:

$$Q = A_1 \cdot v_1 \quad \text{despejando } v_1 \text{ queda:}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{500 \text{ (cm}^3/\text{s)}}{4,91 \text{ (cm}^2)} = 102 \left(\frac{\text{cm}}{\text{seg}} \right) = 1,02 \text{ (m/seg)}$$

Esta rapidez se etiqueta como v_1 porque representa el **punto 1** dentro de la manguera. El **punto 2** se identifica en el aire, justo afuera de la boquilla.

Segundo: encuentre la rapidez v_2 con la que el agua sale de la boquilla. De esta manera conocerá la rapidez inicial v_0 con que el agua es eyectada horizontalmente del pico de la manguera, ya que $v_2 = v_0$. Adelante!

Por la Ecuación de Continuidad:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

y despejando v_2 , se obtiene:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 = \frac{4,91 \text{ (cm}^2)}{0,5 \text{ (cm}^2)} \cdot 1,02 \left(\frac{\text{m}}{\text{seg}} \right) = 10 \text{ (m/seg)}$$

con lo cual:

$$v_0 = 10 \text{ (m/seg)}$$

Tercero: de la ecuación de cinemática en el plano a lo largo del eje de ordenada, que dice:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

reemplazando los valores, queda:

$$0 = 1 + 0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2 \quad \text{o sea} \quad 0 = 1 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2$$

y despejando el tiempo de caída, se llega a:

$$\frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2 = 1 \quad \text{es decir} \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9,8}} = 0,452 \text{ (seg)}$$

Luego, con la ecuación de cinemática en el plano para el eje de abscisa, que se escribe como:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t \quad \text{que al adaptarla queda} \quad x = 0 + v_0 \cdot t$$

se calcula finalmente la distancia horizontal “ x ” solicitada:

$$x = v_0 \cdot t = 10 \left(\frac{\text{m}}{\text{seg}} \right) \cdot 0,452 \text{ (seg)} = \mathbf{4,52 \text{ (m)}}$$

y el problema queda resuelto!

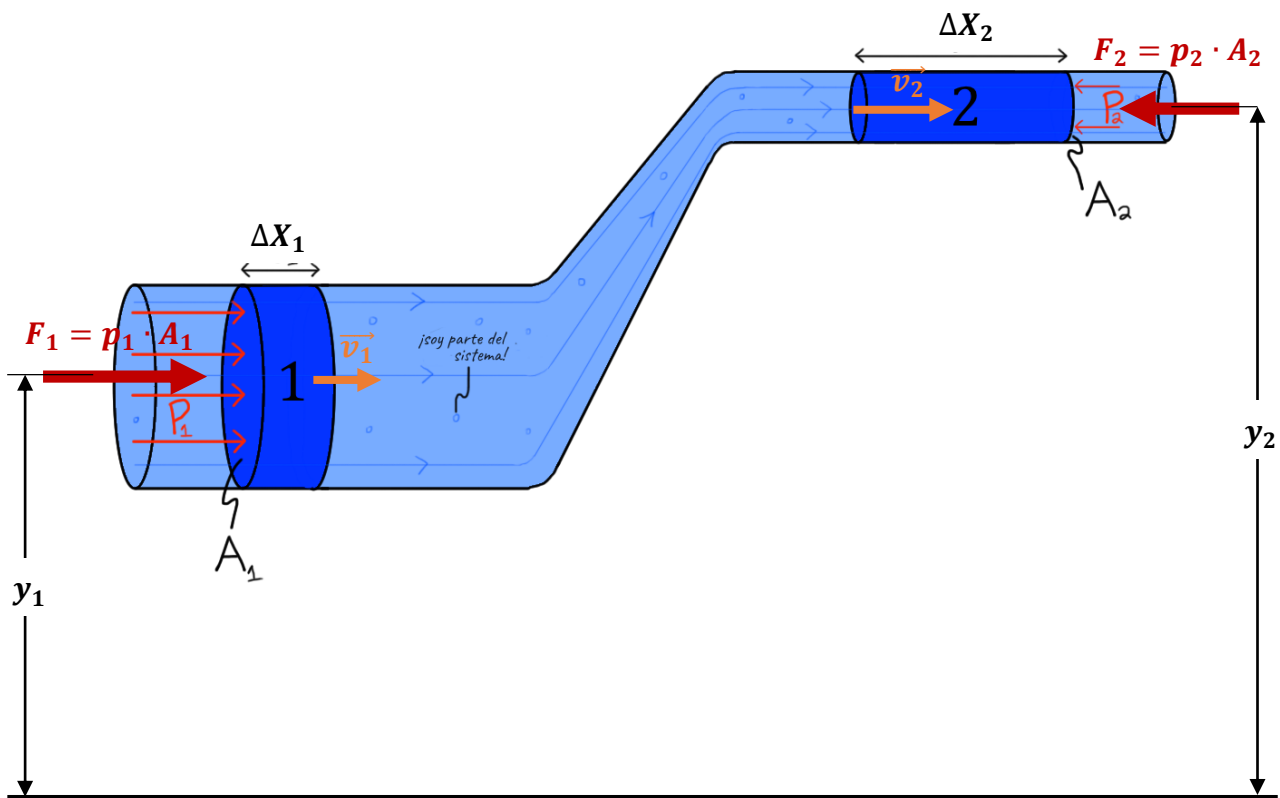
Teorema de Bernoulli:

En alguna oportunidad habrá experimentado la sensación de conducir en una carretera y que un gran camión pase muy cerca de su coche a una gran velocidad. En esta situación, es posible que haya tenido la sensación de que su vehículo era tirado hacia el camión mientras éste pasaba. En esta sección se estudiará el origen de este efecto.

A medida que un fluido se mueve a través de una región donde su rapidez o elevación sobre la superficie de la tierra cambian, la presión en el fluido varía con dichos cambios. Esa correspondencia entre la rapidez del fluido, la presión y la elevación, la dedujo por primera vez en el año 1738, el físico suizo Daniel Bernoulli.

A continuación se demostrará mediante formulaciones matemáticas el **Teorema de Bernoulli**.

Considérese un líquido en movimiento de densidad uniforme y conocida ρ , que se encuentra contenido en el interior de un tubo de sección variable. Si se toma un volumen imaginario de ese líquido con la forma de un cilindro que tiene una sección A_1 y largo ΔX_1 en la parte inferior del tubo a una cota y_1 , y de sección A_2 y largo ΔX_2 en la parte superior del ducto de cota y_2 y, se propone que ambos volúmenes sean iguales, es decir, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$; se observará que en las caras exteriores de cada uno de los cilindros, actuarán presiones p_1 y p_2 , que proporcionan fuerzas $F_1 = p_1 \cdot A_1$ y $F_2 = p_2 \cdot A_2$, respectivamente. Ver la siguiente figura.



Se sabe además que el fluido se mueve a una rapidez v_1 en la zona del **cilindro 1** de masa Δm_1 y a v_2 en la zona del **cilindro 2** de masa Δm_2 . Pero como los cilindros son de igual volumen, se puede asegurar que $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$.

Entonces, para todo lo expresado se puede escribir por conservación de la Energía Mecánica:

$$W_{motriz} = \Delta K + \Delta U \quad (5)$$

con:

$$a) \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_1^2 \quad (6)$$

$$b) \Delta U = U_{g2} - U_{g1} = \Delta m \cdot g \cdot y_2 - \Delta m \cdot g \cdot y_1 \quad (7)$$

$$c) W_{motriz} = F_1 \cdot \cos 0^\circ \cdot \Delta x_1 + F_2 \cdot \cos 180^\circ \cdot \Delta x_2$$

$$W_{motriz} = F_1 \cdot (1) \cdot \Delta x_1 + F_2 \cdot (-1) \cdot \Delta x_2$$

$$W_{motriz} = F_1 \cdot \Delta x_1 - F_2 \cdot \Delta x_2 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2$$

$$W_{motriz} = p_1 \cdot \Delta V_1 - p_2 \cdot \Delta V_2$$

$$W_{motriz} = p_1 \cdot \Delta V - p_2 \cdot \Delta V \quad (8)$$

Entonces, reemplazando (6), (7) y (8) en (5):

$$p_1 \cdot \Delta V - p_2 \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_1^2 + \Delta m \cdot g \cdot y_2 - \Delta m \cdot g \cdot y_1$$

y dividiendo en ambos miembros por ΔV , queda:

$$\frac{p_1 \cdot \Delta V - p_2 \cdot \Delta V}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_1^2 + \Delta m \cdot g \cdot y_2 - \Delta m \cdot g \cdot y_1}{\Delta V}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta V} \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta V} \cdot v_1^2 + \frac{\Delta m}{\Delta V} \cdot g \cdot y_2 - \frac{\Delta m}{\Delta V} \cdot g \cdot y_1$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot y_2 - \rho \cdot g \cdot y_1$$

y ordenando:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \quad (9)$$

con lo cual, queda demostrada la Ecuación de Bernoulli!!!

