FISICA I UTN-FRC

UNIDAD 5: DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

INTRODUCCIÓN – MODELO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA: CASO A) CUANDO PARTICIPAN SOLAMENTE FUERZAS CONSERVATIVAS Y, CASO B) CUANDO PARTICIPAN FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS – APLICACIONES

(TERCERA PARTE)

Introducción:

Finalmente, con todo lo estudiado en los materiales anteriores ya estamos en condiciones de abordar y entender el **Modelo de Conservación de la Energía Mecánica.** Para ello utilizaremos la mayoría de los conceptos y leyes físicas aprendidas en todo este tiempo. Recordemos que este modelo, tal como lo hemos anticipado, se puede aplicar de una manera muy sencilla “a todo tipo de movimiento”, con lo cual nos ayudará a resolver distintos tipos de problemáticas. Entonces, sigamos avanzando!

Modelo de Conservación de la Energía Mecánica:

Existen **dos casos** para analizar:

A) Cuando solo participan Fuerzas Conservativas.
B) Cuando participan Fuerzas Conservativas y No Conservativas.

Iniciemos el estudio con el primer caso.

A) Cuando solo participan Fuerza Conservativas:

Supongamos un carrito de una montaña rusa con sus pasajeros en una situación ideal:

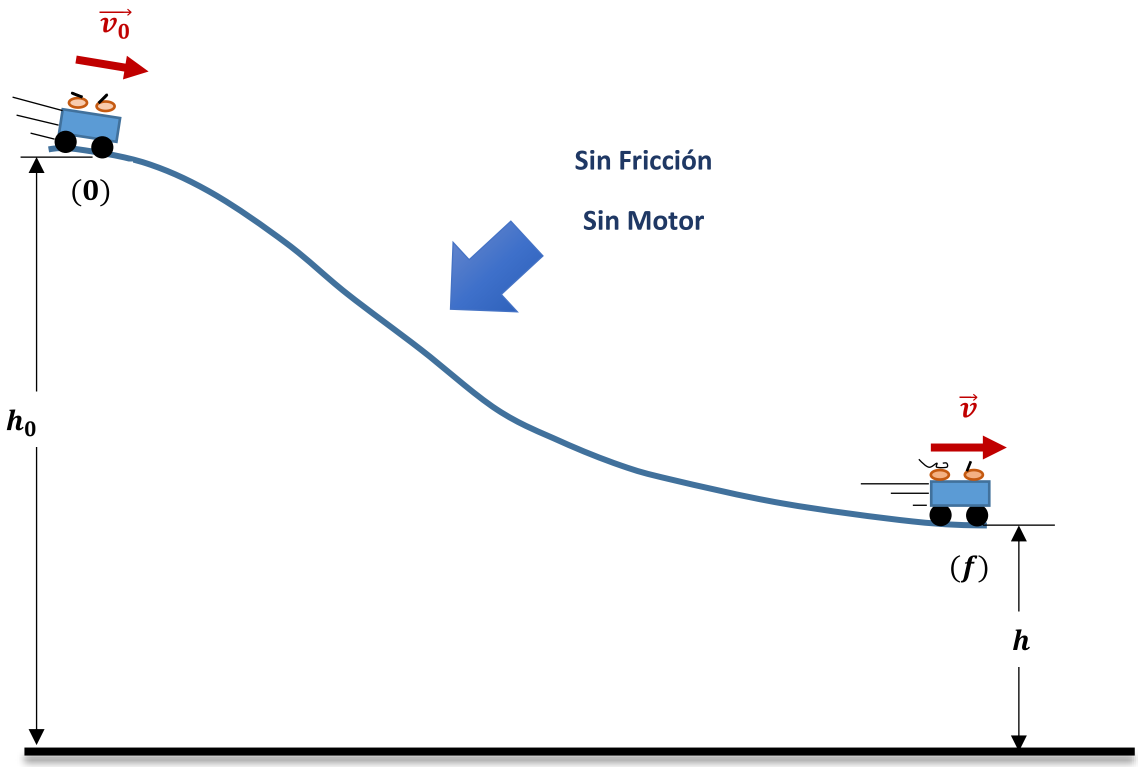
1.- en donde se supone que **no hay una fuerza de fricción** entre el carrito y los rieles, con lo cual no se hace presente un $\boldsymbol{W_{disip}}$ y,
2.- que **el carrito no es autopropulsado**, es decir, que no actúa una fuerza motriz, con lo cual tampoco aparece en escena un $\boldsymbol{W_{motriz}}$.

