UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

MODELACIÓN Y SIMULACIÓN

LABORATORIO 4

MODELOS DE ESTADO

JUAN PABLO ROJAS ROJAS
NICOLÁS MARIÁNGEL TOLEDO

Profesor:
Gonzalo Acuña
Ayudante:
Francisco Muñoz

Santiago - Chile
21 de diciembre de 2018

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN

Regularmente nos vemos en la necesidad de tomar distintos elementos de nuestro entorno que de alguna u otra forma se relacionan, con el objetivo de analizar sus componentes y funcionamiento conjunto. Para esto definimos un sistema como una parte de la realidad en la que encontramos elementos que se relacionan entre sí para conseguir un objetivo, así, en el estudio es necesario representarlos con sus aspectos esenciales, variables y parámetros que hacen de sí un conjunto que puede ser modelado. Algunos de los sistemas pueden ser modelados matemáticamente, en los cuales claramente se puede aplicar teoría y reglas para asignarles entradas que pueden intervenir directamente en salidas ya sea esperadas o no.

1.2 OBJETIVOS

- Complementar el aprendizaje de modelos de estado, a través de la realización de actividades prácticas en MATLAB.
- Pasar de función de transferencia a modelo de estado un diagrama de bloque.
- Realizar el modelo de estado de un sistema con flujo de líquido en contenedores, obteniendo expresiones genéricas.

1.3 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

El documento consta en primera instancia de un marco teórico que define conceptos importantes para el documento, luego se presenta el primer capítulo de desarrollo, donde se muestra la cómo convertir un diagrama de bloques en una ecuación de modelos de estado. En el siguiente capítulo se muestra el desarrollo de la segunda parte, donde se resuelve de manera genérica el problema de vasos comunicantes, para finalmente terminar con una conclusión respecto a la experiencia.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 MODELOS DE ESTADO

El principal objetivo de un modelo de estado es representar procesos de la realidad, esto mediante la transformación de modelos fenomenológicos en otros más simples que poseen variables llamadas: *variables de estado*. Se busca obtener información de los modelos fenomenológicos ya sea por cada una de sus partes o en general, esto desde un punto de vista matemático en las que se puede ver representado como la siguiente ecuación:

$$f(\frac{d^n}{dt^n}, ..., \frac{dy}{dt}, y, \frac{d^m u}{dt^m}, ..., \frac{du}{dt}, du) = 0 \tag{2.1}$$

Luego, como se mencionó anteriormente existen las variables de estado que son la base para crear un modelo de estado y a través de este se nos permite desglosar la ecuación 2.1 creando así un sistema de ecuaciones conformado por dichas variables de estado:

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, ..., X_n, u_1, ..., u_n)\\ .\\ .\\ .\\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, ..., X_n, u_1, ..., u_n)\end{gathered} \tag{2.2}$$

La ecuación 2.2 muestra la representación de las variables de estado $x_1, ..., x_n$ en ecuaciones diferenciales, pero para que el modelo de estado esté completo se necesitan el modelo de salida como se presenta a continuación:

$$\begin{gathered}y_1 = h_1(x_1, ..., X_n, u_1, ..., u_n)\\ .\\ .\\ .\\ x_p = h_p(x_1, ..., X_n, u_1, ..., u_n)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Así se la ecuación 2.2 y 2.3 representan el **Modelo de estado** de un sistema en un tiempo t_0 lo cual es la mínima información necesaria para que en conjunto con el conocimiento de la entrada $u(t), t > t_0$ se pueda determinar $y(t), \geq t_0$ [1].

Las variables de estado, entradas y salidas también se pueden agrupar en vectores como se muestra a continuación que representan las variables de estado, entradas y salidas respectivamente:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_p \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Además si se define:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & . & . & . & b_{1m} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ b_{n1} & . & . & . & a_{nm} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & . & . & . & c_{1n} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ c_{p1} & . & . & . & c_{pn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_{11} & . & . & . & d_{1m} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ d_{p1} & . & . & . & d_{pm} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Se puede plantear la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= AX + BU \\ y &= CX + DU \end{aligned} \tag{2.6}$$

A partir de lo anterior se puede realizar conversiones desde funciones de transferencia en distintas formas hacia un modelo de estado o viceversa, existen tres casos:

- Función de transferencia como ensamble de modelos de primer orden(lo que se realiza en esta experiencia) a modelo de estado.
- Función de transferencia con numerador escalar a modelo de estado.
- Función de transferencia en forma modal a modelo de estado.

