FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 7 Y 8: CINEMÁTICA Y DINÁMICA DEL SÓLIDO

OTRA FORMA DE EXPRESAR LA SEGUNDA LEY DE NEWTON – RELACIÓN ENTRE: MOMENTO DE INERCIA, MOMENTO CINÉTICO Y VELOCIDAD ANGULAR – ROTOTRASLACIÓN – APLICACIONES

(TERCERA PARTE)

Otra forma de expresar la Segunda Ley de Newton para la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo que pasa por "o":

Por **ANALOGÍA**, así como **en la traslación** se afirmó que el ritmo con el cual cambia el Momento Lineal con respecto al tiempo, es igual a la sumatoria de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre la partícula; **en la rotación**, se puede afirmar que el ritmo con el cual cambia el Momento Angular con respecto al tiempo, es igual a la sumatoria de todas las torcas que actúan sobre el sólido en estudio girando alrededor de un eje que pasa por **"o"**… es decir que, matemática/físicamente:

TRASLACIÓN **ROTACIÓN**

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad\qquad \sum \overrightarrow{\tau_o} = \frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt}$$

Entonces, la expresión que se indica a continuación es otra forma de expresar la Segunda Ley de Newton para la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo que pasa por **"o"**:

$$\sum \overrightarrow{\tau_o} = \frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} \qquad \textbf{(34)}$$

y de ella se interpreta que:

como el Momento Cinético depende de: la masa de la partícula, su posición y la rapidez tangencial de giro; partiendo del supuesto que la masa y la posición son constantes en el tiempo, cuando mayor es la Torca aplicada sobre la masa, mayor es su aceleración y, en consecuencia, mayor es su rapidez, y viceversa.

En cuanto a ley física **(34)**, puede demostrarse mediante formulaciones matemáticas, haciendo el siguiente análisis:

(A) Si partimos de la definición de Momento Cinético:

$$\overrightarrow{L_o} = \vec{r}\; x\; \vec{P}$$

y derivamos en ambos miembros con respecto del tiempo:

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\; x\; \vec{P})$$

entonces, al aplicar la regla de la derivación de un producto en el segundo miembro, queda:

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\; x\; \vec{P} + \vec{r} x \frac{d\vec{P}}{dt}$$

como la derivada de la posición con respecto al tiempo: $\frac{d\vec{r}}{dt}$, es la velocidad instantánea $\vec{v}$, queda:

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \vec{v}\; x\; \vec{P} + \vec{r} x \frac{d\vec{P}}{dt}$$

luego, siendo que $\vec{P} = m \cdot \vec{v}$, al reemplazarlo en la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \vec{v}\; x\; m.\vec{v} + \vec{r} x \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Y, al ser el producto vectorial de dos vectores paralelos igual a cero, el primer término del segundo miembro se anula, con lo cual:

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \vec{r} x \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (35)$$

(B) Si partimos de la Tercera Forma de expresar la Segunda Ley de Newton para la Traslación:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Y, al pre-multiplicar vectorialmente en ambos miembros por el vector posición $\vec{r}$, se obtiene:

$$\vec{r} x \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{r} x \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Entonces, si se observa, en el primer miembro queda expresada la definición de Torca, es decir, la $\sum \overrightarrow{\tau_o}$, con lo cual:

$$\sum \overrightarrow{\tau_o} = \vec{r} x \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (36)$$

Para lo cual, como los dos segundos miembros de las fórmulas **(35)** y **(36)** son iguales entre sí, entonces los dos primeros miembros también los serán, y se puede escribir que:

