Biseccion

Uriel Paluch

4/9/2021

Método de Bisección

El método de bisección busca aproximar una raiz de una función cuando esta tiene la forma de $f(x) = 0$. Esta basada en el teorema de valor intermedio.

Supuestos:

- f es una función continua definida dentro del intervalo $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos.
- La raiz en el intervalo es única (aunque puede operar cuando hay más de una raíz en el intervalo)

El teorema del valor intermedio implica que existe un número p con $f(p) = 0$. El método realiza una reducción a la mitad (o bisección) de los subintervalos de $[a, b]$, y en cada paso localizar la mitad que contiene p.

Técnica de Bisección:

Sea $a_1 = a$ y $b_1 = b$ y sea p_1 el punto medio de $[a, b]$, es decir:

$$p = \frac{(a_1 + a_2)}{2}$$

Esto produce el método de la siguiente figura:

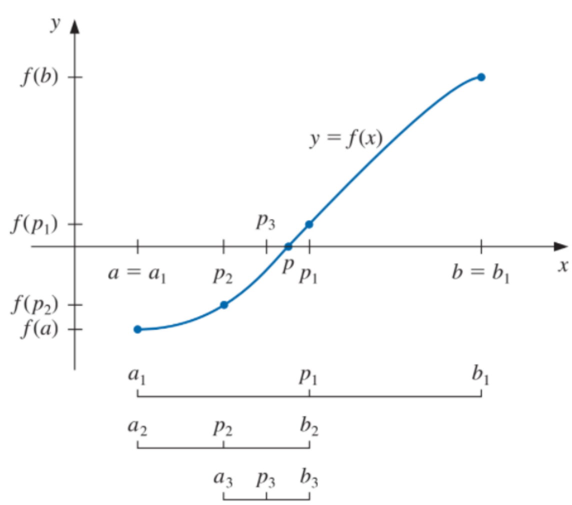


Figure 1: Método de Bisección

```r
#Método de Bisección
Biseccion <- function(a, b, N = 100, tol) {
#Tiene por default 100 iteraciones

  #Instancio las listas vacias
  lista_a <- c(NULL)
  lista_b <- c(NULL)
  lista_p <- c(NULL)

  for (i in 1:N) {
    #Calculo P
    p <- (a+b)/2

    #Agrego el valor a cada lista
    lista_p[i] <- p
    lista_a[i] <- a
    lista_b[i] <- b

    #Evaluo la función en p
    fp <- f(p)

    #Si la f(p) es 0, entonces es raiz
    #O si esta dentro del límite tolerado
    if (fp == 0 | abs((b-a)/2) <= tol) {
      #Creo un data frame con las listas
      datos <- data.frame(lista_a, lista_b, lista_p)
      colnames(datos) <- c("A", "B", "P")
      print(datos)
      return(paste("La raiz es: ", p))
    }

    #Si comparten el mismo signo
    if (fp * f(a) > 0) {
      a <- p
    } else {
      b <- p
    }
  }

  #En el caso de que falle el método
  return(paste('El método falla luego de: ', N, ' iteraciones'))
}
```

Ejercicios:

- Hallar la solución de:
    1. $cos(x) = \sqrt{x}$
    2. $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$
    3. $2 + cos(e^x - 2) = e^x$
    4. $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$

Solución:

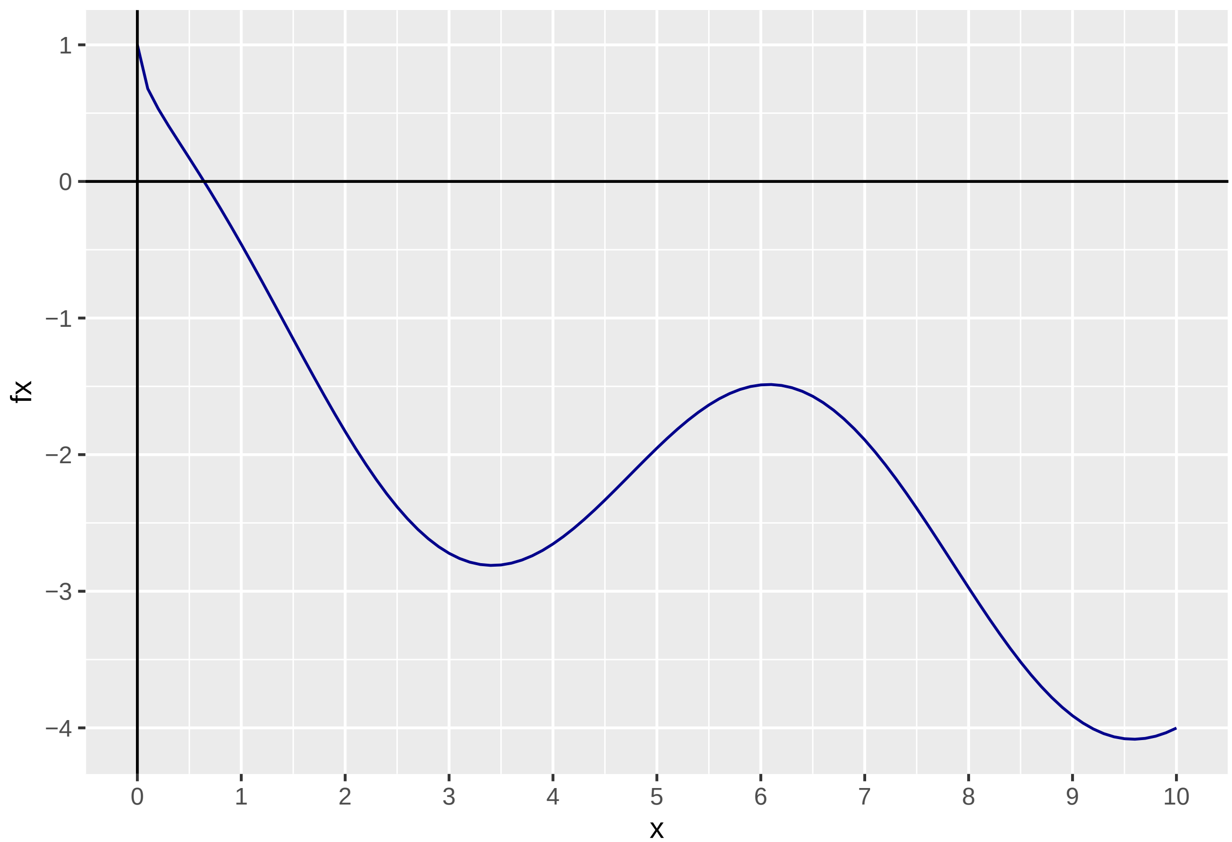
Ejercicio 1: $cos(x) = \sqrt{x}$

Paso la ecuación a la forma $f(x) = 0$.

$$cos(x) - \sqrt{x} = 0$$

Gráfico la ecuación para observar en que intervalo tiene la raíz

```r
f <- function(x){
  return(cos(x)-sqrt(x))
}

#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(0, 10, by = 0.1)

#Genero los puntos
fx <- f(x)

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Est grafica una linea
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)

#Agrego el eje Y
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Le modifico la escala al eje X para poder obtener un mejor intervalo
gg_fx <- gg_fx + scale_x_continuous(name = "x", breaks = seq(0, 10, by = 1))

#Grafico
gg_fx
```



