FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 03: CINEMÁTICA DEL PUNTO

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL EN EL PLANO – APLICACIONES

(TERCERA PARTE)

Tiro Oblicuo – Movimiento de un Proyectil

Una pelota en movimiento con una trayectoria curva que sale desde el piso y regresa al mismo, corresponde a un movimiento de un proyectil.

Dicho movimiento se puede analizar a partir de dos supuestos:

1. que el efecto de la resistencia del aire es despreciable.
2. la única aceleración que existe es la de la gravedad, la cual siempre se dirige hacia abajo y se considera constante.

Ambas consideraciones ya fueron tenidas en cuenta cuando se estudió en el material anterior la Caída Libre y el Tiro Vertical.

Además, a partir de ambas suposiciones se encuentra que la trayectoria del proyectil siempre es una parábola de ramas hacia abajo, como muestra la gráfica de color celeste en la figura que sigue.

Desde el punto de vista físico se considera que este es un movimiento con simultaneidad a lo largo del eje de abscisa “x” y del eje de ordenada “y”, respectivamente.

Según “x” se dice que estamos en presencia de un Movimiento Rectilíneo Uniforme (**M.R.U.**) porque la aceleración del proyectil en esa dirección es cero $\vec{a}_x = 0$, con lo cual la velocidad en “x” siempre será constante $\vec{v}_x = cte$. En cambio, según el eje “y” se está en presencia de un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (**M.R.U.V.**), con aceleración constante en esa dirección igual a la de la gravedad $\vec{a_y} = -\vec{g} = cte$.

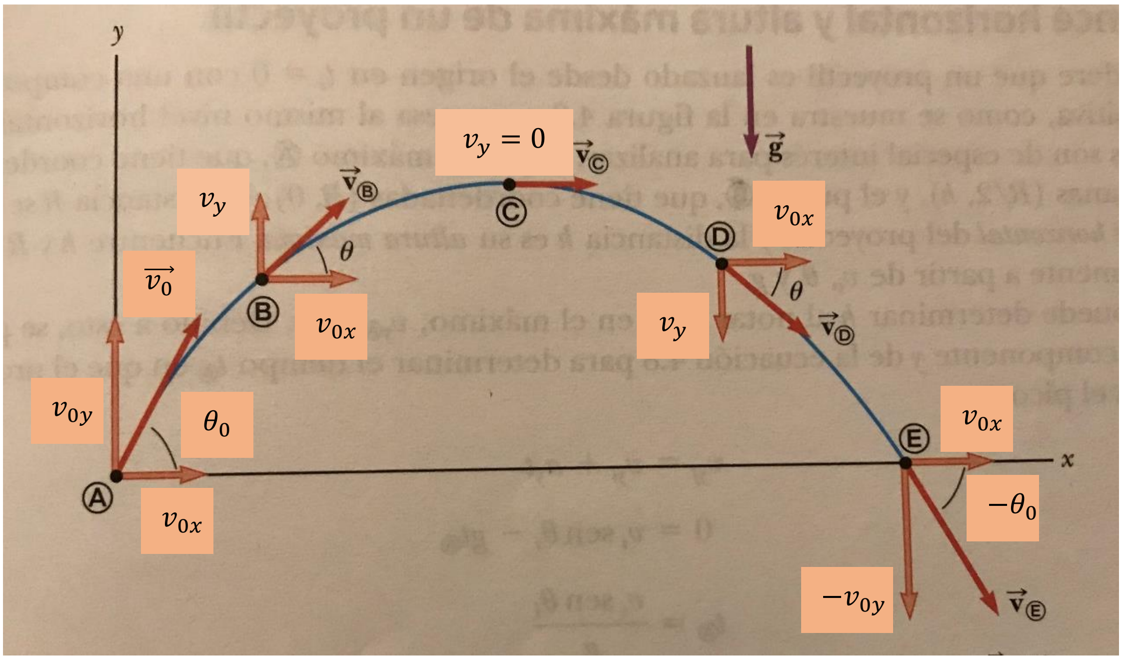
En general, los datos que se brindan para este tipo de movimiento son la velocidad inicial de salida de la pelota o proyectil $\vec{v}_0$ y su ángulo de disparo θ_0.

A partir de esta información o datos, es que se solicitará como incógnitas averiguar:

a) la velocidad del proyectil (o sus componentes según “x” y según “y”), al cabo de un cierto tiempo “t”.
b) la posición en la que se encuentra el proyectil (el corrimiento en “x” y la altura “y”), también para un cierto instante “t”.

