FISICA I UTN-FRC

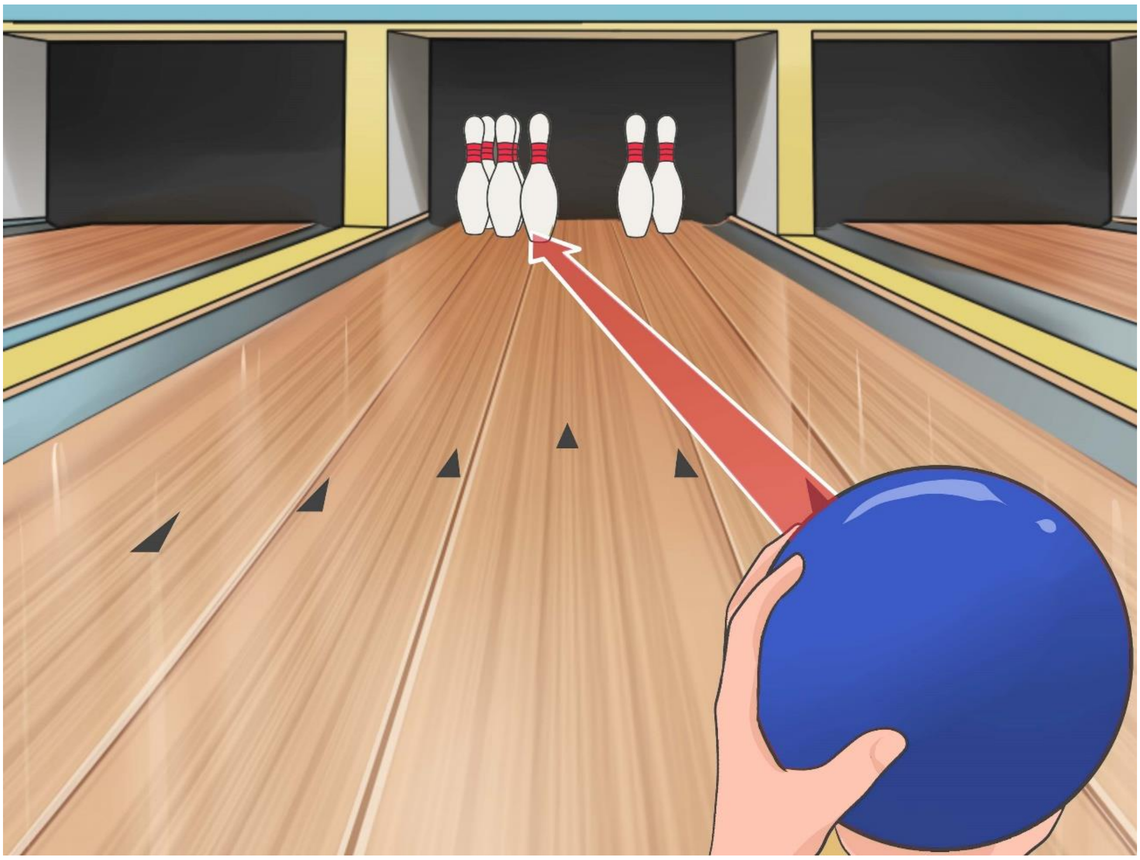
UNIDAD 6: DINÁMICA DE LOS SISTEMAS

INTRODUCCIÓN – CANTIDAD DE MOVIMIENTO – LAS CUATRO FORMAS DE EXPRESAR LA SEGUNDA LEY DE NEWTON – IMPULSO – CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO – APLICACIONES

(PRIMERA PARTE)

Introducción:

Con la intención de anticipar posibles aplicaciones de las nuevas leyes físicas que estudiaremos en esta Unidad Temática, podemos citar el ejemplo de un choque de una bola de bowling en contra de los pinos ubicados al final de la cancha (ver figura).



A los pinos se les da una gran velocidad como resultado de la colisión y en consecuencia salen eyectados y se golpean entre sí realizando nuevos choques. Las fuerzas de impacto entre cada una de las piezas que participan es muy grande y todo sucede en un tiempo muy breve. Otro detalle es que, las fuerzas actuantes y las aceleraciones que se producen en los pinos son variables en el tiempo (desde un valor cero a máximo y de nuevo a cero).

