FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 03: CINEMÁTICA DEL PUNTO

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME – ACELERACIONES TANGENCIAL Y CENTRÍPETA – APLICACIONES

(CUARTA PARTE)

Movimiento Circular Uniforme:

Cuando un automóvil gira con rapidez constante en un mismo carril alrededor de una rotonda, no solo describe una trayectoria circular, si no que se dice que realiza un Movimiento Circular Uniforme.

Generalmente sorprende bastante en este tipo de movimiento que, aun cuando el objeto se mueva a rapidez constante en una trayectoria circular, **exista una aceleración** que para este caso se denomina: **aceleración centrípeta**.

Recuerde que la aceleración produce un cambio en la velocidad… y este cambio se puede manifestar de dos maneras:

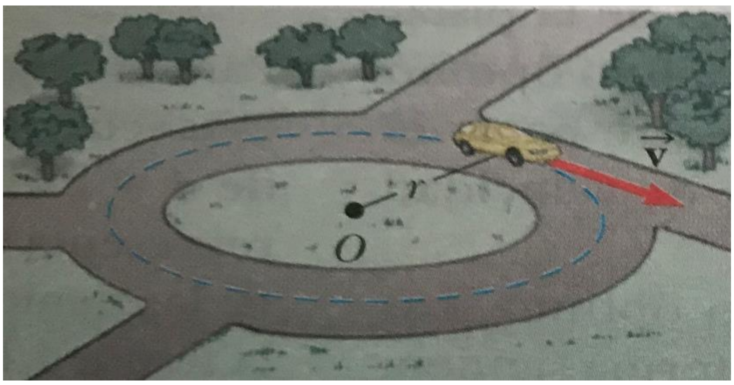
1. **Por un cambio en su módulo: que no sería este el caso porque $v = cte.$ Es decir que el vehículo en la rotonda siempre tiene la misma rapidez.**
2. **Por un cambio en su dirección y sentido: que por cierto, esto sucede en este movimiento porque el ángulo θ del vector velocidad del coche cambia instante contra instante…**

Se observa además que el vector velocidad del vehículo será siempre tangente a la trayectoria y perpendicular al radio de la trayectoria circular.

En síntesis, la velocidad como vector en este Movimiento Circular Uniforme (M.C.U.) se caracteriza por tener:

$$\vec{v} = \begin{cases} v = módulo\ (siempre\ constante) \\ \theta = dirección\ y\ sentido\ (variable) \end{cases}$$

La figura siguiente ilustra en gran parte lo que se acaba de expresar:



También se sabe que la aceleración centrípeta en un M.C.U. siempre apunta hacia el centro del círculo. De ahí que reciba el nombre de **centrípeta**, aunque también se suele llamar **normal** porque es perpendicular a la trayectoria o **radial** porque está en la dirección del radio.

Se pudo calcular que el módulo de la aceleración centrípeta es un valor constante que está dado por la rapidez de la partícula elevada al cuadrado dividido por el radio. Y en relación a su dirección, la misma cambia permanentemente, porque como bien se dijo apunta siempre hacia el centro del círculo, instante contra instante.

Es decir que, la aceleración centrípeta como vector en el Movimiento Circular Uniforme (M.C.U.) se caracteriza por tener:

$$\overrightarrow{a_c} = \begin{cases} a_c = módulo\ (siempre\ constante) = v^2/r\ \left({}^{m}/_{s^2}\right) \\ \theta = dirección\ y\ sentido\ (variable, hacia\ el\ centro\ del\ círculo) \end{cases}$$

Para demostrar que la aceleración centrípeta tiene por módulo: $a_c = \frac{v^2}{r}$ se deben hacer los siguientes razonamientos:

A) **Uno físico-matemático:** en donde por la definición de aceleración instantánea, se sabe que,

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v} - \overrightarrow{v_0}}{t - t_0} \qquad \textbf{(1)}$$

que escrita de manera escalar y adaptada, queda

$$a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \textbf{(2)}$$

B) **Y otro relacionado con vectores:** para lo cual se sabe que la resta entre la velocidad final e inicial es

