# FISICA I UTN-FRC

# **UNIDAD 9: ESTÁTICA**

# DEFINICIONES PREVIAS – CONDICIONES DE EQUILIBRIO – PASOS A SEGUIR PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE ESTÁTICA – APLICACIONES

## **Definiciones previas:**

<u>Masa:</u> es la propiedad de un objeto que especifica cuánta resistencia ofrece el mismo para cambiar su estado de velocidad y corresponde a una magnitud escalar. Entonces la masa queda definida con un número y una unidad. En el Sistema Internacional de Unidades se la mide en (kilogramo)=(kg).

También se dice que la masa es una propiedad inherente al cuerpo.

Desde el punto de vista experimental se observa que, para igual fuerza aplicada, a mayor masa del objeto, menor es la aceleración que experimenta el mismo, y viceversa.

**Ejemplo:** la masa de una bicicleta de paseo considerando todas las partes que la componen es de: m= 9 (kg).

<u>Fuerza:</u> cualquier persona tiene una idea básica del concepto de fuerza gracias a su experiencia de la vida cotidiana. En general cuando una persona arrastra o empuja un objeto, se dice que realiza una fuerza sobre él. También se hace una fuerza cuando se patea una pelota. Y hay muchos ejemplos más... Luego esas fuerzas pueden hacer que el objeto se mueva o no, es decir que se acelere o se quede quieto. Desde el punto de vista físico-matemático, la fuerza es una **magnitud vectorial**. Por lo tanto, si es un vector se la representa con una letra mayúscula y con una flecha arriba:  $\vec{F}$ 

y tiene:

- un módulo o magnitud: que indica la intensidad de ese vector, es decir cuán grande es y frecuentemente se lo mide en (Newton)=(N) o en (Kilogramo fuerza)=(Kgf).
- una dirección y sentido: que está representado por una ángulo θ medido en sentido anti-horario a partir del eje de abscisa positivo y se lo expresa en (grados sexagesimales)=(°).

**Ejemplo:** si un objeto de masa "m" se empuja con una fuerza horizontal hacia la derecha de intensidad 800 (N), este vector se puede escribir como:  $\vec{F}$  En donde:

- F=800 (N) representa el módulo o la magnitud.
- $\theta$ =0° representa la dirección y sentido.

Luego, ya que se ha verificado experimentalmente que las fuerzas se comportan como vectores, debe utilizarse la regla de la suma de vectores para obtener la **fuerza neta** o **fuerza resultante** actuante sobre un objeto.

Recordemos también que fuerza, por la Segunda Ley de Newton, es el producto de la masa por la aceleración:  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ 

<u>Peso:</u> como el Peso es una fuerza, retomando la fórmula anterior y adaptándola, nos queda:  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ , donde  $\vec{g}$  es la aceleración de la gravedad y vale 9,81  $\left(\frac{m}{s^2}\right)$  en Córdoba. Este vector apunta siempre hacia abajo o hacia el centro de la tierra y se lo mide con las mismas unidades

<u>Centro de Gravedad:</u> es el lugar geométrico en donde se puede considerar actuando todo el peso de un objeto. Generalmente ese punto coincide con el **centro de simetría** de ese objeto.

**Ejemplos:** en una viga o varilla se encuentra en la mitad de su largo; en una pelota está justo en su centro; en un cuadrado se ubica en el lugar geométrico en donde se intersecan sus dos diagonales; etc.

<u>Cuerpo Rígido</u>: es un cuerpo u objeto cuya forma no varía pese a ser sometido a la acción de fuerzas externas. Eso supone que la distancia entre las diferentes partículas que lo componen no cambia a lo largo del tiempo. El cuerpo rígido es un modelo ideal que se utiliza para hacer estudios en la Física Clásica.

Ejemplos: una mesa, un vaso, una llave prusiana, una viga, una puerta, etc.

de la fuerza, es decir en (N).