Se observa que la raíz se encuentra en el intervalo $[0.5; 1]$

Aplico el método:

```
print(Biseccion(a = 0.5, b = 1, tol =0.0001))
```

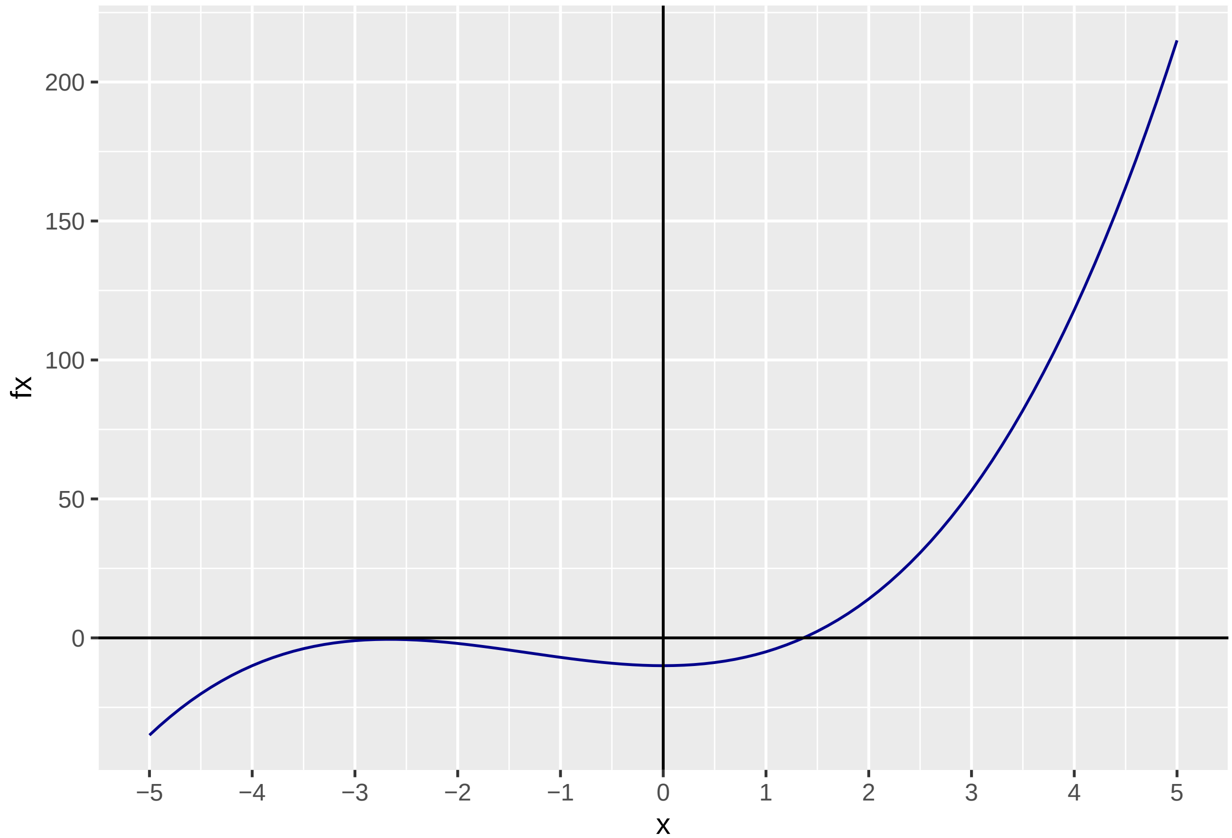
```
##            A         B         P
## 1  0.5000000 1.0000000 0.7500000
## 2  0.5000000 0.7500000 0.6250000
## 3  0.6250000 0.7500000 0.6875000
## 4  0.6250000 0.6875000 0.6562500
## 5  0.6250000 0.6562500 0.6406250
## 6  0.6406250 0.6562500 0.6484375
## 7  0.6406250 0.6484375 0.6445312
## 8  0.6406250 0.6445312 0.6425781
## 9  0.6406250 0.6425781 0.6416016
## 10 0.6416016 0.6425781 0.6420898
## 11 0.6416016 0.6420898 0.6418457
## 12 0.6416016 0.6418457 0.6417236
## 13 0.6416016 0.6417236 0.6416626
## [1] "La raiz es:  0.64166259765625"
```