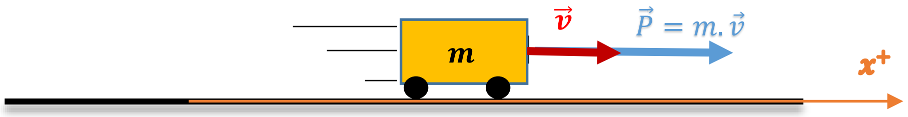
El ejemplo que se acaba de presentar, y otros equivalentes que usted pueda imaginar parecen de solución bastante compleja; no obstante, uno de los objetivos principales de

esta Unidad es permitir entender, analizar y resolver tales eventos de una manera bastante sencilla.
Iniciemos a continuación el estudio de las distintas leyes físicas asociadas a las colisiones o choques.

Cantidad de Movimiento o Momento Lineal:

Es una nueva magnitud física de carácter vectorial que involucra a la masa del cuerpo en cuestión y su velocidad, a saber:

$$\vec{P} = m.\vec{v}\ \left(kg \cdot \frac{m}{s}\right) \qquad (1)$$



Como el producto de un escalar por un vector, da un vector, en consecuencia el Momento Lineal es un vector que tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad $\vec{v}$. Es el que se muestra de color celeste en la figura de arriba.

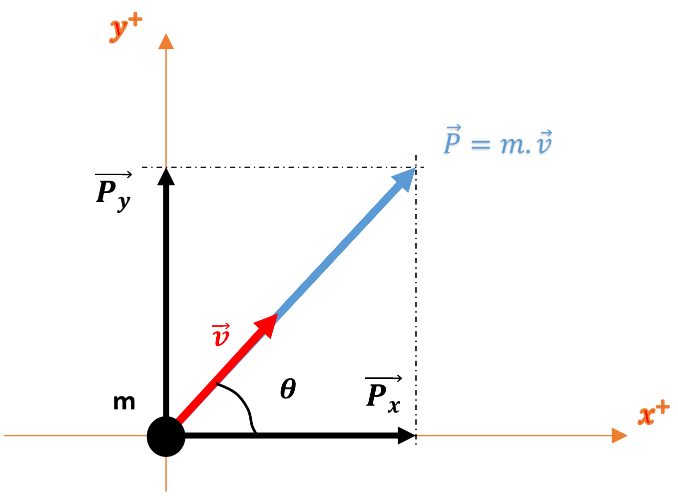
Si usted referencia el Momento Lineal o Cantidad de Movimiento con un eje de abscisa positivo hacia la derecha, también puede escribirlo como una ecuación escalar:

$$P_x = m.v_x$$

y el signo de la expresión anterior será positivo porque es a favor del eje x^+.

Si el Momento Lineal está orientado con un ángulo $\theta \neq 0°$, como se muestra en la figura de abajo, se pueden calcular las respectivas componentes vectoriales por trigonometría, de la siguiente manera:

$P_x = P.cos\theta$
$P_y = P.sen\theta$



Ambas componentes para este caso son positivas porque el ángulo θ está en el primer cuadrante, entonces el seno y el coseno son (+). Para estos cálculos se debe tener la precaución de que el ángulo θ se mida siempre a partir del eje de abscisa positivo y en sentido anti-horario.

Impulso – Las cuatro formas de expresar la Segunda Ley de Newton:

En primer lugar haremos un recorrido relacionado con algunos conceptos ya abordados en unidades anteriores y de a poco iremos presentado otros nuevos, hasta llegar finalmente a la definición de **Impulso**.

a) **Primera Forma:**

es la que presentamos en la Unidad 4 de Dinámica de una Partícula:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext.}} = m.\vec{a} \qquad \textbf{(2)}$$

que asegura que la aceleración que experimenta un objeto es directamente proporcional a la resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre él, e inversamente proporcional a su masa.

b) **Segunda Forma:**

la mayoría de las personas vinculadas con la vida académica sospechan que esta es la forma que utilizó en su momento Isaac Newton, para presentar su Segunda Ley a la comunidad científica:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext.}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \textbf{(3)}$$

es decir, que la resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre un objeto, es igual al ritmo con el cual cambia el Momento Lineal con el tiempo; y matemáticamente se lee como la derivada de $\vec{P}$ con respecto al tiempo.

Por ejemplo: a mayor fuerza resultante, mayor aceleración y en consecuencia mayor velocidad y por lo tanto mayor Momento Lineal, y viceversa.

