FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 10: ELASTICIDAD

ESFUERZOS INTERIORES, TENSIÓN – DEFORMACIÓN ELÁSTICA Y NO ELÁSTICA – LÍMITE DE ELASTICIDAD – MÓDULO DE YOUNG – TRACCIÓN, CONTRACCIÓN LATERAL, COEFICIENTE DE POISSON – COMPRESIBILIDAD. FLEXIÓN PLANA.

(ESTA UNIDAD ES DE AUTOPREPARACIÓN POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES)

UNIDAD 11: MOVIMIENTO OSCILATORIO

INTRODUCCIÓN – M.A.S. – PLANTEO DINÁMICO – SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO – FUNCIONES: x(t), v(t) y a(t) – FRECUENCIA ANGULAR Y PERÍODO – CÁLCULO DE LA AMPLITUD Y LA CONSTANTE DE FASE EN FUNCIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES: $\boldsymbol{x_o}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{v_o}}$ – PLANTEO ENERGÉTICO.

Introducción:

En un movimiento periódico el objeto en estudio regresa regularmente a una posición conocida en un intervalo de tiempo fijo. De hecho, existen muchos de estos movimientos desde la cotidianeidad… tal es el caso del automóvil de una persona que regresa a cada tarde al mismo camino, luego de una jornada de trabajo; usted que se dirige a cada noche a la mesa del comedor de su casa para cenar; un frasco de leche que lo toma de la heladera, lo utiliza y luego lo regresa a ella; etc.

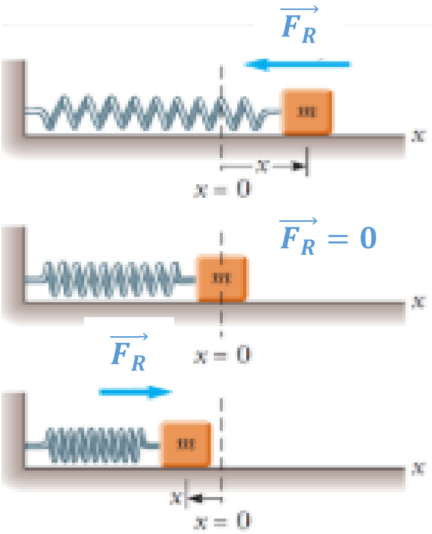
Además de estos ejemplos cotidianos, muchos otros exhiben un movimiento periódico. Las moléculas de un sólido por ejemplo, oscilan en torno a sus posiciones de equilibrio; las ondas electromagnéticas, como las ondas de luz, de radio, radar, rayos x, se caracterizan por campos eléctricos y magnéticos oscilantes; los circuitos eléctricos de corriente alterna; etc.

Ahora, pensando en la física de Newton, movimientos periódicos pueden ser por ejemplo: un péndulo simple; un péndulo de torsión; un sistema masa-resorte; etc.

En estos tres últimos sistemas mecánicos mencionados, como la fuerza que actúa sobre cada objeto es proporcional en relación a la posición de equilibrio y siempre se dirige o apunta hacia dicha posición, ese movimiento se denomina: **Movimiento Armónico Simple** y se denota como **M.A.S.**

Movimiento Armónico Simple: Sistema Masa - Resorte:

Este modelo considera a un carrito de masa **“m”** moviéndose sobre una **superficie plana sin fricción** que se encuentra unido a un resorte ideal de constante elástica **“k”**, que a su vez está amurado a una pared como se muestra en la siguiente figura.



Para el carrito unido a un resorte sobre una superficie sin fricción. **a)** Cuando el carrito se desplaza hacia la derecha del equilibrio $x > 0$, la fuerza que ejerce el resorte actúa hacia la izquierda. **b)** Cuando el carrito está en la posición de equilibrio $x = 0$, la fuerza que ejerce el resorte es cero. **c)** Cuando el carrito se desplaza hacia la izquierda del equilibrio $x < 0$, la fuerza que ejerce el resorte actúa hacia la derecha (Ver figura).