$$\sum \vec{\tau_o} = \frac{d\vec{L_o}}{dt}$$ que es la fórmula **(34)**

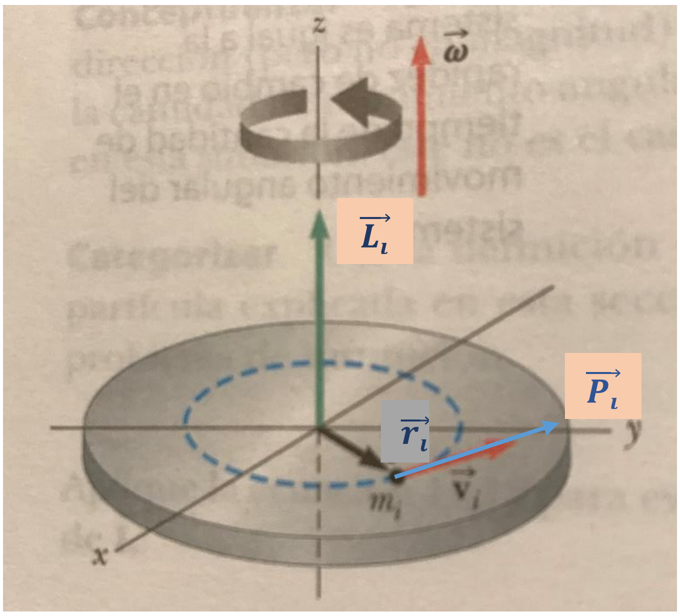
lo que finamente queda demostrada!!!

Por otro lado, este tema da lugar también a la siguiente interpretación:

TRASLACIÓN		**ROTACIÓN**
$como: \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$		$como: \sum \vec{\tau_o} = \frac{d\vec{L_o}}{dt}$
$si: \sum \overrightarrow{F_{ext}} = 0$		$si: \quad \sum \vec{\tau_o} = 0$
$\vec{P} = constante$		$\vec{L_o} = constante$
$\vec{P}\,(o) = \vec{P}\,(f) = constante$		$\vec{L_o}(o) = \vec{L_o}(f) = constante$
$se\ conserva\ \vec{P}$	y	$se\ conserva\ \vec{L_o}$!!!

Ley física que relaciona: $\vec{L_o}$, I_o y $\vec{\omega}$

Si tomamos un disco macizo de masa **"M"** que gira alrededor de un eje **"z"** a una velocidad angular "$\vec{\omega}$" y se analiza una pequeña masa "m_i", ubicada a una distancia "r_i"; dicha masa estará animada con una velocidad lineal y tangente a su trayectoria, "$\vec{v_i}$". Por lo tanto se pone de manifiesto un "$\vec{L_i}$" que pasa por **"o"** y se puede calcular escalarmente como:



$$L_i = r_i \cdot P_i \cdot sen\emptyset = r_i \cdot P_i \cdot sen\, 90° = r_i \cdot P_i \cdot 1 = r_i \cdot P_i \qquad \textbf{(37)}$$

pero, como:

$$P_i = m_i \cdot v_i \qquad \textbf{(38)}$$

reemplazando **(38)** en **(37)**:

$$L_i = r_i \cdot m_i \cdot v_i \qquad \textbf{(39)}$$

y también es cierto que:

$$v_i = \omega \cdot r_i \qquad \textbf{(40)}$$

entonces, reemplazando ahora **(40)** en **(39)** queda:

$$L_i = r_i \cdot m_i \cdot \omega \cdot r_i = \omega \cdot m_i \cdot r_i^2 \qquad \textbf{(41)}$$

y generalizando, es decir, haciendo extensivo este cálculo de la masa "$\boldsymbol{m_i}$" para toda la masa **"M"** del disco macizo, se puede escribir:

$$L_o = \sum L_i \qquad \textbf{(42)}$$

con lo cual, reemplazando **(41)** en **(42)**:

$$L_o = \sum \omega \cdot m_i \cdot r_i^2$$

luego, como "$\boldsymbol{\omega}$" se puede sacar factor común fuera de la sumatoria porque se repite en cada uno de sus términos:

$$L_o = \omega \cdot \sum m_i \cdot r_i^2$$

y siendo la $\sum m_i \cdot r_i^2$, el momento de inercia "$\boldsymbol{I_o}$" del toda la masa **"M"** girando alrededor de **"o"**, queda:

$$\boldsymbol{L_o = \omega \cdot I_o} \qquad \textbf{(43)}$$

Entonces ahora, podemos asociar **(43)** con: $\boldsymbol{\overrightarrow{L_o}(o) = \overrightarrow{L_o}(f) = constante}$, y escribir de manera escalar que:

$$\boldsymbol{I_o \cdot \omega_o = I_f \cdot \omega_f = constante} \qquad \textbf{(44)}$$

Veamos ahora el siguiente ejemplo, en donde se aplica la fórmula **(44),** para cuando la sumatoria de las torcas debido a las fuerzas exteriores que actúan sobre un cuerpo, son igual a cero.