Lo cierto es que, si conocemos los datos: $\vec{v}_0$ y θ_0, podemos calcular fácilmente las componentes de las velocidades iniciales del proyectil, proyectando $\vec{v}_0$. De tal manera que:

$$v_{0x} = v_0 \cdot cos\theta_0 \qquad y \qquad v_{0y} = v_0 \cdot sen\theta_0$$



a) **Para predecir la velocidad a futuro, lo invito a que veamos el siguiente razonamiento:**

SEGÚN EL EJE "x":

Como estamos en presencia de un M.R.U. con $\vec{v}_x = cte.$, se tiene que:

$v_x = v_{0x} = v_0 \cdot cos\theta_0 = cte.$ **Ecuación (A)**

Entonces la rapidez en "x" no cambia nunca en todo el movimiento!

SEGÚN EL EJE "y":

Como corresponde a un M.R.U.V. con aceleración constante, se puede retomar la ley:

$v = v_0 + a \cdot t$ que adaptándola queda:

$v_y = v_{0y} - g \cdot t$ o sea:

$v_y = v_0 \cdot sen\theta_0 - g \cdot t$ **Ecuación (B)**

Entonces la rapidez en "y" varía con el tiempo. Incluso observe en la figura que va disminuyendo conforme va ascendiendo porque se va desacelerando, hasta hacerse cero en el punto más alto; y luego va aumentando, aunque con signo menos, cuando va descendiendo hasta hacerse igual a $-\boldsymbol{v_{0y}}$ un instante antes de tocar el piso.

Finalmente para conocer la velocidad $\vec{\boldsymbol{v}}$ en cualquier instante de tiempo **"t"**, hacemos:

$\boldsymbol{v} = \sqrt{\boldsymbol{v_x^2} + \boldsymbol{v_y^2}}$ por el Teorema de Pitágoras.

y

$\theta = \boldsymbol{inv\ tg}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$ utilizando la definición de tangente para un triángulo rectángulo.

b) **Para predecir la posición a futuro, lo invito a que veamos este otro razonamiento:**

SEGÚN EL EJE "x":

Como estamos en presencia de un M.R.U. con $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{cte}$., se tiene que:

$x = x_0 + v \cdot t$ en donde al adaptarla:

$x = 0 + v_x \cdot t$ entonces, finalmente:

$\boldsymbol{x = v_0 \cdot cos\theta_0 \cdot t}$ **Ecuación (C)**

SEGÚN EL EJE "y":

Nuevamente, como estamos en presencia de un M.R.U.V. con aceleración constante, se puede retomar la ley:

$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ que al adaptarla nos queda:

$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ es decir, $y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ entonces:

$\boldsymbol{y = v_0 \cdot sen\ \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}$ **Ecuación (D)**

Tanto las ecuaciones (C) como (D) permiten calcular el corrimiento “x” y la altura “y”, para cualquier instante de tiempo “t”.

Síntesis: se concluye que, **(A)**, **(B)**, **(C)** y **(D)** son las ecuaciones fundamentales que resuelven completamente en movimiento de un proyectil!

Supongamos para entender la aplicación de estas ecuaciones fundamentales o madres, que proponemos el siguiente problema:

EJEMPLO 1:

Se lanza un proyectil desde el piso con una velocidad inicial $\boldsymbol{v_0 = 20}\ (\boldsymbol{m/s})$ y con un ángulo de disparo $\boldsymbol{\theta_0 = 30°}$. Se pide calcular:

a) El tiempo que tarda en subir, $\boldsymbol{t_s} = ?$
b) El tiempo total de vuelo, $\boldsymbol{t_t} = ?$
c) La altura máxima a la que llega, $\boldsymbol{H} = ?$
d) El alcance del proyectil, $\boldsymbol{R} = ?$

a) Para calcular el tiempo de subida, readaptamos la Ecuación (B):

$\boldsymbol{v_y = v_0 \cdot sen\theta_0 - g \cdot t}$ y queda: $0 = v_0 \cdot sen\theta_0 - g \cdot t_s$

El primer miembro es cero porque en el punto más alto dijimos que $v_y = 0$, entonces despejando el tiempo de subida:

$v_0 \cdot sen\theta_0 = g \cdot t_s$ con lo cual:

$$\boldsymbol{t_s = \frac{v_0 \cdot sen\theta_0}{g}}$$ **Ecuación (F)**

calculando: $t_s = \frac{20 \cdot sen30°}{9{,}8}$

$$\boldsymbol{t_s = 1{,}02\ (seg)}$$

b) Para obtener el tiempo total de vuelo hacemos: $t_t = 2 \cdot t_s$, porque al ser simétrico el movimiento, el tiempo de subida es igual al tiempo de bajada. Luego:

$$\boldsymbol{t_t = 2 \cdot \frac{v_0 \cdot sen\theta_0}{g}}$$ **Ecuación (G)**

Calculando: $t_t = 2 \cdot \frac{20 \cdot sen30°}{9,8}$

$\boldsymbol{t_t = 2,04\ (seg)}$

c) La altura máxima, **se obtiene de la siguiente manera:**

readapto **(D)** y le reemplazo **(F)**, entonces si:

$\boldsymbol{y = v_0 \cdot sen\ \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}$ va quedando:

$H = v_0 \cdot sen\ \theta_0 \cdot t_s - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_s^2$ con lo cual:

$$H = v_0 \cdot sen\ \theta_0 \cdot \frac{v_0 \cdot sen\theta_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0 \cdot sen\theta_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \cdot (sen\theta_0)^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \cancel{g} \cdot \frac{v_0^2 \cdot (sen\theta_0)^2}{g^{\cancel{2}}}$$

y cancelando "g" con "g al cuadrado"…

$H = \frac{v_0^2 \cdot (sen\theta_0)^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot (sen\theta_0)^2}{g}$ con lo cual 1 menos ½ de la misma expresión da:

$\boldsymbol{H = \frac{v_0^2 \cdot (sen\theta_0)^2}{2 \cdot g}}$ **Ecuación (H)**

que al calcular, nos da:

$$H = \frac{20^2 \cdot (sen30°)^2}{2 \cdot 9,8}$$

$\boldsymbol{H = 5,10\ (m)}$

d) **Finalmente, para obtener el** Alcance del proyectil:

readapto **(C)** y le reemplazo **(G)**, entonces si:

$\boldsymbol{x = v_0 \cdot cos\theta_0} \cdot t$ vamos obteniendo:

$R = v_0 \cdot cos\theta_0 \cdot t_t$ con lo cual:

$R = v_0 \cdot cos\theta_0 \cdot 2 \cdot \frac{v_0 \cdot sen\theta_0}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot sen\theta_0 \cdot cos\theta_0}{g}$ pero, por trigonometría se sabe que:

$2 \cdot sen\theta_0 \cdot cos\theta_0 = sen(2 \cdot \theta_0)$

entonces al reemplazar este valor en la expresión anterior, se obtiene:

$\boldsymbol{R = \frac{v_0^2 \cdot sen(2 \cdot \theta_0)}{g}}$ **Ecuación (I)** que al calcular, nos da:

$$R = \frac{20^2 \cdot sen(2.30°)}{9{,}8}$$

$$\boldsymbol{R = 35{,}3\ (m)}$$

y hemos finalizado con la solución del problema… y aún más, porque también pudimos desarrollar desde el punto de vista teórico las fórmulas **del tiempo de subida, el tiempo total de vuelo, la altura y el alcance.**

Conclusión: nuevamente se observa que haciendo las readaptaciones de las fórmulas **(A)**, **(B)**, **(C)** y **(D)** se puede resolver este tipo de problemática. ¡Por lo tanto, hay que tenerlas muy presentes para la clase de problemas con su profesor de Práctico!

Otro detalle a investigar es el siguiente:

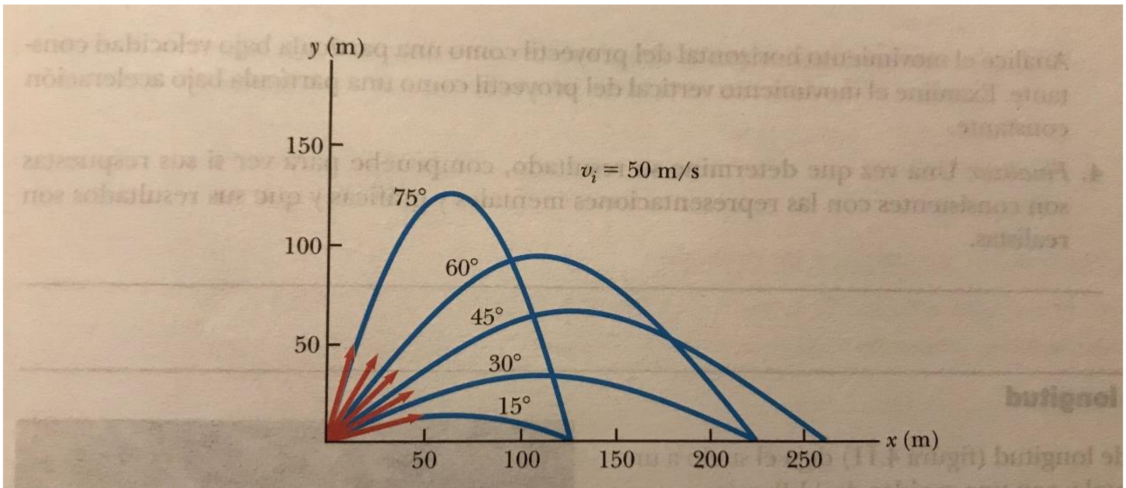


Figura 4.10 Un proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen con una rapidez inicial de 50 m/s en varios ángulos de proyección. Note que valores complementarios de θ_i resultan en el mismo valor de R (alcance del proyectil).

