FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 7 Y 8: CINEMÁTICA Y DINÁMICA DEL SÓLIDO

VARIABLES ROTACIONALES – MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO (M.C.U.V.) – ENERGÍA CINÉTICA ROTACIONAL Y MOMENTO DE INERCIA

(PRIMERA PARTE)

Introducción:

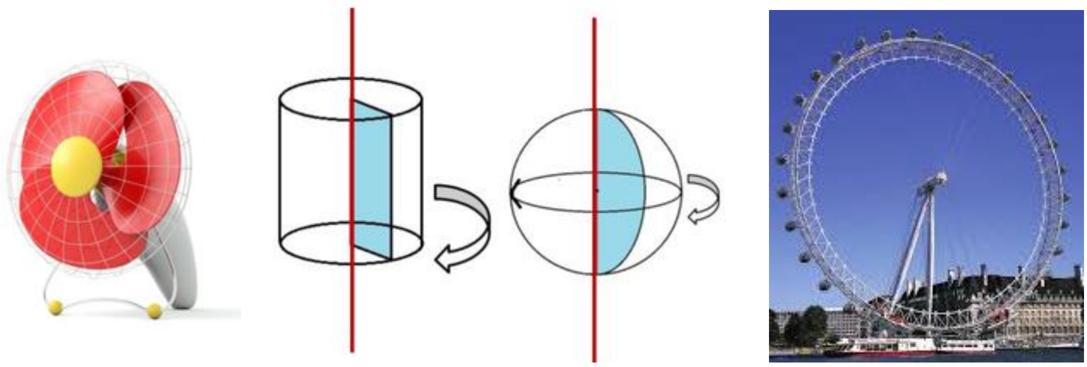
Para poder abordar las variables rotacionales, previamente debemos definir el concepto de Cuerpo Rígido.

Un **Cuerpo Rígido** es aquel objeto que no es deformable en el tiempo y se cumple que las ubicaciones relativas de todas las partículas que lo conforman permanecen siempre constantes entre sí.

Todos los objetos reales son deformables en cierta medida, no obstante, el modelo de Cuerpo Rígido es útil en muchas situaciones en que la deformación se considera prácticamente despreciable.

Algunos ejemplos de cuerpos rígidos que utilizaremos en esta sección son los siguientes: ruedas, anillos, discos compactos, varillas, esferas huecas o macizas, cilindros, etc.

Uno de los aspectos conceptuales más importantes de las Unidades 7 y 8 es, precisamente, que estos cuerpos rígidos se pongan a girar alrededor de un eje fijo y se estudie la Cinemática/Dinámica de ese movimiento. Ocurre en general que, si el eje fijo tomado como referencia para el sólido en revolución, es el que pasa por su centro de masa, al mismo se lo denomina **eje baricéntrico**.



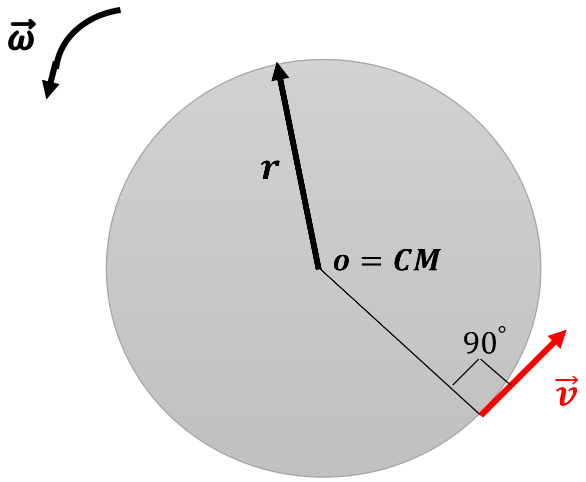
(a) **(b)** **(c)**

En los casos mostrados, el eje baricéntrico es: **(a)** el que pasa por el centro de las aspas del ventilador, es decir el eje del motor; **(b)** los de color rojo que atraviesan al cilindro y a la esfera, respectivamente; y **(c)** el que pasa por el centro de la rueda del London Eye.