En este escenario, supondremos que conocemos además:

3.- la masa **“m”** del carrito junto a sus pasajeros,
4.- la altura inicial a la que se encuentra en carrito en el punto **(0)** que es el más alto de su recorrido y que la denominamos "$\boldsymbol{h_0}$"**.**
5.- la altura final a la que llega en el punto **(f)** más bajo de su trayectoria, que llamamos "$\boldsymbol{h}$"**.**
6.- por el momento no participa ningún resorte.

Como,

El Principio de Conservación de la Energía expresa que en la naturaleza nada se pierde, todo se transforma



podemos escribir a continuación que, la Energía Mecánica Total del carrito en su punto más alto **(0)** es igual a la Energía Mecánica Total en su punto más bajo **(f)**, es decir:

$$E(0) = E(f) \qquad \textbf{(14)}$$

o siendo más explícitos y utilizando la nomenclatura de Energía Mecánica que ya hemos aprendido, tenemos:

$$K(0) + U_g(0) + U_e(0) = K(f) + U_g(f) + U_e(f) \qquad \textbf{(15)}$$

que también, transponiendo términos, se puede expresar como:

$$0 = K(f) - K(0) + U_g(f) - U_g(0) + U_e(f) - U_e(0)$$

$$0 = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_e$$

y considerando que las variaciones de energías potenciales se pueden escribir como una única variación, queda:

$$0 = \Delta K + \Delta U = \Delta E \qquad \textbf{(16)}$$

Entonces tanto **(14)** como **(16)** expresan el **Modelo de la Conservación de la Energía Mecánica** para el **Caso A)**, por lo tanto, es indistinto utilizar una u otra ecuación!

A los fines de resolver problemas con su Profesor en la Parte Práctica, se puede desarrollar un poco más la fórmula **(15)**, escribiendo:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(17)}$$

y más adelante presentaremos un ejemplo de cómo aplicarla!

Para continuar el estudio con el segundo caso, previamente de la ecuación **(16)** podemos escribir lo siguiente:

$$\Delta K = -\Delta U \qquad \textbf{(18)}$$

Pero por el T.T.K., se sabe que:

$W = \Delta K$ y, adaptado a la situación de que en este caso solo actúan fuerzas conservativas, esta fórmula se puede escribir así:

$$W_{cons.} = \Delta K \qquad \textbf{(19)}$$

entonces igualando **(18)** con **(19)**, se obtiene:

$$W_{cons.} = \Delta K = -\Delta U \quad \text{es decir:} \quad W_{cons.} = -\Delta U \qquad \textbf{(20)}$$

A esta última expresión la reservaremos para utilizarla un poquito más adelante.