Recuerde que **la Fuerza de Restitución** del resorte se calcula como: $F_R = -k.x$ **.** Esta ley, tal como la hemos visto, se la conoce también como **Ley de Hooke.**

donde:

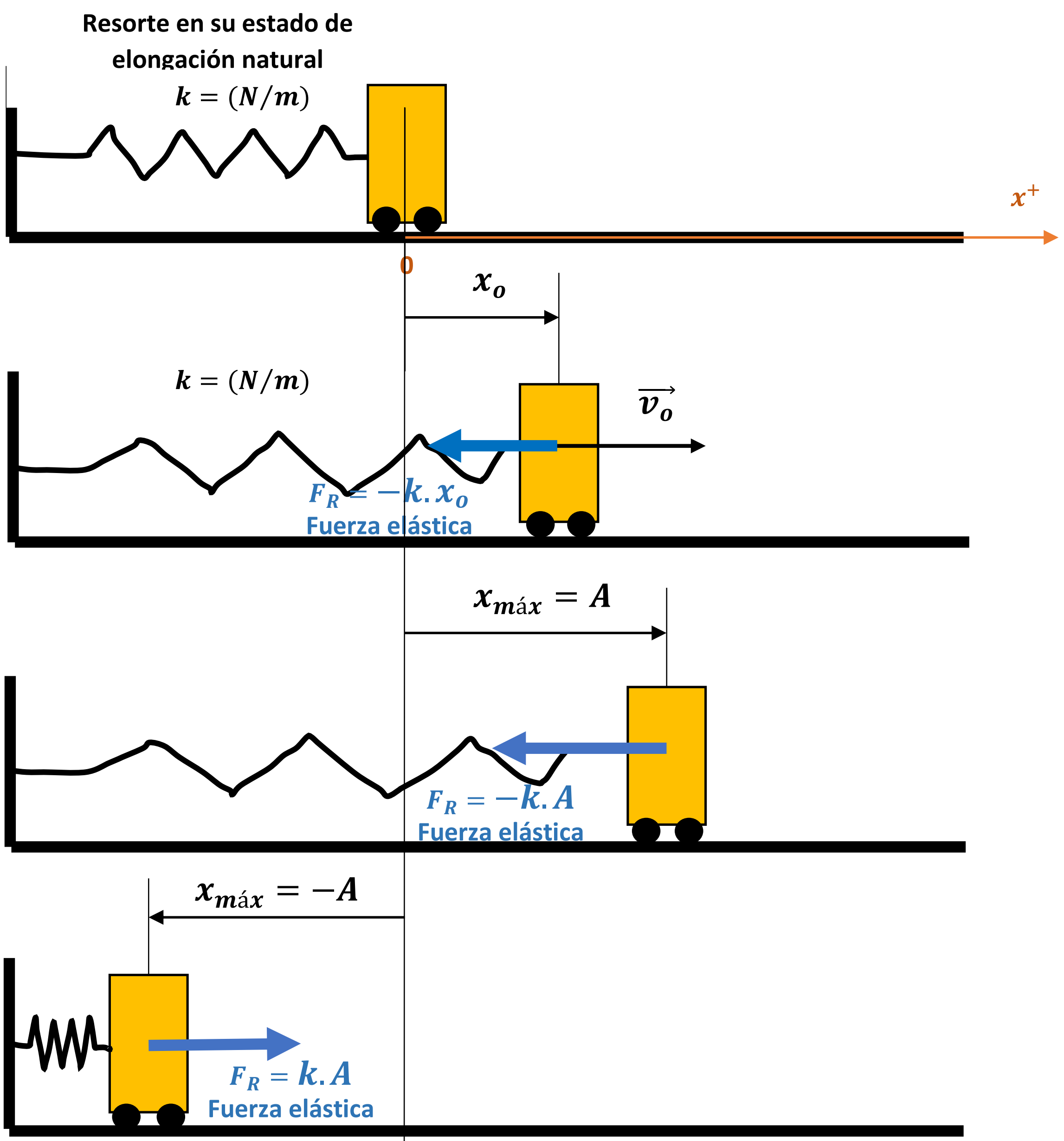
$* \; \boldsymbol{k} = constante\ elástica\ del\ resorte\ y\ se\ mide\ en\ (\boldsymbol{N/m})$
$* \; \boldsymbol{x} = deformación\ del\ resorte\ y\ está\ expresada\ en\ (\boldsymbol{m})$
$* \; \boldsymbol{el\ signo}\ (-)\ indica\ que,\ al\ ser\ una\ \boldsymbol{fuerza\ de\ restitución},\ ella\ apunta\ siempre\ en\ sentido\ contrario\ a\ la\ deformación$

Cuando el resorte no está ni estirado ni comprimido se dice que el carrito se encuentra en reposo, en una posición denominada “posición de equilibrio”, que se denota como x=0. Se sabe por la experiencia de que si el carrito se saca desde su posición de equilibrio, el sistema comenzará a oscilar para adelante y para atrás.