Como el segundo miembro de la fórmula **(3)** representa una derivada, si reemplazamos a $\vec{P}$ por $m.\vec{v}$, y aplicamos la regla de la derivada de un producto de dos funciones, se obtiene:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext.}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m.\vec{v}) = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Como:

- $\frac{dm}{dt}$: representa la derivada de una función constante y da cero (por otra regla de derivación), el primer término se anula y queda:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext.}} = 0 \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- $\frac{d\vec{v}}{dt}$: es la definición de la aceleración instantánea $\vec{a}$.

Entonces, la expresión anterior finalmente se puede escribir como:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext.}} = m \cdot \vec{a}$$

y se obtiene la **Primera Forma**!!! Es decir la fórmula **(2)**. Con lo cual se ratifica que una misma ley se puede escribir de distintas maneras.

c) Tercera Forma:

es el tan mentado Teorema del Trabajo y la Energía Cinética (T.T.K.) que estudiamos en la Unidad 5 y se representa con la siguiente ley:

$$W = \Delta K \qquad \textbf{(4)}$$

Recuerde que para poder demostrar este teorema se incluyó dentro de las formulaciones matemáticas realizadas en su momento, a la **Primera Forma** de expresar la Segunda Ley de Newton, es decir: $\sum \overrightarrow{F_{ext.}} = m \cdot \vec{a}$. De ahí que la fórmula **(4)**, implícitamente incluya a la Segunda Ley de Newton y sea otra manera o forma de expresarla.

d) Cuarta Forma:

Es la que se conoce con el nombre de Impulso: $\vec{I}$

El impulso que recibe un objeto de masa **"m"** cuando cambia su estado de velocidad es igual a la variación de la Cantidad de Movimiento. Entonces, la fórmula que representa al Impulso es la siguiente:

$$\vec{I} = \Delta\vec{P} \quad \left(kg \cdot \frac{m}{s}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

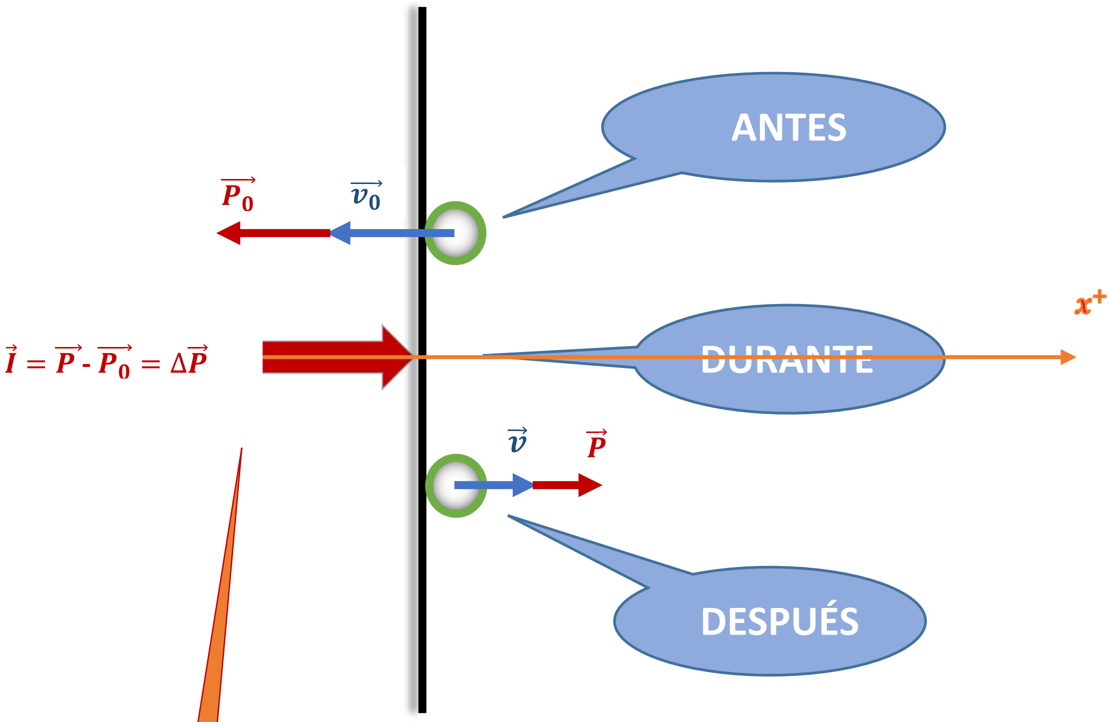
o bien:

$$\vec{I} = \Delta\vec{P} = \vec{P} - \overrightarrow{P_0} = m \cdot \vec{v} - m \cdot \overrightarrow{v_0} = m \cdot (\vec{v} - \overrightarrow{v_0})$$

Para entender mejor este último concepto, veamos el siguiente problema.

