

Punto fijo

Uriel Paluch

4/9/2021

Método de punto fijo

Un punto fijo para una función es un número en el que el valor de la función no cambia cuando se aplica la función. Decimos que el número p es un punto fijo para una función dada g si $g(p) = p$

Los problemas para encontrar la raíz y los de punto fijo son equivalentes en el siguiente sentido:

Dado un problema para encontrar la raíz $f(p) = 0$, podemos definir las funciones g con un punto fijo en p en diferentes formas, por ejemplo:

$$g(x) = x - f(x)$$

Si la función g tiene un punto fijo en p , entonces la función tiene un cero en p .

Teorema:

1. Si la función es continua en el intervalo $[a; b]$
2. Si, además, $g'(x)$ existe en todo $(a; b)$ y hay una constante $0 < k < 1$ con:

$$|g'(x)| \leq k$$

Método de iteración de punto fijo:

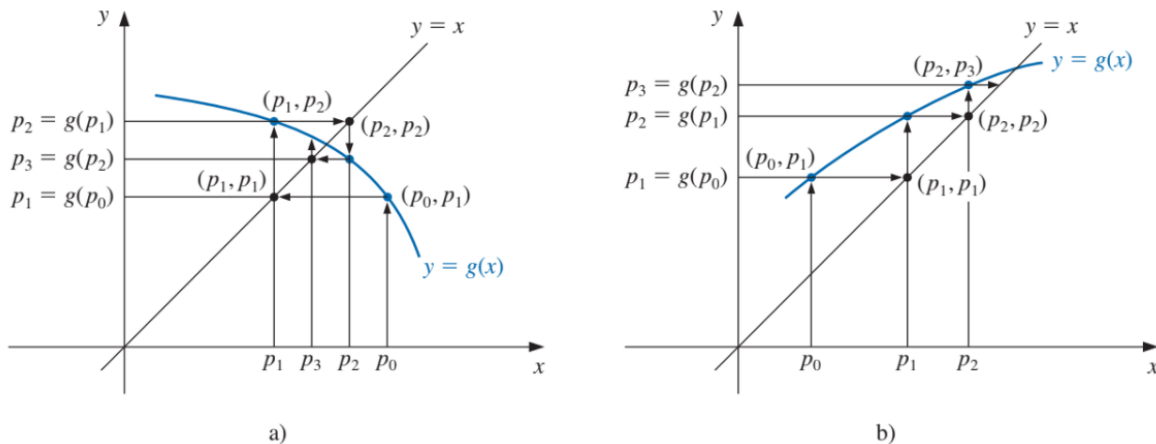


Figure 1: Método de iteración de punto fijo

```
#Método de punto fijo
PuntoFijo <- function(p0, n = 100, tol){
```

```

#Donde p0 es la aproximación inicial
#El número máximo de iteraciones n viene por default en 100
#Y tol es la tolerancia al error

#Instancio las listas vacias
lista_p <- c(NULL)
lista_gp <- c(NULL)

for (i in 1:n) {
  #Calculo p
  p <- f(p0)

  lista_p[i] <- p0
  lista_gp[i] <- p

  if(abs(p-p0) <= tol){
    #Creo un data frame con las listas
    datos <- data.frame(lista_p, lista_gp)
    colnames(datos) <- c("P", "G(P)")
    print(datos)
    return(p)
  }

  p0 <- p
}

#En el caso de que falle el método
return(paste('El método falla luego de: ', n, ' iteraciones'))
}

```

Es muy importante dejar expresadas las ecuaciones con la forma de punto fijo:

$$x = g(x)$$

No todas las formas de la expresión pueden ser correctas, la ecuación puede resultar en un punto fijo, diverger o volverse indefinida dependiendo de el cumplimiento del teorema.

Ejercicios:

- Aplicar directamente el algoritmo:
 1. $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$
 2. $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}}$
 3. $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$
 4. $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$
 5. $x = g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$
- Reescribir como problemas de punto fijo y hallar la solución de:
 1. $\cos(x) = \sqrt{x}$
 2. $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$
 3. $2 + \cos(e^x - 2) = e^x$
 4. $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$

Solución:

Aplicando directamente el algoritmo:

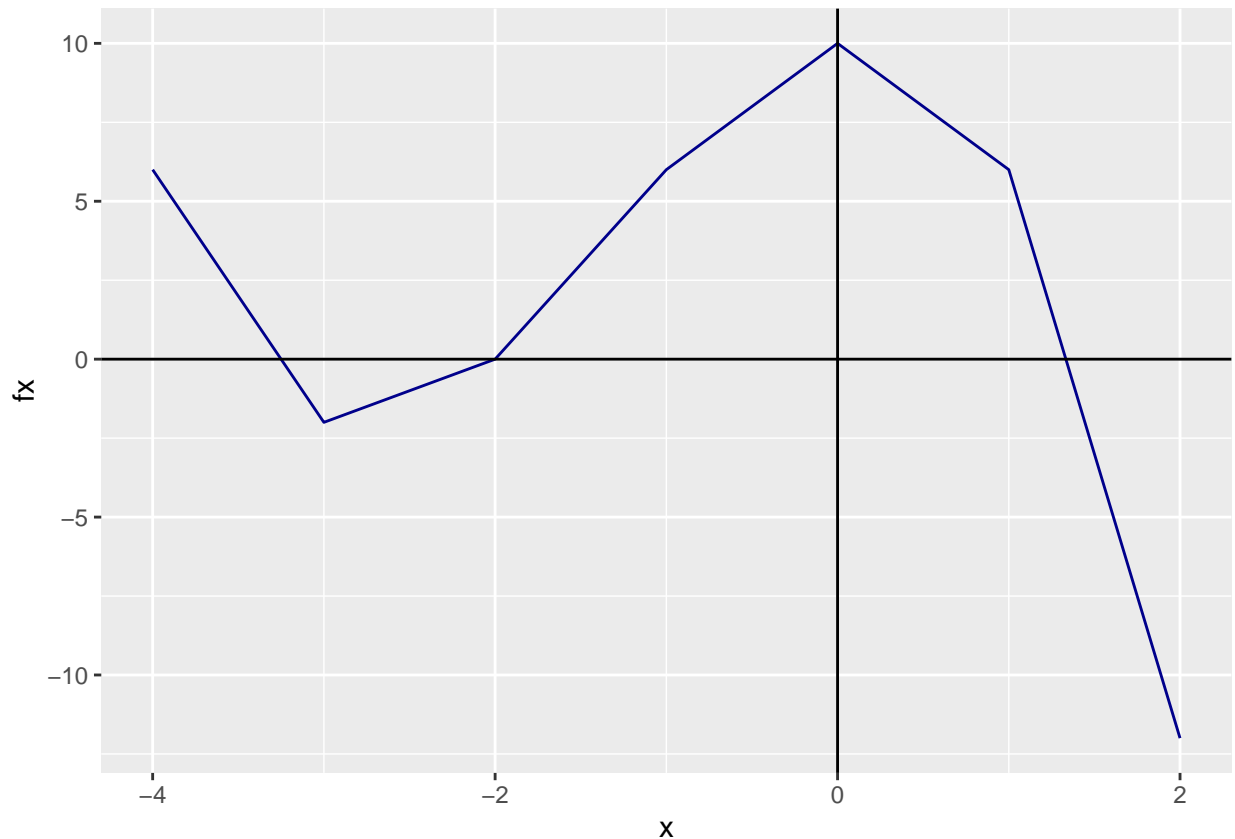
Ejercicio 1:

Grafico la función:

$$x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$$

Al ser un polinomio completo de grado 3 debe tener 3 raíces

```
f <- function(x){  
  return(x - x^3 - 4*x^2 + 10)  
}  
  
#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función  
x <- seq(-4, 2, by = 1)  
  
#Genero los puntos  
fx <- f(x)  
  
#Creo un data frame con los x e y  
df <- data.frame(x, fx)  
  
#Instancio los datos  
gg_fx <- ggplot(data = df)  
  
#Agrego la capa con los datos  
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)  
  
#Est grafica una linea  
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")  
  
#Agrego el eje X  
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)  
  
#Agrego el eje Y  
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)  
  
#Grafico  
gg_fx
```



Se observa graficamente que hay raíces en los siguientes intervalos $[-4; -3]$, $[-2.5; -1.5]$ y $[1; 2]$.

Evaluo el método con $p_0 = 1$

```
this_could_go_wrong <- tryCatch(
  print(PuntoFijo(p0 = 1, tol = 0.0001)),
  error = function(e){print("Error")})
```

```
## [1] "Error"
```

Tira error porque probablemente no cumpla con las condiciones del teorema. Vamos a comprobarlo:

1. Se observa graficamente que la función es continua en todo el intervalo.
2. Evaluo la derivada en diferentes puntos del intervalo $[1, 2]$

```
fprima <- D(expression(x - x^3 - 4*x^2 + 10), "x")
```

```
fprima
```

```
## 1 - 3 * x^2 - 4 * (2 * x)
```

```
fprima <- function(x){
  return(1-3*x^2-4*(2*x))
}
```

```
x <- seq(1, 2, by =0.1)
```

```
#Genero los puntos
fprimax <- fprima(x)
```

```
#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fprimax)
```

```
#Lo imprimo
df
```

```
##      x fprimax
## 1  1.0 -10.00
## 2  1.1 -11.43
## 3  1.2 -12.92
## 4  1.3 -14.47
## 5  1.4 -16.08
## 6  1.5 -17.75
## 7  1.6 -19.48
## 8  1.7 -21.27
## 9  1.8 -23.12
## 10 1.9 -25.03
## 11 2.0 -27.00
```

Se observa que no cumple con:

$$|g'(x)| \leq 1$$

Evaluo el método con $p_0 = -2$

```
this_could_go_wrong <- tryCatch(
  print(PuntoFijo(p0 = -2, tol = 0.0001)),
  error = function(e){print("Error")})
```

```
## [1] "Error"
```

Tira error porque probablemente no cumpla con las condiciones del teorema. Vamos a comprobarlo:

1. Se observa graficamente que la función es continua en todo el intervalo.
2. Evaluo la derivada en diferentes puntos del intervalo $[-2.5, -1.5]$

```
x <- seq(-2.5, -1.5, by = 0.1)
```

```
#Genero los puntos
fprimax <- fprima(x)
```

```
#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fprimax)
```

```
#Lo imprimo
df
```

```
##      x fprimax
## 1 -2.5  2.25
## 2 -2.4  2.92
## 3 -2.3  3.53
## 4 -2.2  4.08
## 5 -2.1  4.57
## 6 -2.0  5.00
## 7 -1.9  5.37
## 8 -1.8  5.68
## 9 -1.7  5.93
```

```
## 10 -1.6    6.12
## 11 -1.5    6.25
```

Se observa que no cumple con:

$$|g'(x)| \leq 1$$

Evaluo el método con $p_0 = -3$

```
this_could_go_wrong <- tryCatch(
  print(PuntoFijo(p0 = -3, tol = 0.0001)),
  error = function(e){print("Error")})
```

```
## [1] "Error"
```

Tira error porque probablemente no cumpla con las condiciones del teorema. Vamos a comprobarlo:

1. Se observa graficamente que la función es continua en todo el intervalo.
2. Evaluo la derivada en diferentes puntos del intervalo $[-4, -3]$

```
x <- seq(-4, -3, by =0.1)
```

```
#Genero los puntos
fprimax <- fprima(x)
```

```
#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fprimax)
```

```
#Lo imprimo
df
```

```
##      x fprimax
## 1 -4.0 -15.00
## 2 -3.9 -13.43
## 3 -3.8 -11.92
## 4 -3.7 -10.47
## 5 -3.6 -9.08
## 6 -3.5 -7.75
## 7 -3.4 -6.48
## 8 -3.3 -5.27
## 9 -3.2 -4.12
## 10 -3.1 -3.03
## 11 -3.0 -2.00
```

Se observa que no cumple con:

$$|g'(x)| \leq 1$$

Ejercicio 2:

Grafico la función:

$$x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}}$$

```
f <- function(x){
  return((10/x-4*x)^(1/2))
}
```

```

#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(-4, 2, by = 0.001)

#Genero los puntos
fx <- f(x)

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Est grafica una linea
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

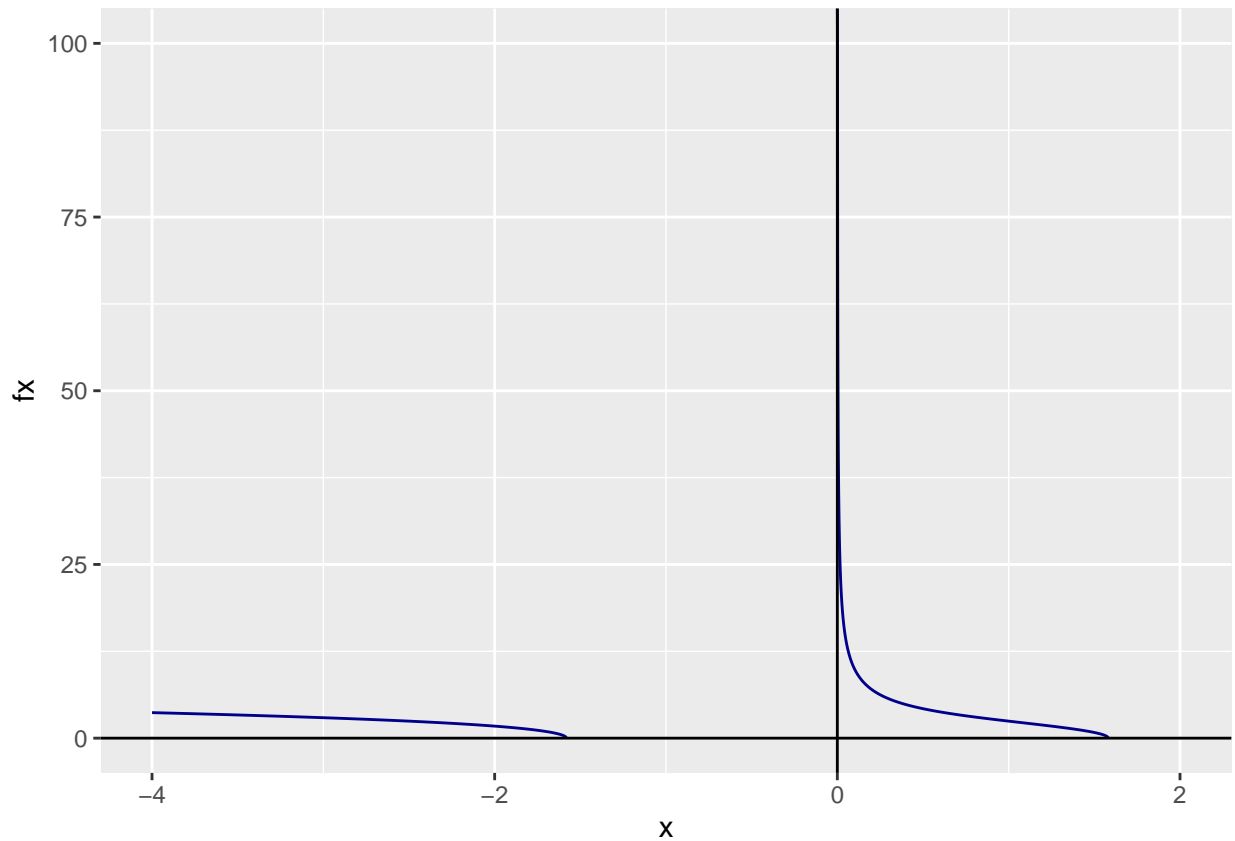
#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)

#Agrego el eje Y
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Grafico
gg_fx

## Warning: Removed 419 row(s) containing missing values (geom_path).

```



Se observa graficamente que la función no cumple con la primera condición del teorema:

1. Ser continua.

Por lo tanto, no es aplicable el método de punto fijo para encontrar sus raíces

Ejercicio 3:

Grafico la función:

$$x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$$

```
#La función del ejercicio
f <- function(x){
  return((1/2)*(10-x^3)^(1/2))
}
#La función para graficar la raíz
g <- function(x){
  return(-x+(1/2)*(10-x^3)^(1/2))
}

#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(-5, 2.5, by = 0.0001)

#Genero los puntos
fx <- f(x)
```



```

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Grafica la función del ejercicio
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

#Gráfico  $x = y$ 
gg_fx <- gg_fx + geom_line(aes(y = x), colour = "darkred")

#Gráfico la función del ejercicio donde esta la raíz
gg_fx <- gg_fx + geom_line(aes(x = x, y = g(x)), colour = "steelblue")

#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)

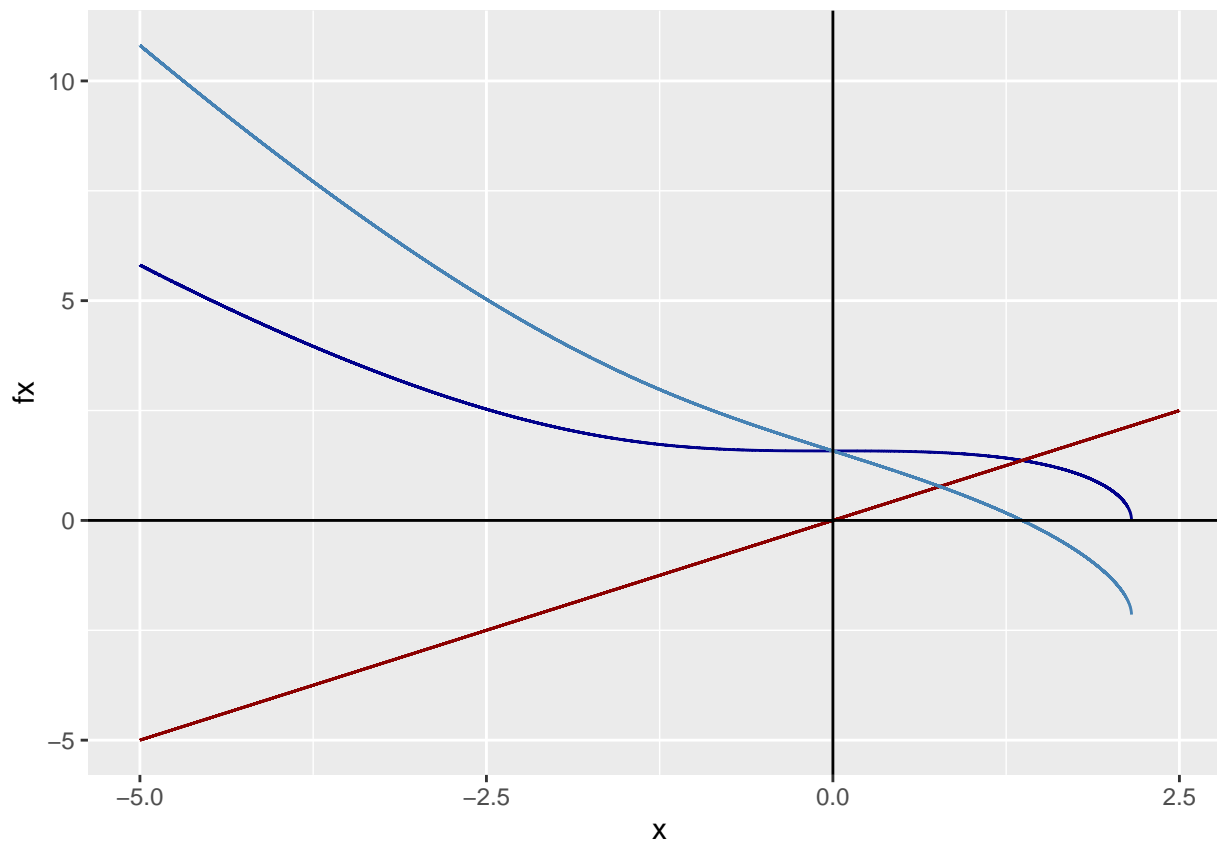
#Agrego el eje Y
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Grafico
gg_fx

## Warning: Removed 3456 row(s) containing missing values (geom_path).

## Warning: Removed 3456 row(s) containing missing values (geom_path).

