FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 4: FUNDAMENTOS DE LA DINÁMICA

SEGUNDA LEY DE NEWTON APLICADA AL MOVIMIENTO CIRCULAR O DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR – MARCO DE REFERENCIA: INERCIAL Y NO INERCIAL - APLICACIONES

(TERCERA PARTE)

Introducción:

En todos los ejemplos y problemas de Dinámica resueltos hasta acá, se aplicaron la Leyes de Newton a situaciones que suponen un movimiento lineal, es decir, a lo largo de una recta. Ahora se propone analizar un movimiento que es un poco más elaborado. Se intenta aplicar las Leyes de Newton a partículas u objetos que viajan en trayectorias circulares. De ahí el título de este material: **Dinámica del Movimiento Circular**.

Segunda Ley de Newton para una partícula en Movimiento Circular Uniforme (M.C.U.)

En el material que se presentó al final de la Unidad 3 se consensuó el modelo de una partícula que gira en Movimiento Circular Uniforme, con una rapidez constante "$\boldsymbol{v}$" y en una trayectoria circular de radio "$\boldsymbol{r}$".

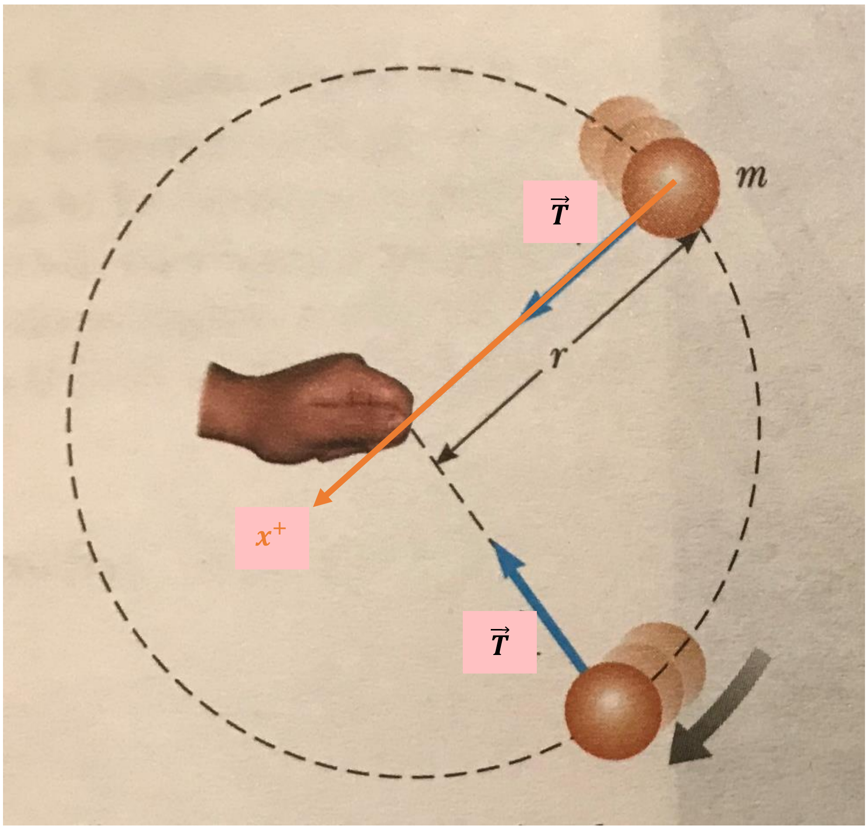
La partícula en ese movimiento, experimenta una aceleración centrípeta que ya conocemos y se calcula como:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Si usted por ejemplo hace girar una piedra atada de un hilo sobre una mesa horizontal sin fricción, notará que sobre la misma y a lo largo del hilo, actúa una fuerza $\vec{\boldsymbol{T}}$ que se dirige hacia el centro del círculo (ver figura); mientras que su peso $\vec{\boldsymbol{P}}$ se sostiene con la mesa a través de una fuerza normal $\vec{\boldsymbol{N}}$.

Lo cierto es que, a la tensión $\vec{\boldsymbol{T}}$ se la denomina: **“Fuerza Centrípeta”** para un **marco de referencia inercial (observador en reposo)** y, es la responsable de generar una aceleración hacia el centro del círculo denominada aceleración centrípeta: $\vec{\boldsymbol{a}_c}$.