EJEMPLO 1:

Si una pelota de masa $m = 0{,}1(kg)$ impacta perpendicularmente sobre una pared a una rapidez inicial $v_0 = -4\ (m/s)$ y al rebotar sale eyectada en la misma dirección pero con sentido contrario, con una rapidez final $v = 3{,}2\ (m/s)$, calcule el Impulso en módulo, dirección y sentido. Ver la siguiente figura para una mejor interpretación.



Tomando un sistema de referencia positivo hacia la derecha y escribiendo la fórmula **(5)** de manera escalar, queda:

$$I = \Delta P = m.v - m.v_0 = m.(v - v_0) = 0{,}1.(3{,}2 - (-4))$$

$$I = 0{,}1.(3{,}2 + 4) = 0{,}1.(7{,}2) = +\mathbf{0{,}72}\ \left(\boldsymbol{kg \cdot \frac{m}{s}}\right)$$

Lo que significa que el Impulso que le hace la pared a la pelota es a favor del eje de abscisa positivo, es decir hacia la derecha (porque precisamente da positivo); tal como se indica en la figura. Este vector es el responsable de que la pelota cambie el sentido su velocidad entre el antes y el después del choque. Debe destacarse también que este fenómeno ocurre en un tiempo muy breve!

Retomando el desarrollo de la teoría, le comento que hay una manera muy interesante de demostrar la fórmula **(5)** mediante el cálculo de integrales definidas, partiendo de la fórmula **(3)**. Le dejo a continuación esas cuentas realizadas mediante formulaciones matemáticas que, seguramente las entenderá más adelante, cuando sus conocimientos de Análisis Matemático I hayan avanzado hasta estos temas.

Entonces escribiendo la fórmula **(3)** de manera escalar, se obtiene:

$$\sum F_{ext.} = \frac{dP}{dt}$$

y partiendo del supuesto de que la resultante de todas las fuerzas exteriores se resume en una fuerza que varía con el tiempo **F(t)**, desde un valor cero (justo antes del impacto) hacia un valor máximo (que coincide con la máxima deformación de la pelota durante el choque) y de nuevo hacia un valor cero (inmediatamente después del impacto), se tiene:

$$F(t) = \frac{dP}{dt}$$

que al adaptarla queda,

$$F(t).dt = dP$$

e integrando en ambos miembros entre: $\boldsymbol{t_0}\ y\ \boldsymbol{t}$ en el primer miembro; y $\boldsymbol{P_0}\ y\ \boldsymbol{P}$ en el segundo miembro,

$$\int_{t_0}^{t} F(t) \cdot dt = \int_{P_0}^{P} dP$$

Entonces, de las dos integrales … la única que se puede resolver es la del segundo miembro. La del primer miembro, como la función **F(t)** no se la conoce de manera analítica, es imposible calcularla por ahora. Así se llega a,