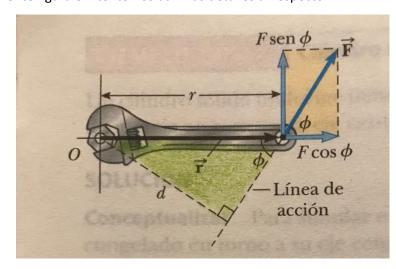
Momento de una Fuerza o Torca: imagine que usted desea hacer girar una puerta... es decir que su intención es abrirla o cerrarla. Seguramente aplicará una fuerza perpendicular a la superficie de la puerta desde el picaporte, ubicado a una cierta distancia desde la bisagra y conseguirá el objetivo deseado! Se dice entonces que usted generó un Momento de una fuerza o Torca sobre la puerta. Esta magnitud física la representaremos con la letra griega tau:

 $\overrightarrow{\tau_o}$  y se la mide en el Sistema Internacional de Unidades en (Newton.metro)=(N.m)

Los tres elementos claves para poder calcular el Momento de una fuerza son:

- el punto de giro que habitualmente se lo denomina "O".
- una fuerza aplicada  $\vec{F}$  responsable del giro con su módulo y orientación.
- una distancia entre el punto "O" y el lugar en donde se aplica la fuerza, que materializa al vector posición:  $\vec{r}$

Veamos la siguiente figura e intentemos dar más detalles al respecto:



 $\tau_o$ =F.d

donde **F=** fuerza y **d=**brazo de palanca.

Para poder calcular el brazo de palanca se procede de la siguiente manera:

- a) se prolonga la línea de acción de la fuerza. Entonces se observa una línea punteada que se debe extender por arriba y por debajo del vector  $\vec{F}$ .
- b) se traza una recta perpendicular a la anterior y que pase por el punto de giro **"O".** Se forma así otra línea recta punteada a 90 º respecto de la primera.
- c) Finalmente, la distancia que va desde el punto de giro hasta la intersección de las dos rectas anteriores, determina la distancia del brazo de palanca "d".

Entonces si observamos el **triángulo rectángulo de color verde** y utilizamos la función seno, tenemos:

$$sen \theta = \frac{Cat.opuesto}{Hipotenusa} = \frac{d}{r}$$

Con lo cual, si despejamos **d** se obtiene:

 $d = r. sen \theta$ , conocido en física como brazo de palanca.

Finalmente se puede escribir que:

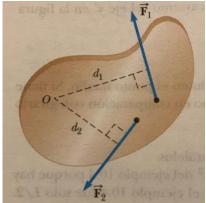
$$τ_o = F.r.sen θ$$

Si observamos la figura, la única componente de  $\vec{F}$  que tiende a causar rotación de la llave en torno al eje que pasa por "O" es **F.sen**  $\theta$ , es decir la componente perpendicular al eje de la herramienta. En cambio, la componente horizontal **F.cos**  $\theta$ , dado que su línea de acción pasa por el punto de giro "O", no produce Torque o Momento de Torsión.

Otro detalle a tener en cuenta es que **el Momento de una fuerza puede ser positivo o negativo**. Par ello se utiliza una convención de signos que indica lo siguiente:

- si el giro se produce en sentido anti-horario, se dice que es positivo=(+)
- si el giro se produce en sentido horario, se dice que es negativo=(-)

Entonces veamos ahora esta otra figura que muestra dos fuerzas actuando sobre un cuerpo rígido. Si suponemos que esas fuerzas son  $\overrightarrow{F_1}$  y  $\overrightarrow{F_2}$  y sus respectivos brazos de palanca  $d_1$  y  $d_2$ .