EJEMPLO 6:

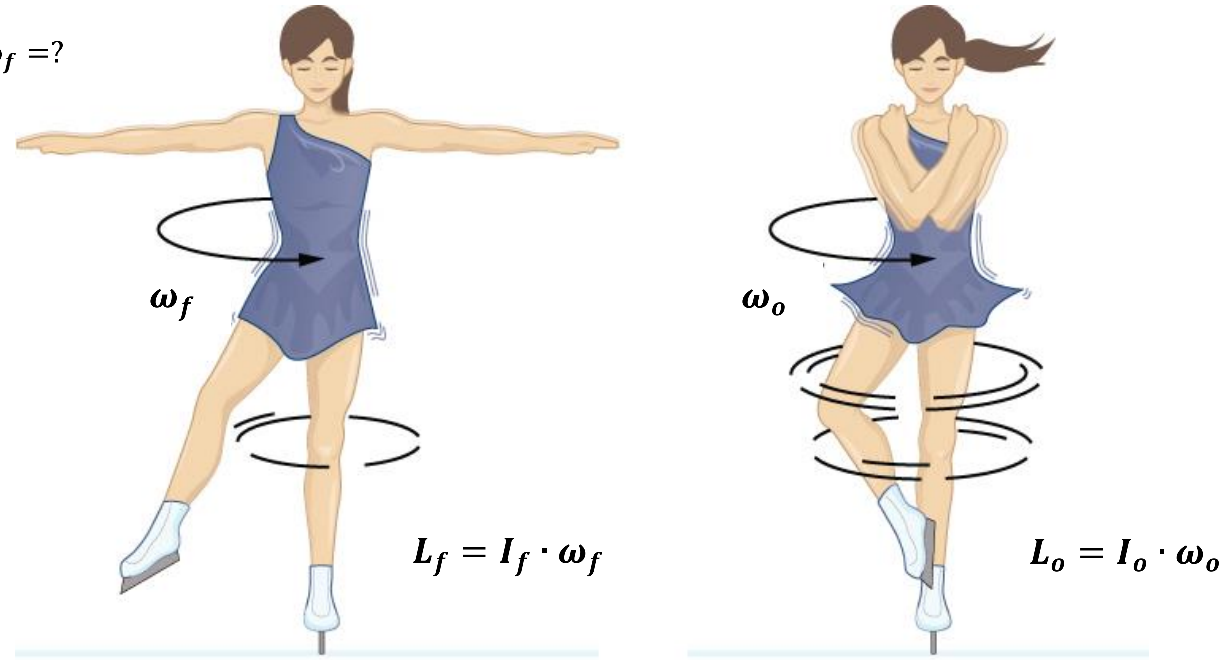
Una patinadora que se encuentra realizando una coreografía y está girando en trompo en un estado inicial con una velocidad angular "$\boldsymbol{\omega_o}$" **(alta)** y Momento de Inercia con brazos cerrados "$\boldsymbol{I_o}$" **(pequeño)**, decide disminuir su rapidez angular a un nuevo valor "$\boldsymbol{\omega_f}$" **(menor)**, con lo cual extiende sus brazos y consigue tener otro Momento de Inercia "$\boldsymbol{I_f}$" **(mayor)**. Si se conoce la velocidad angular inicial y ambos momentos de inercia, calcule la rapidez angular final. Suponer que $\sum \vec{\boldsymbol{\tau_o}} = \boldsymbol{0}$ entre los pies de la patinadora y la pista.