$$\int_{t_0}^{t} F(t) \cdot dt = [P]\ {}_{P_0}^{P}$$

y evaluando a $\boldsymbol{P}$ mediante la Regla de Barrow,

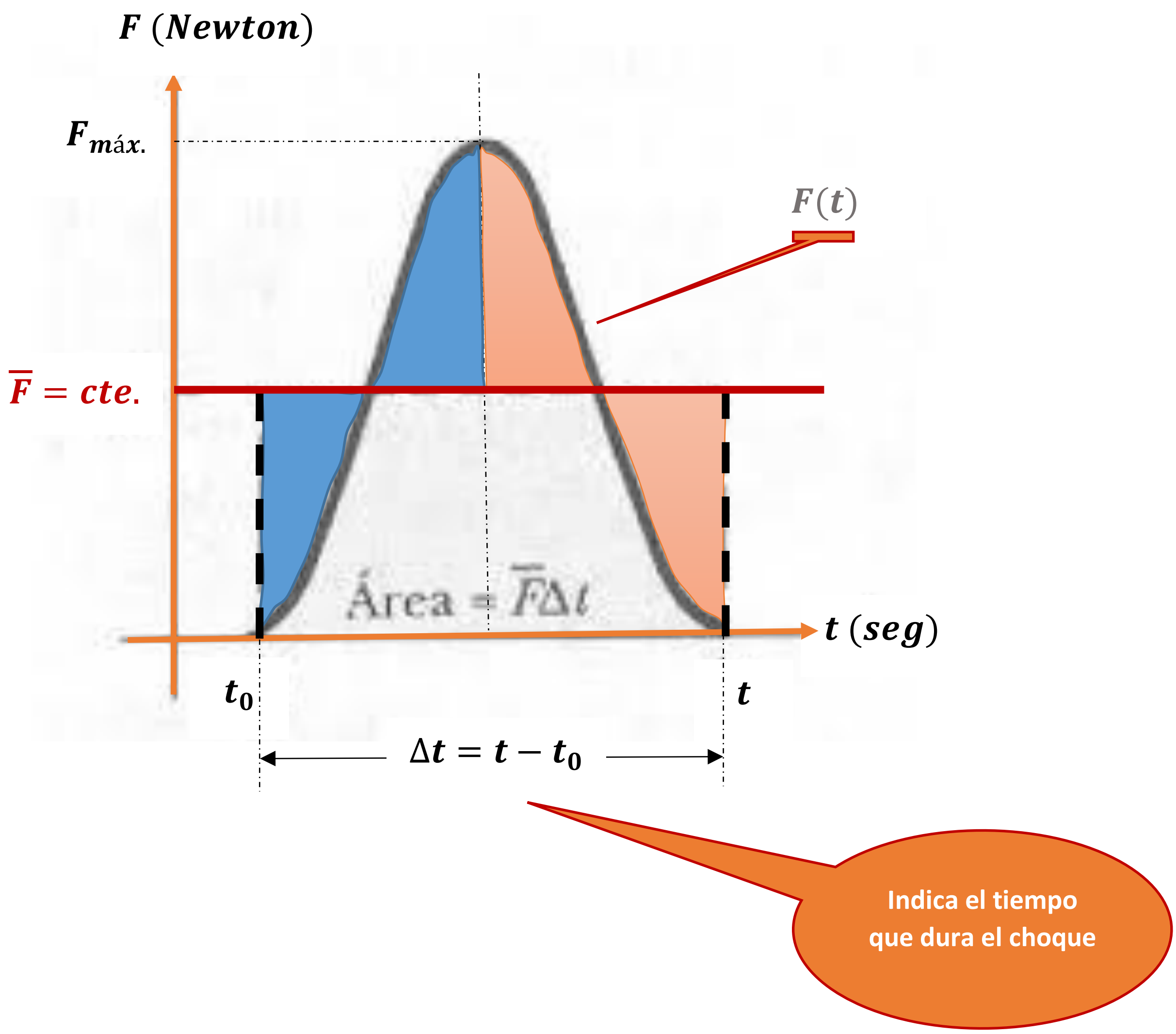
$$\int_{t_0}^{t} F(t) \cdot dt = P - P_0 = \Delta P$$

con lo cual se observa que la integral entre $\boldsymbol{t_0}\ y\ \boldsymbol{t}\ de\ \boldsymbol{F(t)}$ representa al Impulso "$\boldsymbol{I}$", que a su vez es igual a la variación de la cantidad de movimiento "$\Delta\boldsymbol{P}$", tal como se expresara en la fórmula **(5)**. Entonces queda demostrada dicha Ley Física, que presentada de manera escalar, es:

$$\boldsymbol{I = \int_{t_0}^{t} F(t) \cdot dt = \Delta P} \qquad \textbf{(6)}$$

Muy interesante!!!

Si a continuación decidimos graficar la fuerza en función del tiempo que recibió la pelota del ejemplo anterior, es decir **F(t)**, usted se encontrará **con la curva de color gris** que se muestra a continuación:



Luego el área debajo de la gráfica **F(t)** en el intervalo de tiempo Δt, **es el Impulso**. Esto se justifica a partir de la expresión matemática que indica lo siguiente:

$$I = \int_{t_0}^{t} F(t) = \Delta P$$

en donde la integral definida - *como ya lo adelantáramos en la unidad anterior cuando vimos trabajo para fuerza variable* - representa geométricamente el área debajo de la curva en el intervalo cerrado $[\boldsymbol{t_0}; \boldsymbol{t}]$.