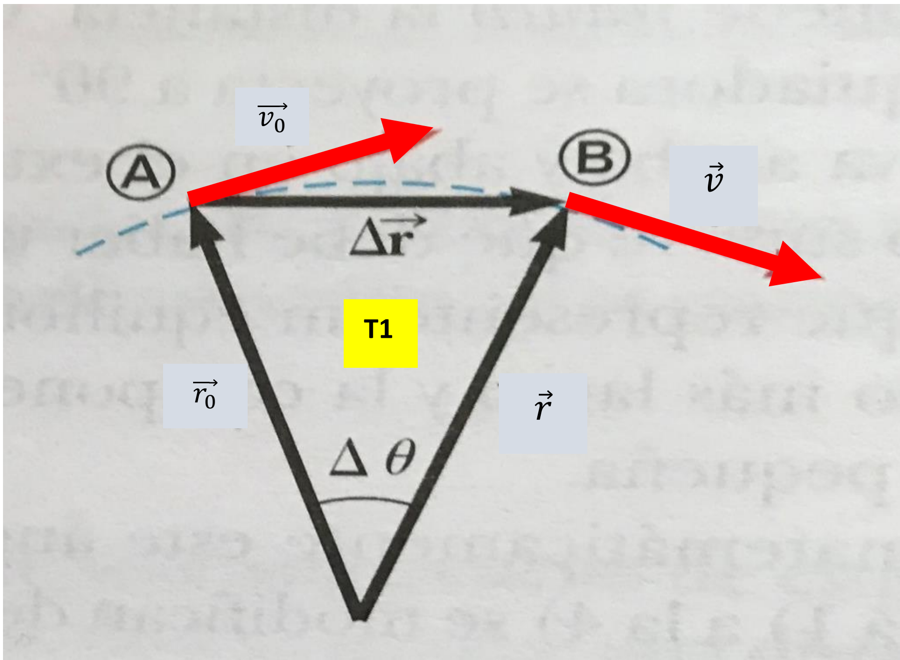
$$\Delta \vec{v} = \vec{v} - \overrightarrow{v_0} \qquad \textbf{(3)}$$

y se puede escribir también como una suma de la siguiente manera:

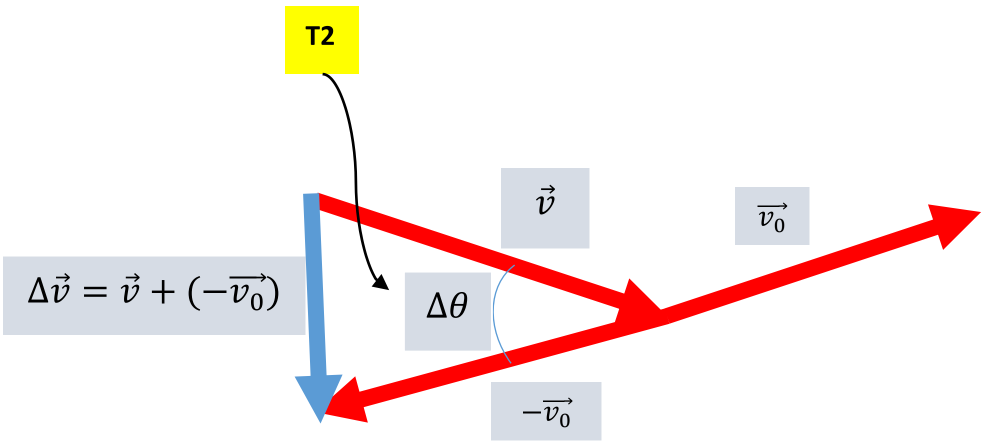
$\Delta \vec{v} = \vec{v} + (-\overrightarrow{v_0})$ es decir, el vector velocidad final sumado al negativo del vector velocidad inicial (ver figura más adelante).

Observando entonces la construcción de los dos triángulos siguientes, denominados:

Triángulo 1= **T1** que está relacionado con variación de posición.
Triángulo 2= **T2** que está relacionado con variación de velocidad.



Como el ángulo de barrido $\Delta\theta$ del triángulo **T1** se reproduce en el triángulo **T2** por una propiedad de la Geometría de los **Lados Perpendiculares**, se visualiza que ambos triángulos son semejantes,



entonces, se puede escribir la siguiente relación de proporcionalidad entre sus lados:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$$

y despejando Δv, se obtiene:

$$\Delta v = \frac{\Delta r}{r} \cdot v \qquad \textbf{(4)}$$

lo que finalmente, si reemplazamos **(4)** en el numerador de la fracción de la fórmula **(2)** se puede escribir:

$a_c = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\frac{\Delta r}{r} \cdot v}{\Delta t}$ en donde operando la fracción de fracción, queda:

$$a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot \Delta r}{r \cdot \Delta t} \qquad \textbf{(5)}$$

pero como $\frac{v}{r}$ es una constante k, por una propiedad de límites que expresa que el límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función, es decir:

$\lim\limits_{x \to a} k . f(x) = k . \lim\limits_{x \to a} f(x)$, que usted estudió en Análisis Matemático I.