Continuemos ahora con el estudio del segundo caso…

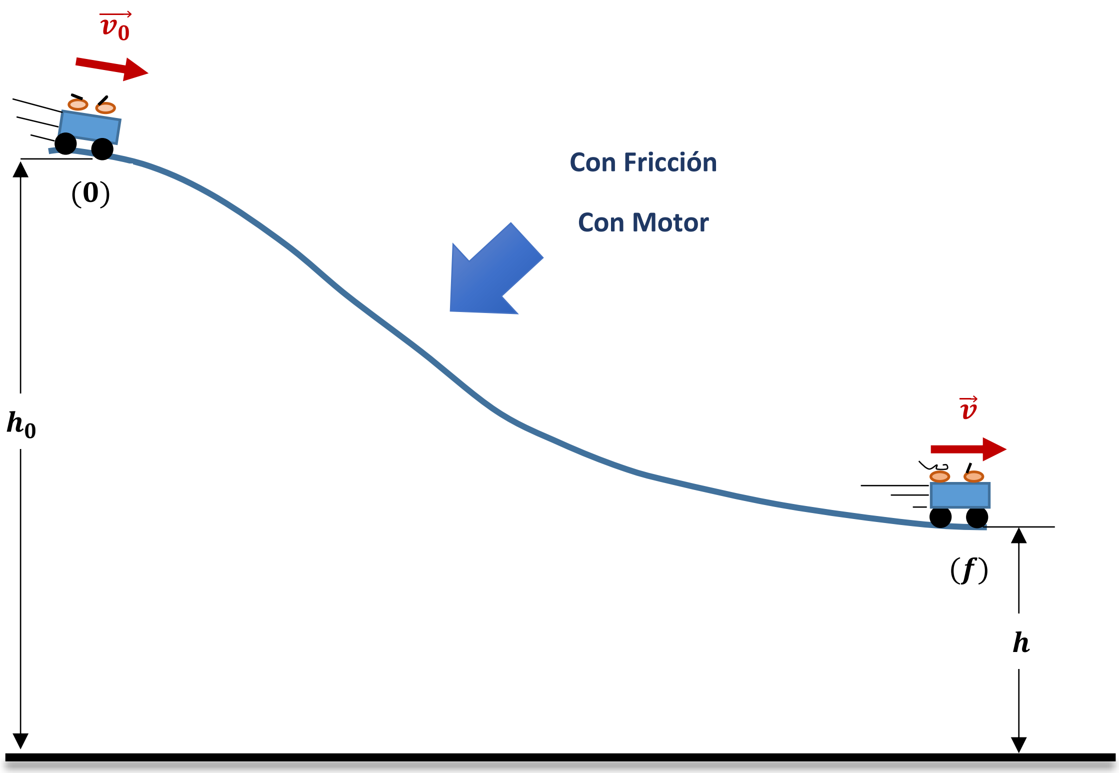
B) Cuando participan Fuerza Conservativas y No Conservativas:

Supongamos ahora el mismo carrito con sus pasajeros al igual que recién, pero en una situación más real:

1.- en donde se supone ahora que hay una fuerza de fricción entre el carrito y los rieles, con lo cual se hace presente un W_{disip} y,
2.- que el carrito es autopropulsado, es decir, que actúa una fuerza motriz con lo cual se hace presente un W_{motriz}.

En este escenario, seguimos suponiendo que conocemos además:

3.- la masa **"m"** del carrito junto a sus pasajeros,
4.- la altura inicial a la que se encuentra en carrito en el punto **(0)** más alto de su recorrido, que la denominamos "h_0".
5.- la altura final a la que llega en el punto (**f**) más bajo de su trayectoria, que llamamos "h".
6.- por el momento no participa ningún resorte.



Entonces partiendo del Teorema del Trabajo y la Energía Cinética e incluyendo todos los supuestos enunciados, se puede escribir:

$$W_{total} = \Delta K$$

pero a su vez el Trabajo Total se obtiene sumando el Trabajo de las Fuerzas Conservativas con el de las Fuerzas No Conservativas, entonces:

$$W_{cons.} + W_{no\ cons.} = \Delta K$$

Y por otro lado, el Trabajo de las Fuerzas No Conservativas, es la suma del Trabajo debido a la Fuerza Motriz con el Trabajo producido por la Fuerza de Fricción, con lo cual se obtiene:

$$W_{cons.} + W_{motriz} + W_{disip.} = \Delta K \qquad \textbf{(21)}$$

si ahora reemplazamos **(20)**: $W_{cons.} = -\Delta U,$ en **(21)** nos queda:

$$-\Delta U + W_{motriz} + W_{disip.} = \Delta K$$

y pasamos el término $-\Delta U$ que está restando en el primer miembro, como sumando al segundo miembro:

$$W_{motriz} + W_{disip.} = \Delta K + \Delta U \qquad \textbf{(22)}$$

que también se puede escribir:

$$W_{motriz} - |W_{disip}| = \Delta K + \Delta U = \Delta E \qquad \textbf{(23)}$$