Se puede calcular el **Momento de Torsión Neto o Total** haciendo la **Sumatoria de las Torcas**. En este caso una es positiva y la otra es negativa:

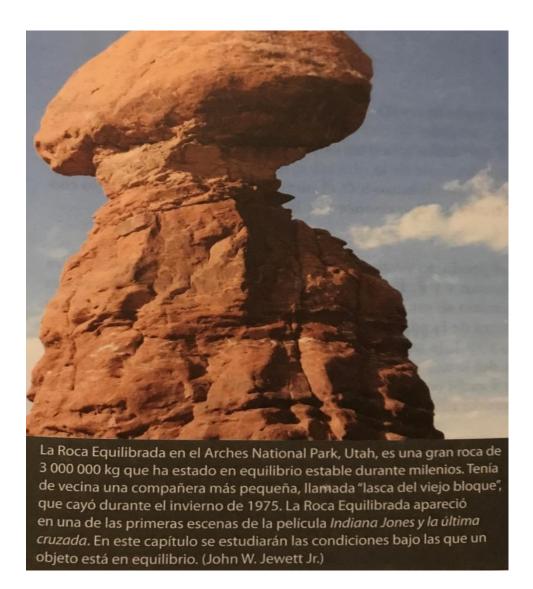
$$\sum \tau_0 = +F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2$$

Luego con la fórmula anterior pueden suceder tres cosas:

- a) que el primer término sea mayor que el segundo, por lo tanto, el Momento de Torsión Neto es (+) y significa que el objeto gira en sentido anti-horario.
- b) que el primer término sea menor que el segundo, entonces el Momento de Torsión Neto es (-) y esto hace que el objeto gire en sentido horario.
- c) que el primer término sea igual al segundo término, entonces el Momento de Torsión Neto da cero y el objeto no gira o se dice que está el **EQUILIBRIO DE ROTACIÓN!**

Con todos estos conocimientos previos podemos ahora pensar en el Equilibrio de un Cuerpo Rígido.

# Condiciones de Equilibrio para un Cuerpo Rígido:



El término **equilibrio** implica en general que el objeto se encuentre en **reposo**.

Luego para conseguir ese estado de reposo se tienen que cumplir dos exigencias muy importantes:

1) que el objeto no se traslade



**NO TRASLACIÓN** 

2) que el objeto no rote



**NO ROTACIÓN** 

La exigencia 1) de NO TRASLACIÓN se puede resumir mediante la fórmula:

 $\sum \vec{F} = 0$  (1) es decir que la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo sean igual a cero.

Esta ecuación, como se observa, es de carácter vectorial, pero si se la expresa de manera escalar referenciándola a una terna de ejes: "x", "y" y "z" se desagrega como:

 $\sum F_x = 0$  que significa que el cuerpo no puede trasladarse hacia la izquierda y tampoco hacia la derecha. Prohíbe el movimiento de traslación en "x".

 $\sum F_y = 0$  que significa que el cuerpo no puede trasladarse hacia arriba y tampoco hacia abajo. Prohíbe el movimiento de traslación en "y".

 $\sum F_z = 0$  que significa que el cuerpo no puede trasladarse hacia adelante y tampoco hacia atrás. Prohíbe el movimiento de traslación en "z".

La exigencia 2) de NO ROTACIÓN se puede resumir mediante la fórmula:

 $\sum \vec{\tau} = 0$  (2) es decir que la sumatoria de todas las torcas o momentos de fuerza que actúan sobre el cuerpo sean igual a cero.

Esta ecuación, como se observa, es de carácter vectorial, pero si se la expresa de manera escalar y se la referencia a una terna de ejes: "x", "y" y "z" se desagrega como:

 $\sum \tau_x = 0$  que significa que el cuerpo no puede rotar alrededor del eje "x".

 $\sum \tau_y = 0$  que significa que el cuerpo no puede rotar alrededor del eje "y".

 $\sum \tau_z = 0$  que significa que el cuerpo no puede rotar alrededor del eje "z".

Todo lo que se analizó hasta acá es para **asegurar el equilibrio de un cuerpo rígido en 3 dimensiones.** Pero, como esto es algo complejo por ahora, en este curso de primer año lo que se propone es **poner en equilibrio un objeto en dos dimensiones**. Entonces de las últimas seis fórmulas escritas en los párrafos anteriores y **pintadas con verde**, sólo se utilizan tres de ellas:

$$\sum F_x = 0 \tag{3}$$

$$\sum F_{v} = 0 \tag{4}$$

Que aseguran la no traslación en "x" e "y".

$$\sum \tau_z = 0 \tag{5}$$

Que asegura la no rotación alrededor del eje "z".

