FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 5: DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

INTRODUCCIÓN – TRABAJO PARA FUERZA CONSTANTE – TRABAJO NETO – TRABAJO PARA FUERZA VARIABLE – TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA – APLICACIONES

(PRIMERA PARTE)

Introducción:

Las leyes de la cinemática y la dinámica permitieron encontrar muchas soluciones a distintos tipos de problemáticas, sin embargo, existen otros casos de igual o mayor complejidad, en donde, utilizando el "METODO DE LA ENERGÍA" se podrán resolver de una manera más rápida y sencilla.

Este nuevo modelo, incluye todo lo estudiado en las unidades anteriores, pero con la intención de ser aplicado de una manera muy rápida y amigable.

El concepto de energía es uno de los temas más importantes en Ciencias e Ingenierías. En la vida cotidiana se piensa en la energía en términos de combustible para trasporte, electricidad para electrodomésticos, y alimentos para consumo. No obstante estas ideas no definen a la energía; sólo dejan ver que los combustibles, por ejemplo, son necesarios para realizar un trabajo y que dichos combustibles proporcionan algo que se llama energía.

Entonces, aunque se tengan experiencias con la energía, como cuando se acaba el combustible de un vehículo o con la pérdida del servicio eléctrico en una vivienda después de una tormenta, la noción de energía es un poco más abstracta que la de velocidad, fuerza, etc.

La energía está presente en el Universo de varias maneras y todo proceso físico que suceda en él involucra energía y trasformaciones energéticas. De ahí que el **Modelo de Conservación de la Energía** sea tan importante. Es este modelo el que queremos describir y lo expresaremos ya por el final de esta unidad temática. El mismo involucrará a los distintos tipos de Energía Mecánica.

Debemos recordar que energía y trabajo son magnitudes escalares con lo cual quedan definidas sencillamente por un número y una unidad.

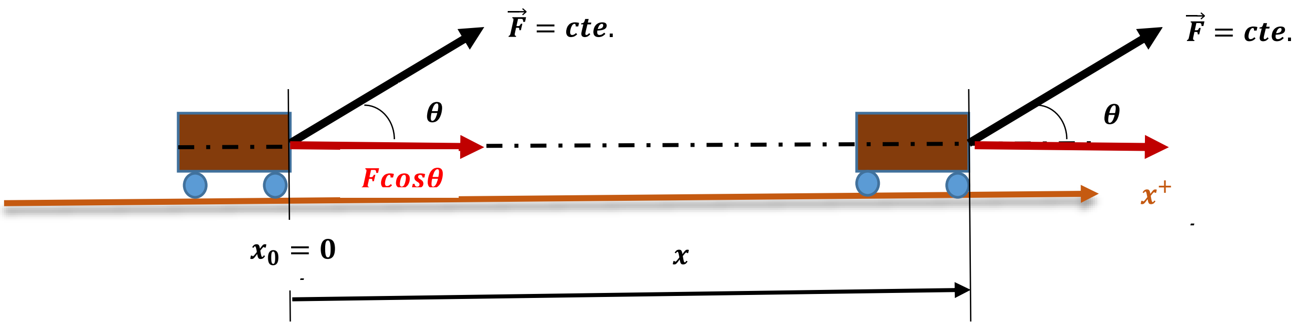
En el Sistema Internacional el trabajo y la energía se miden en Joule= (J). Esto se repasó en la primera unidad del material de Física del Cursillo de Ingreso a la UTN y ahora daremos más detalles al respecto.

Entonces a partir de esta información previa se deduce que:

Trabajo es sinónimo de Energía y viceversa

Trabajo para una Fuerza Constante ($\vec{F} = cte.$):

Si sobre un objeto de masa **“m”** actúa una fuerza supuesta constante ($\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{cte.}$) que forma un cierto ángulo $\boldsymbol{\theta}$ con respecto a la horizontal (como indica la siguiente figura) y logra desplazarlo un cierto valor **“x”**, se dice que esa fuerza produce un trabajo en el sistema que se calcula como: la fuerza en la dirección del desplazamiento ($Fcos\theta$), por el desplazamiento (x), a saber:

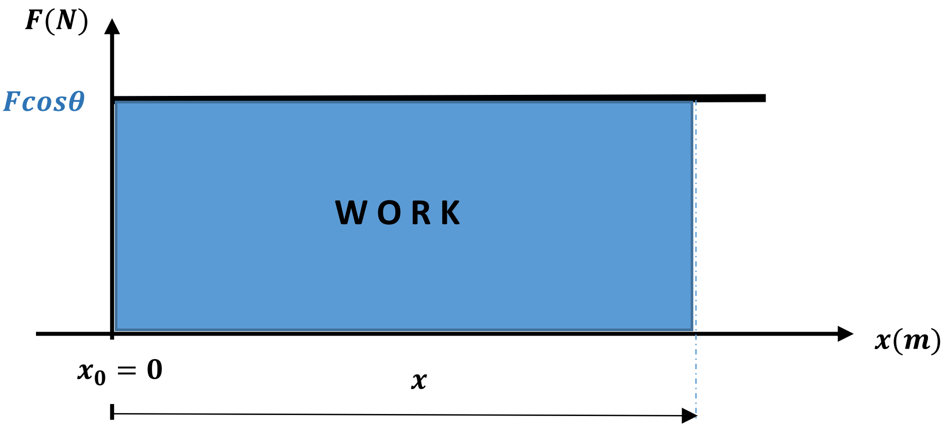


$$W = fuerza\ en\ la\ dirección\ del\ desplazamiento\ x\ el\ desplazmiento$$

$$\boldsymbol{W = (Fcos\theta).x \quad (N).(m) = (Joule) = (J)} \quad \textbf{(1)}$$

Entonces la fórmula **(1)** nos permite calcular ese trabajo, que también puede ser interpretado como la energía que se gastó para trasladar el objeto desde un punto a otro.

Si nos disponemos a graficar en un plano cartesiano: **fuerza** en ordenada, expresada en Newton y **desplazamiento** en abscisa, indicado en metros, la curva que se obtiene es una recta de pendiente nula como la que se muestra a continuación:



Entonces se observa que el área debajo de la recta, representa el trabajo realizado sobre el objeto y corresponde concretamente a la superficie del rectángulo sombreado en celeste, que es muy fácil de calcular:

$$W = \acute{A}rea\ del\ rect\acute{a}ngulo = \ base\ x\ altura = x.Fcos\theta$$

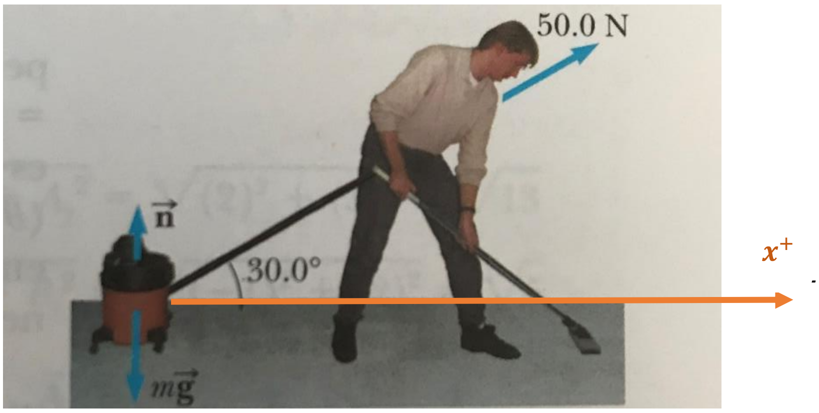
y como el orden de los factores no altera el producto, esta última expresión es idéntica a la que se propuso más arriba, es decir:

$$\boldsymbol{W = (Fcos\theta).x}$$

que representa a la fórmula **(1)**!!!

EJEMPLO 1:

Un señor que limpia el piso tira una máquina de aspirar con una fuerza **F=50 (N)** con un ángulo $\boldsymbol{\theta = 30°}$ con la horizontal. Calcule el trabajo realizado por la fuerza "F" sobre la aspiradora cuando ésta logra desplazarse un **x=3 (m)**.



Si tomamos un eje "x" horizontal y positivo hacia la derecha, observamos que el trabajo puede calcularse como:

$$W = (Fcos\theta).x = (50.cos30°).3 \cong 130\ (N.m) \cong 130\ (J)$$

y el problema queda resuelto fácilmente.

Trabajo Neto o Total:

Cuando sobre un objeto actúan varias fuerzas, cada una de ellas produce un trabajo en el sistema, por lo tanto si los sumamos a todos, se obtiene el trabajo neto o total.

Veamos este otro caso:

EJEMPLO 2:

Se desea trasladar un bloque de masa **"m"** una cierta distancia **"x"** arrastrado por una fuerza **"$\vec{F}$"** horizontal ($\theta = 0°$). No obstante como la superficie de contacto es rugosa, existe una fuerza de fricción cinética **"$\vec{f_k}$"** entre el cuerpo y el piso que se opone al movimiento. Para poder calcularla se sabe que el coeficiente de fricción es **"μ_k"**. Se deduce además que también actúan dos fuerzas más, que son el peso **"$\vec{P}$"** y la normal **"$\vec{N}$"**.