Ejercicio 2: $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

Gráfico:

```
f <- function(x){
  return(x^3 + 4*x^2 - 10)
```

```r
}

#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(-5, 5, by =0.1)

#Genero los puntos
fx <- f(x)

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Est grafica una linea
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)

#Agrego el eje Y
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Le modifico la escala al eje x para poder obtener un mejor intervalo
gg_fx <- gg_fx + scale_x_continuous(name = "x", breaks = seq(-5, 5, by = 1))

#Grafico
gg_fx
```

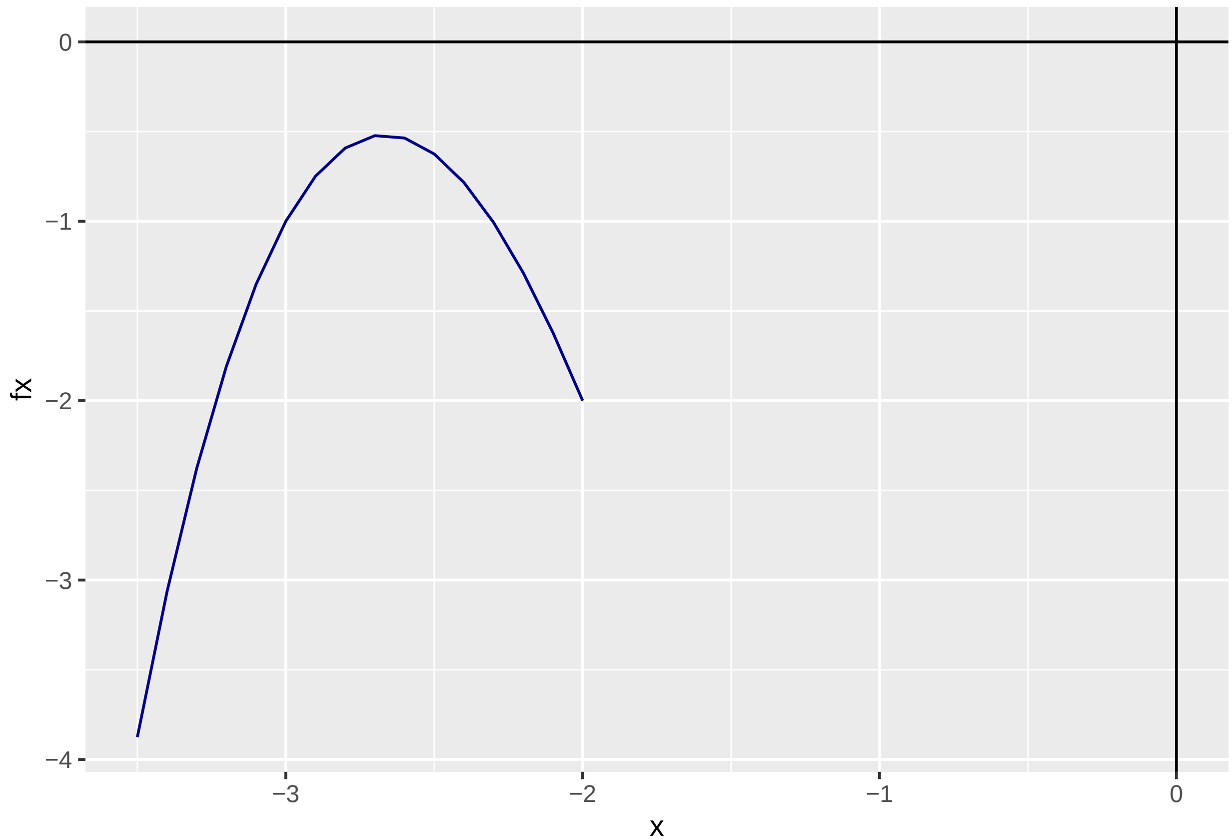


Se observa que hay una raiz en el intervalo $[1; 2]$

Grafico nuevamente en el intervalo $[-3.5; -2]$ para observar si efectivamente hay un raiz en ese intervalo

```
f <- function(x){
  return(x^3 + 4*x^2 - 10)
}

#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(-3.5, -2, by =0.1)

#Genero los puntos
fx <- f(x)

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Est grafica una linea
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)
```

```r
#Agrego el eje Y
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Grafico
gg_fx
```



Se observa que no hay una raiz en el intervalo.