Por ejemplo, si el objeto que se desea poner en equilibrio es bidimensional, como es el caso de un cuadro colgado en la pared, se deben cumplir las últimas tres exigencias, es decir:

 $\sum F_x = \mathbf{0}$  asegura que el cuadro no se mueva en "x" (un poco raro, pero...)

 $\sum F_y = \mathbf{0}$  asegura que el cuadro no se mueva en "y" (básicamente que no se caiga por la acción de la fuerza de la gravedad)

 $\sum \tau_z = 0$  asegura que el cuadro no gire alrededor del eje "z" (no se incline)

<u>Conclusión</u>: siempre que se quiera conseguir el equilibrio de un cuerpo bidimensional o en el plano, se deben cumplir con las condiciones de equilibro que corresponden a las ecuaciones: (3), (4) y (5).

Vamos ahora la aplicación de estas leyes física a problemas concretos.

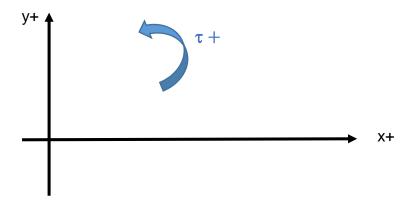
#### Estrategia o pasos a seguir para resolver problemas de Estática:

La idea es brindar ahora algunos ejemplos desarrollados para poder entender cómo se resuelve un problema de Estática. Para ello presentamos el siguiente protocolo o estrategia:

Paso 1: Leer el enunciado del problema y aislar el objeto que usted desea que permanezca en equilibrio. Hacer un esquema y detectar cuáles son los datos e incógnitas del problema.

**Paso 2:** Construir el Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) o Diagrama de Fuerza (D.F.), que significa colocar sobre el cuerpo aislado todas las fuerzas exteriores que actúan sobre él. Para ello intente predecir para cada vector fuerza, qué dirección y sentido tendrá.

Paso 3: Colocar un sistema de referencia para fuerzas y otro para el Momento de una Fuerza. Para el primer caso, un plano cartesiano viene muy bien y es el que está representado en color negro; y para el segundo caso, indicar por ejemplo un sentido de giro anti-horario positivo, que es el que se dibujó en color celeste.



Paso 4: Proponer las condiciones de Equilibrio mencionadas en las ecuaciones (3), (4) y (5), es decir:

$$\sum \textbf{\textit{F}}_{x}=\textbf{0}$$
 ;  $\sum \textbf{\textit{F}}_{y}=\textbf{0}$  ;  $\sum \tau_{z}=\textbf{0}$ 

Para el caso de los términos de las **Fuerzas** tener presente sus signos y sus proyecciones de ser necesario... y, para el caso de los **Momentos de una Fuerza** tener en cuenta los signos y brazos de palanca...

Paso 5: Resolver por algún método matemático las ecuaciones que surgieron del ítem anterior, con la intención de despejar las incógnitas del problema.

Paso 6: Interpretar en informar los resultados.

#### **EJEMPLO 1:**

Un sube y baja consiste en un tablón uniforme de masa "M" y longitud "l" que sostiene en reposo a un padre y su hija de masas "mf" y "md" respectivamente, como se muestra en la figura. El soporte (llamado punto de apoyo) está debajo del centro de gravedad del tablón, el padre a una distancia "d" y la hija a una distancia "l/2".

Los datos son: mf=75 (kg), md=40 (kg), M=20 (kg) y el largo del tablón l=3 (m) Determine:

- a) el valor de la fuerza  $\overrightarrow{n}$  hacia arriba que ejerce el pivote sobre el tablón, llamada fuerza normal
- b) ¿dónde se debe sentar el padre de la niña para equilibrar el sistema, es decir d=?