Variables Rotacionales:

Algunas de estas variables, ya las presentamos cuando estudiamos el Movimiento Circular Uniforme (M.C.U.).

Entonces, para el siguiente disco de masa **"M"** y radio **"r"** que gira alrededor de un eje fijo que pasa por **"o=CM"** (su centro de masa), se observa que un punto cualquiera de su borde está animado con una velocidad tangencial **"$\vec{v}$"**.



Si se conoce la **velocidad angular "$\vec{\omega}$"** a la que gira el disco, se puede asegurar que:

$$\vec{v} = \vec{\omega} . r \ \ (m/s) \qquad \textbf{(1)}$$

tal como se presentó al final de la **Unidad 3**, cuando se estudió la Cinemática en dos Dimensiones, aplicada al Movimiento Circular.

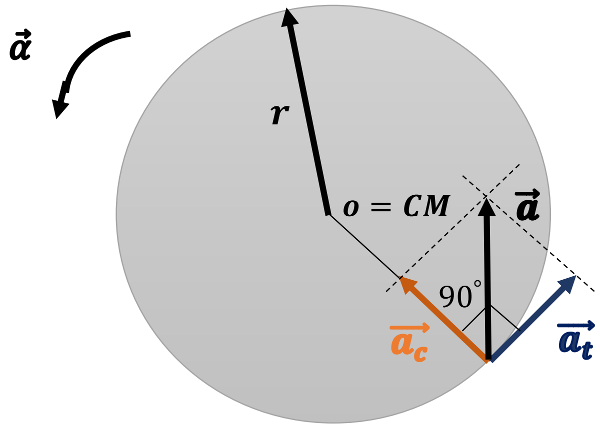
Pero **"$\vec{\omega}$"** no es la única variable angular… si el disco se encuentra acelerado, es decir, que sobre él se le aplica una Torca o Momento de una Fuerza (un efecto de giro), se dice que el mismo se acelera, con una aceleración angular **"$\vec{\alpha}$"**. Luego un punto del borde del disco estará sometido a una **aceleración tangencial "$\vec{a_t}$"**, que se puede calcular como:

$$\vec{a_t} = \vec{\alpha} . r \ \ (m/s^2) \qquad \textbf{(2)}$$

que junto a la **aceleración centrípeta "$\vec{a_c}$"**, al ser sumadas vectorialemente, dan la **aceleración total "$\vec{a}$"** de ese punto:

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_c} \ (m/s^2) \qquad \textbf{(3)}$$

y este último concepto es el que se ilustra en la figura siguiente.



Un dato interesante que también se puede visualizar desde el diagrama de aceleraciones es, que el vector aceleración total siempre apunta hacia la parte cóncava de la trayectoria.

Movimiento Circular Uniformemente Variado: M.C.U.V. ($\vec{\alpha} = cte.$):

Cuando un cuerpo rígido da vueltas respecto de un eje fijo, con frecuencia se somete a una aceleración angular constante **"$\vec{\alpha}$=cte"**, al menos para un cierto intervalo de tiempo Δt. Por lo tanto se genera un modelo de estudio para el movimiento rotacional llamado:

"objeto rígido bajo aceleración angular constante"

Este modelo es el **análogo** al estudiado para una partícula que se traslada con aceleración constante, es decir, al M.R.U.V. con **"$\vec{a}$=cte"**

Hay muchos ejemplos de M.C.U.V. Tal es el caso de una turbina de una avión que se acelera uniformemente hasta alcanzar finalmente una velocidad de régimen; o un ventilador de techo que al apagarlo se desacelera uniformemente hasta detenerse por la fricción que se genera entre el eje del motor y sus cojinetes; o una máquina centrifugadora, ya sea en su proceso de aceleración o desaceleración uniforme; etc.