Aplico el método:

```r
print(Biseccion(a = 1, b = 2, tol =0.0001))
```

```
##           A        B        P
## 1  1.000000 2.000000 1.500000
## 2  1.000000 1.500000 1.250000
## 3  1.250000 1.500000 1.375000
## 4  1.250000 1.375000 1.312500
## 5  1.312500 1.375000 1.343750
## 6  1.343750 1.375000 1.359375
## 7  1.359375 1.375000 1.367188
## 8  1.359375 1.367188 1.363281
## 9  1.363281 1.367188 1.365234
## 10 1.363281 1.365234 1.364258
## 11 1.364258 1.365234 1.364746
## 12 1.364746 1.365234 1.364990
## 13 1.364990 1.365234 1.365112
## 14 1.365112 1.365234 1.365173
```

```
## [1] "La raiz es:  1.36517333984375"
```

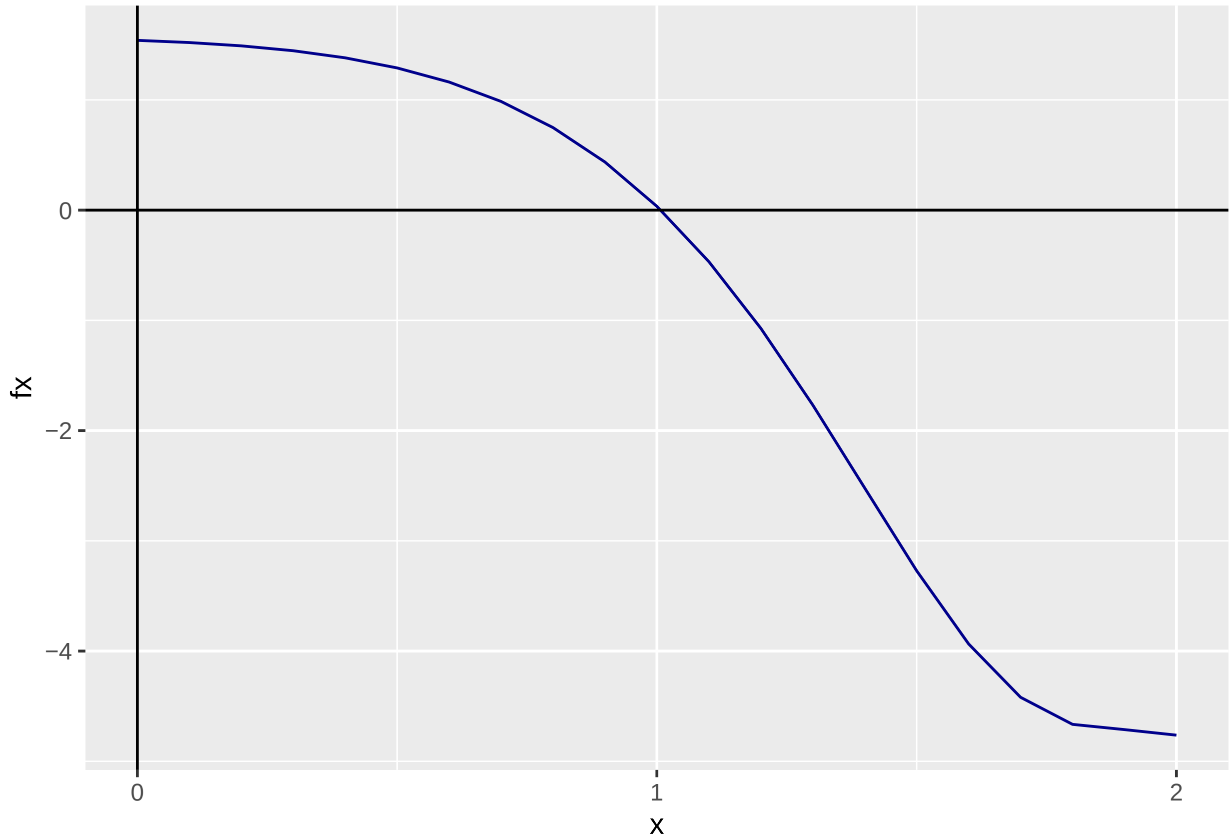
Ejercicio 3: $2 + cos(e^x - 2) = e^x$

Paso la ecuación a la forma $f(x) = 0$.

$$2 + cos(e^x - 2) - e^x = 0$$

Gráfico:

```
f <- function(x){
  return(2 + cos(exp(x) - 2) - exp(x))
}

#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(0, 2, by = 0.1)

#Genero los puntos
fx <- f(x)

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Est grafica una linea