A raíz de que esta integral, no se puede calcular debido a que a **F(t)** sólo se la conoce experimentalmente y no analíticamente, es que los científicos decidieron hacer la siguiente aproximación:

tomar en la gráfica F(t) un valor de fuerza promedio $\overline{F}$ y representar esa nueva fuerza como si fuera constante en todo el intervalo Δt. De esta forma se grafica una recta de pendiente nula como la indicada de color rojo. Entonces el área debajo de la recta de color rojo en el intervalo Δt, representa aproximadamente al Impulso, porque las zonas sombreadas en celeste y rosa se compensan entre sus defectos y excesos, respectivamente.

Con esta última consideración, la fórmula **(6)** se puede reescribir como:

$$I = \int_{t_0}^{t} F(t) \cdot dt = \int_{t_0}^{t} \overline{F} \cdot dt$$

y ahora resulta sencillo resolver la integral, sacando $\overline{F}$ (que es una constante) fuera de la integral,

$$I = \int_{t_0}^{t} \overline{F} \cdot dt = \overline{F} \cdot \int_{t_0}^{t} dt = \overline{F}. [t]_{t_0}^{t} = \overline{F} \cdot (t - t_0) = \overline{F} \cdot \Delta t$$

Entonces, el último miembro de esta fórmula representa geométricamente el área de un rectángulo, cuya base es $\Delta \boldsymbol{t}$ y su altura es $\overline{\boldsymbol{F}}$. De esta manera visualizamos nuevamente que el Impulso es el área debajo de la recta $\overline{\boldsymbol{F}}$ en el intervalo de estudio, tal como lo explicáramos en párrafos anteriores!

Con lo cual,

$$\boldsymbol{I} = \overline{\boldsymbol{F}} \cdot \Delta \boldsymbol{t} \qquad \textbf{(7)}$$

Esta es otra manera de expresar al Impulso de manera escalar. Lo que finalmente, con todo lo visto hasta acá, el Impulso se puede escribir así,

$$\vec{\boldsymbol{I}} = \overline{\boldsymbol{F}} \cdot \Delta \boldsymbol{t} = \Delta \vec{\boldsymbol{P}} \qquad \textbf{(8)}$$

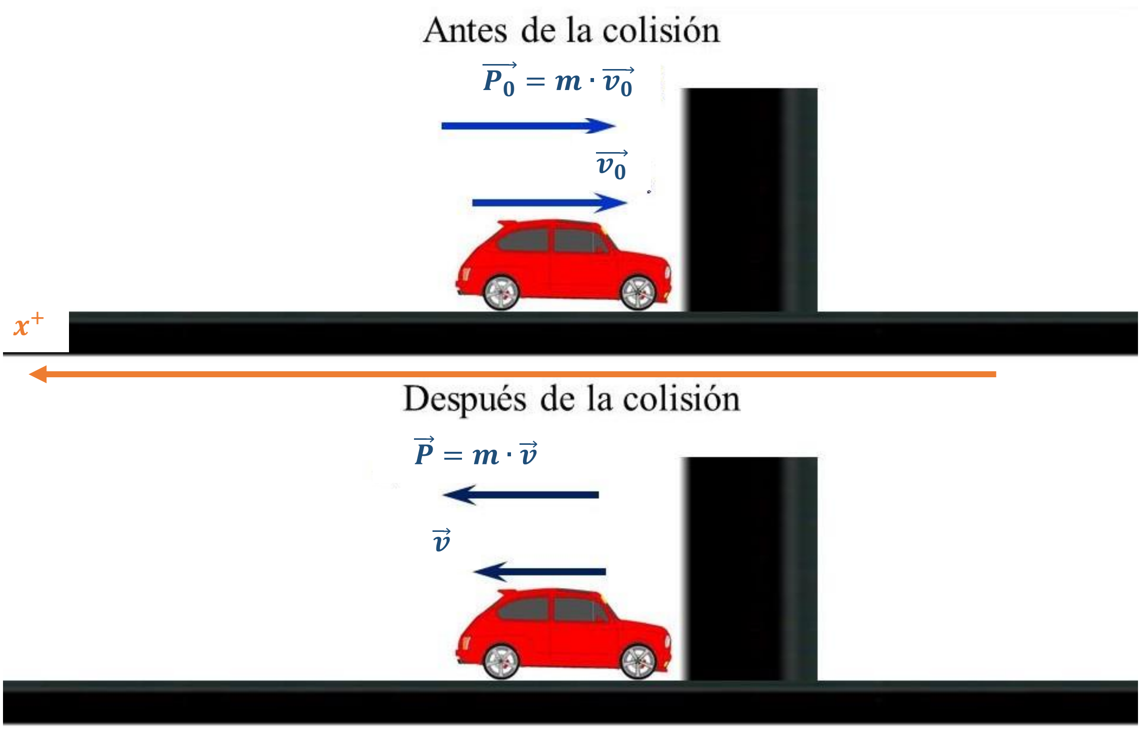
Por lo tanto con estos nuevos conceptos se concluye que, **(8)** es la manera de expresar la Segunda Ley de Newton en su **Cuarta Forma**.