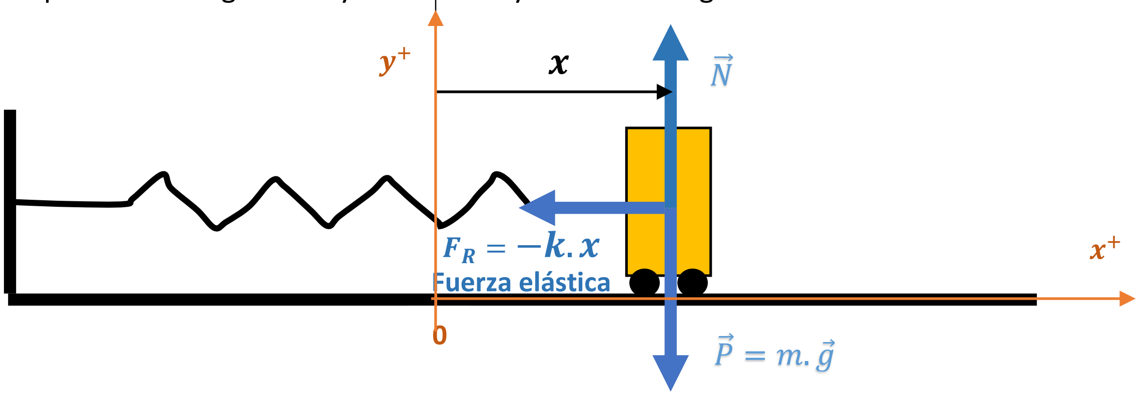
Entonces, si para un instante inicial t_o nos proponemos estirar el resorte solidariamente al carrito un valor x_o y a su vez le damos un tincazo hacia la derecha y le conferimos una cierta velocidad inicial $\vec{v_o}$, el sistema iniciará un **M.A.S.** De esta forma se llega a deformar al resorte hasta un valor máximo denominado Amplitud, $x_{máx} = A$. Esa amplitud se mide en metros y será positiva cuando el carrito se encuentra hacia la derecha del punto de equilibrio (+A) y será negativa cuando el carrito se posiciona a igual distancia, pero hacia la izquierda de la posición de equilibrio (- A).

De ahora en adelante a las perturbaciones dadas al carrito: x_o y $\vec{v_o}$ se las denominarán **condiciones iniciales**.

Esquemáticamente:



Lo cierto es que, **para una posición genérica "x"**, si realizamos un **Diagrama de Cuerpo Libre** del carrito y colocamos un sistema de referencia x^+ positivo hacia la derecha, podemos plantear la Segunda Ley de Newton y escribir las siguientes ecuaciones:



$$\sum F_x = m.a(x)$$

$$-k.x = m.a(x)$$

$$\sum F_y = m.a_y = m.0 = 0$$

$$N - mg = 0 \qquad es\ decir, \qquad N = mg$$

Como la aceleración es variable con cada posición **"x"** debido a que la Fuerza de Restitución también lo es, la $a(x)$ se puede escribir, de acuerdo a la definición de aceleración instantánea, como:

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^{\,2}x}{dt^2}$$

y reemplazándola en la ecuación de arriba, queda:

$$-k.x = m.\frac{d^{\,2}x}{dt^2}$$

entonces, operando matemáticamente se obtiene:

$$m.\frac{d^{\,2}x}{dt^2} + k.x = 0$$

y dividiendo en ambos miembros por la masa:

$$\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}.\frac{d^{\,2}x}{dt^2} + \frac{k}{m}.x = 0$$

y cancelando las masas, se llega a:

$$\frac{d^{\,2}x}{dt^2} + \frac{k}{m}.x = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

En donde a **(1)**, se la denomina **Ecuación Diferencial del Movimiento** y tiene por solución:

$$x = A.\cos(\omega.t + \varphi) \qquad \textbf{(2)}$$

que corresponde a la función posición del carrito con respeto del tiempo, en donde:

$* \, A = amplitud\ y\ se\ mide\ en\ (m)$
$* \, \omega = frecuencia\ angular\ y\ está\ expresada\ en\ (rad/seg)$
$* \, \varphi = constante\ de\ fase\ y\ tiene\ por\ unidad\ al\ (rad)$

Habida cuenta que ω y φ son constantes, si derivamos con respecto al tiempo la función **(2)**, se puede obtener la velocidad del carrito en cualquier instante **"t"**, a saber:

$v = \frac{dx}{dt} = A.(-\omega.sen(\omega t + \varphi))$, recordando que, si: $y = \cos(u)$; $y' = -u' \cdot sen(u)$