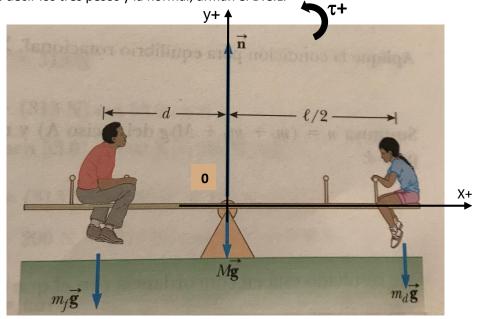
Paso 1: Leer el enunciado del problema y aislar el objeto que usted desea que permanezca en equilibrio. Detectar datos e incógnitas...

Luego de leer el enunciado, se entiende que el sube y baja es el elemento a aislar. Él debe estar en equilibrio.

Además:

- los datos son: mf=75 (kg), md=40 (kg), M=20 (kg) y l=3 (m)
- y las incógnitas: n = ? y d=?

Paso 2: Construir el Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) o Diagrama de Fuerza (D.F.), que significa colocar sobre el cuerpo aislado todas las fuerzas exteriores que actúan sobre él. Las fuerzas en celeste, es decir los tres pesos y la normal, arman el D.C.L.



Paso 3: Colocar un sistema de referencia para Fuerzas y otro para Momento de Torsión. Los dos son los que están dibujados de color negro.

Paso 4: Proponer las condiciones de Equilibrio:

 $\sum F_x$  no hace falta porque no hay fuerzas actuantes en "x"

$$\sum F_y = 0$$
; - mf.g - M.g + n - md.g = 0 Ecuación (1)

$$\sum \tau_0 = 0$$
; - md.g.(I/2) +mf.g.(d)= 0 Ecuación (2)

**Paso 5:** Resolver por algún método matemático las ecuaciones que surgieron en el ítem anterior, despejando las incógnitas...

De la Ecuación (1), despejo la fuerza normal "n":

entonces, los términos que están negativos en el primer miembro pasan sumando al segundo miembro:

n= mf.g + M.g + md.g = g.(mf + M + md) y, sacando factor común "g" y calculando:

De la Ecuación (2), despejo la distancia "d":

por lo tanto, paso el término negativo del primer miembro a positivo en el segundo miembro:

mf.g.d=md.g.l/2

con lo cual, pasando mf.g de factor a cociente desde el primer al segundo miembro, nos queda:

$$d = \frac{md.g.l/2}{mf.g} = \frac{md.l/2}{mf}$$
 simplificando "g"; y calculando:

$$d = \frac{40.1,5}{70} = 0.85 (m)$$

Paso 6: Interpretar en informar los resultados.

Finalmente, los resultados parecen razonables y los informo.

- a) la fuerza normal es: n= 1323 (N)
- b) y la distancia a la que se tiene que sentar el papá para lograr que el sube y baja esté equilibrado es: d=0.85 (m).

#### **EJEMPLO 2:**

Una viga horizontal uniforme con una longitud I=8 (m) y un Peso Pv=200 (N) se une a la pared en "o" mediante una junta articulada (perno). Su extremo lejano está sostenido mediante un cable que forma una ángulo  $\alpha=53^\circ$  con la viga (figura 12.9). Una persona de peso Pp=600 (N)

está de pie a una distancia a= 2(m) de la pared. Encuentre la Tensión T=? del cable y las reacciones en el perno: Rx=? y Ry=?

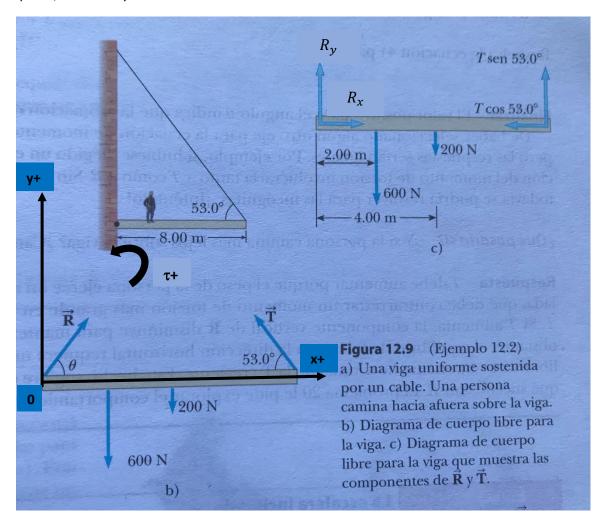
Paso 1: Leer el enunciado del problema y aislar el objeto que usted desea que permanezca en equilibrio. Detectar datos e incógnitas...