Recuperando la idea de analogía que comentábamos, se puede generar un comparativo entre las leyes físicas estudiadas en el:

M.R.U.V. ($\vec{a} = cte.$)	"con el"	M.C.U.V. ($\vec{\alpha} = cte.$)	
$v = v_0 + a \cdot t$	$\equiv$	$\omega = \omega_o + \alpha . t$	(3)
$x = x_o + v_o . t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$\equiv$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$	(4)
$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$	$\equiv$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot (\theta - \theta_0)$	(5)

en donde la velocidad lineal **“v”** se reemplaza por velocidad angular **“ω”**; la aceleración lineal **“a”** por la aceleración angular **“α”**; y las posiciones lineales **“x”** y **“x_0”** por las posiciones angulares **“θ”** y **“θ_0”**, respectivamente.

A pesar de la analogía planteada, es cierto que las fórmulas **(3)** y **(4)** pueden demostrase mediante formulaciones matemáticas. Para ello le sugiero que veamos los siguientes cálculos realizados de manera escalar:

Demostración de (3):

Partiendo de la definición de aceleración angular instantánea para un movimiento rotacional, se tiene:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

que al adaptarla, queda:

$$\alpha . dt = d\omega$$

y al integrar entre: $\boldsymbol{t_0}\ y\ \boldsymbol{t}$ en el primer miembro; y entre $\boldsymbol{\omega_0}\ y\ \boldsymbol{\omega}$ en el segundo miembro, se obtiene:

$$\int_{t_0}^{t} \alpha \cdot dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$

entonces, resolviendo las dos integrales:

$$\alpha \cdot \int_{t_0}^{t} dt = [\omega]_{\omega_0}^{\omega}$$

$$\alpha \cdot [t]_{t_0}^{t} = [\omega]_{\omega_0}^{\omega}$$

y evaluando mediante la Regla de Barrow, se obtiene:

$$\alpha \cdot (t - t_0) = \omega - \omega_0$$

lo que finalmente, si hacemos $t_0 = 0$ y despejamos "$\boldsymbol{\omega}$" queda:

$\boldsymbol{\omega = \omega_o + \alpha . t}$, que es la fórmula que llamamos **(3)** y queda demostrada!!!

Demostración de (4):

Partiendo ahora de la definición de velocidad angular instantánea para un movimiento rotacional:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

que al adaptarla queda,

$$\omega . dt = d\theta$$

pero por **(3)**, como $\omega = \omega_o + \alpha . t$, si la reemplazamos en la expresión anterior, se obtiene:

$$(\omega_o + \alpha . t) . dt = d\theta$$

e integrando en ambos miembros entre: $\boldsymbol{t_0}$ y $\boldsymbol{t}$ en el primer miembro; y entre $\boldsymbol{\theta_0}$ y $\boldsymbol{\theta}$ en el segundo miembro, queda:

$$\int_{t_0}^{t} (\omega_o + \alpha . t) . dt = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

y resolviendo las integrales:

$$\int_{t_0}^{t} \omega_o \cdot dt + \int_{t_0}^{t} \alpha . t . dt = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

$$\omega_o \cdot \int_{t_0}^{t} dt + \alpha . \int_{t_0}^{t} t . dt = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

$$\omega_o \cdot [t] \, {}_{t_0}^{t} + \alpha \cdot [t^2/2] \, {}_{t_0}^{t} = [\theta] \, {}_{\theta_0}^{\theta}$$

y evaluando mediante la Regla de Barrow, se obtiene:

$$\omega_o \cdot [t - t_0] + \alpha \cdot [t^2/2 - t_0^2/2] = [\theta - \theta_0]$$

lo que finalmente, si hacemos $t_0 = 0$, se tiene:

$$\omega_o \cdot t + \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 = \theta - \theta_0$$

y ordenando y despejando $\boldsymbol{\theta}$, llegamos a:

$\boldsymbol{\theta = \theta_0 + \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2}$, que es la fórmula que llamamos **(4)** y queda también demostrada!!!