De acuerdo a la Primera Ley de Newton (Principio de Inercia), la piedra se movería en una línea recta si no hubiese fuerza en ella; sin embargo, la cuerda evita el movimiento a lo largo de una línea recta al ejercer sobre el objeto una fuerza radial o centrípeta $\vec{\boldsymbol{T}}$.



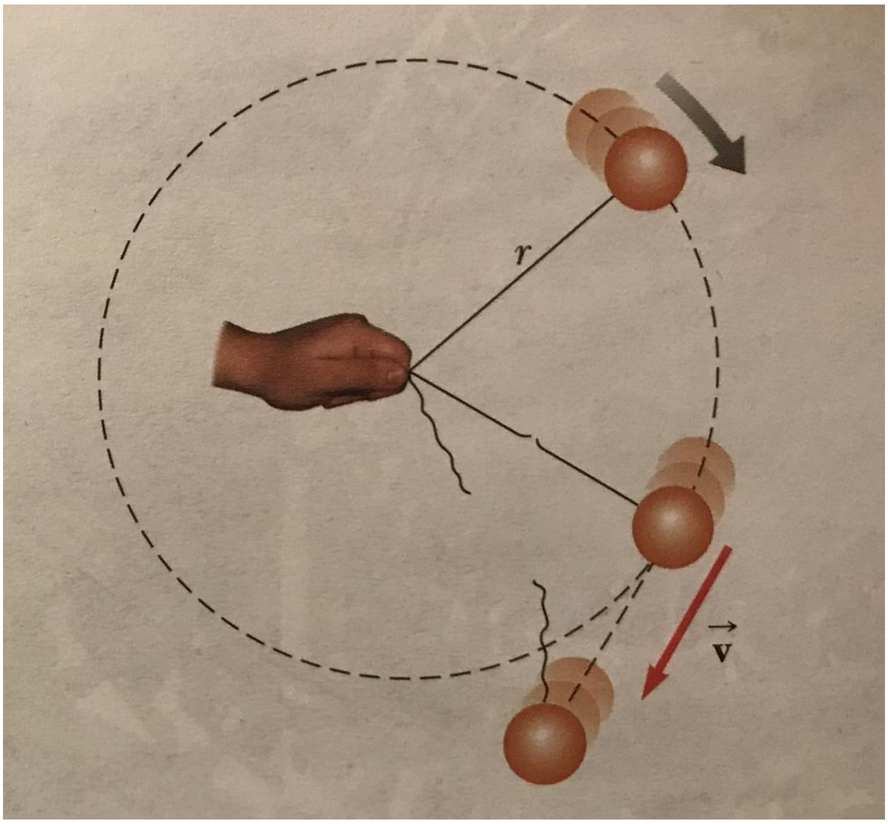
Si aplicamos la Segunda Ley de Newton en la dirección radial, la fuerza neta que causa la aceleración centrípeta es simplemente $\vec{T}$. Entonces tomando un eje "x^+" con sentido hacia el centro del círculo, se obtiene de manera escalar:

$\sum F_x = m.a_x$ es decir,

$T = m.a_c$ o sea:

$$T = m.\frac{v^2}{r}$$

Esta fuerza centrípeta $\vec{T}$ proporciona una aceleración centrípeta $\vec{a_c}$ que actúa hacia el centro de la trayectoria circular y **genera un cambio en la dirección del vector velocidad permanentemente**. Si dicha fuerza desapareciera, la piedra ya no se movería en trayectoria circular; en vez de ello, lo haría a lo largo de una trayectoria en línea recta tangente al círculo. Esta idea se muestra en la figura que sigue:



En un **marco de referencia no inercial (observador en movimiento)**, aparece una segunda fuerza en la dirección radial, **igual y opuesta** a la fuerza centrípeta que se denomina **"Fuerza Centrífuga"**, cuyo módulo vale:

$$F_{centrífuga} = m.\frac{v^2}{r}$$

No obstante, lo que ocurre generalmente es que el sistema de referencia que se utiliza con mayor frecuencia es el inercial; por lo tanto en muy pocas oportunidades se explicita la fuerza centrífuga en un Diagrama de Cuerpo Libre, salvo que se decida usar un marco de referencia no inercial.