Luego de leer el enunciado se entiende que la viga horizontal es el elemento a aislar. Ella debe permanecer en equilibrio.

#### Además:

- los datos son: Pv=200 (N), Pp=600 (N),  $\alpha$ =53°, a=2 (m) y l=8 (m)
- y las incógnitas: la tensión del cable T =?
  las reacciones Rx=? y Ry=?, o simplemente R=?

Paso 2: Construir el Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.), que significa colocar sobre el cuerpo aislado todas las fuerzas exteriores que actúan sobre él. Las fuerzas en celeste, es decir los dos pesos, la tensión y la reacción conforman el **D.C.L.** 



**Paso 3:** Colocar un sistema de referencia para Fuerzas y otro para Momento de Torsión. Los dos son los que están dibujados de color negro.

Paso 4: Proponer las condiciones de Equilibrio:

$$\sum F_x = \mathbf{0} \qquad Rx - T\cos\alpha = 0 \qquad \qquad \text{Ecuación (1)}$$

$$\sum F_{v} = 0$$
;  $Ry - Pp - Pv + T. sen \alpha = 0$  Ecuación (2)

$$\sum \tau_0 = 0;$$
  $-Pp. a - Pv. \frac{l}{2} + T. l. sen \alpha = 0$  Ecuación (3)

Paso 5: Resolver por algún método matemático las ecuaciones anteriores, despejando las incógnitas...

#### De la Ecuación (3), despejo la Tensión del cable "T":

entonces, los términos que están negativos en el primer miembro pasan sumando al segundo miembro:

$$T.l.sen\alpha = Pp.a + Pv.\frac{l}{2}$$

Y luego:  $l.sen \ \alpha$  que está multiplicando en el primer miembro, pasa dividiendo al segundo miembro:

$$T = \frac{Pp. a + Pv. l/2}{l. sen\alpha} = \frac{600.2 + 200.4}{8. sen53^{\circ}} = 313 (N)$$

#### De la Ecuación (1) despejo "Rx" y le reemplazo el valor de T=313 (N):

Por lo tanto, paso el término negativo del primer miembro a positivo en el segundo miembro:

$$Rx = T.\cos\alpha = 313.\cos 53^{\circ} = 188.3$$
 (N)

# De la Ecuación (2), despejo "Ry" y le reemplazo el valor de T=313 (N):

Por lo tanto, queda:

$$Ry = Pp + Pv - T. sen\alpha = 600 + 200 - 313. sen53^{\circ} = 550(N)$$

Paso 6: Interpretar en informar los resultados.

Finalmente, los resultados parecen razonables y los informo.

- a) la fuerza del cable es: T=313(N)
- b) y las reacciones según "x" e "y" son: Rx=188,3 (N), Ry=550 (N)

Luego con Rx y Ry se puede calcular la resultante final "R" con el Teorema de Pitágoras:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{188,3^2 + 550^2} = \sqrt{337956,89} = 581 (N)$$

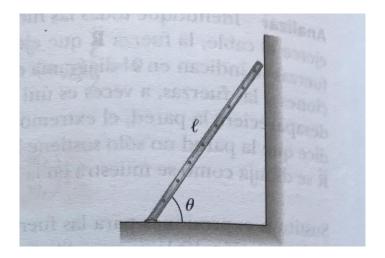
Y con la definición de tangente, su orientación  $\theta$ :

$$tg \ \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{550}{183,3} = 3$$
 entonces:  $\theta = tan^{-1}(3) = 71, 5^{\circ}$ 

Ahora queda pendiente la posibilidad de resolver problemas de Estática que también presenten o involucren **fuerza de fricción**.