Entonces se pregunta: **¿Cuál es el trabajo total que actúa sobre el bloque?**

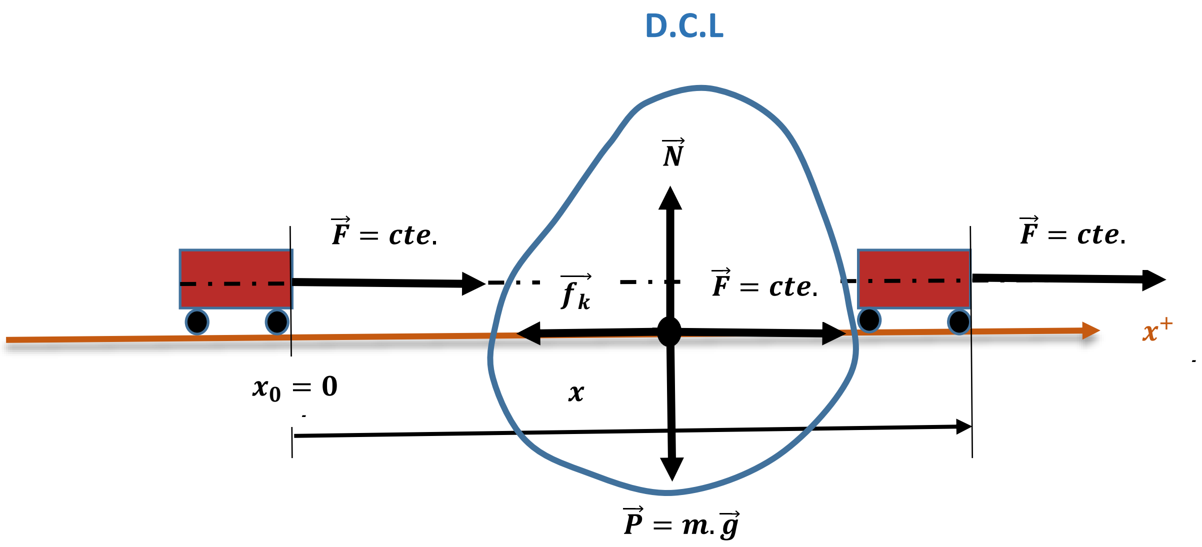
La respuesta es:

$$W_{total} = W_F + W_N + W_{f_k} + W_P \qquad \textbf{(2)}$$

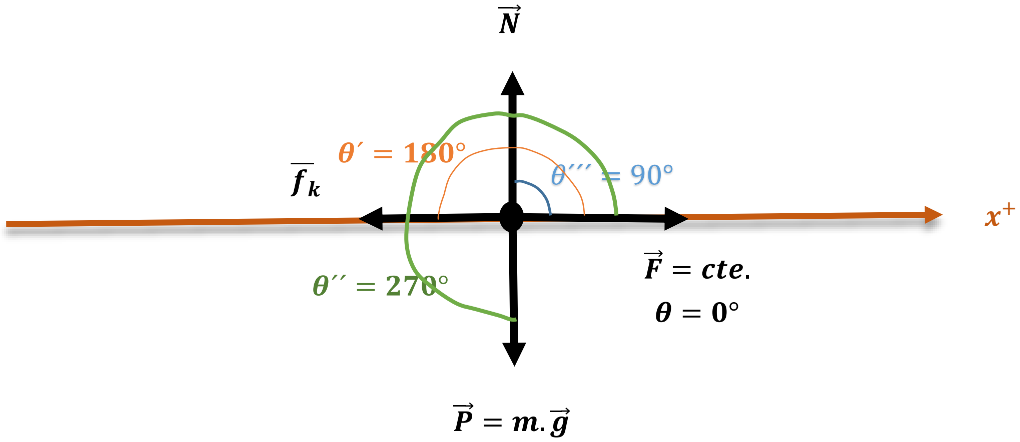
Entonces debemos calcular por separado cada uno de esos trabajos con la fórmula **(1)** ya que estas cuatro fuerzas son todas constantes.

Si observamos la siguiente figura y el diagrama de cuerpo libre del bloque, con las distintas orientaciones de cada una de las fuerzas con respecto a la dirección del desplazamiento, fácilmente lograremos este objetivo.

