FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 7 Y 8: CINEMÁTICA Y DINÁMICA DEL SÓLIDO

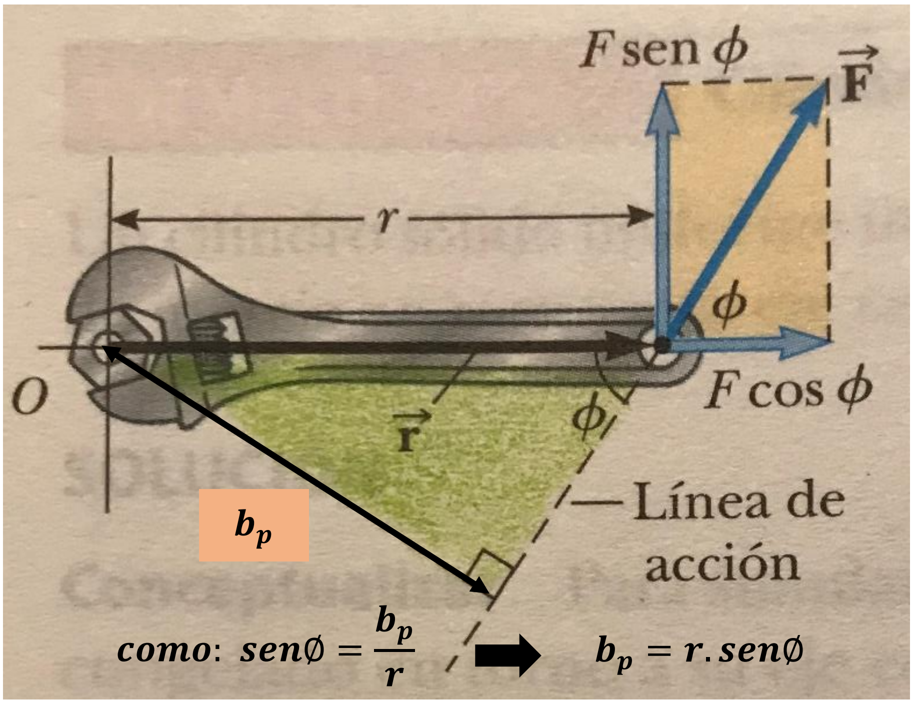
MOMENTO DE UNA FUERZA O TORQUE – SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA LA ROTACIÓN DE UN SÓLIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO – MOMENTO ANGULAR O CINÉTICO

(SEGUNDA PARTE)

Momento de una Fuerza o Torque:

Es una magnitud física vectorial que cuantifica el efecto de giro alrededor de un eje fijo que pasa por **"o",** producido por una fuerza $\vec{F}$ cuando la misma está aplicada sobre un Cuerpo Rígido.

Veamos el siguiente caso:



Si se aplica una fuerza $\vec{F}$ en una llave, de tal manera que forma un cierto ángulo $\emptyset$ con la horizontal y se encuentra ubicada en el extremo de un vector posición $\vec{r}$; la Torca se define como un producto vectorial de: $\vec{r}$ con $\vec{F}$.

$$\vec{\tau_o} = \vec{r} x \vec{F} \ (N.m) \qquad (19)$$

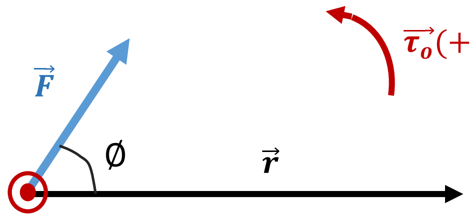
Es decir que **el vector Torca**, tiene:

$\overrightarrow{\tau_o}$

- **módulo:** $\boldsymbol{\tau_o = r \cdot F \cdot sen\emptyset}$ **(20)** el módulo de $\vec{r}$, por el módulo de $\vec{F}$, por el $\boldsymbol{sen\emptyset}$
- **dirección:** perpendicular al plano en donde están contenidos los vectores $\vec{r}\ y\ \vec{F}$
- **sentido:** el de la regla de la mano derecha.