ENERGÍA INYECTADA

ENERGÍA LIBERADA

VARIACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNCA

Y tanto **(22)** como **(23)** representan el tan mentado **Modelo de la Conservación de la Energía Mecánica**, para el **Caso B)** !!!

Compare a su vez la fórmula **(23)**, con la obtenida en el **Caso A)**, es decir **(16)**…

$$\mathbf{0 = \Delta K + \Delta U = \Delta E} \qquad \textbf{(16)}$$

y reflexione…

A propósito de lo sugerido, le acerco **algunas conclusiones:**

a) Si: $W_{motriz} = |W_{disip}| = 0$, la ecuación **(23)** queda: $\mathbf{0 = \Delta K + \Delta U = \Delta E}$
que es el **caso A)**, entonces se observa que: $\boldsymbol{E(0) = E(f)}$ **!**

b) Si: $W_{motriz} > |W_{disip}|$, se observa que: $\boldsymbol{E(f) > E(0)}$ **!**
y **el móvil se acelera.**

c) Si: $W_{motriz} < |W_{disip}|$, se observa que: $\boldsymbol{E(f) < E(0)}$ **!**
y **el móvil se desacelera**.

d) Si: $W_{motriz} = |W_{disip}| \neq 0$, se observa que: $\boldsymbol{E(0) = E(f)}$ **!**
de nuevo se cumple la ecuación **(16)** pero, para esta situación ocurre que **el móvil se encuentra en M.R.U. con velocidad constante.**

A los fines de resolver problemas con su Profesor en la Parte Práctica, se puede desarrollar un poco más la fórmula **(23)** y, suponiendo que $W_{motriz} = 0$ porque así ocurre con mucha frecuencia, se obtiene:

$$\boldsymbol{-|W_{disip}| = \Delta K + \Delta U}$$

y desagregando términos:

$$\boldsymbol{-|W_{disip}| = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_e}$$

$$\boldsymbol{-|W_{disip}| = K(f) - K(0) + U_g(f) - U_g(0) + U_e(f) - U_e(0)}$$

$$\boldsymbol{-|W_{disip}| = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh - mgh_0 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 + \frac{1}{2}kx_0^2}}_{\text{LA ENERGÍA QUE SE DISPONE}} - \underbrace{\boldsymbol{|W_{disip}|}}_{\text{LA ENERGÍA QUE SE DISIPÓ}} = \underbrace{\boldsymbol{\frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2}}_{\text{LA ENERGÍA QUE QUEDÓ}} \qquad \textbf{(24)}$$

que resumida queda:

$$\boldsymbol{E(0) - |W_{disip}| = E(f)} \qquad \textbf{(25)}$$

y a continuación la aplicaremos!