#### **EJEMPLO 3:**

Una escalera uniforme de longitud "l" descansa contra una pared vertical lisa (sin fricción). La masa de la escalera es "m" y el coeficiente de fricción estático entre la escalera y el piso es  $\mu_{\scriptscriptstyle S}=0.4$ . Encuentre el ángulo  $\theta_{min}$  en el que la escalera no se desliza.



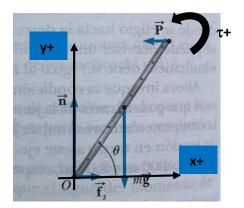
Paso 1: Leer el enunciado del problema y aislar el objeto que usted desea que permanezca en equilibrio. Detectar datos e incógnitas...

Luego de leer el enunciado se entiende que es la escalera el elemento a aislar. Ella debe estar en equilibrio.

#### Además:

El único dato es: μ<sub>s</sub> = 0,4
 y la única incógnita: θ<sub>mín</sub> =?

Paso 2: Construir el Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) o Diagrama de Fuerza (D.F.), que significa colocar sobre el cuerpo aislado todas las fuerzas exteriores que actúan sobre él. Las fuerzas en celeste, es decir el peso de la escalera, la fuerza normal en el piso, la fuerza "P" en la pared (otra normal, pero con un nombre diferente) y la fuerza de fricción estática, arman el D.C.L.



**Paso 3:** Colocar un sistema de referencia para Fuerzas y otro para Momento de Torsión. Los dos son los que están dibujados de color negro.

Paso 4: Proponer las condiciones de Equilibrio:

$$\sum F_x = \mathbf{0}$$
  $-P + f_s m \acute{a} x = 0$  es decir:  $-P + \mu_s . n = 0$  Ecuación (1)

$$\sum F_{\mathbf{v}} = \mathbf{0}; \quad n - m. g = 0$$
 Ecuación (2)

$$\sum \tau_0 = 0$$
;  $-m.g.\frac{l}{2}.cos\theta_{min} + P.l.sen\theta_{min} = 0$  Ecuación (3)

Paso 5: Resolver por algún método matemático las ecuaciones anteriores despejando las incógnitas...

### De la Ecuación (3), despejo $\theta_{min} = ?:$

entonces, al término negativo en el primer miembro lo paso sumando al segundo miembro:

$$P.l.sen\theta_{min} = m.g.\frac{l}{2}.cos\theta_{min}$$

Luego: con la intención de unificar las funciones trigonométricas seno y coseno, se propone armar la función tangente, como el cociente del seno con el coseno del mismo ángulo, y queda:

$$\tan \theta_{min} = \frac{sen\theta_{min}}{cos\theta_{min}} = \frac{m.g.l/2}{P.l} = \frac{m.g/2}{P} = \frac{m.g}{2.P}$$
 Ecuación (4)

## De la Ecuación (2) despejo "n" y la reemplazo en (1):

Por lo tanto, queda:

$$n=m.g$$
 y luego:  $P=\mu_s.n$  es decir:  $P=\mu_s.m.g$  Ecuación (5)

#### Finalmente, si reemplazo (5) en (4):

Se obtiene:

$$tan\theta_{min} = \frac{m.g}{2.\mu_s.m.g}$$
 y cancelando masa y gravedad... queda:

$$tan\theta_{min} = \frac{1}{2. \, \mu_s} = \frac{l}{2.0.4} = 1,25$$
 lo que:  $\theta_{min} = tan^{-1}(1,25) = 51,3^{\circ}$ 

Paso 6: Interpretar en informar los resultados.

Finalmente el resultado a informar es que para  $\theta > \theta_{min}$  la escalera quedará siempre en equilibrio!

Es todo!!! Luego en el Práctico se resolverán más problemas y usted se empezará a sentir más seguro con estos temas. Le deseo Éxitos en su estudio y hasta la próxima!!!

Ing. Juan Lancioni.

**Nota:** las fotos/imágenes fueron tomadas algunas del libro de Serway-Jewet. En cuanto a las ilustraciones/esquemas, fueron realizados por el profesor.