Estos tres elementos descriptos (módulo, dirección y sentido), surgen de la definición de producto vectorial, que seguramente usted estudió en Álgebra…

Para dar más detalles de lo que se acaba de presentar, imaginemos que reubicamos a los vectores $\vec{r}\ y\ \vec{F}$ y, tratamos de representar al vector Torca $\overrightarrow{\tau_o}$:



$\overrightarrow{\tau_o}(+)$ *es antihoraria y hace girar la llave de la forma indicada*

$\overrightarrow{\tau_o}$ *es un vector saliente desde el plano de la hoja por regla de la mano derecha (pulgar hacia arriba)*

Generalmente en el práctico, a la Torca o el Momento de una Fuerza se lo calcula de **manera escalar**. Entonces puede tener un signo (+) o (-). Ello dependerá del sentido de giro… y como se observa en la interpretación de arriba, la Torca es positiva porque el vector es saliente (a favor de un eje z^+). También, en vez de **(20)**, se puede escribir:

$$\boldsymbol{\tau_o = +F \cdot b_p} \qquad \textbf{(21)}$$

¿Quién es $\boldsymbol{b_p}$?

b_p= brazo de palanca. Y para calcularlo se propone seguir los siguientes pasos:

1.- se prolonga la línea de acción de la fuerza (con una recta punteada).
2.- se busca una recta perpendicular a la anterior que pase por el punto de giro **“o”**.
3.- la distancia definida entre el punto **“o”** y el punto de intersección de ambas rectas configura el brazo de palanca "$\boldsymbol{b_p}$" .

Entonces, por trigonometría: $\boldsymbol{b_p = r.sen\emptyset}$ **(22)**

y reemplazando **(22)** en **(21)**, queda:

$$\boldsymbol{\tau_o = +F \cdot b_p = +F \cdot r.sen\emptyset} \qquad \textbf{(23)}$$

y como el orden de los factores no altera el producto, la fórmula **(23)** es la misma que la **(20)**!

Veamos ahora esta otra figura, que muestra dos fuerzas actuando sobre un cuerpo rígido. Si suponemos que esas fuerzas son $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ y sus respectivos brazos de palanca b_{p1} y b_{p2}.