Retomando **(5)**, se llega a:

$$a_c = \frac{v}{r} . \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \qquad \textbf{(6)}$$

y como en la expresión **(6)** el $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$ representa la definición de la velocidad instantánea "$\boldsymbol{v}$", la aceleración centrípeta finalmente se puede escribir como:

$$a_c = \frac{v}{r} \cdot v = \frac{v^2}{r}$$

Es decir que queda demostrado mediante estas dos líneas de razonamientos A) y B) respectivamente, que la aceleración centrípeta se calcula de la manera que lo habíamos anticipado:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad !!! \qquad \textbf{(7)}$$

Pero no es la única manera de obtener la aceleración centrípeta…

Además se sabe que la velocidad tangencial en un movimiento circular se puede escribir como:

$$v = w.r \qquad \textbf{(8)}$$

donde "$\boldsymbol{w}$" representa a la velocidad angular y "$\boldsymbol{r}$" es el radio.

Habida cuenta que, la velocidad angular se define como la cantidad de revoluciones que una partícula realiza en una unidad de tiempo, ella puede venir expresada en (rev/min) por ejemplo, que con frecuencia se dice simplemente revoluciones por minuto o (R.P.M.). En cambio en el Sistema Internacional de Unidades se mide en (rad/seg). Recuerde que 1 (rev)=2.∏ (rad). Entonces con una simple regla de tres simple puede migrar de un sistema de medida a otro sin problemas.

EJEMPLO 1:

Si una calesita gira a un $w = 10(rev/min)$ y desea pasarla a (rad/seg), el cálculo es el siguiente:

$$w = 10\left(\frac{rev}{min}\right) = 10.\left(\frac{2\prod rad}{60\ seg}\right) = 1{,}047\left(\frac{rad}{seg}\right)$$

En donde, $\frac{2\prod}{60} \cong \frac{1}{10}$ es el factor de conversión que se utiliza para pasar de (rev/min) a (rad/seg). Por el contrario $\frac{60}{2\prod} \cong 10$ es el otro factor de conversión para realizar el camino contrario, es decir, para pasar de (rad/seg) a (rev/min).

Bueno, habiendo realizado este pequeño paréntesis para comentar estas cuestiones, si ahora reemplazamos **(8)** en **(7)**, se obtiene:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(w.r)^2}{r} = \frac{w^2.r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}}$$ y simplificando los radios encontramos que:

$$a_c = w^2.r \qquad !!! \qquad \textbf{(9)}$$

que es otra manera interesante de calcular la aceleración centrípeta.

En muchas situaciones es conveniente también describir el movimiento de una partícula que se mueve con una rapidez constante en un círculo de radio "$\boldsymbol{r}$" en términos del período "**T**", que se define como el intervalo de tiempo requerido para que una partícula de una revolución o vuelta completa. En el intervalo de tiempo "**T**" la partícula se mueve 2∏r, que es igual al perímetro de la circunferencia y a su vez corresponde a la trayectoria circular de la misma. En consecuencia, puesto que su rapidez es igual al espacio recorrido en un tiempo empleado, se obtiene:

$$v = \frac{2.\pi.r}{T}$$ de donde despejando el período queda:

$$T = \frac{2.\pi.r}{v} \text{ (seg)} \qquad \textbf{(10)}$$

Podemos ahora resolver algunos problemas a modo de ejemplo que utilicen estos conceptos… qué le parece?

EJEMPLO 2:

Un atleta como el que se muestra en la figura hace rotar un disco de masa m=1(kg) a lo largo de na trayectoria circular de radio $r = 1{,}06\ (m)$ antes de lanzarlo. La rapidez máxima del disco es $v = 20\ (\frac{m}{seg})$. Determine la aceleración centrípeta máxima del disco en ese instante.

Entonces utilizando la fórmula **(7)**:

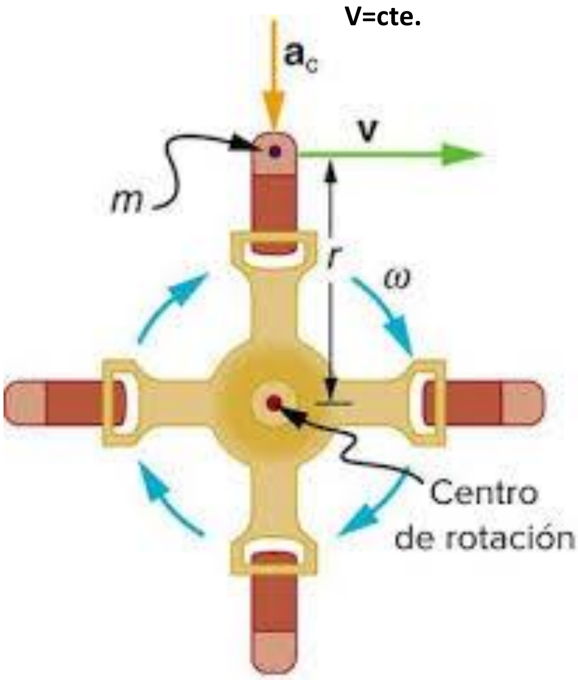
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{20^2}{1{,}06} = 377{,}3 \left({}^{m}/_{seg^2}\right)$$

que es verdaderamente alta porque representa casi 38 veces la aceleración de la gravedad!!!