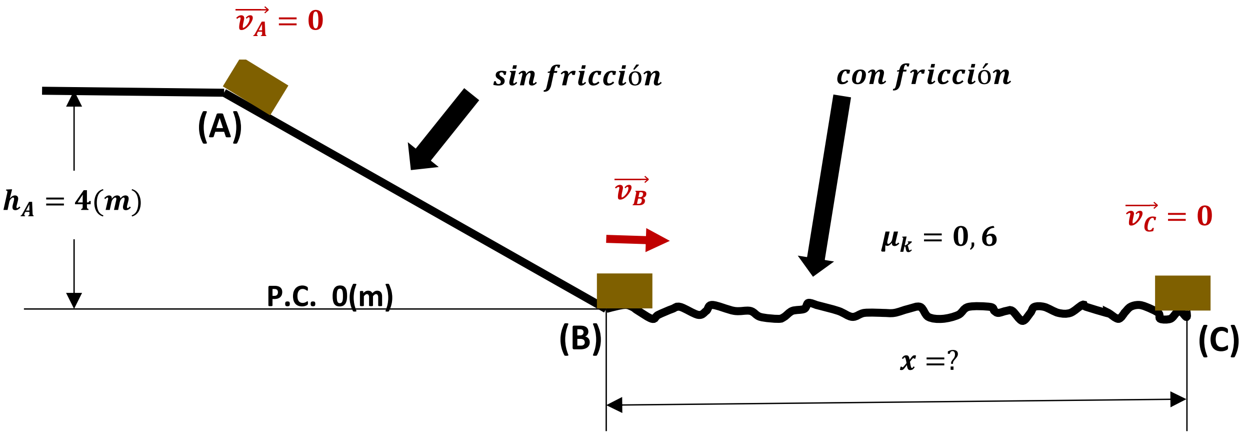
EJEMPLO 7:

Se dispone de un cajón con mercadería que se desliza por un tobogán metálico sin fricción, soltándose desde un punto **(A)** que se encuentra a una altura $h_A = 4(m)$ respecto del piso. Luego de caer, llega hasta un punto **(B)** que es el final del tobogán y comienza a deslizarse por un piso de cemento alisado horizontal y rugoso, con coeficiente de fricción $\mu_k = 0{,}6$; hasta que finalmente se detiene en un punto **(C)**.

Calcule:

a) La rapidez del cajón en el punto **(B)**, $v_B = ?$

b) La distancia “x” recorrida por el piso horizontal hasta que se detiene en el punto **(C)**.



a) Para calcular la rapidez en el punto **(B)** utilizamos las fórmulas **(14)** y **(17)**, y las adaptamos:

$$E(A) = E(B)$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A + \frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B + \frac{1}{2}kx_B^2$$

como $v_A = 0$, este término se anula

como no hay resorte este término se anula

como $h_B = 0$, este término se anula

como no hay resorte este término se anula

Entonces la ecuación queda:

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2$$

en donde las masas se cancelan y despejando v_B, se obtiene:

$$2gh_A = v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh_A}$$

y calculando:

$v_B = \sqrt{2.9,8.4} = \mathbf{8,85\ (m/s)}$

b) Para calcular la distancia “x” utilizamos las fórmulas **(24)** y **(25)**, y las adaptamos:

$$E(B) - |W_{disip}| = E(C)$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B + \frac{1}{2}kx_B^2 - |W_{disip}| = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C + \frac{1}{2}kx_C^2$$

como $h_B = 0$, este término se anula

como no hay resorte este término se anula

como $v_C = 0$, este término se anula

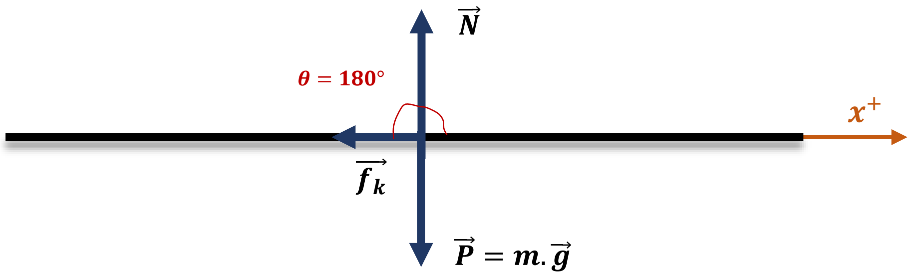
como $h_C = 0$, este término se anula

como no hay resorte este término se anula

entonces la ecuación queda:

$\frac{1}{2}mv_B^2 - |W_{disip}| = 0$

y debemos calcular ahora el $|W_{disip}|$:



$W_{disip} = (f_k.cos\theta).x = (\mu_k.N.cos180°).x = (\mu_k.mg.(-1)).x = -\mu_k.mg.x$

entonces el valor absoluto del trabajo disipativo, es:

$|W_{disip}| = |-\mu_k.mg.x| = \mu_k.mg.x$

con lo cual, reemplazando este valor en la ecuación de energía nos queda:

$\frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 - \mu_k.\cancel{m}g.x = 0$

en donde las masas se cancelan y se puede despejar el valor de “x”:

$$\frac{1}{2}v_B^2 - \mu_k.g.x = 0$$

$$\frac{1}{2}v_B^2 = \mu_k.g.x$$

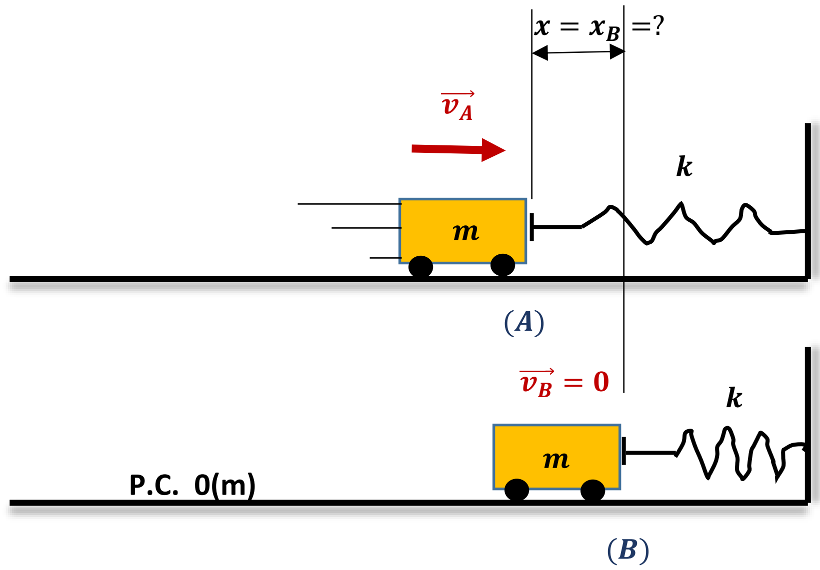
$$x = \frac{v_B^2}{2.g.\mu_k}$$

y calculando:

$$x = \frac{8{,}85^2}{2.9{,}8.0{,}6} = \mathbf{6{,}66(m)}$$

EJEMPLO 8:

Un carrito de masa $m = 10(kg)$ que tiene una velocidad $v_A = 5(m/s)$ impacta en el punto **(A)** contra un resorte relajado de constante $k = 1500(N/m)$. Calcule la máxima compresión “x” que sufre el resorte cuando el carrito logra detenerse en el punto **(B)**.



$$E(A) = E(B)$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A + \frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B + \frac{1}{2}kx_B^2$$

como $h_A = 0$, este término se anula	como no hay resorte este término se anula	como $v_B = 0$, este término se anula	como $h_B = 0$, este término se anula

Entonces la ecuación queda:

$$\cancel{\frac{1}{2}}mv_A^2 = \cancel{\frac{1}{2}}kx^2$$

en donde los 1/2 se cancelan y despejando "x", se obtiene:

$$\frac{mv_A^2}{k} = x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{mv_A^2}{k}}$$

y calculando:

$$x = \sqrt{\frac{10.5^2}{1500}} = \sqrt{0{,}166} = \mathbf{0{,}4(\boldsymbol{m})}$$

Es todo por ahora y me despido con un hasta pronto!!!

Atte.

Ing. Juan Lancioni.

<u>Nota:</u> todas las ilustraciones y esquemas fueron realizados por el profesor.