Para el ejemplo que se acaba de presentar, se puede concluir que:

$$T = m.\frac{v^2}{r}$$

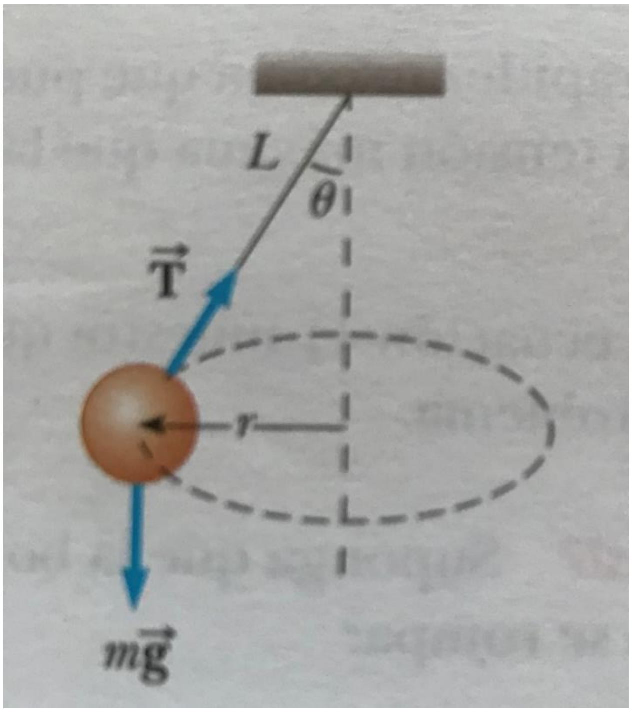
es la Fuerza Centrípeta

representa a la Fuerza Centrífuga

Además, **la fuerza centrípeta** no es una fuerza nueva. Puede ser una **tensión** (como se acaba de mostrar), una fuerza **normal**, una fuerza de **fricción,** etc.; **o las componentes** de alguna de ellas.

Péndulo Cónico:

Se trata de un péndulo simple que se lo saca de su posición de equilibrio hasta un cierto ángulo "**θ**" con respecto a la vertical y luego a la masa "**m**" se le imprime una cierta velocidad "$\vec{v}$" que la invita a girar, describiendo así una trayectoria circular como muestra la figura, iniciando un Movimiento Circular Uniforme.



A este péndulo se lo denomina de esa manera porque el cuerpo geométrico imaginario que describe en su movimiento en revolución alrededor del eje vertical, tiene la forma de un cono.

EJEMPLO 1:

Si los datos para este planteo que se acaba de formular son los siguientes: $\{\boldsymbol{m = 1\ (kg)} \quad \boldsymbol{L = 0,6\ (m)} \quad \boldsymbol{\theta = 30°}$

Se solicita calcular las siguientes incógnitas:

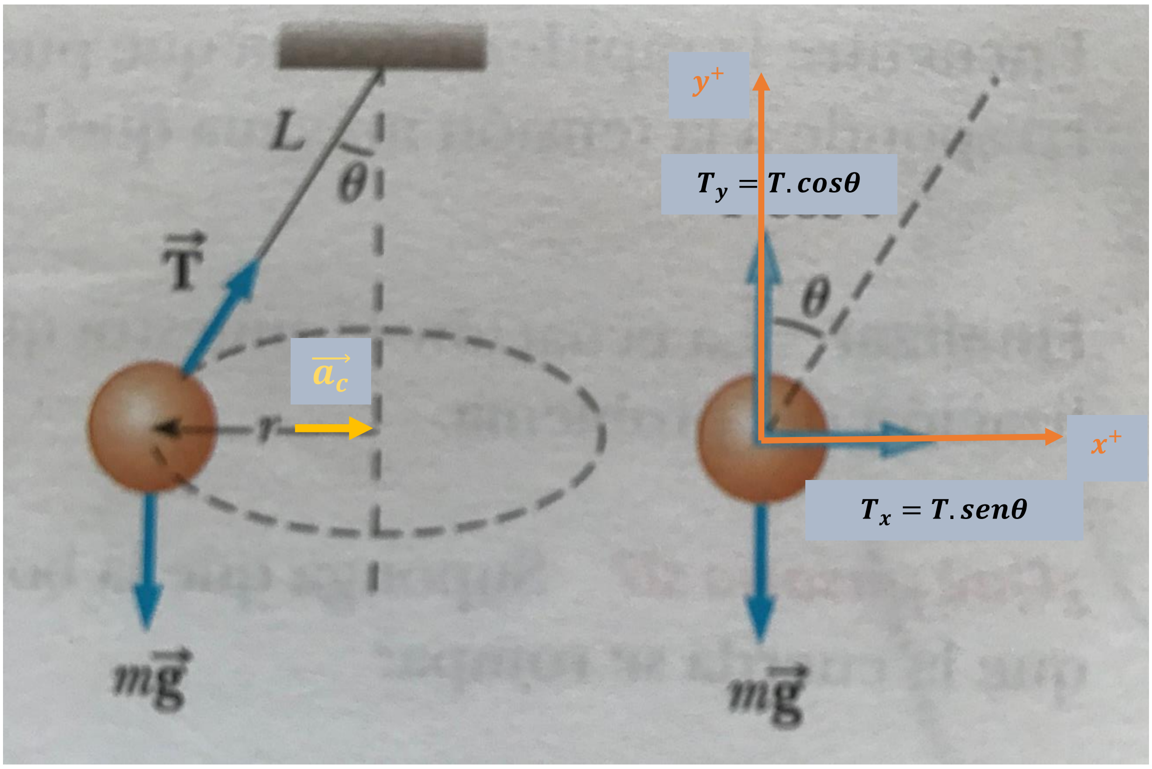
$a)\ \boldsymbol{T} = ?\ \boldsymbol{Tensión\ del\ hilo.}$
$b)\ \boldsymbol{v} = ?\ \boldsymbol{la\ rapidez\ tangencial\ a\ la\ que\ gira\ la\ masa, supuesta\ constante.}$