Y en este caso el dato de la masa no se utiliza…

EJEMPLO 3:

Conforme se separan lo cohetes propulsores, los astronautas de un transbordador espacial sienten una aceleración de hasta tres veces la de la gravedad, es decir, a=3.g=3x9,8=29,4(m/s^2). En su entrenamiento, los astronautas montan un dispositivo en el que experimentan tal aceleración centrípeta (ver figura). El astronauta se sujeta con firmeza en el extremo de un brazo mecánico que luego gira con rapidez constante en un círculo horizontal. Determine la velocidad angular "$\boldsymbol{w}$" en (rev/min) o (R.P.M.) y en (rad/seg) requerida para dar a un astronauta una aceleración centrípeta de 3.g mientras está en movimiento circular con un radio de r=9,45 (m).



Utilizando la fórmula **(9)**:

$a_c = w^2.r$ y despejando "$\boldsymbol{w}$":

$$w^2 = \frac{a_c}{r} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{a_c}{r}} = \sqrt{\frac{3.g}{r}}$$

y calculando queda:

$$w = \sqrt{\frac{3.9{,}8}{9{,}45}} = \sqrt{3{,}11} = 1{,}76 \ \ (rad/\mathrm{seg}) = 1{,}76.\frac{60}{2.\pi} \ \ (rev/min) = 16{,}8\ (rev/min)$$

Es decir que el astronauta da casi 17 vueltas en un minuto…. o sea aprox. 18 (R.P.M.)!!!

También usted podrá preguntarse a qué velocidad tangencial "$\boldsymbol{v}$" está girando el astronauta. Entonces como ya conoce "$\boldsymbol{w}$", utilizando la fórmula **(8)**: $v = w.r$ y calculando, obtiene:

$$v = 1{,}76.9{,}45 = 16{,}6(m/s) = 59{,}8(km/hr)$$

Aceleraciones tangencial y centrípeta:

Considere ahora una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva como muestra la figura siguiente, donde la velocidad lineal "$\vec{\boldsymbol{v}}$" que es tangente a su trayectoria cambia permanentemente su **módulo, dirección y sentido**.

En esta situación, en los tramos curvos no sólo existirá una aceleración centrípeta $\overrightarrow{\boldsymbol{a_c}}$ o radial $\overrightarrow{\boldsymbol{a_r}}$ tal como la hemos estudiado que apunta siempre hacia el centro del círculo; sino que también se agregará una posible aceleración tangencial $\overrightarrow{\boldsymbol{a_t}}$. Esta última será la aceleración de propulsión de la partícula que apuntará hacia adelante (a favor de "$\vec{\boldsymbol{v}}$"), o bien, la desaceleración de frenado que se dirigirá hacia atrás (en contra de "$\vec{\boldsymbol{v}}$"); y en cualesquiera de los casos **siempre será tangente a la trayectoria,** tal como lo indica su nombre.

Luego el vector aceleración total en cada punto de la trayectoria se obtendrá como la suma vectorial de la aceleración radial o centrípeta con la aceleración tangencial, a saber:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_t} \qquad \textbf{(11)}$$