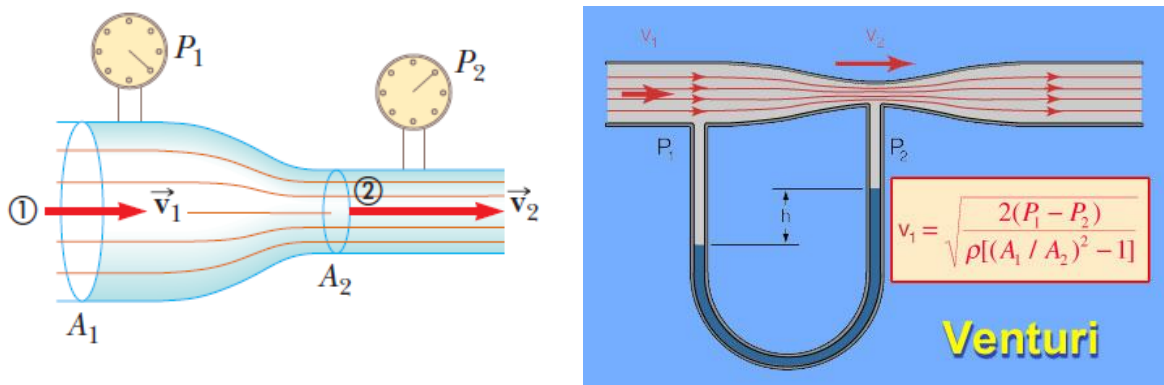
Presión debido a la altura

Presión cinética

Aplicaciones de Bernoulli:**EJEMPLO 3:** Tubo de Venturi:

La tubería horizontal que se muestra a continuación, que consiste en una cañería que presenta una zona constreñida, se la conoce como Tubo de Venturi. Este ducto se lo utiliza para medir la rapidez de un flujo de un fluido incompresible. Se puede observar un dispositivo de estas características, por ejemplo, por debajo de las alas de los aviones y sirve precisamente para **medir la velocidad de las aeronaves**.

Veamos para la siguiente información, este razonamiento:



Como se adelantó en párrafos anteriores, la presión p_2 es menor que p_1 y se puede visualizar en los manómetros de ambos esquemas. Entonces teniendo como datos: la diferencia de presión $p_2 - p_1$, la densidad del fluido ρ y las secciones A_1 y A_2 , se puede calcular perfectamente la rapidez v_2 . Vamos a realizar estos cálculos de una manera analítica. Luego, si usted lo desea, puede hacer las cuentas correspondientes proponiendo valores numéricos para cada uno de los datos...

a) A partir de la Ecuación (9) de Bernoulli:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

y al adaptarla, porque para este caso no hay diferencia de altura queda:

$$p_1 + \cancel{\rho \cdot g \cdot y_1} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \cancel{\rho \cdot g \cdot y_2} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \quad (10)$$

b) Con la Ecuación (4) de Continuidad:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

y despejando v_1 :

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot v_2 \quad (11)$$

entonces, reemplazando (11) en (10) y despejando v_2 , se obtiene:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} \cdot v_2 \right)^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{A_2^2}{A_1^2} \cdot v_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \cdot \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)$$

$$\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} = v_2^2 \cdot \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2} \right)$$

$$\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot (A_1^2 - A_2^2)} \cdot A_1^2 = v_2^2$$

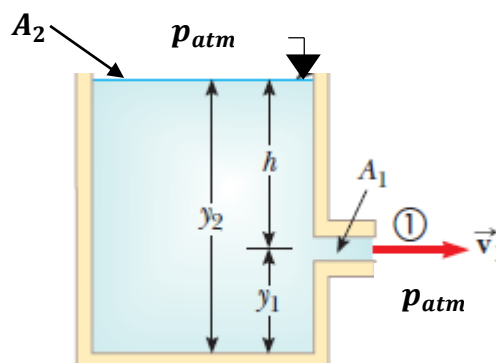
y por último:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot (A_1^2 - A_2^2)}} \cdot A_1 = A_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot (A_1^2 - A_2^2)}} \quad (12)$$

con lo cual, la ecuación (12) satisface lo que queríamos encontrar!