Esta figura ilustra varias trayectorias para un proyectil que tiene siempre la misma rapidez inicial, pero que se lanza con diferentes ángulos.

Como puede ver, el alcance es máximo para $\theta_0 = 45°$. Además para cualquier θ distinto de 45°, se alcanza un mismo punto con coordenadas cartesianas (R;0) al utilizar valores de ángulos complementarios, es decir, que sumados dan siempre 90°. Como por ejemplo: **75°** y **15°**, **60°** y **30°**, etc. Desde luego que, hay que aclarar, que para cada caso el tiempo total de vuelo del proyectil cuando se lanza con un ángulo de disparo de 75° es mayor al del ángulo de 15°.

También es cierto que, con un poco de desarrollo matemático si usted despeja el tiempo de la **Ecuación (C)** y lo reemplaza en la **Ecuación (D)**, obtendrá una función matemática **y=f(x)** que representa la parábola ramas debajo de color celeste que mencionábamos en la primera figura. Esta función se la denomina en física la **Ecuación de la Trayectoria**. En donde para cualquier valor de corrimiento "x" que usted le reemplace en ella, obtendrá el correspondiente valor de altura "y".

¿Se anima a realizar este trabajo algebraico? De ser así le escribo el resultado que obtendrá, que es la **Ecuación (K)**:

de **(C)**: $\boldsymbol{x = v_0 \cdot cos\theta_0 \cdot t}$ despejo el "t", nos queda:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot cos\theta_0} \qquad \textbf{Ecuación (J)}$$

reemplazando **(J)** en: $\boldsymbol{y = v_0 \cdot sen\,\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}$ que es **(D)**, se obtiene:

$$y = v_0 \cdot sen\,\theta_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cdot cos\theta_0} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\theta_0}\right)^2$$

y, operando matemáticamente:

$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot (cos\theta_0)^2} \cdot x^2 + tg(\theta_0) \cdot x + 0 \qquad \textbf{Ecuación (K)}$$

Esta última ecuación tiene la forma de una parábola:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

tal cual usted la repasó en Matemática del Cursillo de Ingreso.

En donde como:

- el coeficiente "a" es negativo, indica que es de ramas hacia abajo.
- el coeficiente "a" es negativo y el "b" es positivo, indica que esta corrida hacia la derecha del eje de ordenadas.
- el coeficiente "c" es igual a cero, es que la parábola pasa por el origen.

¡Vea que interesante resultan estas interpretaciones matemáticas para la Física!

EJEMPLO 2:

Un atleta en un salto de longitud deja el suelo con un ángulo $\theta_0 = 20°$ sobre la horizontal y con una rapidez $v_0 = 11(^{m}/_{s}) = 39{,}6(^{km}/_{hr})$. Calcule:

a) ¿qué distancia horizontal **R** alcanza?
b) ¿cuál es la altura **H** máxima a la que vuela medida respecto del piso?

a) Para encontrar el alcance o rango **R** se puede utilizar la **Ecuación (I)**:

$$\boldsymbol{R = \frac{v_0^2 \cdot sen(2 \cdot \theta_0)}{g}}$$

En donde reemplazando los datos se obtiene:

$$R = \frac{11^2 \cdot sen(2 \cdot 20°)}{9{,}8}$$

$$\boldsymbol{R = 7{,}94\ (m)}$$

b) Para encontrar la altura **H** se debe usar la **Ecuación (H)**:

$$\boldsymbol{H = \frac{v_0^2 \cdot (sen\theta_0)^2}{2 \cdot g}}$$

$$H = \frac{11^2 \cdot (sen20°)^2}{2 \cdot 9{,}8}$$

$$\boldsymbol{H = 0.722\ (m)}$$

Luego usted en el práctico seguirá haciendo otros ensayos con su profesor!!!

¡Me despido con un hasta pronto!

Ing. Juan Lancioni.

Nota: las imágenes de este material fueron tomadas del libro de Serway y también poseen algunos agregados extras.