Veamos ahora la resolución de otro problema para aplicar todos los conceptos trabajados hasta acá.

EJEMPLO 2:

En una prueba de choque, un automóvil con una masa $m = 800\ (kg)$ impacta con una pared como se muestra en la siguiente figura. Sabiendo que la velocidades, inicial y final del vehículo son $v_0 = -15\ (m/s)$ y $v = 2{,}6\ (m/s)$ respectivamente y, que la colisión dura un intervalo de tiempo $\Delta t = 0{,}15\ (seg)$, calcule:

a) El Impulso que recibe el automóvil por parte de la pared en el momento del impacto.
b) La Fuerza Promedio que actuó sobre él en el intervalo de tiempo que dura la colisión.



a) Como:

$$I = \Delta P = m \cdot v - m \cdot v_0 = m \cdot (v - v_0)$$

calculando, queda:

$$I = 800 \cdot \big(2{,}6 - (-15)\big) = 800 \cdot (2{,}6 + 15) = 800 \cdot 17{,}6 = \mathbf{14080}\ (\boldsymbol{kg} \cdot \tfrac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}})$$

b) Luego, a partir de:

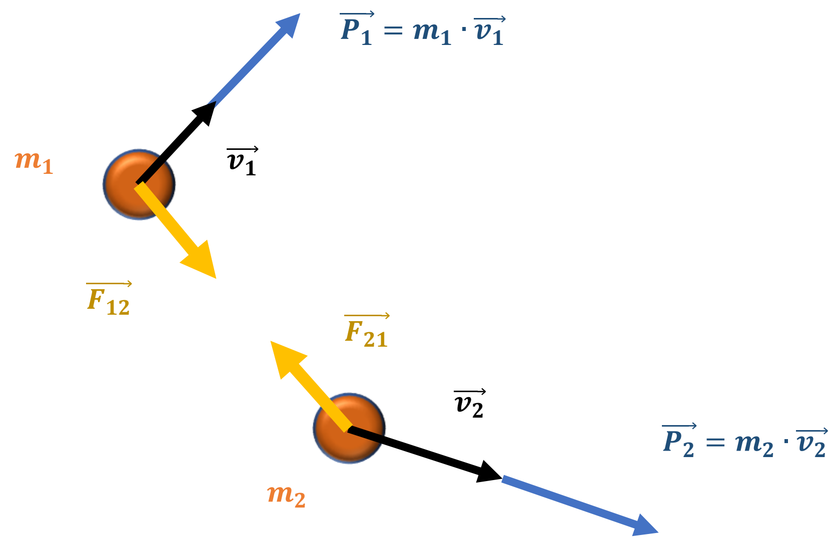
$I = \overline{F} \cdot \Delta t$, despejando $\overline{F}$ se obtiene: $\overline{F} = \frac{I}{\Delta t}$

y al calcular:

$$\overline{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{14080}{0{,}15} = \mathbf{93866{,}6}\ (\boldsymbol{N})$$

<u>Nota:</u> observe que ambas magnitudes físicas son positivas porque apuntan a favor del eje x^+ y, al mismo tiempo son muy grandes!!!