```



```
this_could_go_wrong <- tryCatch(
  PuntoFijo(p0 = 2, tol = 0.001),
  error = function(e){print("Error")})
```

```
##          P      G(P)
## 1  2.0000000 0.7071068
## 2  0.7071068 1.5529365
## 3  1.5529365 1.2504919
## 4  1.2504919 1.4181474
## 5  1.4181474 1.3367782
## 6  1.3367782 1.3794210
## 7  1.3794210 1.3578691
## 8  1.3578691 1.3689731
## 9  1.3689731 1.3633071
## 10 1.3633071 1.3662127
## 11 1.3662127 1.3647264
## 12 1.3647264 1.3654877
```

```
if (this_could_go_wrong != "Error"){
  raiz <- this_could_go_wrong
  print(paste("La raiz es: ", raiz))
}
```

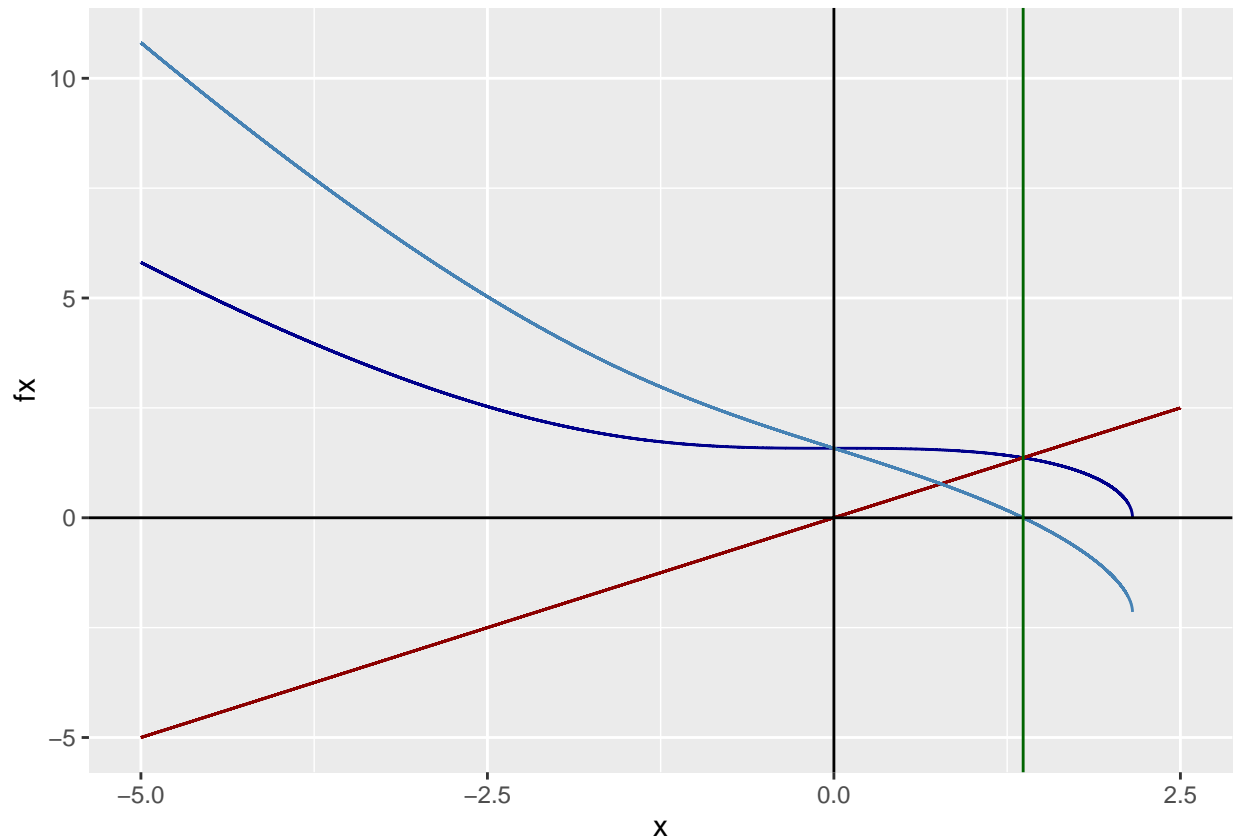
```
## [1] "La raiz es: 1.36548770206867"
```

```
#Agrego la linea recta que une los puntos entre la función del ejercicio, el punto fijo y la raiz
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = raiz, linetype = 1, colour="darkgreen")
```

```
#Grafico
gg_fx
```

```
## Warning: Removed 3456 row(s) containing missing values (geom_path).
```

```
## Warning: Removed 3456 row(s) containing missing values (geom_path).
```



Ejercicio 4:

Grafico la función:

$$x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

```
#La función del ejercicio
f <- function(x){
  return((10/(4+x))^(1/2))
}
```

```
#La función para graficar la raíz
g <- function(x){
  return(-x+(10/(4+x))^(1/2))
}
```

```
#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(-4, 2.5, by = 0.0001)
```

```

#Genero los puntos
fx <- f(x)

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Grafica la función del ejercicio
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

#Gráfico  $x = y$ 
gg_fx <- gg_fx + geom_line(aes(y = x), colour = "darkred")

#Gráfico la función del ejercicio donde esta la raiz
gg_fx <- gg_fx + geom_line(aes(x = x, y = g(x)), colour = "steelblue")

#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)

#Agrego el eje Y
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Grafico
gg_fx