Demostración de (5):

Es solo una cuestión de trabajo algebraico, en donde despejando el tiempo de **(3)**:

$\boldsymbol{t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha}}$ y reemplazándolo en **(4)**, se obtiene:

$$\boldsymbol{\theta = \theta_0 + \omega_o \cdot \left(\frac{\omega - \omega_o}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\omega - \omega_o}{\alpha}\right)^2}$$

entonces, operado matemáticamente y despejando "ω^2", queda:

$\boldsymbol{\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot (\theta - \theta_0)}$ **,** que es la fórmula **(5)** que presentáramos más arriba.

Lo invito a que haga este último desarrollo matemático usted mismo y verá que es bastante sencillo. Adelante!!!.

A continuación vamos a resolver el siguiente ejemplo para aplicar las leyes físicas trabajadas hasta acá.

EJEMPLO 1:

Una rueda da vueltas alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masa (eje baricéntrico), con una aceleración angular supuesta constante $\alpha = 3{,}5\ (rad/s^2)$.

a) si la velocidad angular de la rueda es $\omega_0 = 2\ (rad/seg)$ en el instante inicial, es decir para $t_0 = 0\ (seg)$, ¿cuántas vueltas o revoluciones dará la rueda en un tiempo $t = 2\ (seg)$?

b) ¿cuánto vale la velocidad angular $\omega =?$ al cabo de $t = 2\ (seg)$?

a) Para el cálculo de la cantidad de vueltas,

Retomado **(4)**:

$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ y haciendo $\theta_0 = 0$, se obtiene:

$\theta = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ con lo cual, reemplazando los datos del problema:

$\theta = 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot 2^2 = 4 + 7 = \mathbf{11\ (rad)}$; luego con una regla de tres simple se puede hacer el siguiente cálculo de factor de conversión:

$2 \cdot \pi\ (rad)$________$1(rev)$

$11(rad)$___________$x = \mathbf{1,75(rev)}$

lo que significa que la rueda en ese tiempo dio 1 vuelta y ¾.

b) Para el cálculo de la velocidad angular,

Retomado **(3)**:

$\omega = \omega_o + \alpha . t$ y reemplazando los datos del problema:

$\omega = 2 + 3{,}5.2 = 2 + 7 = \mathbf{9\ (rad/seg)}$; si a este valor lo quiere expresar en R.P.M.,

utilizando factores de conversión de unidades, queda:

$$\omega = 9 \cdot \frac{\frac{1}{2\cdot\pi}(rev)}{\frac{1}{60}(min)} = 9 \cdot \frac{60}{2\cdot\pi}\left(\frac{rev}{min}\right) = 85{,}9\ \left(\frac{rev}{min}\right) = \mathbf{85,9\ (R.P.M.)}$$

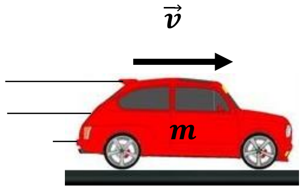
Como se observa, la solución es muy del tipo de los problemas resueltos en cinemática en la recta para el M.R.U.V., ¿no es verdad?

Bien, entonces seguimos adelante con el Marco Teórico…

Energía Cinética Rotacional – Momento de Inercia:

En la **Unidad 5** se definió a la **Energía Cinética Traslacional**, como:

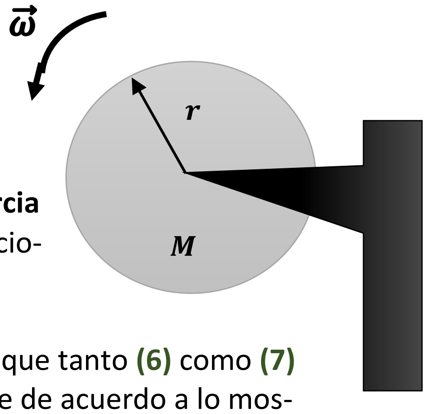
$$K_T = \frac{1}{2} \cdot m.v^2 \ (J) \qquad \textbf{(6)}$$



que es la energía de movimiento en traslación para un objeto de masa **"m"** que se mueve a una velocidad "$\vec{v}$".