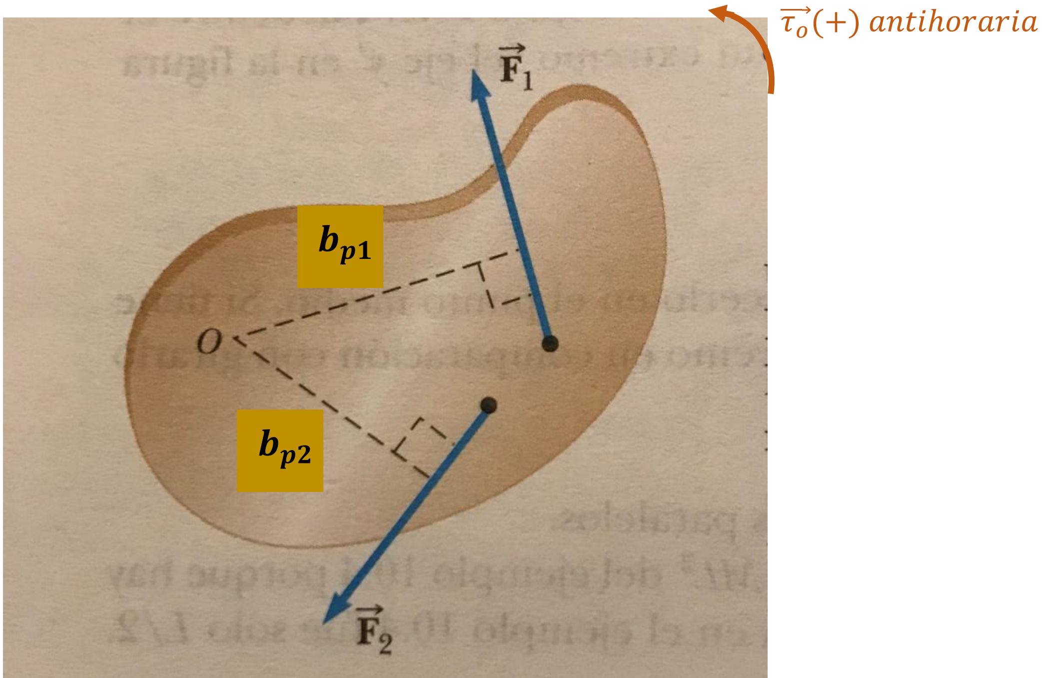


Figura 10.13 La fuerza $\vec{F}_1$ tiende a dar vuelta el objeto contra las manecillas del reloj en torno a un eje a través de O, y $\vec{F}_2$ tiende a dar vuelta en sentido de las manecillas del reloj.

Se puede calcular la **Torca Neta o Total** haciendo la **Sumatoria de las Torcas**. En este caso una es positiva y la otra es negativa, respectivamente:

$$\sum \tau_o = +F_1 . b_{p1} - F_2 . b_{p2} \qquad \textbf{(24)}$$

Luego si analizamos la fórmula **(24)**, puede pasar tres cosas:

a) que el primer término sea mayor que el segundo, por lo tanto la Torca Neta es (+) y significa que el objeto gira en sentido anti-horario.
b) que el primer término sea menor que el segundo, entonces la Torca Neta es (-) y esto hace que el objeto gire en sentido horario.

c) que el primer término sea igual al segundo término, entonces la Torca Neta da cero y el objeto no gira o se dice que está el **EQUILIBRIO DE ROTACIÓN!**

Segunda Ley de Newton aplicada a la rotación de un sólido que gira alrededor de un eje fijo que para por un punto "o":

Así como para la Traslación la Segunda Ley de Newton se escribió como:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext.}} = m \cdot \vec{a}$$

Para el caso de la Rotación y por **ANALOGÍA** se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum \overrightarrow{\tau_o} = I_o \cdot \vec{\alpha}$$

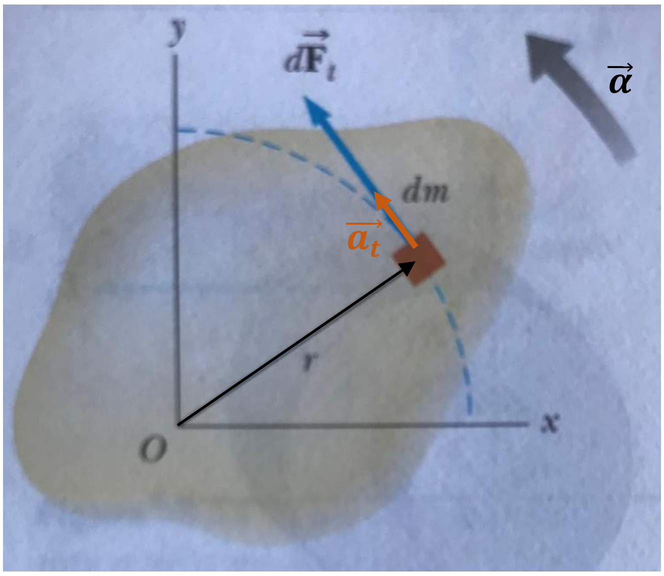
Observe que la sumatoria de las torcas es equivalente a la sumatoria de las fuerzas exteriores; el momento de Inercia es equivalente a la masa; y finalmente la aceleración angular es equivalente a la aceleración lineal.

Entonces:

$$\sum \overrightarrow{\tau_o} = I_o \cdot \vec{\alpha} \qquad \textbf{(25)}$$

es la ley física que pretendemos presentar en esta sección!

A continuación, la intención es demostrar esa ley mediante formulaciones matemáticas tomando como soporte el siguiente esquema:



Se dispone de un cuerpo rígido de masa **"M"** que se lo pone a girar alrededor de un eje fijo que pasa por **"o"**. Cada elemento de masa **"dm"** da vueltas en torno al eje en trayectoria circular y con la misma aceleración angular **"α"**.