Entonces:



Dando más detalle del **D.C.L.** y los ángulos, se tiene:



Para la fuerza $\vec{F}$:

como la misma coincide con la dirección de movimiento el ángulo es $\boldsymbol{\theta = 0°}$, por lo tanto,

$W_F = (Fcos\theta).x = (F.\cos 0°).x = F.1.x = +\boldsymbol{Fx}\ (\boldsymbol{J})$ es positivo, entonces, se puede considerar que es la energía inyectada o proporcionada al sistema.

Para la fuerza $\vec{N}$:

Como es perpendicular al piso y el ángulo que forma respecto a la dirección del movimiento es $\boldsymbol{\theta''' = 90°}$,

$W_N = (Ncos\theta''').x = (N.\cos 90°).x = N.0.x = \boldsymbol{0}\ (\boldsymbol{J})$ y no produce trabajo!

Para la fuerza $\overrightarrow{f_k}$:

Como se opone al movimiento y el ángulo que forma con respecto a la dirección de desplazamiento es $\boldsymbol{\theta' = 180°}$,

$W_{f_k} = (f_k cos\theta').x = (f_k.\cos 180°).x = f_k.(-1).x = -\mu_k.N.x = -\boldsymbol{\mu_k.mg.x}\ (\boldsymbol{J})$ es negativo, por lo tanto, es la energía liberada o disipada al medio por: calor, ruido, vibraciones, etc.

Para la fuerza $\vec{P}$:

Como es perpendicular al piso y hacia abajo, el ángulo que forma respecto a la dirección del movimiento es $\boldsymbol{\theta'' = 270°}$,

$W_P = (Pcos\theta'').x = (mg.\cos 270°).x = mg.0.x = \boldsymbol{0}\ (\boldsymbol{J})$ y no produce trabajo!

Entonces retomado **(2)** se puede calcular el trabajo total reemplazando en ella cada uno de estos cálculos:

$$W_{total} = W_F + W_N + W_{f_k} + W_P$$

$$W_{total} = +Fx + 0 + (-\mu_k . mg . x) + 0$$

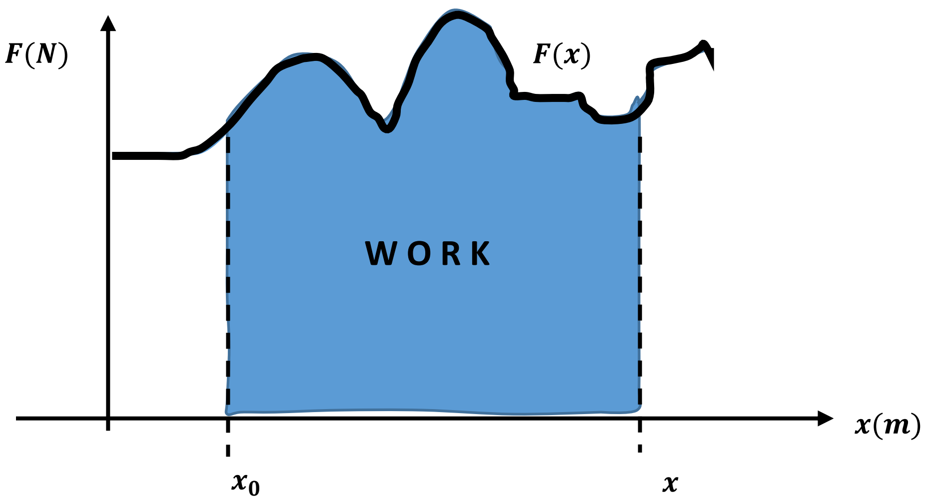
$$\boldsymbol{W_{total} = Fx - \mu_k . mg . x}$$

Algunas conclusiones interesantes:

- El trabajo de una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento es siempre nulo porque el coseno de cero grados y de doscientos setenta grados, siempre son nulos.
- Si el primer término de la última expresión es más grande que el segundo, es mayor la energía inyectada que la liberada, entonces el bloque se acelera hacia la derecha.
- Si el primer término es igual que el segundo, la energía inyectada es igual a la energía liberada, por lo tanto el bloque se mueve en M.R.U.
- Si por el contrario, el segundo término es más grande que el primero, la energía disipada es mayor a la inyectada y el bloque se está desacelerando con una aceleración contraria al movimiento, es decir hacia la izquierda.

Trabajo para una Fuerza Variable ($\vec{F}(x) = var.$):

Si la fuerza que produce el desplazamiento del objeto varía con el tiempo o lo que es lo mismo con la posición, es decir, $\vec{F}(x) = var$, se genera un movimiento más complejo de aceleración variable $\vec{a}(x) = var$, no obstante, igualmente se puede calcular el trabajo como el área debajo de la curva F(x) para un cierto intervalo matemático cerrado $[x_0; x]$ de la siguiente manera:



$$W = \int_{x_0}^{x} F(x) . dx \quad (J) \qquad \textbf{(3)}$$

y la fórmula **(3)** se lee así:

el trabajo para una fuerza variable es la integral entre "x_0" y "x" de F(x) por un diferencial de x.