Conservación del Momento Lineal:



Si se considera un **Sistema Aislado** de dos partículas de masas $\boldsymbol{m_1}\ y\ \boldsymbol{m_2}$ que se mueven con velocidades $\vec{v}_1\ y\ \overrightarrow{v_2}$ respectivamente en un determinado instante y, que sobre las partículas las únicas fuerzas que actúan (por estar aisladas) son las de interacción entre ellas $\overrightarrow{F_{12}}\ y\ \overrightarrow{F_{21}}$; por la tercera Ley de Newton se puede escribir:

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$$

o bien,

$$\overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{21}} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(9)}$$

Si a la fórmula **(3)** que corresponde a la **Segunda Forma** de expresar la Segunda Ley de Newton y dice que la $\sum \overrightarrow{F_{ext.}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$, la aplicamos a cada una de las partículas de manera adaptada, se obtiene:

$$\overrightarrow{F_{12}} = \frac{d\overrightarrow{P_1}}{dt} \qquad \textbf{(10)}$$

$$\overrightarrow{F_{21}} = \frac{d\overrightarrow{P_2}}{dt} \qquad \textbf{(11)}$$

Entonces reemplazando **(10)** y **(11)** en **(9)**, queda:

$$\frac{d\overrightarrow{P_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{P_2}}{dt} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(12)}$$

Tomando en cuenta la regla de derivación que dice que "la suma de las derivadas de dos funciones es igual a la derivada de la suma de ambas funciones", **(12)** se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2}\right) = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

Y también, por otra regla de derivación que indica que "la derivada de una función constante es siempre igual a cero", **(13)** se trasforma en:

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = constante \qquad \textbf{(14)}$$

Lo que indica que el Momento Lineal se conserva o es constante, tal como lo expresa el título de este párrafo. Entonces, si la imagen de las dos partículas mostradas al inicio de este tema corresponde a una foto justo antes del choque y nos imaginamos otra foto para un instante después del choque, ambas partículas quedarán con Cantidades de Movimiento $\overrightarrow{P_1^*}\ y\ \overrightarrow{P_2^*}$, por lo cual **(14)** se puede expresar así:

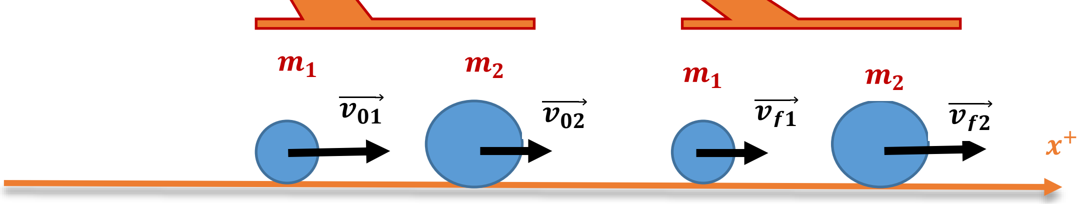
$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{P_1^*} + \overrightarrow{P_2^*} = constante \qquad \textbf{(15)}$$

que a su vez, es más frecuente escribirla de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{P_{sist}}(0) = \overrightarrow{P_{sist}}(f) = constante \qquad \textbf{(16)}$$

Es decir que la suma de la Cantidad de Movimiento inicial (0) del sistema de partículas, es igual a la suma de la Cantidad de Movimiento final (f) del mismo. O dicho de otra manera, que en un sistema aislado la Cantidad de Movimiento se Conserva!!!

Para el siguiente esquema se puede aplicar la fórmula **(16)** de una manera escalar y queda:



$$P_{01} + P_{02} = P_{f1} + P_{f2} = cte.$$

$$m_1.v_{01} + m_2.v_{02} = m_1.v_{f1} + m_2.v_{f2}$$

La pregunta ahora es: si esto ocurre para un sistema aislado, ¿qué pasa en un sistema que no lo es?, es decir, ¿qué ocurre en un caso más real? Bien, como las fuerzas de impacto que intervienen en un choque son tan pero tan grandes, las fuerzas como el **peso**, la **fricción**, la **motriz**, la **normal**, etc. que hasta acá no habían sido tenido en cuenta, se pueden despreciar… por lo tanto en un **Sistema No Aislado** también se cumple la fórmula **(16)**; con lo cual esta ley será de suma utilidad para resolver en adelante problemas de choques o colisiones de partículas.

En el próximo material haremos uso de esta conclusión interesante que se ha demostrado al desarrollar este tema y la aplicaremos para los distintos tipos de choques.

Me despido con un hasta pronto!

Ing. Juan Lancioni.

Nota: las fotos fueron tomadas desde internet y, las ilustraciones/esquemas fueron realizados por el profesor.