Entonces si respetamos los pasos de siempre para resolver un problema de Dinámica, tenemos:

PASO 1: Leer el enunciado tantas veces como sea necesario. Entender cómo funciona el dispositivo planteado en el problema. Detectar los datos y las incógnitas.

Esto ya se hizo en la introducción.

PASO 2: Construir el Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) del objeto problema. Para este caso es la masa del péndulo y actúan en ella dos fuerzas: **la tensión del cable** en la dirección del hilo y **el peso** hacia abajo.



PASO 3: Colocar un sistema de referencia para fuerzas.

Es el plano cartesiano "x" e "y" de color anaranjado que se explicita en el D.C.L. y corresponde a un marco de referencia inercial (observador en reposo). Vea además que al eje "x" se lo hace coincidir con la dirección de la aceleración centrípeta…

PASO 4: Plantear la Segunda Ley de Newton para cada eje.

<u>Según el eje "x":</u>

$\sum F_x = m.a_x$

$T_x = m.a_c$ y proyectando la tensión según "x" se obtiene:

$T.sen\theta = m.a_c$

pero a su vez, a la aceleración centrípeta se la puede reemplazar por $a_c = \frac{v^2}{r}$, entonces queda:

$$T.sen\theta = m.\frac{v^2}{r} \qquad \textbf{(1)}$$

<u>Según el eje "y":</u>

$\sum F_y = m.a_y$

$T_y - m.g = m.0 = 0$

la $a_y = 0$ porque la masa no sube ni baja. Es decir que no tiene un movimiento de precesión y es por eso que el segundo miembro de la ecuación se anula. Y proyectando la tensión según "y" se obtiene:

$$T.cos\theta - m.g = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

PASO 5: Resolver matemáticamente las ecuaciones que surgieron del ítem anterior con la intención de despejar las incógnitas del problema. Reemplazar los datos en las expresiones halladas y calcular finalmente los valores de las incógnitas.

De **(2)** despejo la tensión "T":

$T.cos\theta = m.g$

$$\boldsymbol{T = \frac{m.g}{cos\theta}} \qquad \textbf{(3)}$$ y calculando queda:

$T = \frac{1.9,8}{cos30°} = \mathbf{11,3}(\boldsymbol{N})$

Luego, si se reemplaza **(3)** en **(1),** se puede despejar "v":

$\frac{\cancel{m}.g}{cos\theta}.sen\theta = \cancel{m}.\frac{v^2}{r}$

como las masas se cancelan y $tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$, la expresión anterior se convierte en:

$g.tan\theta = \frac{v^2}{r}$

que al despejar la velocidad, se obtiene:

$$\boldsymbol{v = \sqrt{r.g.tan\theta}} \qquad \textbf{(4)}$$

pero como: $sen\theta = \frac{r}{L}$, despejando el radio:

$r = L.sen\theta$ **(5)**

por lo que, reemplazando (5) en (4):

$\boldsymbol{v = \sqrt{L.sen\theta.g.tan\theta}}$ **(6)**

y calculando:

$\boldsymbol{v = \sqrt{0,6.sen30°.9,8.tan30°} = \sqrt{1,69} = 1,3(m/seg)}$

PASO 6: Interpretar en informar los resultados.