EJEMPLO 4: Ley de Torricelli:

Un tanque abierto en contacto con la atmósfera a una p_{atm} contiene un líquido de densidad uniforme ρ y posee un pequeño orificio a un costado a una distancia y_1 respecto del fondo del recipiente. El orificio también está en contacto con la atmósfera y su diámetro es mucho menor que el diámetro superior del estanque. Bajo estas condiciones y ayudado por el esquema que se muestra a continuación, determine la rapidez v_1 con la que el líquido escurre por el orificio ubicado a una profundidad h respecto del pelo de agua.



Entonces aplicando la Ecuación (9) de Bernoulli:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

y al adaptarla, como $v_2 = 0$ porque las moléculas del pelo de agua prácticamente no se mueven; y tanto la presión en la cota y_1 como en la cota y_2 es la presión atmosférica, es decir, $p_1 = p_2 = p_{atm}$; la ecuación anterior queda:

$$\cancel{p_{atm}} + \rho \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = \cancel{p_{atm}} + \rho \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \cancel{v_2^2}$$

$$v_2 = 0$$

pero además se cancelan los términos de p_{atm} , con lo cual:

$$\rho \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = \rho \cdot g \cdot y_2$$

y despejando v_1 , se obtiene:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = \rho \cdot g \cdot y_2 - \rho \cdot g \cdot y_1 = \rho \cdot g \cdot (y_2 - y_1)$$

$$v_1^2 = \frac{2}{\cancel{\rho}} \cdot \cancel{\rho} \cdot g \cdot (y_2 - y_1) = 2 \cdot g \cdot h$$

lo que finalmente:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (13)$$

Que es una ecuación bastante conocida y estudiada en cinemática... la recuerda?

Nuevamente, si uno le da un valor a la altura se puede calcular rápidamente la velocidad de salida del líquido por el orificio.

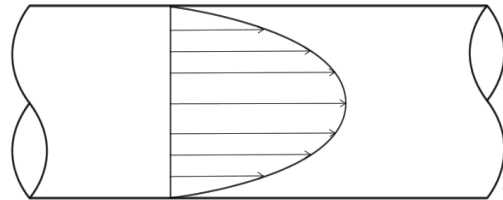
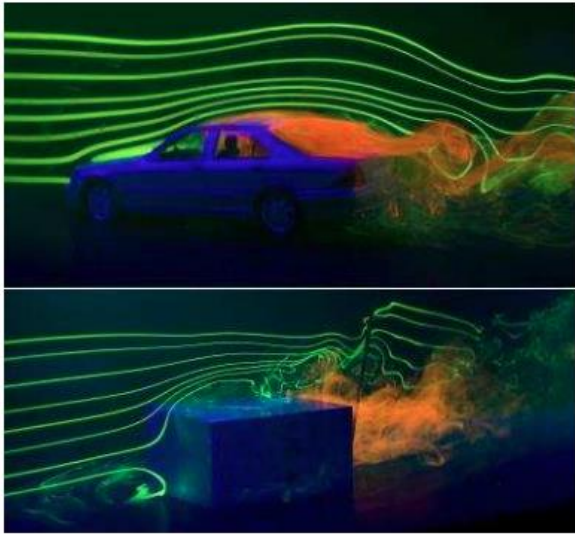
Viscocidad:

Se dice que un fluido es **laminar o estable** si cada partícula del fluido sigue una trayectoria uniforme de tal modo que las trayectorias de diferentes partículas del fluido nunca se cruzan unas con otras.

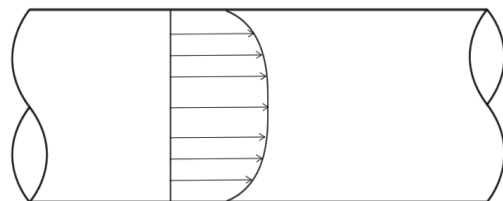
En este tipo de flujo se puede afirmar que todas las partículas del fluido que llegan a un punto dado tienen la misma velocidad.

Luego, para una cierta velocidad crítica de las partículas del fluido, el flujo deja de ser laminar para ser **turbulento**. Esta nueva forma describe un flujo que por algunas regiones forma remolinos.