```

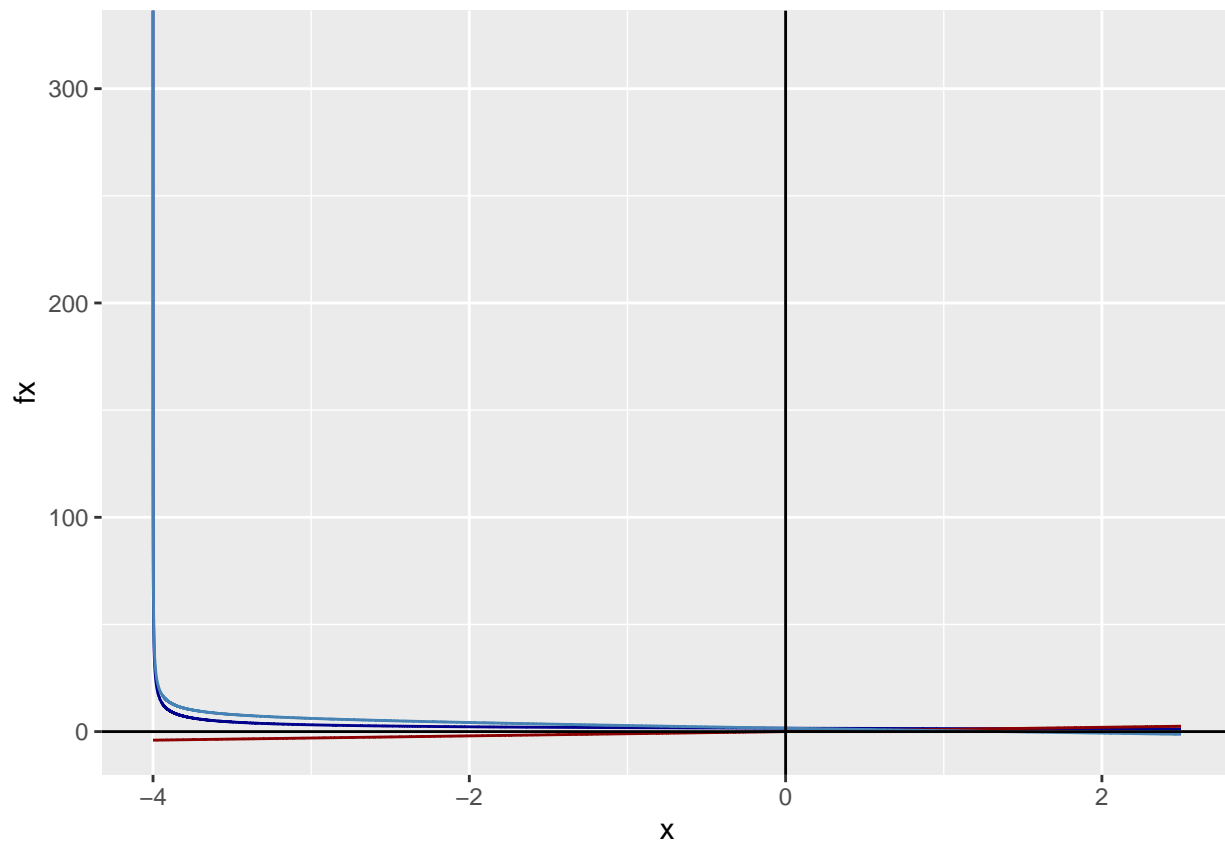


Grafico nuevamente la función en el intervalo $[0; 2]$ para tener una visión mas clara.

```
#La función del ejercicio
f <- function(x){
  return((10/(4+x))^(1/2))
}

#La función para graficar la raiz
g <- function(x){
  return(-x+(10/(4+x))^(1/2))
}

#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(0, 2, by = 0.0001)

#Genero los puntos
fx <- f(x)

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Grafica la función del ejercicio
```

```

gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

#Gráfico  $x = y$ 
gg_fx <- gg_fx + geom_line(aes(y = x), colour = "darkred")

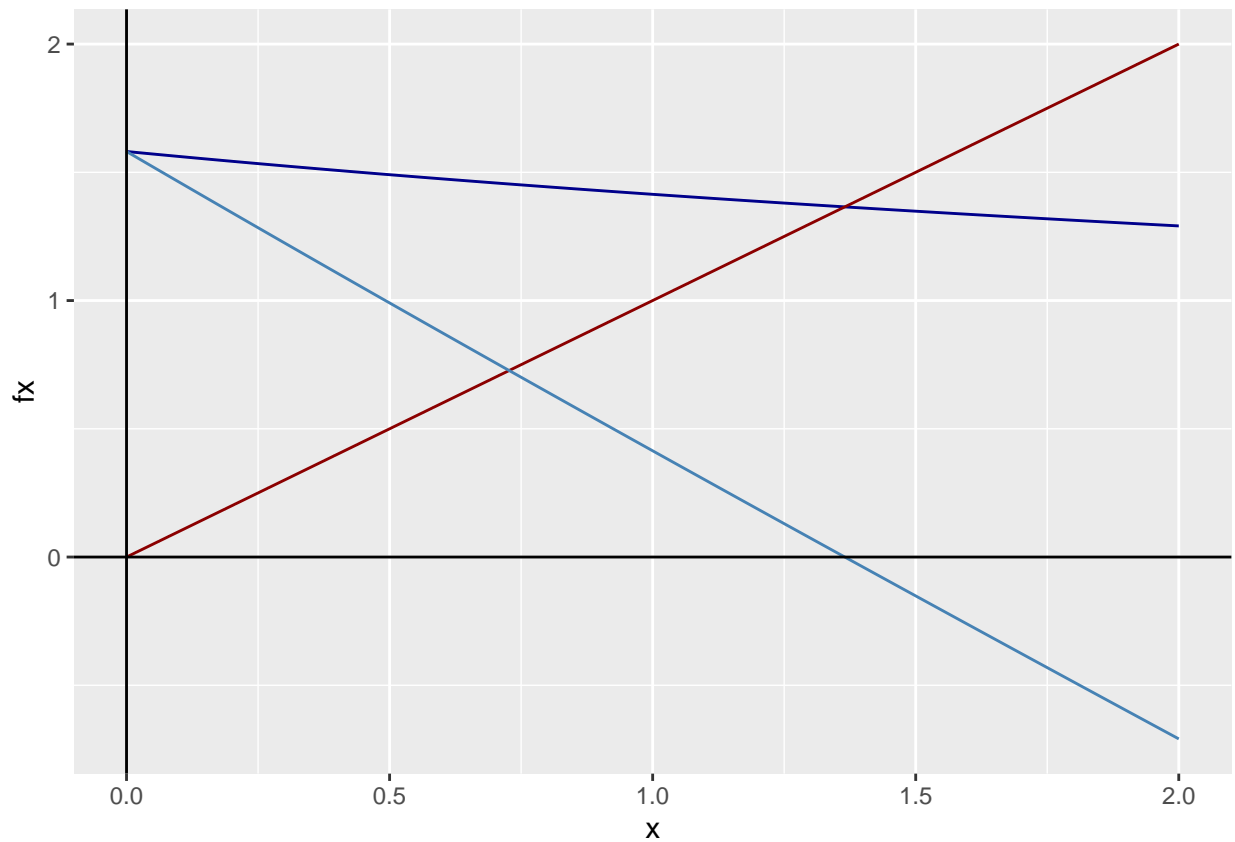
#Gráfico la función del ejercicio donde esta la raíz
gg_fx <- gg_fx + geom_line(aes(x = x, y = g(x)), colour = "steelblue")

#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)

#Agrego el eje Y
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Grafico
gg_fx