Datos:

$\boldsymbol{\omega_o}$; $\boldsymbol{I_o}$; $\boldsymbol{I_f}$

Incógnita:

$\boldsymbol{\omega_f} = ?$



Por conservación del Momento Cinético, utilizando la fórmula **(44)**:

$$\boldsymbol{I_o \cdot \omega_o = I_f \cdot \omega_f = cte.}$$

y despejando "$\boldsymbol{\omega_f}$", se obtiene:

$$\boldsymbol{\omega_f = \frac{I_o \cdot \omega_o}{I_f}}$$

y el problema queda resuelto de una manera muy sencilla!!!

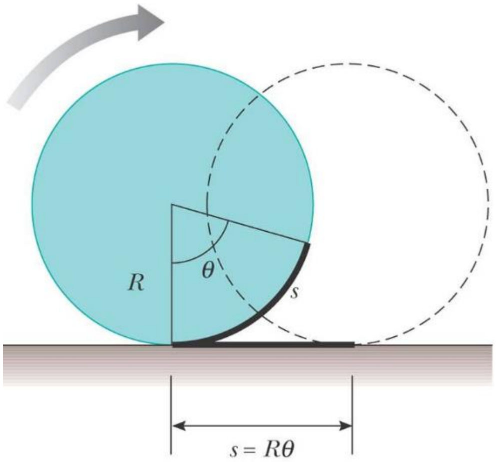
Rodamiento – Rototraslación:

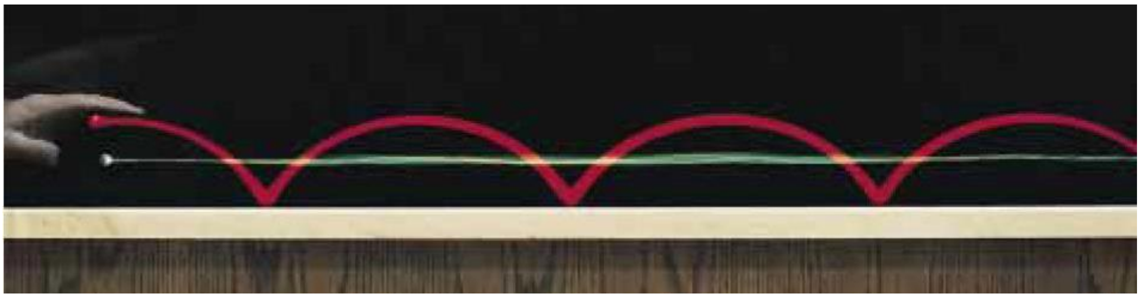
Esta sección trata de explicar el movimiento de un cuerpo rígido que rueda sin deslizar a lo largo de una superficie plana.

Cuando una rueda se rototraslada describe un **movimiento simultáneo de traslación y rotación** en términos de su Centro de Masa **"CM"**.

Las fotos que se muestran a continuación dan cierto detalle de lo comentado.

Una fuente de luz en el centro de una rueda en Rodamiento, y otra en un punto de su borde, Muestran las distintas trayectorias que toman esos dos puntos.