2.2 DIAGRAMA DE BLOQUES A MODELO DE ESTADOS

Esta función se caracteriza por realizar el procedimiento de transformar el diagrama de bloques en un modelo de estados a través de la consideración de sus variables de estados y funciones de transferencias propias de cada bloque. Se debe tener en cuenta los bloques del diagrama y los polinomios que conforman el numerador y denominador de las funciones de transferencia, es por esto que la entrada para esta función son el numerador y denominador de las funciones de transferencia de los bloques del diagrama, estos se representan como usualmente se realizan los polinomios en matlab, a través de un vector que contiene los coeficientes que acompañan las variables.
Cabe destacar que se considera el polinomio de los numeradores como solo una constante k, es por esto que el polinomio de entrada para representar el numerador esta dado por un vector de la forma $[0 \quad k]$ siendo el coeficiente de la variable de grado 1 nula.
Ejemplo de entrada:

- numerador1 = $[0 \quad a_1]$
- denominador1 = $[b_1 \quad c_1]$
- numerador2 = $[0 \quad a_2]$
- denominador2 = $[b_2 \quad c_2]$

Por último, se obtiene como salida las matrices A, B, C y D que conforman el modelo de estado.

2.3 MODELO DE ESTADOS A FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Esta función recibe como entrada las matrices características de un modelo de estado denotadas como A, B, C y D, de acuerdo a esto realiza los procedimientos correspondientes para entregar como salida la función de transferencia resultante del diagrama de bloques.
Cabe destacar que la función descrita en la sección 2.2 entrega como salida A, B, C y D por lo tanto se corresponde con esta nueva función para obtener H(s) total como salida.

2.4 FUNCIONES USADAS EN MATLAB

2.4.1 Funciones de vasos comunicantes

La función que resuelve el problema de vasos comunicantes que se muestra en la Figura 4.1, se basa en la lógica mostrada en la sección 4.1, obteniendo una expresión genérica que resuelve problemas como el de la tal Figura.

Esta función tiene una entrada y 4 salidas, la entrada es el único parámetro que tiene el diagrama, es decir, el área que tiene el vaso en su base. Luego las salidas que entrega la función son las matrices A, B, C y D que corresponden al modelo de estados del diagrama de vasos comunicantes correspondiente.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO DE LA PRIMERA PARTE

En este capítulo se desarrolla la transformación de un diagrama de bloques(ensamble de modelos de primer orden) a un modelo de estado. Luego se realiza el proceso inverso, dado el modelo de estado se obtiene la función de transferencia resultante del diagrama de bloques.

3.1 FUNCIÓN 1

Se presenta el siguiente diagrama de bloques:

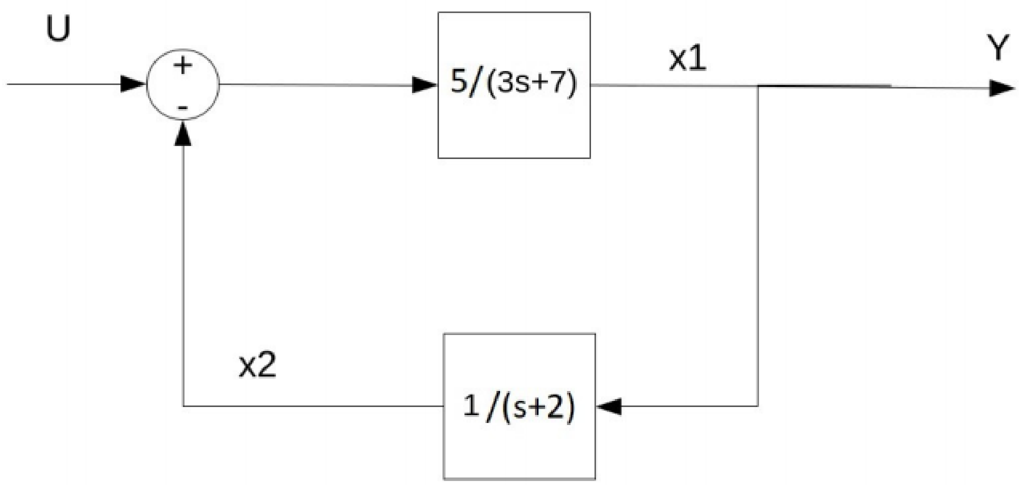

Figura 3.1: Diagrama de bloques

A partir del diagrama de bloques anterior el objetivo es llegar a un modelo de estados, para esto se realiza el siguiente procedimiento:
Considerando que tenemos dos variables de estado: x_1 y x_2, podemos plantear de forma genérica la ecuación que rige dicha variable de estado:
En primer lugar una expresión para la función de transferencia propia de cada bloque:

$$H(s) = \frac{a}{bs + c} \tag{3.1}$$

Luego para representar la salida x_o de cada uno de los bloques dada su entrada x_i en ellos:

$$x_o = x_i \cdot \frac{a}{bs + c} \tag{3.2}$$

Así de esta manera si trabajamos algebraicamente la ecuación anterior:

$$sx_o = \frac{a}{b}x_i - \frac{c}{b}x_o \tag{3.3}$$

Aplicando la función inversa de Laplace la expresión queda de la forma:

$$\dot{x}_o = \frac{a}{b}x_i - \frac{c}{b}x_o \tag{3.4}$$

Finalmente la expresión 3.4 representa de forma genérica la ecuación de la variable de estado del sistema.
Por otro lado si llevamos el modelo de estados de la figura 3.1 para cada una de las ecuaciones de las variables de estado del sistema $x1$ y x_2 aplicando la expresión 3.4 se visualiza de la siguiente forma: Para el caso de $x_o = x_1$ con $a = 5, b = 3, c = 7, x_i = U - x_2$, la expresión para la ecuación de la variable de estado es la siguiente:

$$\dot{x}_1 = \frac{5}{3}(u - x_2) - \frac{7}{3}x_1 \tag{3.5}$$

Para el siguiente caso de $x_o = x_2$ con $a = 1, b = 1, c = 2, x_i = x_1$, la expresión para la ecuación de la variable de estado es la siguiente:

$$\dot{x}_2 = x_i - 2x_2 \tag{3.6}$$

Luego la salida de nuestro modelo de estados, que corresponde a la salida del diagrama de bloques:

$$y = x_1 \tag{3.7}$$

Por último se transforma lo anterior a un modelo de estado de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-c_1}{b_1} & -\frac{a_1}{b_1} \\ \frac{a_2}{b_2} & -\frac{c_2}{b_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_1}{b_1} \\ 0 \end{bmatrix} U \tag{3.8}$$

Reemplazando $a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = 7$ y $a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = 2$ queda finalmente el modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix} U \tag{3.9}$$

Por último la salida matricialmente se expresa de la forma:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Todos los valores son ingresados como parámetros de entrada para la función 1.

3.2 FUNCIÓN 2

El cálculo de de una función de transferencia a partir del un modelo de estado se realiza a través de la siguiente expresión[1]:

$$H(s) = \frac{Y}{U} = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{3.11}$$

Los valores de C, A, B y D se obtienen de la descomposición de las ecuaciones 3.9 y 3.10 a partir de la ecuación matricial 2.6, luego la matriz I es la matriz identidad.
Se utiliza la función de matlab *syms* para obtener la variable s de Laplace y así poder realizar la multiplicación de esta variable y la matriz identidad. Luego se realizan las respectivas operaciones matriciales y se obtiene el siguiente resultado:

$$H(s) = \frac{5(s + 2)}{3s^2 + 13s + 19} \tag{3.12}$$

CAPÍTULO 4. DESARROLLO DE LA SEGUNDA PARTE

En este capítulo se desarrolla un sistema compuesto por dos estanques, el cuál muestra en la siguiente figura:

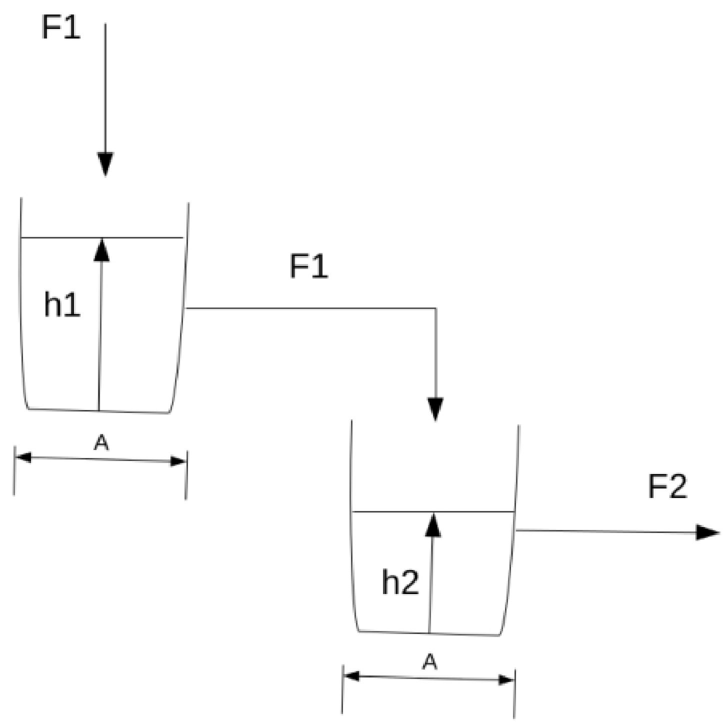

Figura 4.1: Diagrama de vasos comunicantes.

Considerando que lo que se desea supervisar es el nivel del estanque 2 y que $F2 = h_2$.