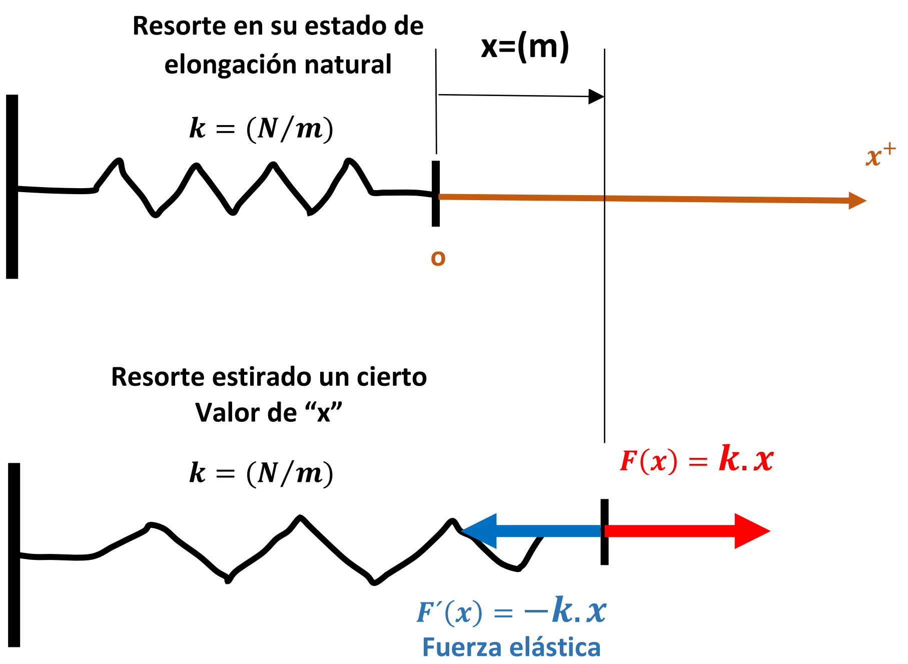
Seguramente en Análisis Matemático usted estará estudiando a esta altura del año límites y derivadas y, más adelante verá el cálculo de integrales e integrales definidas.

Precisamente, una integral definida como se indica en la fórmula **(3)**, representa geométricamente el área debajo de la curva en el intervalo de estudio.

Como usted todavía no maneja estos conceptos matemáticos, se recurrirá por ahora a situaciones problemáticas bastantes sencillas en donde el área debajo de la curva sea una figura geométrica sencilla y fácil de calcular… entonces veamos este otro ejemplo para poder ilustrar lo comentado en este último párrafo:

<u>EJEMPLO 3:</u>

Calcule el trabajo realizado por una fuerza externa **F(X)** aplicada a un resorte ideal cuando ella logra deformarlo un cierto valor de **"x"**.