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)

#Agrego el eje Y
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Le modifico la escala al eje X para poder obtener un mejor intervalo
gg_fx <- gg_fx + scale_x_continuous(name = "x", breaks = seq(0, 100, by = 1))

#Grafico
gg_fx
```



Se observa que la raíz se encuentra en el intervalo $[0; 2]$ Aplico el método:

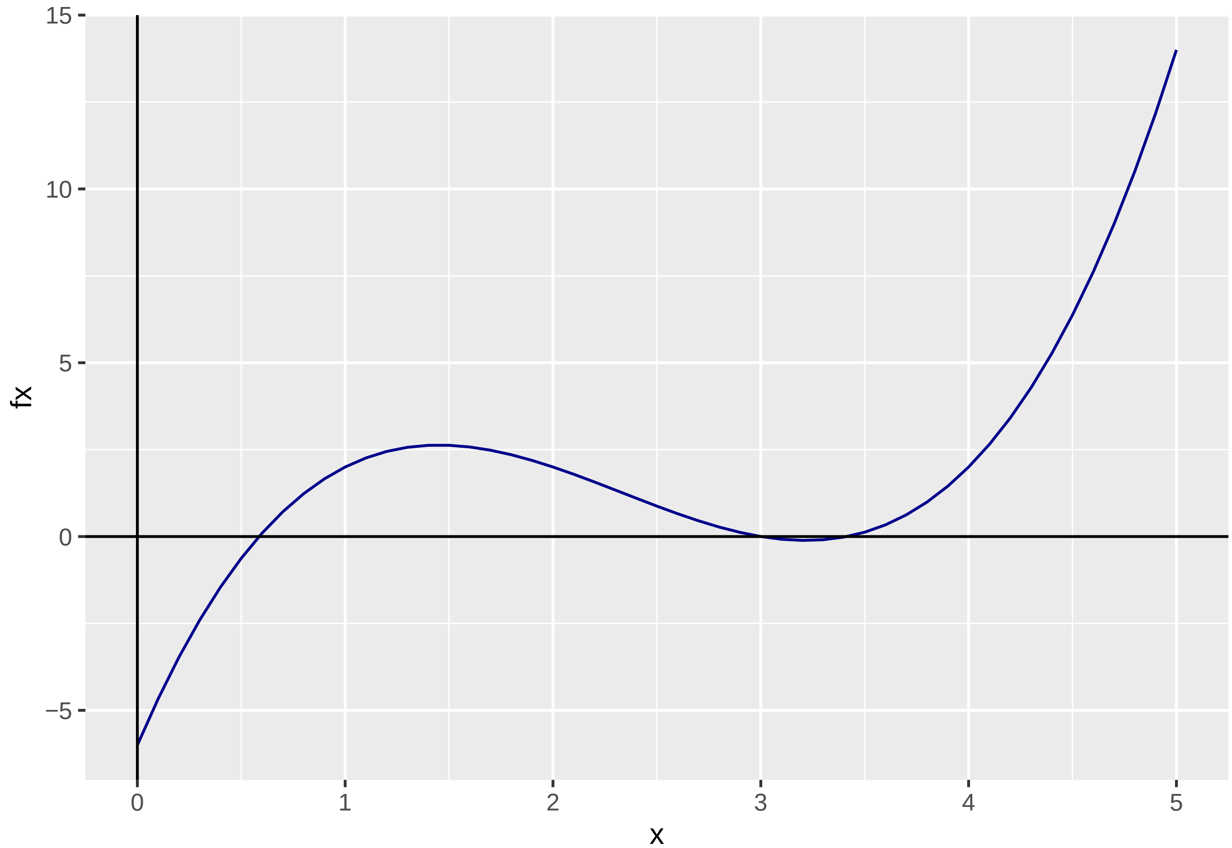
```
print(Biseccion(a = 0, b = 2, tol =0.0001))
```

```
##           A        B        P
## 1  0.000000 2.000000 1.000000
## 2  1.000000 2.000000 1.500000
## 3  1.000000 1.500000 1.250000
## 4  1.000000 1.250000 1.125000
## 5  1.000000 1.125000 1.062500
## 6  1.000000 1.062500 1.031250
## 7  1.000000 1.031250 1.015625
## 8  1.000000 1.015625 1.007812
## 9  1.000000 1.007812 1.003906
## 10 1.003906 1.007812 1.005859
## 11 1.005859 1.007812 1.006836
## 12 1.006836 1.007812 1.007324
## 13 1.007324 1.007812 1.007568
## 14 1.007568 1.007812 1.007690
## 15 1.007568 1.007690 1.007629
## [1] "La raiz es:  1.00762939453125"
```