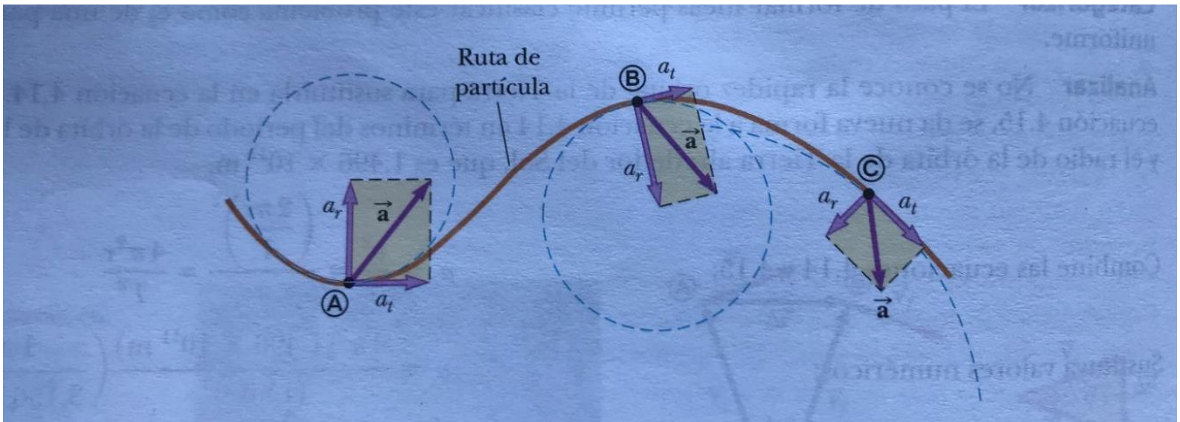


Figura 4.16 El movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva arbitraria que se encuentra en el plano *xy*. Si el vector velocidad $\vec{v}$ (siempre tangente a la trayectoria) cambia en dirección y magnitud, las componentes de la aceleración $\vec{a}$ son una componente tangencial a_t y otra componente radial a_r.

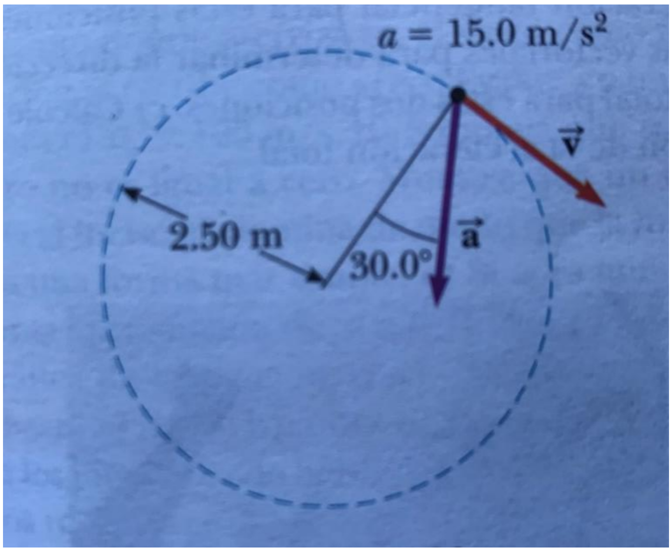
Observe como detalle importante que el vector aceleración total $\vec{a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_t}$ (de color lila intenso), **siempre apunta hacia la parte cóncava de la trayectoria!**

Veamos ahora otro problema que involucre estos conceptos y los anteriores.

<u>EJEMPLO 4:</u>

La figura representa a la aceleración total $\vec{\boldsymbol{a}}$ de una partícula que se mueve en el sentido de las manecillas de un reloj en un círculo de radio $r = 2{,}5\ (m)$ en un cierto instante de tiempo. En ese instante, encuentre:

a) la aceleración tangencial $a_t = ?$
b) La aceleración centrípeta $a_c = ?$
c) La rapidez de la partícula $v = ?$



a) El cálculo de la **aceleración tangencial** se puede realizar por trigonometría proyectando el vector aceleración total, haciendo:

$$a_t = a.sen30° = 15.sen30° = 7{,}5(m/s^2)$$

b) Para obtener la **aceleración centrípeta** también podemos recurrir a la misma estrategia anterior, proyectando el vector aceleración total y queda:

$$a_c = a.cos30° = 15.cos30° = 13(m/s^2)$$

c) En el caso de la **velocidad tangencial** se utiliza la fórmula **(8)**:

$v = w.r$ pero como no conozco "$\boldsymbol{w}$", lo despejo de la fórmula **(9)** de la aceleración centrípeta:

Si : $a_c = w^2.r$ despejando: $w = \sqrt{\frac{a_c}{r}}$

Entonces reemplazando esta fórmula en la **(8)**, la velocidad tangencial "$\boldsymbol{v}$" queda:

$v = \sqrt{\frac{a_c}{r}}.r$ y calculando: $v = \sqrt{\frac{13}{2{,}5}}.2{,}5 = 5{,}7(m/s) = 20{,}5(km/hr)$

Y queda el problema resuelto!!!

Es todo por ahora y con estos temas hemos terminado el Movimiento en dos Dimensiones. Con lo cual también se concluyó la UNIDAD 3 de Cinemática del Punto.

Le deseo lo mejor en el estudio de estos temas y hasta pronto!

Ing. Juan Lancioni.

Nota: las imágenes de este material fueron tomadas desde Internet, del libro de Serway-Jewett con algunos agregados extras y otras realizadas por el profesor.