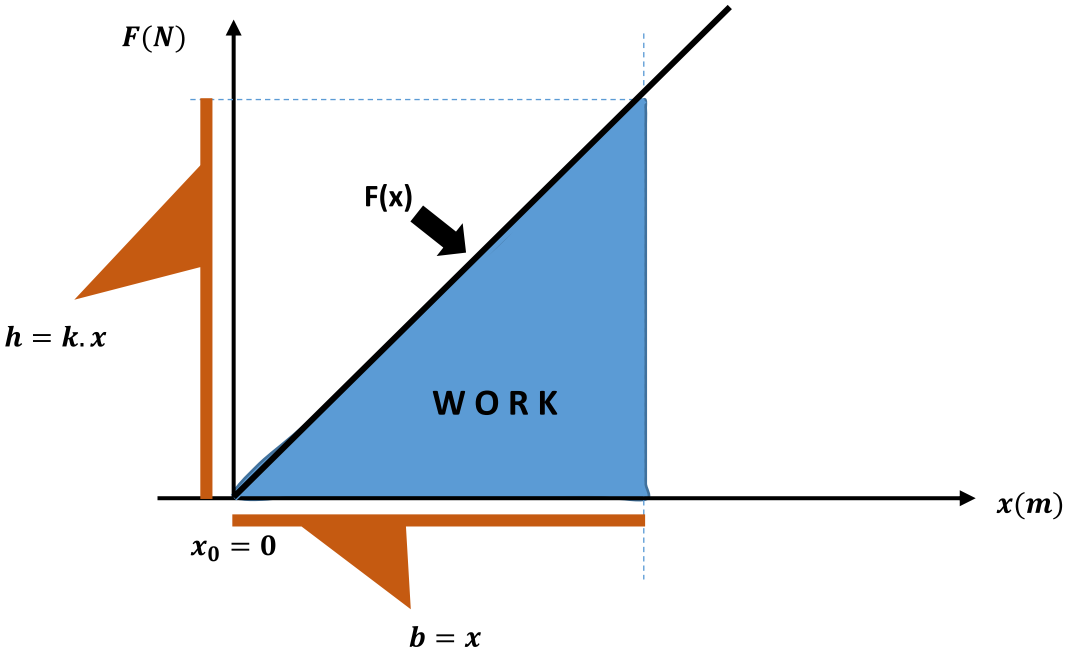


Se sabe que la fuerza de restitución de un resorte es: $F'(x) = -k.x$ por la **Ley de Elasticidad**.
Donde:

- "x" es la deformación del resorte expresada en (m)
- "k" es la constante de rigidez del resorte que se mide en (N/m)

Entonces la fuerza externa F(x) siendo igual y opuesta a F´(x) (por la Tercera Ley de Newton), se calcula como: $\boldsymbol{F(x) = k.x}$ con signo positivo y a favor del eje de abscisa positivo hacia la derecha.

Al graficar esta función **F(x)**, en donde en el eje de ordenada se representa a la fuerza en (N) y en el eje de abscisa la deformación en (m), se obtiene:



Por la fórmula **(3)**, hacer el cálculo de una integral sería por ahora una verdadera limitación; pero momentáneamente podemos recurrir a la geometría recordando que el área de un triángulo se calcula como su base por altura dividido todo por dos. Entonces a través del concepto de que el área debajo de la curva de F(x) en el intervalo $[x_0; x]$ representa al trabajo "W", se obtiene:

$$W = \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{b.h}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{x.kx}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{k.x^2}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}.\boldsymbol{k.x^2}$$

que habitualmente se conoce como la **Energía Potencial Elástica** almacenada por un resorte y se la denota de ahora en más como:

$$\boldsymbol{U_e = \frac{1}{2}.k.x^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Haciendo el análisis de unidades debe dar (J), veamos:

$$\left(\frac{N}{m}\right).(m^2) = (N).(m) = (J)$$

De esta forma el cálculo se realizó de una manera bastante sencilla!

Teorema del Trabajo y la Energía Cinética (T.T.K.) para una Fuerza supuesta constante:

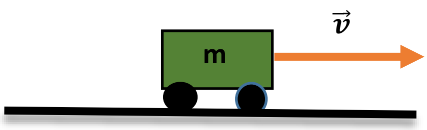
Tal vez esta es una de las primeras leyes simplificadoras de esta Unidad Temática…

Del trabajo ya hemos hablado, pero **¿quién es la Energía Cinética?**

La Energía Cinética es la que tiene un objeto de masa **"m"** cuando se mueva a una cierta rapidez **"v"**. Se llama también energía del movimiento.

Por definición, la energía cinética se la calcula como:

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2}.m.v^2} \qquad \textbf{(5)}$$