Ejercicio 4: $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$

Gráfico:

```r
f <- function(x){
  return(x^3 - 7*x^2 + 14*x - 6)
}

#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(0, 5, by = 0.1)

#Genero los puntos
fx <- f(x)

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Est grafica una linea
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)

#Agrego el eje Y
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Grafico
gg_fx
```



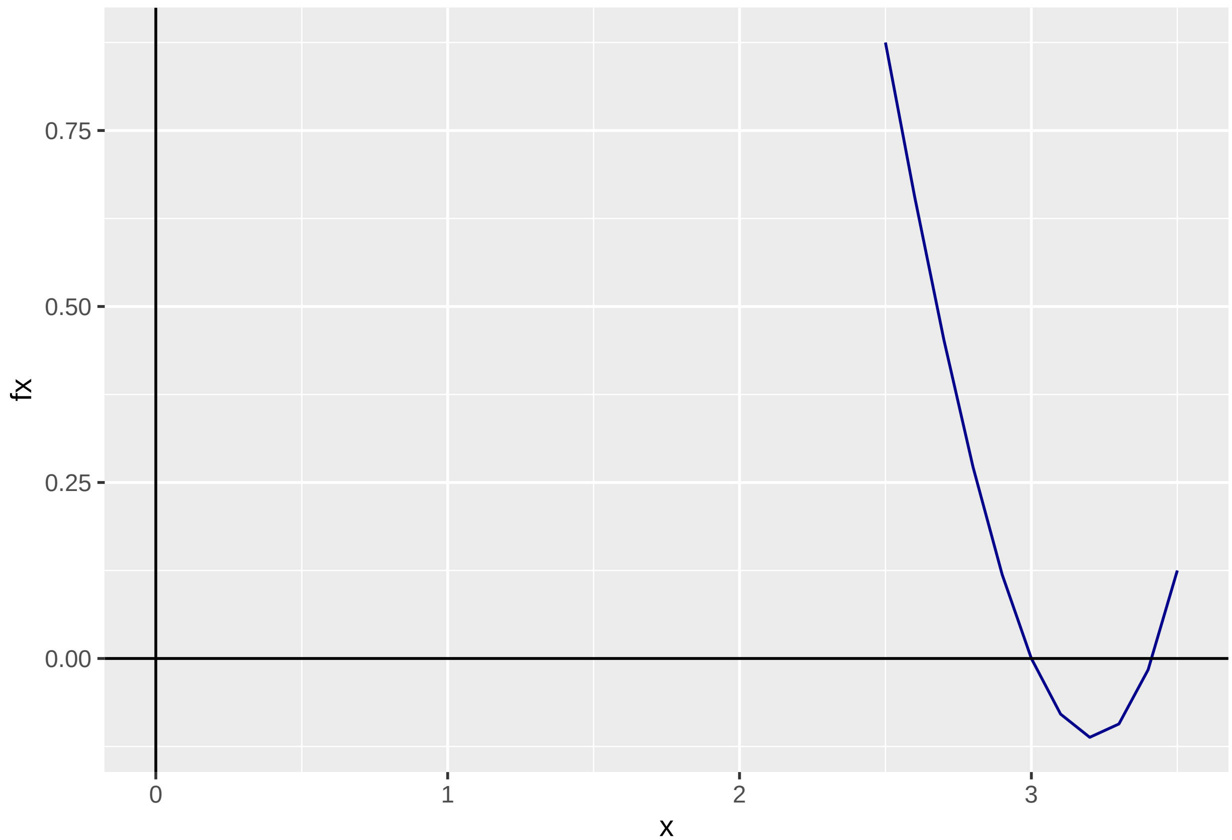
Al ser un polinomio completo de grado 3 tiene 3 raices.