Para ilustrar lo expresado en los párrafos anteriores, observe las siguientes figuras.



Flujo Laminar



Flujo Turbulento

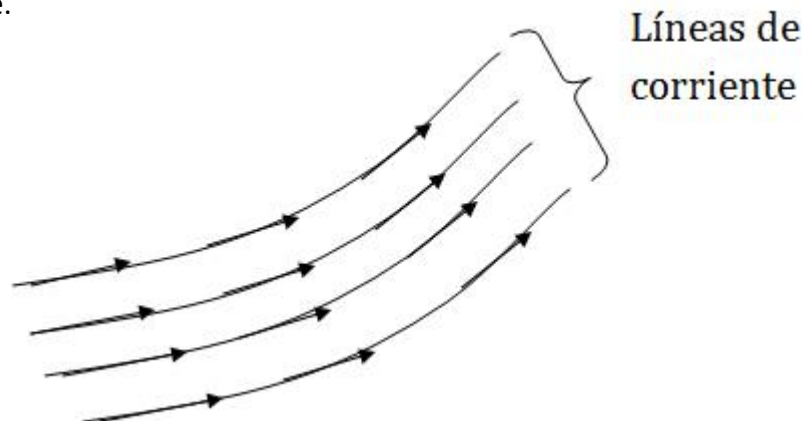
El término **viscosidad** se utiliza comúnmente para caracterizar la fricción interna de un fluido. Esta fricción interna o también denominada **fuerza viscosa** se asocia con la resistencia que tienen dos capas adyacentes de un fluido para moverse una en relación a la otra. La viscosidad depende de la naturaleza del fluido, como de su temperatura y aumenta cuando disminuye esta última (son inversamente proporcionales). En el Sistema Internacional de Unidades se la mide en **(kg.m/seg)** y existen tablas que muestran los valores de la viscosidad de distintas sustancias, que son medidas a una temperatura estable de laboratorio.

La viscosidad hace que parte de la Energía Cinética del fluido se convierta en Energía Interna. Este procedimiento es equivalente a aquel mediante el cual un objeto que se desliza sobre una superficie horizontal rugosa pierde energía cinética.

Ya que el movimiento de los fluidos reales es muy complejo, un enfoque más simplificador de esta situación supone un modelo de **flujo de fluido ideal** con los siguientes supuestos:

- El fluido no es viscoso.
- El flujo es laminar.
- El fluido es incompresible.
- El flujo es irrotacional.

y para estos casos una partícula en flujo laminar sigue una línea de corriente y, en cada punto a lo largo de la trayectoria, la velocidad de la partícula es siempre tangente a la línea de corriente.

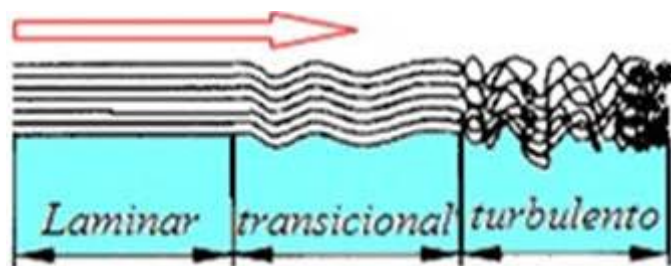


Entre otras cosas, el que un fluido presente o no turbulencia cuando fluye, depende de la viscosidad. En particular la turbulencia se presenta más prontamente cuando la viscosidad es pequeña. Si imaginamos que el fluido fluye por un tubo de radio r , la turbulencia se produce cuando se excede al **Número de Reynolds**, el cual es un parámetro adimensional definido por:

$$Re = \frac{2 \cdot \rho \cdot v \cdot r}{n} \quad (14)$$

Donde:

ρ = densidad
 v = rapidez del fluido
 r = radio del tubo
 n = viscosidad



Entonces los valores de referencia para categorizar cada tipo de flujo es:

$Re \leq 2000$ el flujo es **laminar**
 $2000 < Re < 3000$ el flujo es de **transición**
 $Re \geq 3000$ el flujo es **turbulento**

Es todo!!! Luego en el Práctico se resolverán algunos problemas y usted se empezará a sentir más seguro con estos temas. Le deseo Éxitos en su estudio. Hasta la próxima!!!

Ing. Juan Lancioni.

Nota: las fotos y esquemas fueron tomados desde internet y alguno de ellos fueron modificados por el profesor.