Ahora lo invito a pensar una polea maciza que gira alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masa. Si la misma lo hace con una velocidad angular **"ω"** y tiene una masa **"M"**, por estar en movimiento de rotación, también goza de una cierta energía de movimiento, que ahora se llama **Energía Cinética Rotacional** y vale:

$$K_R = \frac{1}{2} \cdot I_o.\omega^2 \ (J) \qquad \textbf{(7)}$$

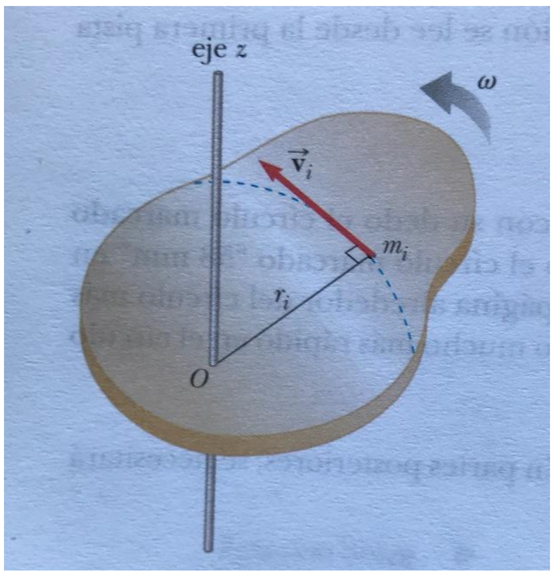


En donde "I_o" se denomina **Momento de Inercia** y se mide en $(kg.m^2)$ en el Sistema Internacional de Unidades.

Entonces por **ANALOGÍA** se puede observar que tanto **(6)** como **(7)** guardan un gran parecido! Observe ese detalle de acuerdo a lo mostrado con las flechas entre una y otra fórmula.

Veamos ahora, la demostración mediante formulaciones matemáticas de la fórmula **(7)** y, algunos detalles de "I_o" y "K_R".

Para el esquema de la figura si se toma un objeto de masa **"M"** que gira alrededor de un **eje "z"** a una velocidad angular **"ω"**; y de él se analiza una pequeña masa **"mi"** ubicada a una distancia **"ri"** del punto **"o"**; se sabe que esa masa **"mi"** va a tener una velocidad tangencial **"$\vec{v_i}$".** Entonces, su energía cinética rotacional se puede calcular como:



$$K_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2 \qquad \textbf{(8)}$$

Pero, como:

$$\boldsymbol{v_i = \omega \cdot r_i} \qquad \textbf{(9)}$$

reemplazando **(9)** en **(8)** queda:

$$\boldsymbol{K_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot (\omega \cdot r_i)^2}$$

y al operar matemáticamente, da:

$$\boldsymbol{K_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2} \qquad \textbf{(10)}$$

luego, la energía cinética total del objeto rígido en rotación alrededor del **eje "z"** es igual a la suma de todas las energías cinéticas individuales de cada una de las partículas que lo componen, es decir:

$$\boldsymbol{K_R = \sum_{i=1}^{n} K_i} \qquad \textbf{(11)}$$

con lo cual, reemplazando **(10)** en **(11)**, se obtiene:

$$\boldsymbol{K_R = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2} \qquad \textbf{(12)}$$

como el: $\frac{1}{2}$ y $\boldsymbol{\omega^2}$ son valores constantes y se repiten como factores en cada uno de los términos de la sumatoria, pueden sacarse factor común y **(12)** queda:

$$\boldsymbol{K_R = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2} \qquad \textbf{(13)}$$

en donde la $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2}$ representa en la Física Clásica de las Rotaciones al **Momento de Inercia** $\boldsymbol{I_o}$. Es decir que, si:

$$\boldsymbol{I_o = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2} \qquad \textbf{(14)}$$

(13) se puede escribir finalmente como:

$$\boldsymbol{K_R = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot I_o}$$

o que es lo mismo:

$$\boldsymbol{K_R = \frac{1}{2} \cdot I_o \cdot \omega^2} \qquad \textbf{(15)}$$

porque el orden de los factores no altera al producto, y finalmente queda demostrada la fórmula **(7)** que habíamos presentado más arriba!!!