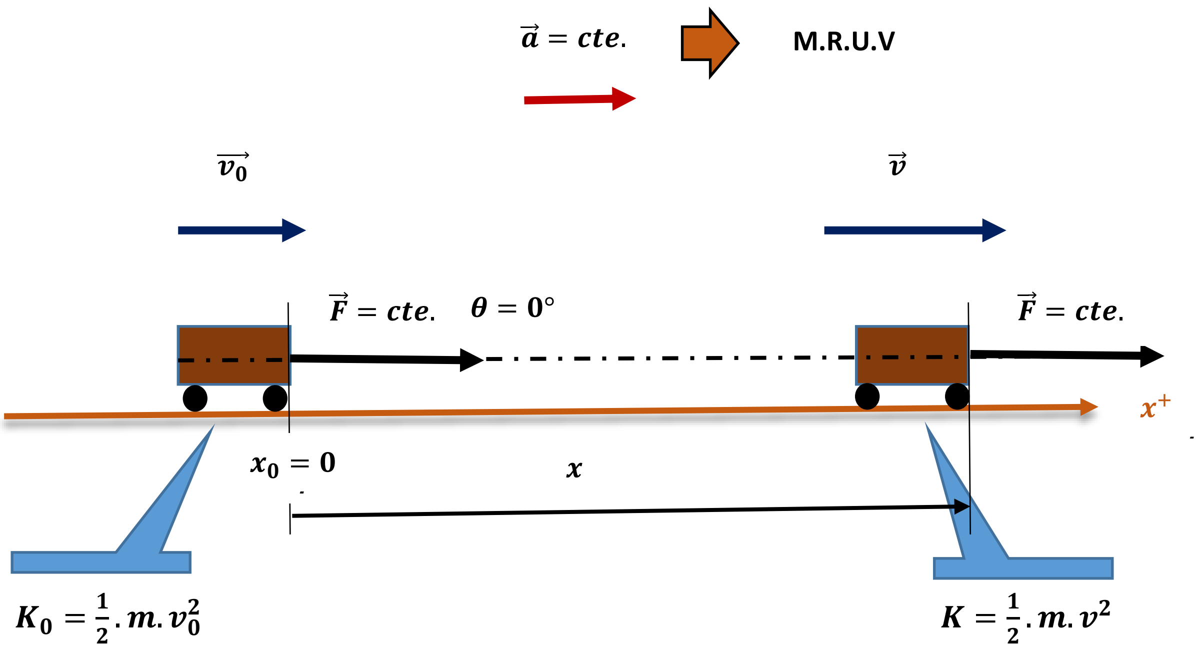


y al hacer el análisis dimensional, se tiene:

$$(kg).\left(\frac{m}{s}\right)^2 = (kg).\frac{(m.m)}{(s^2)} = \left(kg.\frac{m}{s^2}\right).(m) = (N).(m) = (J)$$

Retomando la idea del teorema del Trabajo y la Energía Cinética, vamos a suponer ahora que disponemos de un carrito de masa **"m"** que para un estadio inicial $(\boldsymbol{t_0 = 0})$ se encuentra con una velocidad inicial $\vec{v_0}$ y que para otro instante $(\boldsymbol{t})$ estará a una velocidad final $\vec{v}$, de módulo $v > v_0$. En el intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_0$ actúa una fuerza constante $\vec{F} = cte.$ horizontal a favor del eje "x" positivo hacia la derecha, que acelera al carrito de manera también constante $(\vec{a} = cte.)$, por lo tanto estamos en presencia de un **M.R.U.V.** Bajo estas condiciones y observando el siguiente esquema, lo que se debe demostrar es que el trabajo realizado sobre el objeto para moverlo un cierto **"x"**, es igual a la variación de la Energía Cinética:

$$\boldsymbol{W = \Delta K = K - K_0 = \frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{1}{2}.m.v_0^2} \qquad \textbf{(6)} \qquad \text{que es el T.T.K.!!!}$$



Veamos la siguiente demostración mediante formulaciones matemáticas:

+ Si partimos de (1), es decir la definición del trabajo para una fuerza constante, tenemos:

$$W = (F cos\theta).x$$

pero como: $\theta = 0^{\circ}$

$$W = (F cos 0^{\circ}).x = F.x \qquad \textbf{(A)}$$

+ Por la Segunda Ley de Newton escrita de manera escalar y según el eje "x" positivo hacia la derecha:

$$\sum F_x = m.a_x$$

que adaptada queda:

$$F = m.a \qquad \textbf{(B)}$$

+ Si reemplazamos (B) en (A), queda:

$$W = m.a.x \qquad \textbf{(C)}$$

+ Por el M.R.U.V. se sabe que:

$$v^2 = v_0^2 + 2a.(x - x_0)$$

en donde, para el sistema de referencia tomado en el esquema se observa que: $x_0 = 0$ y si despejamos "x", se tiene:

$$x = \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2.a}\right) \qquad \textbf{(D)}$$

+ Al reemplazar (D) en (C):

$$W = m.a.\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2.a}\right)$$

y cancelando las aceleraciones, se llega a:

$$W = m.\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2}\right)$$

finalmente, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma/resta, se obtiene:

$$W = \frac{m.v^2 - m.v_0^2}{2} = \frac{m.v^2}{2} - \frac{m.v_0^2}{2} = \frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{1}{2}.m.v_0^2 = K - K_0 = \Delta K$$

y siendo que: $\boldsymbol{W = \Delta K}$

queda demostrada la fórmula **(6)**!!!

Conclusión:

Entonces con solo saber la masa **"m"** del carrito y su rapidez inicial **"v_0"** y final **"v"**, se puede calcular rápidamente la energía gastada o el trabajo realizado en el sistema para trasladar dicho dispositivo un cierto valor **"x"**. Con ello se prescinde saber el valor de la fuerza **"F"** aplicada, la aceleración **"a"** supuesta constante, el tiempo trascurrido **"t"**, etc. Ya se comienza entonces a apreciar la ventaja del Método de la Energía.