```



Se observa una raíz cerca de $p_0 = 1.25$

```

this_could_go_wrong <- tryCatch(
  PuntoFijo(p0 = 1.25, tol = 0.001),
  error = function(e){print("Error")}
)

```

```

##          P      G(P)
## 1 1.250000 1.380131
## 2 1.380131 1.363338
## 3 1.363338 1.365471

```

```
## 4 1.365471 1.365199
```

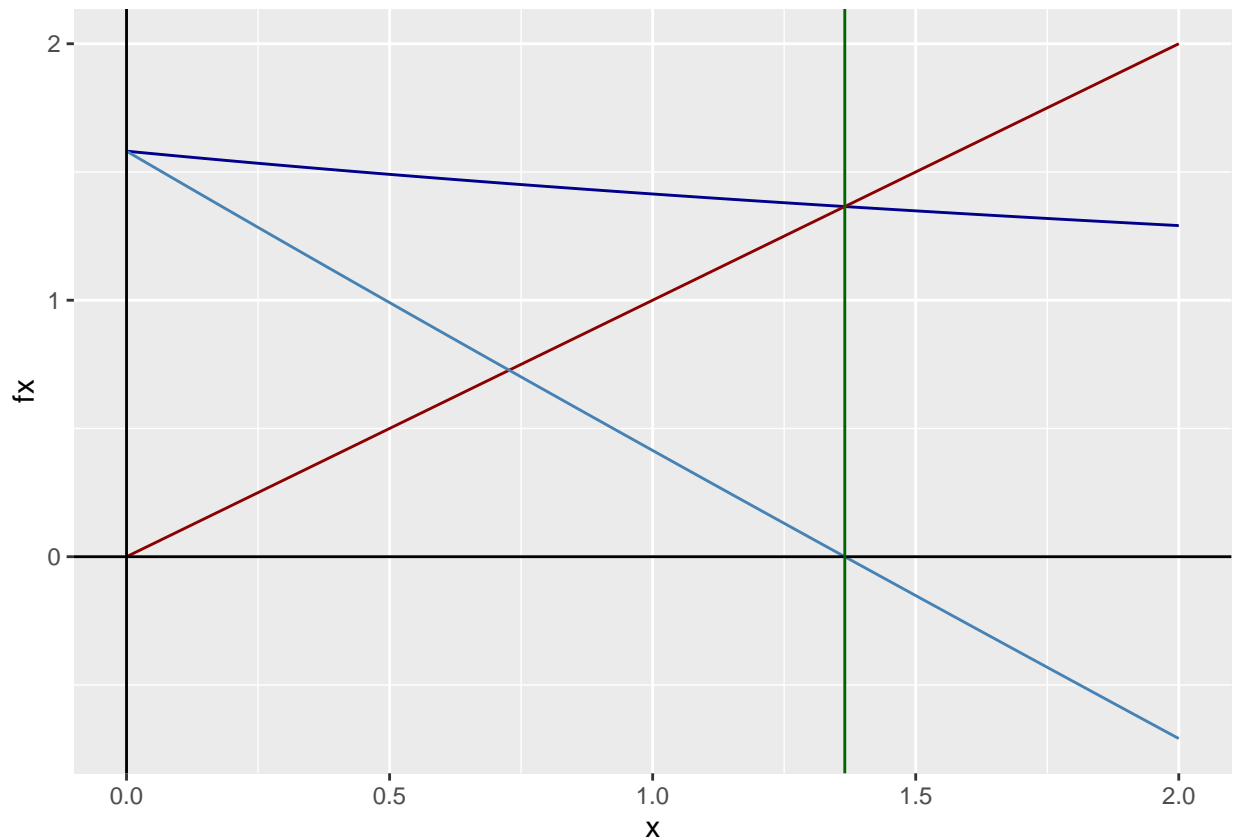
```
if (this_could_go_wrong != "Error"){  
  raiz <- this_could_go_wrong  
  print(paste("La raiz es: ", raiz))  
}
```

```
## [1] "La raiz es: 1.36519938124783"
```

```
#Agrego la linea recta que une los puntos entre la función del ejercicio, el punto fijo y la raiz  
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = raiz, linetype = 1, colour="darkgreen")
```

```
#Grafico
```

```
gg_fx
```



Ejercicio 5:

Grafico la función:

$$x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

```
#La función del ejercicio
```

```
f <- function(x){  
  return(x-(x^3+4*x^2-10)/(3*x^2+8*x))  
}
```

```
#La función para graficar la raiz
```

```
g <- function(x){
```

```

    return(-x+x-(x^3+4*x^2-10)/(3*x^2+8*x))
}

#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(-10, 10, by = 0.1)

#Genero los puntos
fx <- f(x)

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Grafica la función del ejercicio
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

#Gráfico x = y
gg_fx <- gg_fx + geom_line(aes(y = x), colour = "darkred")

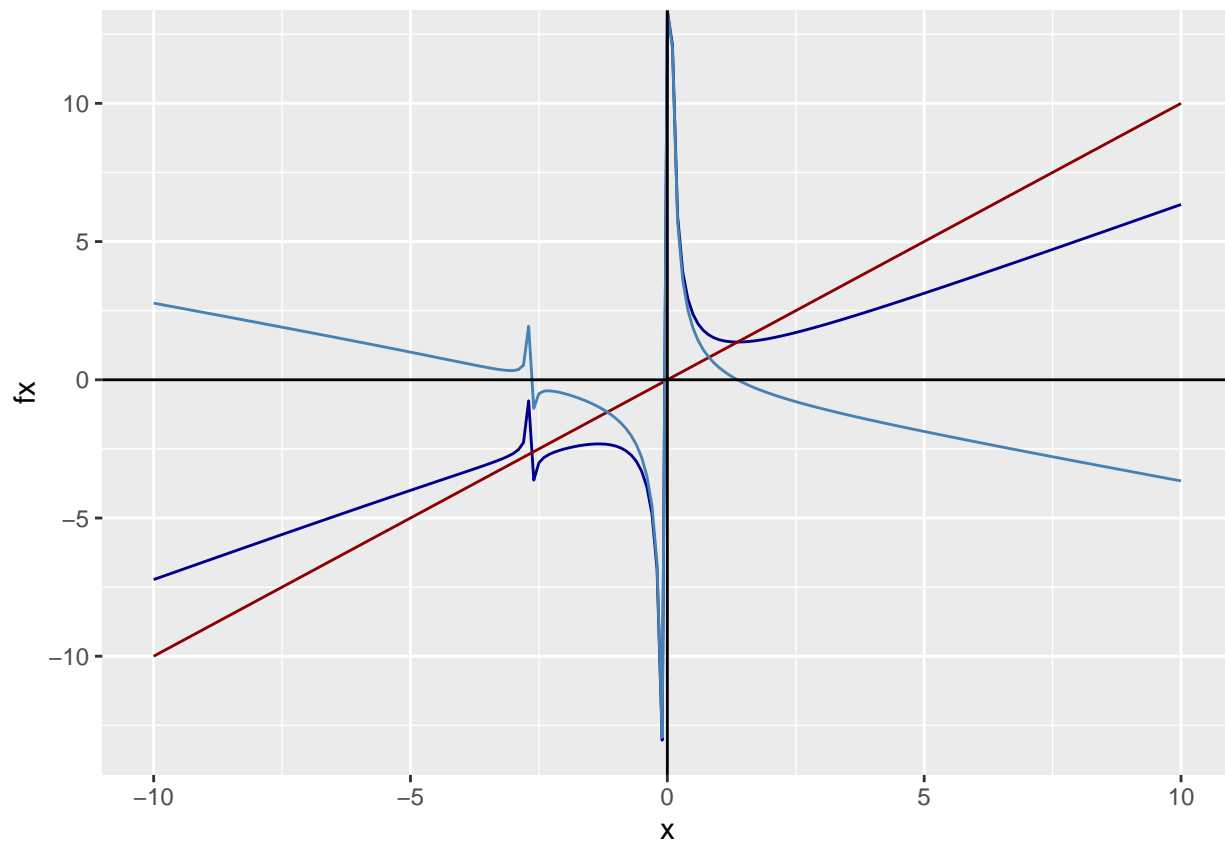
#Gráfico la función del ejercicio donde esta la raiz
gg_fx <- gg_fx + geom_line(aes(x = x, y = g(x)), colour = "steelblue")

#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)

#Agrego el eje Y
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Grafico
gg_fx

```

Se observa una raíz en el intervalo $[1; 2.5]$

Tomo $p_0 = 1$

```
this_could_go_wrong <- tryCatch(
  PuntoFijo(p0 = 1, tol = 0.001),
  error = function(e){print("Error")})
```

```
##          P      G(P)
## 1 1.000000 1.454545
## 2 1.454545 1.368900
## 3 1.368900 1.365237
## 4 1.365237 1.365230
```

```
print(this_could_go_wrong)
```

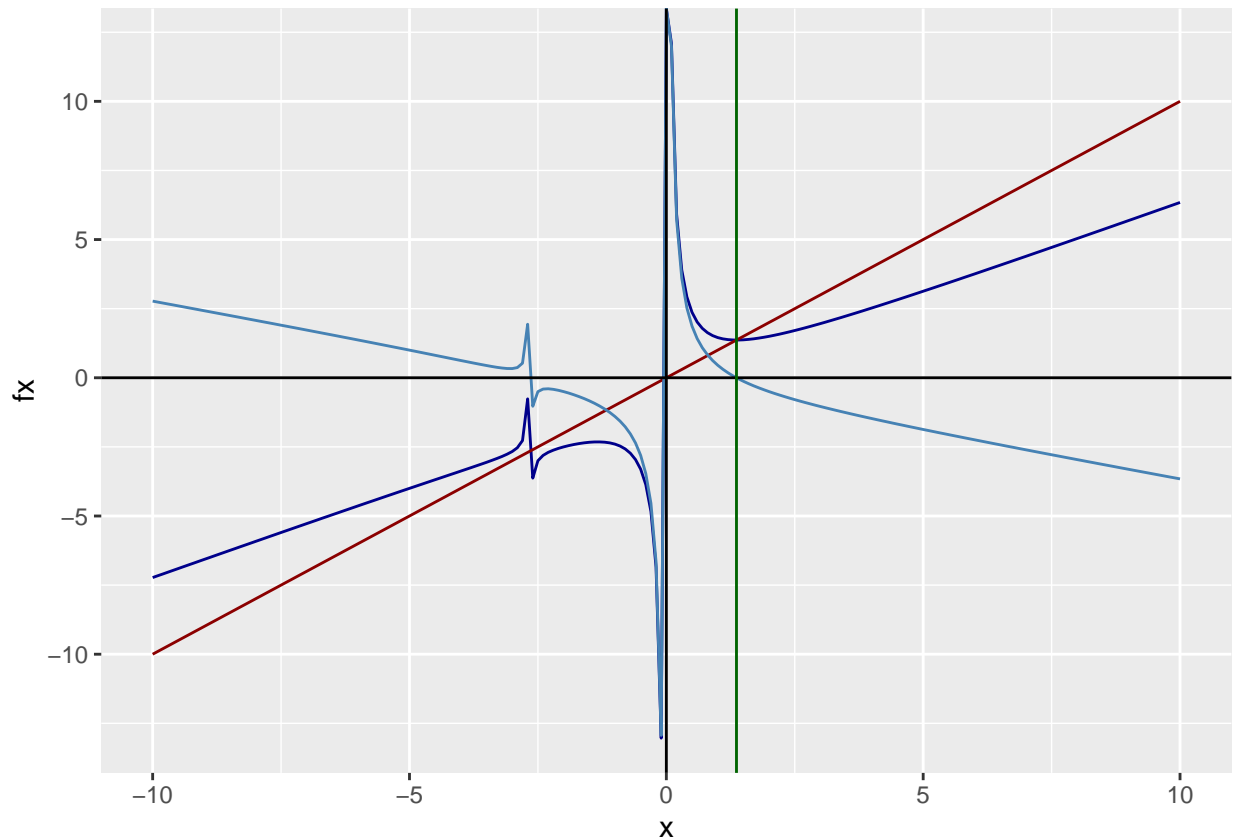
```
## [1] 1.36523
```

```
if (this_could_go_wrong != "Error"){
  raiz <- this_could_go_wrong
  print(paste("La raíz es: ", raiz))
}
```

```
## [1] "La raíz es: 1.36523001343537"
```

```
#Agrego la línea recta que une los puntos entre la función del ejercicio, el punto fijo y la raíz
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = raiz, linetype = 1, colour="darkgreen")
```