Si sobre un infinitesimal de masa **"dm"** ubicado a una distancia **"r"** se aplica un infinitesimal de fuerza tangencial "$\boldsymbol{d\overrightarrow{F_t}}$", dicha partícula experimentará un infinitesimal de torca "$\boldsymbol{d\overrightarrow{\tau_o}}$" alrededor del punto **"o"**, que se puede calcular de manera escalar, como:

$$\boldsymbol{d\tau_o = dF_t \cdot r} \qquad \textbf{(26)}$$

aplicando escalarmente la Segunda Ley de Newton al infinitesimal de masa **"dm"**, se tiene:

$$\boldsymbol{dF_t = dm \cdot a_t} \qquad \textbf{(27)}$$

entonces, reemplazando **(27)** en **(26)**:

$$\boldsymbol{d\tau_o = dm \cdot a_t \cdot r} \qquad \textbf{(28)}$$

además, por cinemática de rotación se sabe que:

$$\boldsymbol{a_t = \alpha \cdot r} \qquad \textbf{(29)}$$

con lo cual, reemplazando **(29)** en **(28)**, queda:

$$\boldsymbol{d\tau_o = dm \cdot \alpha \cdot r \cdot r = dm. \alpha \cdot r^2} \qquad \textbf{(30)}$$

entonces, integrando en ambos miembros y calculando se obtiene:

$$\boldsymbol{\int d\tau_o = \int \alpha \cdot r^2 \cdot dm}$$

$$\boldsymbol{\tau_o = \alpha \cdot \int r^2 \cdot dm} \qquad \textbf{(31)}$$

con lo cual, como la $\boldsymbol{\int r^2 \cdot dm}$ representa al Momento de Inercia de todo el sólido girando alrededor del punto **"o"**, **(31)** se puede escribir finalmente como:

$$\boldsymbol{\tau_o = \alpha \cdot I_o = I_o \cdot \alpha}$$

y generalizando:

$$\boldsymbol{\sum \tau_o = I_o \cdot \alpha} \qquad \textbf{(32)}$$

que escrita de manera vectorial, es:

$$\boldsymbol{\sum \overrightarrow{\tau_0} = I_o . \vec{\alpha}}$$

y representa la ley **(25)** que queríamos demostrar!!!

