Modelación y Simulación
Departamento de Ingeniería en Informática
LAB Simulación Gravitacional

1 Objetivo

El objetivo de este laboratorio es practicar técnicas de simulación de objetos que se mueven en el espacio. En particular, construiremos un programa que simule el movimiento gravitacional de cuerpos circulares, bidimensionales.

2 Un poco de física

El universo es el espacio de simulación y está definido por un cuadrado de dimensiones definidas. En este espacio se posicionan un conjunto de cuerpos de diversas masas, dispuestos con una posición y velocidad inicial.

En términos simples, el objetivo del programa es simular el movimiento gravitacional de los cuerpos en este universo. El sistema evolucionará en etapas discretas de tiempo, evaluando en cada iteración las fuerzas que los cuerpos ejercen mutuamente entre ellos; calculando las nuevas velocidades, aceleraciones y posiciones.

2.1 Cuerpos y fuerza gravitacional

Sea $U = \{C_i; i = 1, \ldots, N\}$ el conjunto de N cuerpos en el universo. Sean m_i y m_j las masas (Kg.) de dos cuerpos C_i y C_j ubicados en $\vec{r}_i = (x_i, y_i)'$ y $\vec{r}_j = (x_j, y_j)'$.

Luego, la **Fuerza gravitacional** (atracción) que ejerce C_j sobre C_i es:

$$\vec{F}_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_{ij}|}\hat{r}_{ij} \tag{1}$$

donde $G = 6.674^{-11}$ (Nm^2/Kg^2) es la constante gravitacional y $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, es decir

$$\vec{r}_{ij} =< x_i - x_j, y_i - y_j >$$

El módulo del vector $\vec{r}_{ij}$ es

$$|\vec{r}_{ij}| = \Big((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\Big)^{1/2}$$

Note que $\vec{r}_{ij} = -\vec{r}_{ij}$, y que $|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_{ji}|$. Además, note que

$$\hat{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}$$

es el vector unitario, es decir $|\hat{r}_{ij}| = 1$.

La fuerza gravitacional es un vector, y por lo tanto la Ecuación (1) se expande en sus componentes

$$\begin{aligned} F_{ij}^x &= -G\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_{ij}|}\hat{r}_{ij}^x \\ F_{ij}^y &= -G\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_{ij}|}\hat{r}_{ij}^y \end{aligned}$$

La Figura (1) muestra la relación entre los vectores asociados a la fuerza gravitacional que el objeto en r_1 siente del objeto en r_2. El vector fuerza $\vec{F}_{12}$ tiene dirección opuesta al vector diferencia $\vec{r}_{12}$, y es por eso que en la Ecuación (1) aparece un signo negativo.

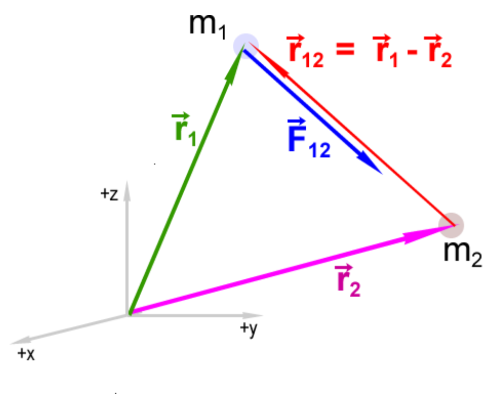

Figure 1: Vector fuerza que ejerce el cuerpo en r_2 sobre el cuerpo en r_1.

Nota: de ahora en adelante, y para simplificar notación, no usaremos el signo flecha sobre vectores. El contexto debiera decir si la cantidad es escalar o vectorial.

2.2 Velocidad y aceleración

Los cuerpos se mueven en el espacio de simulación debido a las fuerzas que experimentan. Estas fuerzas producen aceleraciones y por lo tanto cambios en la velocidad del objeto. Como los objetos cambian su posición con el tiempo, introducimos la variable t que denota tiempo. Luego,

- $r_i(t)$ es la posición del cuerpo i en tiempo t
- $v_i(t)$ es la velocidad del cuerpo i en tiempo t
- $a_i(t)$ es la acceleración del cuerpo i en tiempo t.
- $F_i(t)$ es la fuerza total actuando sobre el cuerpo i en tiempo t.

Todos estas cantidades son vectores. Simplifiando aún más la notación, eliminamos el subíndice i tal que nos referimos a un cuerpo cualquiera.