Entonces el **Momento de Inercia** depende no solo de la **cantidad de masa** que posee un cuerpo rígido, sino que también **de su distribución** en el espacio.

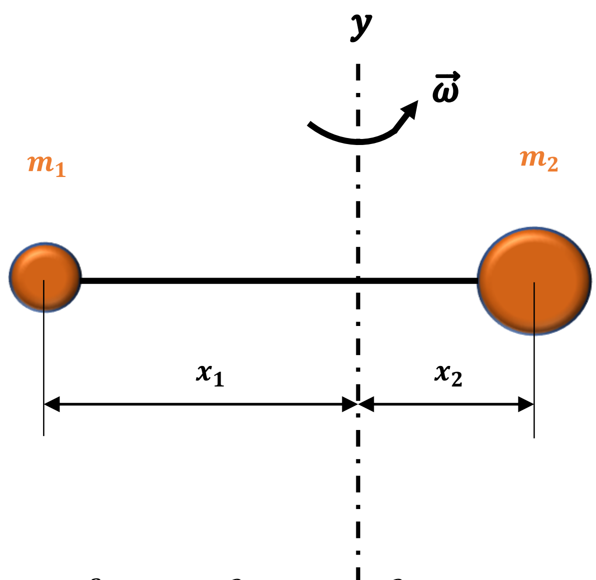
Mientras más masa tenga el cuerpo y más lejos se encuentre respecto del punto de giro, más grande será el Momento de Inercia, y viceversa…

El Momento de Inercia es una medida de la resistencia de un objeto a cambios en su movimiento rotacional; tal como la masa es una medida de la tendencia de un objeto a resistir cambios en su movimiento traslacional.

EJEMPLO 2:

Se dispone de dos masas $\boldsymbol{m_1 = 2\ (kg)\ y\ m_2 = 3\ (kg)}$ que se encuentran unidas por medio de una barra de masa despreciable y giran alrededor de un eje **"y"** con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega = 3\ (rad/seg)}$**.** La masa $\boldsymbol{m_1}$ se ubica a una distancia $\boldsymbol{x_1 = 1\ (m)}$ y la masa $\boldsymbol{m_2}$ a $\boldsymbol{x_2 = 0,5\ (m)}$, respecto del eje **"y"**. Para los datos indicados, calcule:

a) El momento de Inercia $\boldsymbol{I_o}$ del sistema.
b) La Energía Cinética Rotacional $\boldsymbol{K_R}$.



a) $I_o = m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 = 2 \cdot (1)^2 + 3 \cdot (0{,}5)^2 = \boldsymbol{2,75\ (kg.m^2)}$

b) $K_R = \frac{1}{2} \cdot I_o \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}75 \cdot 3^2 = \boldsymbol{12,3}\ (J)$