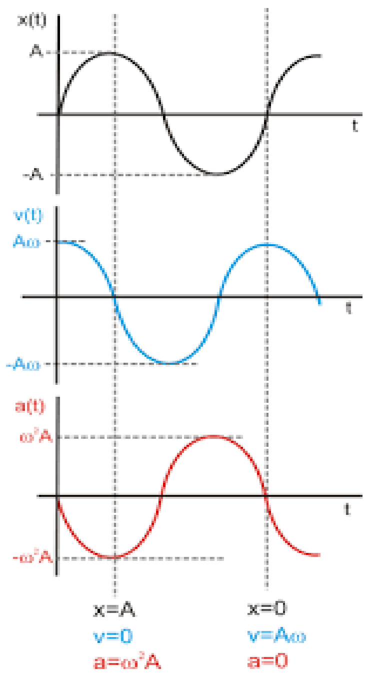
$$v = -A.\omega.sen(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(3)}$$

Derivando nuevamente respecto al tiempo **(3)**, y recordando que, si: $y = \text{sen}(u)$; $y' = u' \cdot cos(u)$, se obtiene la aceración del carrito en función del tiempo, a saber:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^{\,2}x}{dt^2} = -A.\omega.(\omega.\cos(\omega t + \varphi))\text{, o sea:}$$

$$\boldsymbol{a = -A.\omega^2.\cos(\omega t + \varphi)} \qquad \textbf{(4)}$$

Si graficamos matemáticamente las funciones: posición **(2)**, velocidad **(3)** y aceleración **(4)**, en función del tiempo, de manera encolumnada, se tiene:



Es cierto que las fórmulas **(2)**, **(3)** y **(4)** resuelven por completo al **Movimiento Rectilíneo Variado**, porque para cada instante de tiempo **"t"** se puede saber la posición, la velocidad y la aceleración del carrito. No obstante, ahora nos debemos concentrar en averiguar cuánto valen: $\boldsymbol{\omega}$**,** **A** y $\boldsymbol{\varphi}$**.**

Para ello, recordemos que contamos de antemano con los siguientes datos: $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x_o}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{v_o}}$

Cálculo de "ω":

Si reemplazamos **(4)** y **(2)**, en **(1)**:

$$\frac{d^{\,2}x}{dt^2} + \frac{k}{m}.x = 0$$

$$-A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m} \cdot A \cdot \cos(\omega.t + \varphi) = 0$$

y operando matemáticamente con la intención de despejar "$\boldsymbol{\omega}$**",** se tiene:

$$-\cancel{A} \cdot \omega^2 \cancel{\cdot \cos(\omega t + \varphi)} + \frac{k}{m} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{\cos(\omega.t + \varphi)} = 0$$

$$-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad \textbf{(5)}$$

Y esto ya es un gran paso!

Se observa que la frecuencia angular es una verdadera constante porque depende de $\boldsymbol{m}$ **y** $\boldsymbol{k}$, que también son constantes… entonces, independientemente de cómo se perturbe al sistema, $\boldsymbol{\omega}$ tiene siempre el mismo valor!

Cálculo de "A":

Si hacemos el tiempo **"t"** igual a cero en **(2)** y **(3)** respectivamente, se obtiene:

(2) $x = A.\cos(\omega.t + \varphi)$ $\qquad$ $x_o = A.\cos(\omega.0 + \varphi) = A.cos\varphi$

$x_o = A.cos\varphi$ $\qquad$ y despejando $\boldsymbol{cos\varphi}$, se obtiene:

$$\boldsymbol{cos\varphi = \frac{x_o}{A}} \qquad \textbf{(6)}$$

(3) $v = -A.\omega.sen(\omega t + \varphi)$ $\qquad$ $v_o = -A.\omega.sen(\omega \cdot 0 + \varphi) = -A.\omega.sen\varphi$

$v_o = -A.\omega.sen\varphi$ y despejando $\boldsymbol{sen\varphi}$, se obtiene:

$$\boldsymbol{sen\varphi = -\frac{v_o}{\omega.A}} \qquad \textbf{(7)}$$

Ahora, por la Identidad Fundamental de la Trigonometría se sabe que:

$$\boldsymbol{sen^2\varphi + cos^2\varphi = 1} \qquad \textbf{(8)}$$

Entonces, reemplazando **(6)** y **(7)**, en **(8)**:

$$\left(-\frac{v_O}{\omega.A}\right)^2 + \left(\frac{x_O}{A}\right)^2 = 1$$

y operando matemáticamente con la intención de despejar "$\boldsymbol{A}$", se obtiene:

$$\frac{v_O^2}{\omega^2.A^2} + \frac{x_O^2}{A^2} = 1$$

$$\frac{1}{A^2} \cdot \left(\frac{v_O^2}{\omega^2} + x_O^2\right) = 1$$

$$\left(\frac{v_O^2}{\omega^2} + x_O^2\right) = A^2$$

lo que finalmente:

$$\boldsymbol{A = \sqrt{x_o^2 + \frac{v_o^2}{\omega^2}}} \qquad \textbf{(9)}$$

O sea que, la amplitud depende de las condiciones iniciales… y es razonable!