Así, la aceleración de un cuerpo de masa m en un instante dado esta dada por la relación:

$$F(t) = m \cdot a(t) \tag{2}$$

Y su velocidad por:

$$v(t) = \frac{d}{dt}r(t) \tag{3}$$

Además,

$$F(t) = m \cdot \frac{d}{dt} v(t) \tag{4}$$

Para calcular la nueva posición y velocidad de un cuerpo C_i, el algoritmo primero calcula la fuerza total que ejercen todos los otros cuerpos sobre él. Luego, actualiza la acceleración resultante del nuevo cuerpo, y con ello la nueva velocidad y la nueva posición (la velocidad y acceleración son vectores). para esto se usará un simple aproximación a las derivadas usando diferencias finitas.

La Ecuación (3) se discretiza de la siguiente manera

$$v(t+1) = \frac{r(t+1) - r(t)}{\Delta_t}$$

donde Δ_t es un intervalo de tiempo muy pequeño. Esta ecuación dice que podemos calcular la nueva posición del objeto en tiempo $t+1$ si supieramos la nueva velocidad en tiempo $t+1$. Usando la Ecuación (4), obtenemos

$$F(t) = m\frac{v(t+1) - v(t)}{\Delta_t}$$

Luego, la nueva velocidad del objeto $v(t+1)$ puede calcularse computando la fuerza total que actúa sobre él en el instante dado.

El siguiente algoritmo resume lo anteriormente visto. En este algoritmo T_f es el tiempo de simulación.

Gravitacion(U, T_f, Δ_t)
$t = 0$
while $t < T_f$ **do**
  for $C_i \in U$ **do**
    $F_i(t) = \sum_{j \neq i} F_{ij}(t)$ // Calcula fuerza total sobre el objeto
    $a_i(t+1) = F_i(t)/m_i$ // Calcula aceleracion
    $v_i(t+1) = v_i(t) + \Delta_t a_i(t+1)$ // actualiza velocidad
    $r_i(t+1) = r_i(t) + \Delta_t v_i(t+1)$ // actualiza posicion
  end for
  $t = t + \Delta_t$
end while

---

3 Programas

3.1 Sistema mono planetario

Escriba un programa en Processing que simule el movimiento de un planeta alrededor de una estrella central de masa m_0. El tamaño de la pantalla debe ser de $(800, 800)$, y de fondo blanco. La estrella se dibujará en el centro de la pantalla como un círculo de color rojo de diámetro 10, independendientemente de la masa de la estrella. La estrella permanecerá estática en el centro

Agregue un planeta con masa m_1, a una distancia $r_1 = 200$ de la estrella y asígnele una velocidad inicial v_1. Todos los cuerpos celestes debiesen ser modelados como objetos. El planeta también se dibujará como un círculo de color aleatorio, pero de diámetro proporcional a la masa asignada.

Implemente las ecuaciones de movimiento planetario descritas anteriormente, tal que se visualice el movimiento del planeta alrededor de la estrella.

Nota: Ustede debe ajustar los valores de G, y de las masas de la estrella y del planeta, y de la velocidad inicial, tal que el planeta describa una órbita circular alrededor de la estrella.

3.2 Sistema mono planetario con estrella en movimiento

En este caso, la estrella no estará estática en el centro, sino que tendrá su propio movimiento alrededor del centro geométrico del canvas. La estrella describirá una órbita circular de radio 20, con velocidad constante v_0. La estrella no percibe la fuerza de los planetas, es decir cambia su posición sólo dependiendo de v_0.

Al igual que en el caso anterior ustede debe ajustar las viariables restantes para que el planeta gire alrededor de la estrella en movimiento.

Nota: En ambos casos es muy posible que dependiendo de los valores asignados, el planeta termine sucumbiendo a la gravitación de la estrella, o salga disparado fuera del canvas. También es posible que en el caso de la estrella en movimiento, el planeta describa una órbita elipsoidal.

3.3 Sistema multi planetario con estrella en movimiento

Finalmente, escriba un programa en processing que incluya al menos 5 planetas además de la estrella en momiviento. Juegue con las masas, posiciones y velocidades iniciales e intente obtener un sistema planetario estable.

4 Entregables

Entregue tres sketches de Processing por separado y Envíe a `fernando.rannou@usach.cl`

Fecha de entrega: 21 de diciembre 2019 antes de las 24:00 hrs.