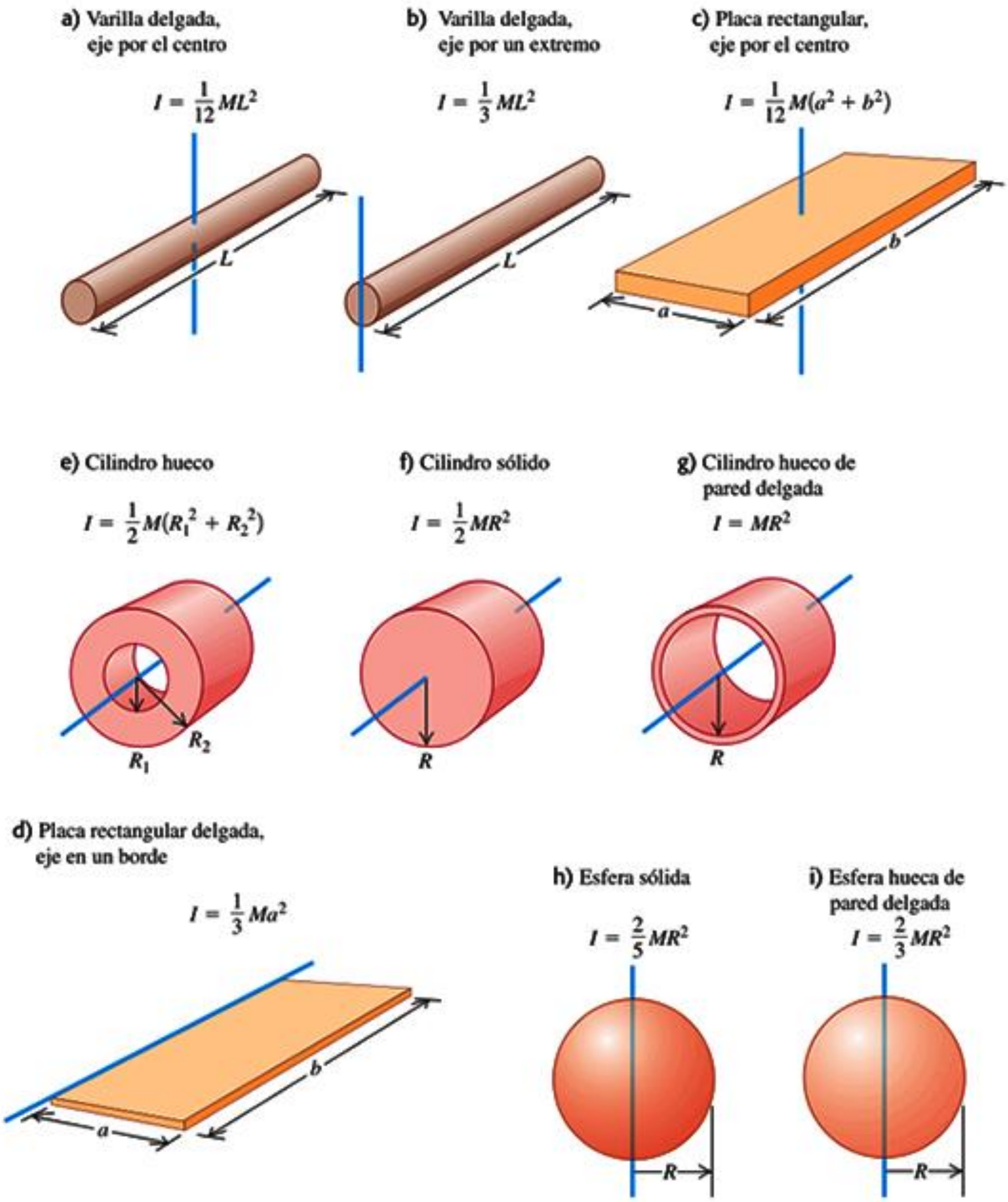
La fórmula $\boldsymbol{I_o = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2}$ funciona muy bien para un **Sistema de Partículas** y la hemos utilizado sin inconvenientes en el EJEMPLO 2, que acabamos de resolver.

Si ahora disponemos de un **Cuerpo Rígido**, la forma de calcular el Momento de Inercia es a través de la siguiente ley física:

$$I_o = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \cdot \Delta m = \iiint r^2 \cdot dm \quad \textbf{(16)}$$

Como en Análisis Matemático, usted hasta este momento no ha aprendido el cálculo de integrales simples, dobles y triples, le informo que por suerte, existen tablas que nos proporcionan el valor de los Momentos de Inercia de distintos cuerpos rígidos girando, generalmente, alrededor de un eje baricéntrico. Entonces esto nos evita hacer las cuentas que propone la fórmula **(16)**.