Finalmente la tensión y la velocidad valen:

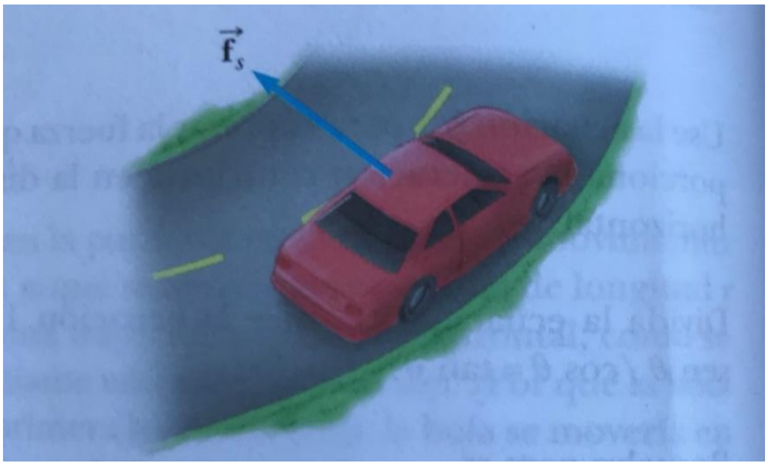
$\boldsymbol{T = 11,3(N)}$
$\boldsymbol{v = 1,3(m/seg)}$

Conclusiones finales:
Observe que conforme el ángulo **θ** aumenta en la ecuación **(3),** el cosθ tiende a cero y eso hace que al disminuir el denominador de la fracción, la tensión aumente muchísimo tendiendo hacia el infinito… También es cierto para este caso que, la velocidad lineal **"v"** amentaría considerablemente!
Otra reflexión interesante es que **la fuerza centrípeta** es **"Tx"**, es decir una componente de la fuerza del cable.

Otros ejemplos interesantes:

EJEMPLO 2:

Un automóvil de masa m=1000 (kg), se traslada sobre una curva plana y horizontal como se muestra en la figura. Si el radio de la curva es r=35 (m) y el coeficiente de fricción estática entre las cubiertas y el pavimento es $\mu_s = 0,5$. Encuentre la rapidez máxima que alcanza el automóvil y aun así da la vuelta exitosamente.

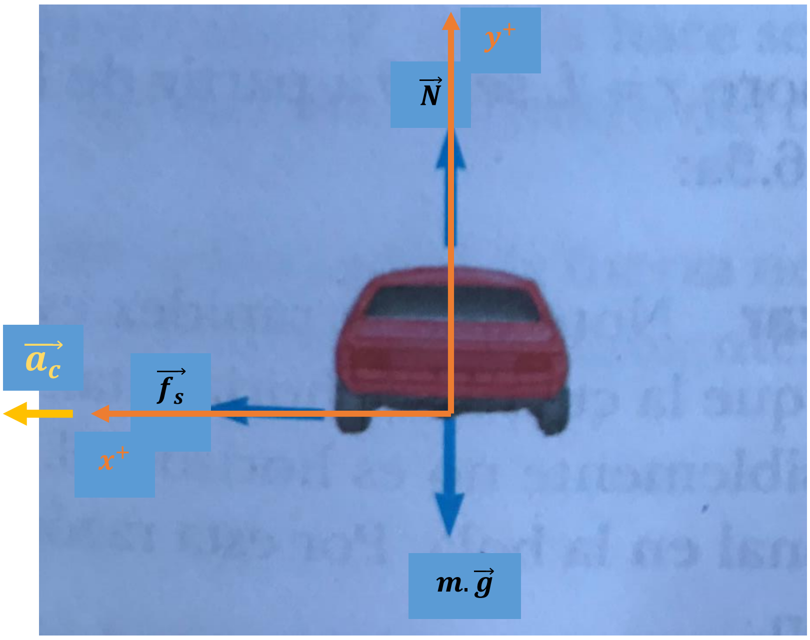


PASO 1: Leer el enunciado tantas veces como sea necesario. Entender cómo funciona el dispositivo planteado en el problema. Detectar los datos y las incógnitas.

Datos:$\{\boldsymbol{m = 1000\ (kg)\ \ r = 35\ (m)\ \ \mu_s = 0,5}$

Inc.: $\{\boldsymbol{v_{máx}} =?\quad \boldsymbol{que\ sucede\ cuando\ la\ fuerza\ de\ fricción\ estática\ es\ máx.}$

PASO 2: Construir el Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) del objeto problema. Para este caso es la masa del vehículo y actúan en ella tres fuerzas: **el peso** hacia abajo, **la normal** perpendicular al piso hacia arriba y **la fuerza de fricción estática máxima** horizontal hacia el centro de la curva.