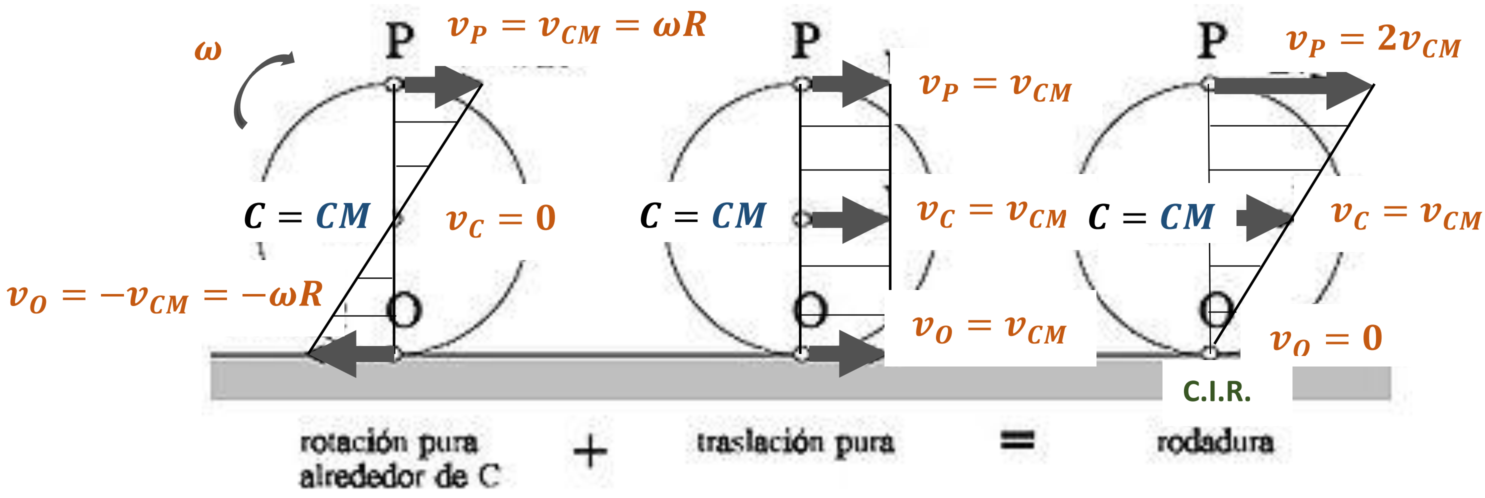




El centro se mueve en una línea recta que es la que se indica de color verde suave; en tanto que el punto en su borde se mueve en una trayectoria denominada cicloide, que es la que se visualiza de color rojo intenso.

En principio este movimiento parece bastante complejo, no obstante, si se lo analiza por separado, es decir, un movimiento traslación por un lado y un movimiento rotación alrededor de un eje fijo por el otro, y luego se los superpone, resultará mucho más sencillo.

Entonces, la idea de rodamiento sin deslizamiento será analizada de acuerdo al siguiente esquema:



SITUACIÓN (1) **SITUACIÓN (2)** **SITUACIÓN (3)**

Observando de izquierda a derecha cada movimiento, tenemos la siguiente distribución de velocidades lineales:

a) La rueda en rotación pura girando alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masa a una velocidad angular "$\boldsymbol{\omega}$", tiene en los puntos **"P"**, **"C"** y **"O"** las siguientes velocidades lineales:

$$v_P = v_{CM} = \omega R$$
$$v_C = 0$$
$$v_O = -v_{CM} = -\omega R$$

b) La rueda en traslación pura viajando a una rapidez "$\boldsymbol{v_{CM}}$", tiene en los puntos **"P"**, **"C"** y **"O"** las velocidades lineales siguientes:

$$v_P = v_{CM}$$
$$v_C = v_{CM}$$
$$v_O = v_{CM}$$

c) La rueda en rodadura perfecta, que se obtiene haciendo la superposición del:

Mov. de rotación pura alrededor de "C" **+** **Mov. de traslación pura**,

posee en los puntos **"P"**, **"C"** y **"O"** las siguientes velocidades lineales:

$$v_P = 2v_{CM}$$
$$v_C = v_{CM}$$
$$v_O = 0$$

Por lo tanto en la **SITUACIÓN (3)**, a partir de la superposición propuesta que representa a la **Rototraslación**, se puede afirmar que la misma se trata sencillamente de un movimiento de **Rotación Pura de la rueda alrededor de un eje fijo que pasa por "O"**, que se llama Centro Instantáneo de Rotación **C.I.R.**

De acuerdo a este razonamiento realizado y pensando en términos energéticos, se puede escribir:

$$K_{R(CM)} + K_T = K_{R-T} \qquad (45)$$

SIT. (1) + SIT. (2) = SIT. (3)