Tabla de Momentos de Inercia:



Teorema de Steiner o de los Ejes Paralelos:

Se utiliza para calcular el Momento de Inercia $\boldsymbol{I_A}$ de un sólido que gira alrededor de un eje fijo que pasa por un punto **A** y es paralelo al eje baricéntrico. Si ambos ejes están separados una distancia **"D"**, el nuevo momento de inercia se calcula como:

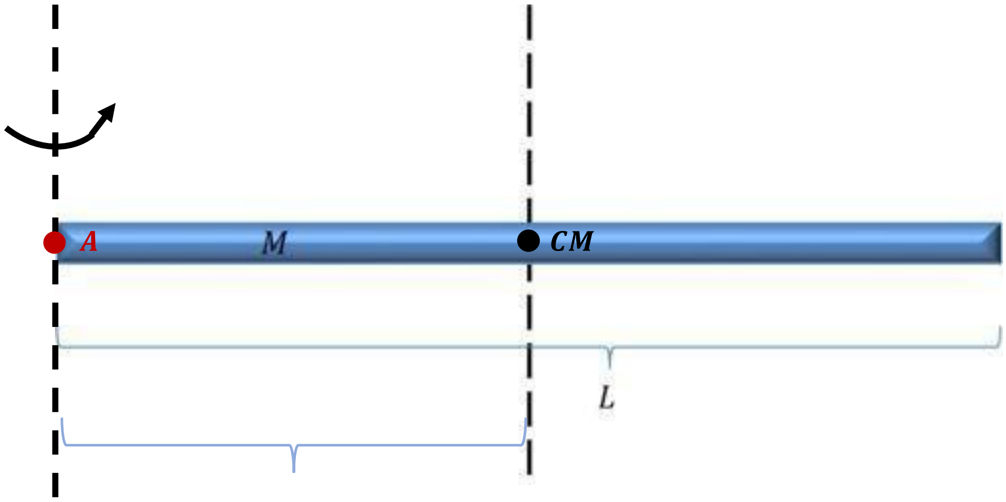
$$\boldsymbol{I_A = I_{CM} + M \cdot D^2} \qquad \textbf{(17)}$$

Este teorema se puede demostrar mediante formulaciones matemáticas, pero nos tomaría mucho tiempo hacerlo y no es la intención de este curso. No obstante, si le interesa ver cómo se obtiene la fórmula **(17)**, a dicha demostración físico-matemática, la puede encontrar en el Libro de FÍSICA Volumen 1: MECÁNICA, de los autores Alonso y Finn.

A continuación, le presento otro ejemplo interesante que permite utilizar este teorema.

EJEMPLO 3:

Calcule el Momento de Inercia de una varilla delgada de longitud **"L"** y masa **"M"**, si se considera que el eje de giro es paralelo al eje baricéntrico y pasa por su borde, es decir, por un punto **"A"**, como muestra la figura. Considerar para el cálculo: $I_{CM} = \frac{1}{12} \cdot M \cdot L^2$



entonces, si:

$$I_A = I_{CM} + M \cdot D^2$$

reemplazando el valor del $\boldsymbol{I_{CM}}$ y el **D=L/2**. Entonces queda:

$$I_A = \frac{1}{12} \cdot M \cdot L^2 + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} \cdot M \cdot L^2 + M \cdot \frac{L^2}{2^2} = \frac{1}{12} \cdot M \cdot L^2 + M \cdot \frac{L^2}{4}$$

y sacando común denominar 12, se obtiene:

$$I_A = \frac{M \cdot L^2 + 3 \cdot M \cdot L^2}{12} = \frac{4 \cdot M \cdot L^2}{12} = \frac{M \cdot L^2}{3}$$

es decir:

$$\boldsymbol{I_A = \frac{M \cdot L^2}{3}} \qquad \textbf{(18)}$$

lo que se observa que: $\boldsymbol{I_A = 4 \cdot I_{CM}}$!!!

¿Puede reflexionar el por qué?

En el próximo material continuaremos utilizando el concepto de Momento de Inercia y lo aplicaremos a la Segunda Ley de Newton para la Rotación.

Sigamos estudiando con entusiasmo!

A cuidarse y hasta pronto.

Ing. Juan Lancioni.

Nota: las fotos/imágenes/tablas fueron tomadas algunas desde internet, otras del libro de Serway-Jewet y, las ilustraciones/esquemas fueron realizados por el profesor.