Cálculo de "φ":

Si dividimos miembro a miembro **(7)** con **(6)**, queda:

$$\frac{sen\varphi}{cos\varphi}=\frac{-\frac{v_O}{\omega.A}}{\frac{x_O}{A}}$$

y, operando matemáticamente con la intención de despejar "$\boldsymbol{\varphi}$**",** se obtiene:

$$\frac{sen\varphi}{cos\varphi}=\frac{-\frac{v_0}{\omega.\cancel{A}}}{\frac{x_0}{\cancel{A}}}$$

$$tan\varphi=-\frac{v_O}{\omega.x_O}$$

lo que finalmente:

$$\boldsymbol{\varphi=inv\ tan\left(-\frac{v_o}{\omega.x_o}\right)} \qquad \textbf{(10)}$$

y se observa también que la constante de fase también depende de las condiciones iniciales!

¡Luego de estas cuentas realizadas, es cierto que el M.A.S. quedó ahora completamente descripto!

Otro elemento importante para determinar en este tipo de movimiento, es el período.

Entiéndase por período, al tiempo que tarda el carrito en hacer un viaje completo, por ejemplo, de ida y vuelta.

Al período se lo denota con la letra **"T"** y se mide en segundos en el Sistema Internacional de Unidades.

Cálculo del "T":

Ocurre que la diferencia de fases para la posición en un tiempo **"t"** y en otra **"t+T"**, es igual a $\boldsymbol{2.\pi}$, entonces se puede escribir que:

$$[\omega(t+T)+\varphi]-(\omega t+\varphi)=2\cdot\pi$$

$$\cancel{\omega t}+\omega T+\cancel{\varphi}-\cancel{\omega t}-\cancel{\varphi}=2\cdot\pi$$

$$\omega\cdot T=2\cdot\pi$$

y despejando el período **"T"**, se obtiene:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Lo que finalmente, el período también se puede calcular conociendo la masa del carrito y la constante elástica del resorte.

$$\boldsymbol{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} \qquad \textbf{(11)}$$

Planteo Energético:

Pensando en la Conservación de la Energía Mecánica para un sistema en donde solo participan fuerzas conservativas, se puede escribir la siguiente ecuación:

$$E(x) = K + Ue + Ug = constante$$

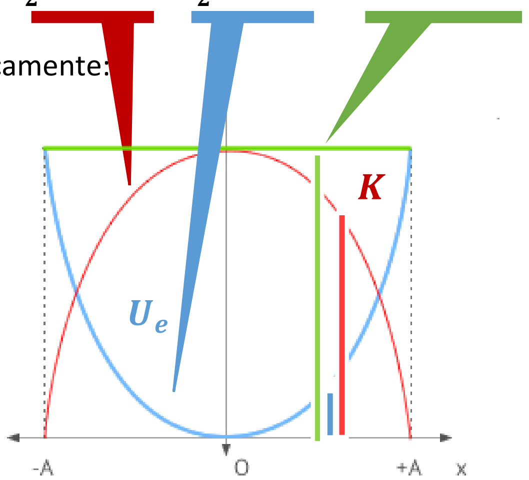
A raíz de que el carrito se mueve en un plano horizontal, no existe variación de la Energía Potencial Gravitatoria, con lo cual $Ug = 0$. Entonces:

$$E(x) = K + Ue = constante$$

que desagregado queda:

$$\boldsymbol{E(x) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = constante} \qquad \textbf{(12)}$$

y gráficamente:



La energía mecánica (color verde) en un oscilador armónico es la suma de su energía cinética (color rojo) y su energía potencial (color azul).

Esto implica que la energía mecánica sea siempre la misma independientemente de la posición que ocupe el cuerpo.

Es todo!!! Luego en el Práctico se resolverán algunos problemas y usted se empezará a sentir más seguro con estos temas.

Le deseo Éxitos en su estudio. Hasta la próxima!!!

Ing. Juan Lancioni.

<u>Nota:</u> algunas ilustraciones y gráficas fueron tomadas del libro Serway-Jewet y desde internet; y el resto de los esquemas fueron realizados por el profesor.