Entonces veamos el siguiente planteo en donde, partiendo de la **SITUACIÓN (3)** se obtiene:

$$K_{R-T} = K_{R\,(C.I.R.)} = \frac{1}{2} \cdot I_O \cdot \omega^2 \qquad (46)$$

pero por el Teorema de Steiner:

$$I_O = I_{CM} + M \cdot D^2 \qquad (47)$$

y como:

$$D = R$$

la ecuación anterior queda:

$$I_O = I_{CM} + M \cdot R^2 \qquad (48)$$

con lo cual, reemplazando **(48)** en **(46)** se obtiene:

$$K_{R-T} = \frac{1}{2} \cdot (I_{CM} + M \cdot R^2) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot (I_{CM} + M \cdot R^2) \qquad (49)$$

y aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$K_{R-T} = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot I_{CM} + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \omega^2 \cdot R^2 \qquad (50)$$

pero como: $v = \omega \cdot R$, al adaptarla: $v_{CM} = \omega \cdot R$

con lo cual:

$$v_{CM}^2 = \omega^2 \cdot R^2 \qquad (51)$$

entonces al reemplazar **(51)** en **(50)**, se tiene:

$$K_{R-T} = \frac{1}{2} \cdot I_{CM} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_{CM}^2 = K_{R(CM)} + K_T$$

Con lo que se verifica que **el primer término** es la $K_{R(CM)}$ y **el segundo término** es la K_T, tal como lo expresara en la fórmula **(45)**; y con este resultado, se confirma lo esperado!!!

EJEMPLO 7:

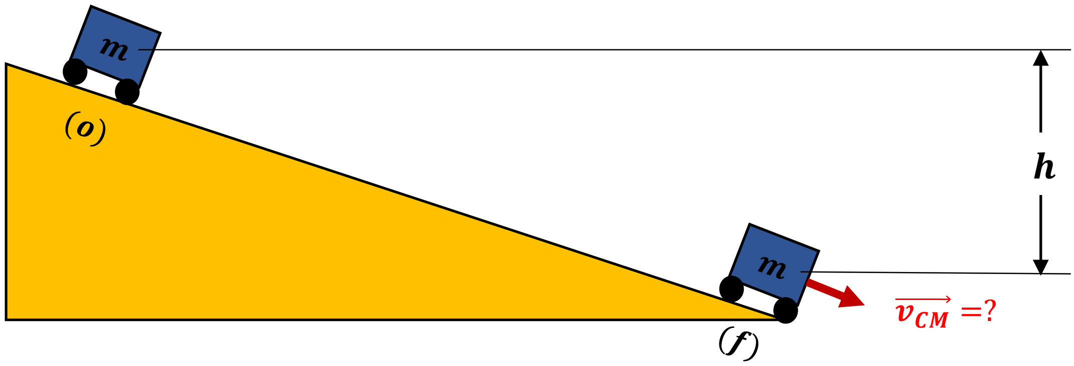
Se sueltan tres objetos ($\vec{v_0} = \mathbf{0}$) de masa **“m”** desde la parte superior de un plano inclinado, ubicados a una altura **“h”** respecto del nivel del piso. Se trata de:

a) Un **carrito** que desliza sin fricción.
b) Una **polea** de radio **“R”** que rueda sin deslizar.
c) Un **anillo** de radio **“R”** que también rueda sin deslizar.

¿Quién de los tres objetos llega primero a la parte más baja del plano inclinado?

Entonces, una manera sencilla de responder a esta pregunta es averiguar mediante un planteo de conservación de la Energía, cuál es la rapidez del centro de masa de cada uno de los objetos al final de su recorrido y compararlas entre sí…veamos entonces:

a) Carrito:

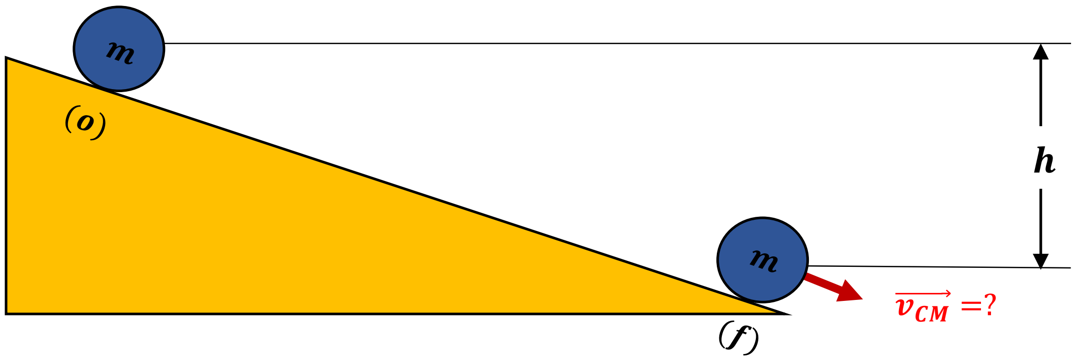


$$E(o) = E(f)$$

$$\cancel{m} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{CM}^2$$

$$v_{CM}^{carrito} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{g \cdot h} = \mathbf{1,41 \cdot \sqrt{g \cdot h}}$$

b) Disco:



$$E(o) = E(f)$$

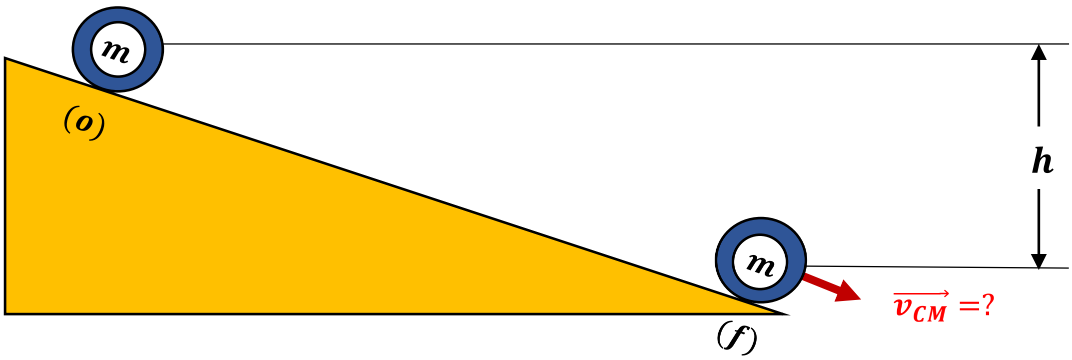
$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{CM}^{disco} \cdot \omega^2$$

$$\cancel{m} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{R^2} \cdot \omega^2$$

$$g \cdot h = \frac{v_{CM}^2}{2} + \frac{v_{CM}^2}{4} = \frac{2v_{CM}^2 + v_{CM}^2}{4} = \frac{3v_{CM}^2}{4}$$

$$v_{CM}^{disco} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot g \cdot h} = \sqrt{1{,}33 \cdot g \cdot h} = \sqrt{1{,}33} \cdot \sqrt{g \cdot h} = \mathbf{1,15} \cdot \sqrt{\boldsymbol{g.h}}$$

c) **Anillo:**



$$E(o) = E(f)$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{CM}^{anillo} \cdot \omega^2$$

$$\cancel{m} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \cancel{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{R^2} \cdot \omega^2$$

$$g \cdot h = v_{CM}^2$$

$$v_{CM}^{anillo} = \sqrt{1 \cdot g \cdot h} = \sqrt{1} \cdot \sqrt{g \cdot h} = \mathbf{1} \cdot \sqrt{\boldsymbol{g.h}}$$

Conclusión final:

$$\boldsymbol{v_{CM}^{carrito} > v_{CM}^{disco} > v_{CM}^{anillo}}$$

Con lo cual, el carrito llega primero, el disco segundo y finalmente el anillo tercero. Esto se debe al impacto que tiene el Momento de Inercia de cada uno de los cuerpos estudiados. Cuando mayores el Momento de Inercia, mayor es laresistencia ofrece el cuerpo al movimiento!

Con el desarrollo de todos estos temas, hemos finalizado la Unidad 7 y 8. En el próximo material presentaré la Unidad 9 de Estática.

Sigamos trabajando entre todos y nos vemos la próxima clase!

Un abrazo a la distancia.

Ing. Juan Lancioni.

Nota: las fotos/imágenes fueron tomadas algunas del libro de Serway-Jewet y otras desde internet. En cuanto a las ilustraciones/esquemas, fueron realizados por el profesor.