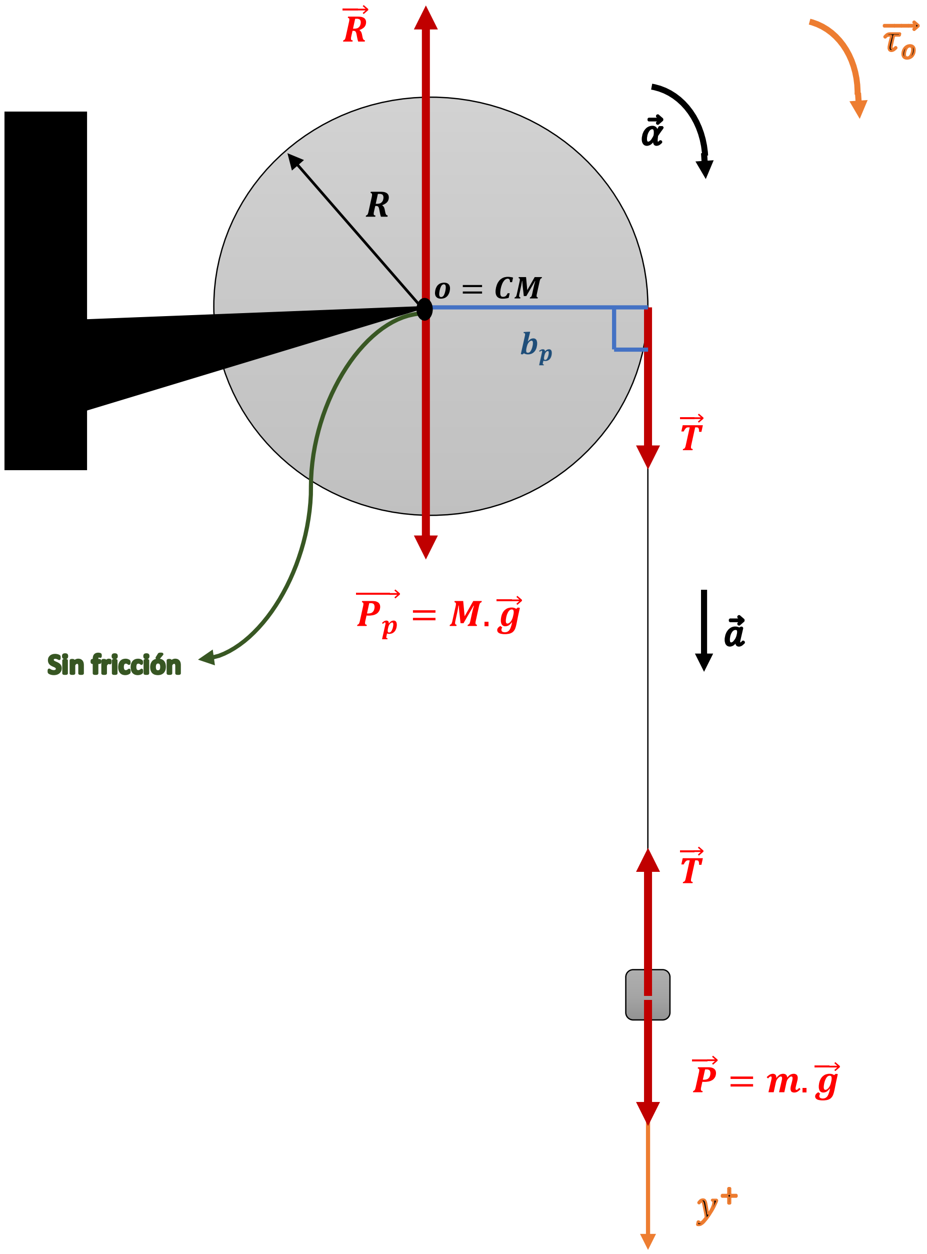
Supongamos ahora el siguiente caso.

EJEMPLO 4:

Se dispone de un hilo enrollado a una polea de masa **"M"** y radio **"R"**. En el extremo del hilo cuelga un bloque de masa **"m"** que Inicialmente se encuentra en reposo hasta que se deja caer. A partir de ese momento el bloque comienza a descender en M.R.U.V. con una aceleración "$\vec{a} = cte$" y al mismo tiempo hace girar a la polea describiendo un M.C.U.V con "$\vec{\alpha} = cte$". Entonces, para los siguientes datos:

$M = 3\ (kg)\ \ m = 1\ (kg)\ \ R = 0,5\ (m)$

Calcule:
a) la Tensión del cable, $T = ?$
b) La aceleración angular de la polea, $\alpha = ?$
c) La aceleración lineal de bajada del bloque, $a = ?$



Traslación: "m" $\sum F_y = m.a_y$ $mg - T = m.a$ **(A)**

Rotación: "M" $\sum \tau_o = I_o.\alpha$ $T.R = I_o.\alpha$

Pero, como el Momento de Inercia de la polea es: $I_o = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$. Reemplazándolo en la expresión anterior queda:

$T.\cancel{R} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^{\cancel{2}} \cdot \alpha$ y cancelando los radios, se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R \cdot \alpha \qquad \textbf{(B)}$$

Con **(A)** y **(B)** tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas … entonces la ecuación que falta, la aporta la:

Cinemática: $a = \alpha \cdot R$ **(C)**

Ahora tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas y nos disponemos a resolver el Sistema de Ecuaciones Lineales,

reemplazando **(C)** en **(A)**:

$mg - T = m.\alpha \cdot R$ y despejando la tensión "T": $T = mg - m \cdot \alpha \cdot R$ **(D)**

entonces igualando **(B)** con **(D)**, se obtiene: $\frac{1}{2} \cdot M \cdot R \cdot \alpha = mg - m \cdot \alpha \cdot R$

y agrupando los términos que poseen "α": $\frac{1}{2} \cdot M \cdot R \cdot \alpha + m \cdot \alpha \cdot R = mg$

que al sacar factor común "α" y despejando, se obtiene:

$\alpha \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot M \cdot R + m \cdot R\right) = mg$ $\qquad \alpha = \frac{mg}{R \cdot \left(\frac{M}{2} + m\right)}$ **(E)**

que es constante y, calculando da: $\alpha = \frac{1.9,8}{0,5 \cdot \left(\frac{3}{2} + 1\right)} = 7,84\ (rad/s^2)$

reemplazando **(E)** en **(C)** y, cancelando "R" nos queda: $a = \frac{mg}{\cancel{R} \cdot \left(\frac{M}{2} + m\right)} \cdot \cancel{R}$

$$a = \frac{mg}{\left(\frac{M}{2} + m\right)} \qquad \textbf{(F)}$$

que también es constante y calculando da: $a = \frac{1.9,8}{\left(\frac{3}{2} + 1\right)} = 3,92\ (m/s^2)$

y finalmente, reemplazando **(E)** en **(B)**, obtenemos la tensión "T":

$$T = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \cancel{R} \cdot \frac{mg}{\cancel{R} \cdot \left(\frac{M}{2} + m\right)} = \frac{M \cdot m \cdot g}{(M + 2.m)}$$

o sea: $$T = \frac{M \cdot m \cdot g}{(M+2.m)} \qquad \textbf{(G)}$$

y al calcular se tiene: $$T = \frac{3 \cdot 1 \cdot 9,8}{(3+2.1)} = 5,88\ (N)$$

<u>EJEMPLO 5:</u>

Para el problema planteado en el Ejemplo 4, también se puede preguntar por ejemplo:

a) Qué velocidad **"v"** alcanza el bloque de masa **"m"** al cabo de t= 2(seg), sabiendo que partió del reposo?
b) Qué distancia **"y"** descendió luego de ese tiempo?
c) Qué velocidad angular **"ω"** tiene el disco luego de t= 2(seg)?
d) Qué cantidad de revoluciones **"θ"** dio el disco luego de ese tiempo?

Utilizando las fórmulas de M.R.U.V. para el sistema de referencia de ordenada positivo hacia abajo, con origen en donde se inicia el movimiento del bloque "m" se tiene:

$$v = v_0 + a \cdot t \qquad y\ si: \qquad v_0 = 0$$

$$v = a \cdot t = 3,92.2 = 7,84\ (m/s)$$

$$y = y_o + v_o.t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \qquad que\ al\ hacer: \qquad y_0 = 0 \quad y \quad v_0 = 0$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,92 \cdot 2^2 = 7,84\ (m)$$

Trabajando las fórmulas de M.C.U.V. con un sentido positivo de giro del disco de masa "M" a favor de las manecillas del reloj, se tiene:

$$\omega = \omega_o + \alpha.t \qquad y\ si: \qquad \omega_0 = 0$$

$$\omega = \alpha.t = 7,84.2 = 15,7\ (rad/seg)$$

$$\theta = \theta_o + \omega_o.t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \qquad que\ al\ hacer: \qquad \theta_0 = 0 \quad y \quad \omega_0 = 0$$

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 7,84 \cdot 2^2 = 15,68\ (rad) = 2,5\ (rev)$$

¿Qué le pareció? Entiendo fue una buena integración entre las leyes de la Cinemática/Dinámica para la Traslación/Rotación respectivamente, ¿verdad?