PASO 3: Colocar un sistema de referencia para fuerzas.
Es el plano cartesiano "x" e "y" de color anaranjado que se explicita en el D.C.L. y corresponde a un marco de referencia inercial (observador en reposo). Vea además que al eje "x" se lo hace coincidir con la dirección de la aceleración centrípeta…

PASO 4: Plantear la Segunda Ley de Newton para cada eje.

<u>Según el eje "x":</u>

$$\sum F_x = m.a_x$$

$$f_s = m.a_c$$

y sabiendo que la fuerza de fricción máxima es igual al coeficiente de fricción por la fuerza normal, queda:

$$\mu_s.N = m.a_c$$

pero a su vez, la aceleración centrípeta se puede reemplazar por $a_c = \frac{v^2}{r}$, entonces:

$$\mu_s . N = m . \frac{v_{máx}^2}{r} \qquad \textbf{(1)}$$

<u>Según el eje "y":</u>

$$\sum F_y = m . a_y$$

$$N - m . g = m . 0 = 0$$

la $a_y = 0$ porque el automóvil no se mueve en esa dirección porque el camino es plano.

Entonces despejando la fuerza normal, se tiene:

$$N = m . g \qquad \textbf{(2)}$$

PASO 5: Resolver matemáticamente las ecuaciones que surgieron del ítem anterior con la intención de despejar las incógnitas del problema. Reemplazar los datos en las expresiones halladas y calcular finalmente los valores de las incógnitas.

Reemplazando **(2)** en **(1)**:

$$\mu_s . \cancel{m} . g = \cancel{m} . \frac{v_{máx}^2}{r}$$ y simplificando las masas de cada miembro:

$$\mu_s . g = \frac{v_{máx}^2}{r} \qquad \textbf{(3)}$$ de donde despejando la velocidad, se obtiene:

$$\boldsymbol{v_{máx} = \sqrt{r . \mu_s . g}} \qquad \textbf{(4)}$$

Entonces, calculando:

$$\boldsymbol{v_{máx} = \sqrt{35.0,5.9,8.} = \sqrt{171,5} = 13,09(m/seg) = 47,1(km/hr)}$$

PASO 6: Interpretar en informar los resultados.

Finalmente la rapidez máxima a la que puede circular el vehículo es:

$$\boldsymbol{v_{máx} = 13,09(m/seg) = 47,1(km/hr)}$$

Conclusiones finales:

Retomando **(4),** observe que conforme el coeficiente de fricción aumenta la rapidez de circulación del vehículo en la curva también puede aumentar. Lo mismo ocurre si se agranda el radio. Un detalle importante es que resultado obtenido **no depende de la masa** del automóvil.

Otra reflexión interesante es que para este ejemplo **la fuerza centrípeta** es $\vec{f_s}$, es decir la fuerza de fricción estática máxima.

EJEMPLO 3:

¿Qué pasaría si?

Suponga que el vehículo viaja por la misma curva en un día húmedo y comienza a derrapar cuando su rapidez alcanza los v´=8 (m/s). ¿Qué puede decir acerca del coeficiente de fricción en este caso?

Respuesta: el coeficiente de fricción estático entre las cubiertas y el camino húmedo debe ser menor que el existente entre las mismas cubiertas y el camino seco. Esto concuerda con la experiencia de conducir, porque un derrape es más probable en un camino húmedo que en un camino seco.

Para comprobar esta sospecha, se puede resolver la ecuación **(3)** despejando el coeficiente de fricción y reemplazando la nueva rapidez máxima **v´**.

$$\mu_s = \frac{v'^2}{g.r} = \frac{(8^2)}{9{,}8.35} = 0{,}18$$

Se puede observar que el coeficiente de fricción estático es mucho más pequeño que 0,5; con lo cual se confirma la suposición realizada al inicio.

Bien, esto es todo por ahora y con estos temas hemos concluido la Unidad 4 de Fundamentos de la Dinámica.

Seguramente con su Profesor de Práctico usted va resolver otros problemas relacionados con este tipo de movimiento.

Le deseo lo mejor con el estudio de la Dinámica del Movimiento Circular y me despido con un hasta pronto!

Ing. Juan Lancioni.

Nota: las imágenes fueron tomadas del libro de Serway_Jewett, e incluso presentan algunos agregados realizados por el profesor.