Se observa una raiz en el intervalo $[0; 1]$

Le modifico la escala al grafico para obtener una mejor aproximación de donde se ubican las dos restantesa

```
#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(2.5, 3.5, by = 0.1)

#Genero los puntos
fx <- f(x)

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Est grafica una linea
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)

#Agrego el eje Y
```

```r
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Grafico
gg_fx
```



Se observa que tiene una raiz en el intervalo $[2.75; 3.25]$ y otra en el intervalo $[3.26; 3.5]$

Aplico el método para el intervalo $[0; 1]$:

```r
print(Biseccion(a = 0, b = 1, tol =0.0001))
```

```
##            A         B         P
## 1  0.0000000 1.0000000 0.5000000
## 2  0.5000000 1.0000000 0.7500000
## 3  0.5000000 0.7500000 0.6250000
## 4  0.5000000 0.6250000 0.5625000
## 5  0.5625000 0.6250000 0.5937500
## 6  0.5625000 0.5937500 0.5781250
## 7  0.5781250 0.5937500 0.5859375
## 8  0.5781250 0.5859375 0.5820312
## 9  0.5820312 0.5859375 0.5839844
## 10 0.5839844 0.5859375 0.5849609
## 11 0.5849609 0.5859375 0.5854492
## 12 0.5854492 0.5859375 0.5856934
## 13 0.5856934 0.5859375 0.5858154
## 14 0.5856934 0.5858154 0.5857544
## [1] "La raiz es:  0.58575439453125"
```

Aplico el método para el intervalo $[2.75; 3.25]$:

```
print(Biseccion(a = 2.75, b = 3.25, tol =0.0001))
```

```
##      A    B P
## 1 2.75 3.25 3
## [1] "La raiz es:  3"
```

Aplico el método para el intervalo $[3.26; 3.5]$:

```
print(Biseccion(a = 3.26, b = 3.5, tol =0.0001))
```

```
##           A        B        P
## 1  3.260000 3.500000 3.380000
## 2  3.380000 3.500000 3.440000
## 3  3.380000 3.440000 3.410000
## 4  3.410000 3.440000 3.425000
## 5  3.410000 3.425000 3.417500
## 6  3.410000 3.417500 3.413750
## 7  3.413750 3.417500 3.415625
## 8  3.413750 3.415625 3.414688
## 9  3.413750 3.414688 3.414219
## 10 3.413750 3.414219 3.413984
## 11 3.413984 3.414219 3.414102
## 12 3.414102 3.414219 3.414160
## [1] "La raiz es:  3.41416015625"
```