Momento Angular o Momento Cinético $\overrightarrow{L_o}$:

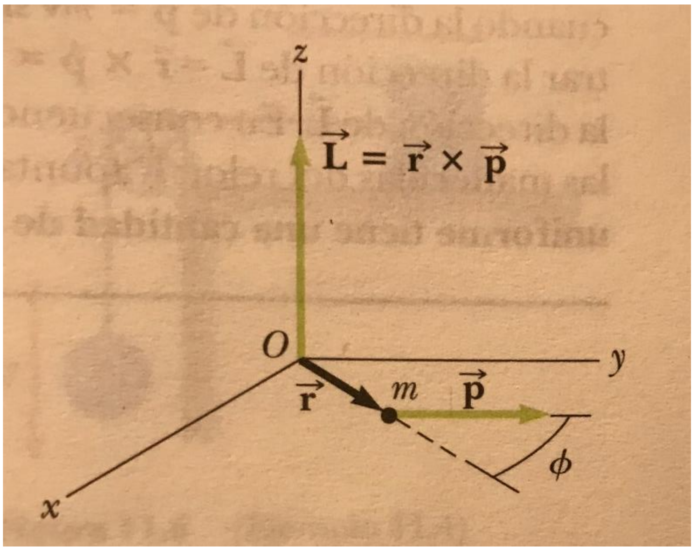
El Momento Angular o Momento Cinético es una magnitud física rotacional equivalente a la Cantidad de Movimiento o el Momento Lineal en el movimiento traslacional.

Imagine un poste fijo y vertical empotrado en una pista lisa. Una patinadora se desliza hacia el poste sin chocarlo y conforme se acerca estira su brazo para tomarlo. Esta acción lleva a la patinadora a moverse en una trayectoria circular alrededor del poste… Este y otros ejemplos parecidos, describen a esta nueva magnitud física.

El Momento Cinético es un vector y por definición corresponde a un producto vectorial que se calcula de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{L_o} = \vec{r}\ x\ \vec{P} = \vec{r}\ x\ m \cdot \vec{v}\ \ (kg.m^2/s) \qquad (33)$$

Y como se observa involucra a la Cantidad de Movimiento, con lo cual, también se dice que es el momento de la Cantidad de Movimiento!



Es decir que **el vector Momento Cinético**, tiene:

$\overrightarrow{L_o}$

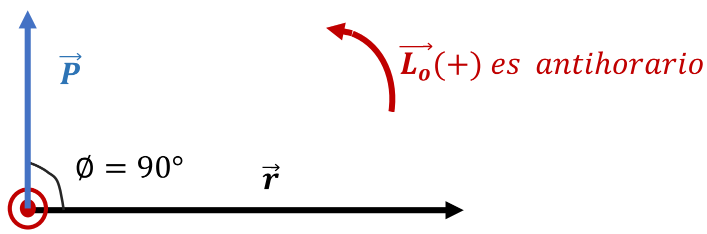
- **módulo:** $L_o = r \cdot P \cdot sen\emptyset$ el módulo de $\vec{r}$, por el módulo de $\vec{P}$, por el $sen\emptyset$
- **dirección:** perpendicular al plano en donde están contenidos los vectores $\vec{r}\ y\ \vec{P}$
- **sentido:** el de la regla de la mano derecha.

Estos tres elementos descriptos (módulo, dirección y sentido), surgen de nuevo de la definición de producto vectorial.

Cuando la masa **“m”** rota alrededor del eje **“z”** como en el ejemplo de la patinadora, ocurre que el ángulo **“∅”** es $\mathbf{90}$°, con lo cual el Momento Cinético es máximo y vale:

$$L_o = r \cdot P \cdot sen90° = r \cdot P = r \cdot m \cdot v \qquad \textbf{(34)}$$

Para interpretar mejor lo que acabamos de calcular veamos la posición de los vectores $\vec{r}\ y\ \vec{P}$ desde arriba (en planta), al reubicarlos:



$\overrightarrow{L_o}$ *es un vector saliente desde el plano de la hoja*
por regla de la mano derecha (pulgar hacia arriba)

En el próximo material continuaremos desarrollando nuevos conceptos de la Dinámica Rotación para sólidos que giran alrededor de un eje fijo y también sólidos que rotan alrededor de un eje móvil (Rototraslación).

Sigamos estudiando con ánimo y nos vemos la próxima clase!

Ing. Juan Lancioni.

Nota: las fotos/imágenes fueron tomadas del libro de Serway-Jewet y, las ilustraciones/esquemas, fueron realizados por el profesor.