4.1 DESARROLLO CON LA FUNCIÓN CREADA EN MATLAB

El primer paso hecho para llegar a la solución del diagrama visto en la Figura 4.1, es determinar las variables de entrada, de salida y de estado, además de los parámetros del sistema. Comenzando con las variables de entrada, se tiene que $F1$ es la única variable de entrada, dado que es la única variable que afecta al sistema pero no es afectada por el sistema (hay que notar que el hecho de que la salida del estanque 1 también es $F1$, lo que es mera coincidencia matemática en este caso). Siguiendo con las variables de estados, este sistema posee 2, h_1 y h_2 que corresponden con las variables acumuladoras en este sistema. Finalizando con la variable de salida, de acuerdo al enunciado se pide supervisar el nivel del estanque 2, por lo que la variable de salida es h_2.

Otros datos importantes que se deben considerar son los parámetros del sistema, en el caso de la Figura 4.1 hay solo uno, el área A que es igual para ambos estanque.

Teniendo estos datos se puede empezar a desarrollar las ecuaciones para llegar a una solución genérica que se pueda utilizar en MATLAB. Se comienza calculando la variación del volumen de ambos estanques:

$$\frac{dV_1}{dt} = F1 - F1$$

$$\frac{dV_2}{dt} = F1 - F2$$

Sabiendo que el volumen de un vaso es igual al area de su base multiplicada por la altura del vaso, se llega a lo siguiente:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{0}{A}$$
$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{F1}{A} - \frac{F2}{A}$$

Reordenando el sistema y reemplazando variables conocidas, se obtienen los siguientes resultados:

$$\dot{h_1} = 0h_1 + 0h_2 + 0F1$$
$$\dot{h_2} = 0h_1 - \frac{1}{A}h_2 + \frac{1}{A}F1$$
$$Y = h_2$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{h_1} \\ \dot{h_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{A} \end{bmatrix} F1 \tag{4.1}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + 0F1 \tag{4.2}$$

Como la entrada del estanque 1 es igual a su salida, se puede ignorar el estado h_1, ya que al tener el mismo flujo de entrada y de salida, no aporta información al modelo de estados.

$$\begin{bmatrix} \dot{h_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \end{bmatrix} F1 \tag{4.3}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \end{bmatrix} + 0F1 \tag{4.4}$$

4.2 RESULTADOS PARA 3 CASOS

Se eligen los siguientes casos para ejemplificar el uso de la función creada en MATLAB:

- **Caso 1**: Área = 100
- **Caso 2**: Área = 0.15
- **Caso 3**: Área = 15

4.2.1 Caso 1

Utilizando la función para vasos comunicantes, se obtiene el siguiente modelo de estados

$$\begin{bmatrix}\dot{h_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}01\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0{,}01\end{bmatrix} F1$$

$$Y = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_2\end{bmatrix} + 0F1$$

4.2.2 Caso 2

Utilizando la función para vasos comunicantes, se obtiene el siguiente modelo de estados

$$\begin{bmatrix}\dot{h_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6{,}6667\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6{,}6667\end{bmatrix} F1$$

$$Y = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_2\end{bmatrix} + 0F1$$

4.2.3 Caso 3

Utilizando la función para vasos comunicantes, se obtiene el siguiente modelo de estados

$$\begin{bmatrix}\dot{h_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}0667\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0{,}0667\end{bmatrix} F1$$

$$Y = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_2\end{bmatrix} + 0F1$$

Cabe destacar que en el enunciado no se definieron unidades de medida para el área u otros parámetros o variables.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Luego de realizar los procedimientos de transformación a modelo de estado, queda la satisfacción de haber logrado el objetivo a través de los procedimientos pertinentes adquiridos en la teoría. Prácticamente para realizar esto se realizaron procedimientos paso a paso y se evitó el uso de funciones nativas o de librerías de MATLAB salvo la representación de polinomio u operaciones matriciales que agilizan los procesos para luego comparar con cálculos manuales realizados para solventar y comprobar el desarrollo del ejercicio. Además de lo anterior, el proceso de transformar un modelo de estado a función de transferencia recibió el mismo tratamiento, se realizaron procedimientos paso a paso acorde a lo teórico consiguiendo el resultado esperado.

En lo pertinente a los objetivos de la parte 2, se logran identificar las variables de entrada, salida y estado, llegando a una expresión genérica que se utiliza en MATLAB para poder implementar una función que resuelva problemas similares donde varíe sólo el área de la base de los vasos. Otro dato importante de mencionar es la identificación de que el estanque 1 de la Figura 4.1 posee los mismos flujos de entrada y salida (F1), lo que significa que su volumen se mantendrá constante, por lo que se puede ignorar en la obtención del modelo de estados el estanque 1, ya que todos sus valores serán 0, obteniendo un modelo de estados mucho más simple.

CAPÍTULO 6.   BIBLIOGRAFÍA

[1]   G. Acuña, *Apuntes de clases: Modelación y Simulación*, 2018.