gg_fx



Solución:

Reescribir como problemas de punto fijo y hallar la solución de:

Ejercicio 1:

$$\cos(x) = \sqrt{x}$$

Reescribo la función:

$$\cos^2(x) = x$$

Grafico la función:

```
#La función del ejercicio
f <- function(x){
  return(cos(x)*cos(x))
}
#La función para graficar la raiz
g <- function(x){
  return(-x+cos(x)*cos(x))
}

#Instancio un vector que me va a indicar los puntos en la función
x <- seq(-10, 10, by = 0.1)
```

```

#Genero los puntos
fx <- f(x)

#Creo un data frame con los x e y
df <- data.frame(x, fx)

#Instancio los datos
gg_fx <- ggplot(data = df)

#Agrego la capa con los datos
gg_fx <- gg_fx + aes(x = x, y = fx)

#Grafica la función del ejercicio
gg_fx <- gg_fx + geom_line(linetype = 1, colour = "darkblue")

#Gráfico  $x = y$ 
gg_fx <- gg_fx + geom_line(aes(y = x), colour = "darkred")

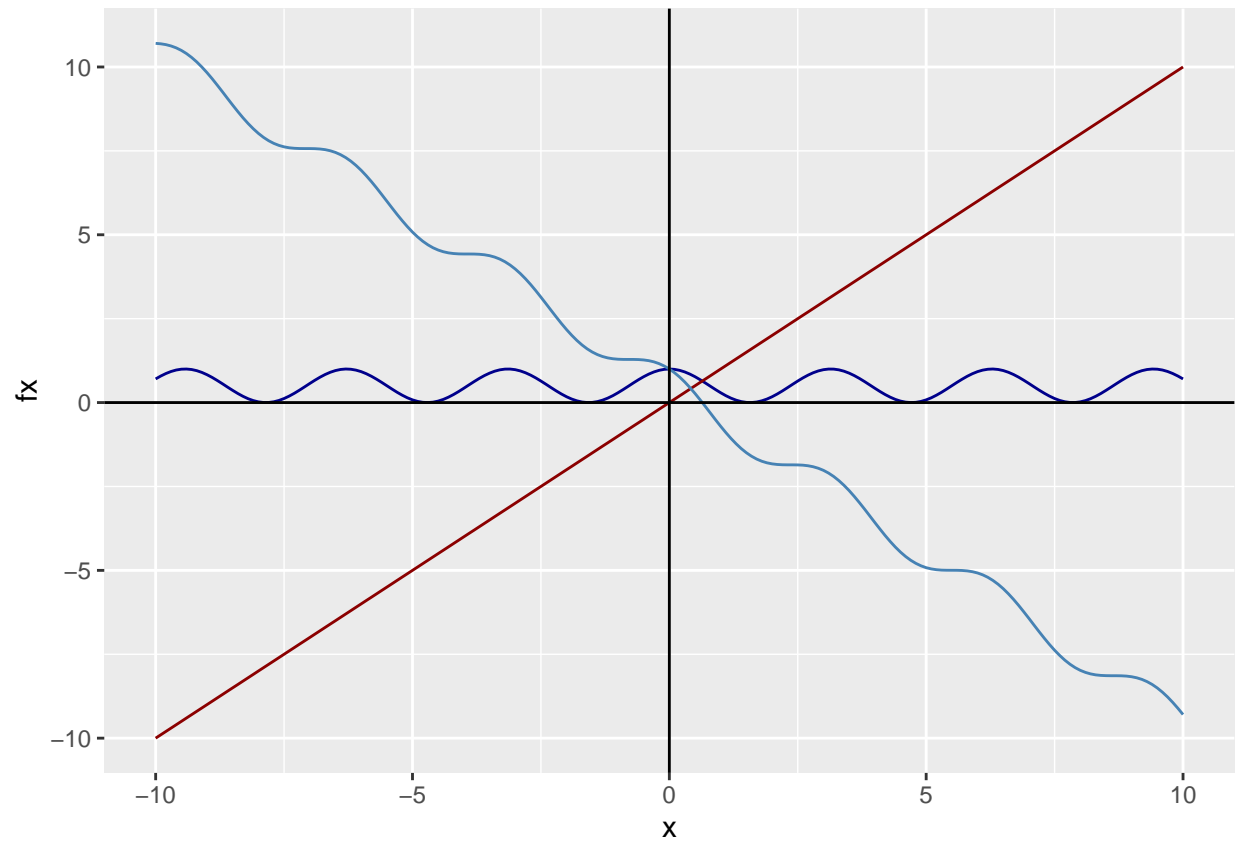
#Gráfico la función del ejercicio donde esta la raiz
gg_fx <- gg_fx + geom_line(aes(x = x, y = g(x)), colour = "steelblue")

#Agrego el eje X
gg_fx <- gg_fx + geom_vline(xintercept = 0, linetype = 1)

#Agrego el eje Y
gg_fx <- gg_fx + geom_hline(yintercept = 0, linetype = 1)

#Grafico
gg_fx

```



Se observa una raíz en el intervalo $[0; 2.5]$

Tomo $p_0 = 1$

```
this_could_go_wrong <- tryCatch(
  PuntoFijo(p0 = 1, tol = 0.001),
  error = function(e){print("Error")})

if (this_could_go_wrong != "Error"){
  raiz <- this_could_go_wrong
  print(paste("La raíz es: ", raiz))
}
```

```
## [1] "La raíz es: El método falla luego de: 100 iteraciones"
```