Ahora, si recuperamos el esquema anterior, pero la fuerza aplicada es variable, es decir una **F(x)=var.**, la pregunta es:

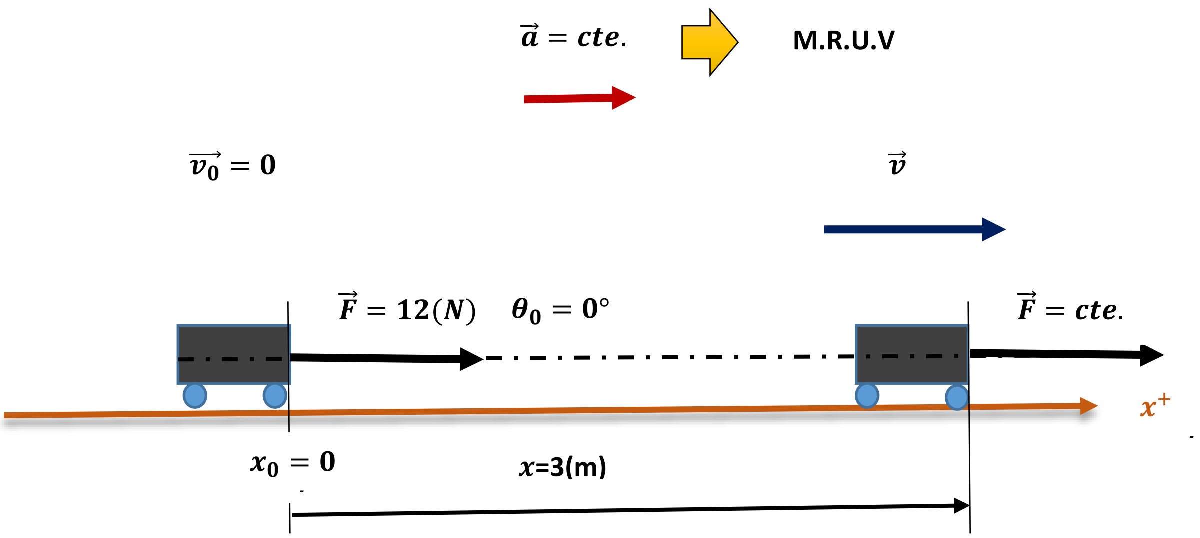
¿Se cumple en este caso el Teorema de Trabajo y la Energía Cinética?

La respuesta es: **Si**, por lo tanto nuevamente: $\boldsymbol{W = \Delta K}$

Para sostener que esta afirmación es correcta se debería hacer su demostración mediante formulaciones matemáticas, tal cual se trabajó para el caso de **F=cte**. Pero, para ello, necesitamos saber calcular integrales definidas…por lo tanto quedará para otra oportunidad, es decir, para cuando usted avance lo suficiente con el curso de Análisis Matemático I y aborde este tema.

EJEMPLO 4:

Un carrito de masa **m=6(kg)** se tira hacia la derecha con una fuerza constante **F=12(N**). Suponiendo que no hay fricción, calcule la rapidez del carrito después que se movió un **x=3(m**) habiendo partido del reposo ($\boldsymbol{v_0 = 0}$).



Por **(1)** se sabe que:

$W = (F.cos\theta).x$ y calculando:

$W = (12.cos0^{\circ}).3 = \mathbf{36(J)}$

Con **(6)**:

$W = \frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{1}{2}.m.v_0^2$

pero, como: $v_0 = 0$, el segundo término se anula y el trabajo se calcula así:

$W = \frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{1}{2}.m.0 = \frac{1}{2}.m.v^2$

o sea:

$W = \frac{1}{2}.m.v^2$

Como de esta última expresión la única incógnita es la rapidez **"v"** porque al trabajo ya se lo calculó más arriba, se la despeja y queda:

$2.W = m.v^2$

$v^2 = \frac{2.W}{m}$

$v = \sqrt{\frac{2.W}{m}}$ en donde calculando se obtiene:

$v = \sqrt{\frac{2.36}{6}} = \sqrt{12} = \mathbf{3,5(m/s)}$

y el problema queda resuelto!!!

Nos vemos la próxima en donde seguiremos avanzando con nuevos temas para llegar finalmente al modelo físico-matemático de la Conservación de la Energía Mecánica.

Me despido con un hasta pronto!!!

Atte.

Ing. Juan Lancioni.

Nota: la imagen del problema de la aspiradora fue tomada del libro de Serway_Jewett, e incluso presenta algunos agregados; el resto de las ilustraciones y los gráficos fueron realizados por el profesor.