

**MODELACIÓN Y SIMULACIÓN
LABORATORIO 2
SISTEMAS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN**

**JUAN PABLO ROJAS ROJAS
NICOLÁS MARIÁNGEL TOLEDO**

Profesor:
Gonzalo Acuña
Ayudante:
Francisco Muñoz

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS.....	iv
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....	5
1.1 MOTIVACIÓN	5
1.2 OBJETIVOS	5
1.3 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO	5
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO.....	7
2.1 PROCESOS CONTINUOS	7
2.2 DIAGRAMAS DE BODE	7
CAPÍTULO 3. DESARROLLO DE LA PRIMERA PARTE.....	9
3.1 FUNCIÓN DE PRIMER ORDEN	9
3.2 FUNCIÓN DE SEGUNDO ORDEN	10
3.3 FUNCIÓN DE TERCER ORDEN	11
3.4 TABLAS DE COMPARACIÓN	12
CAPÍTULO 4. DESARROLLO DE LA SEGUNDA PARTE.....	13
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES.....	17
CAPÍTULO 6. BIBLIOGRAFÍA.....	19

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Sistema de control de lazo abierto [1].	7
2.2	Sistema de control de lazo cerrado [1].	7
2.3	Diagrama de Bode.	8
2.4	Diagrama Bode - magnitud, sin escala logarítmica	8
3.1	Respuesta a escalón de función de primer orden, lazo abierto.	9
3.2	Respuesta a escalón de función de primer orden, lazo cerrado	9
3.3	Respuesta a escalón de función de segundo orden, lazo abierto.	10
3.4	Respuesta a escalón de función de segundo orden, lazo cerrado	10
3.5	Respuesta a escalón de función de tercer orden, lazo abierto.	11
3.6	Respuesta a escalón de función de tercer orden, lazo cerrado	11
4.1	Unión en paralelo de las funciones 4 y 5.	13
4.2	Unión en serie con la nueva función de transferencia y la función 6.	13
4.3	Retroalimentación de la función 3 para reemplazarla con una función sin retroalimentación.	14
4.4	Unión en serie en toda la sección de abajo, creando una nueva función representada por la unión en paralelo y en serie de otras funciones.	14
4.5	Respuesta a un escalón unitario de la función de transferencia equivalente al diagrama de bloque.	15
4.6	Diagrama de Bode de la función de transferencia equivalente al diagrama de bloque.	15

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN

Regularmente nos vemos en la necesidad de tomar distintos elementos de nuestro entorno que de alguna u otra forma se relacionan, con el objetivo de analizar sus componentes y funcionamiento conjunto. Para esto definimos un sistema como una parte de la realidad en la que encontramos elementos que se relacionan entre sí para conseguir un objetivo, así, en el estudio es necesario representarlos con sus aspectos esenciales, variables y parámetros que hacen de si un conjunto que puede ser modelado. Algunos de los sistemas pueden ser modelados matemáticamente, en los cuales claramente se puede aplicar teoría y reglas para asignarles entradas que pueden intervenir directamente en salidas ya sea esperadas o no, de este modo aparecen distintas categorías de sistemas y distintas categorías de análisis que permiten llevar a la aplicación de herramientas necesarias, ya sea teóricas y computacionales para facilitar el estudio de dicho sistema. En esta experiencia se mostrarán distintas categorías de sistemas y la aplicación de análisis de distinto tipo para obtener visualizaciones de comportamientos claros.

1.2 OBJETIVOS

- Analizar sistemas de primer y segundo orden por medio de sus funciones de transferencia utilizando MATLAB.
- Utilizar respuestas de funciones con lazo abierto y lazo cerrado como también diagrama de Bode (amplitud y fase) construidos a través de MATLAB para el análisis de dichas funciones de transferencia.

1.3 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

El documento consta en primera instancia de un marco teórico que define conceptos importantes para el documento, luego se presentan funciones matemáticas de distinto orden en las cuales se pretende graficar respuestas en distintos tipos, para también realizar comparaciones entre ellas y caracterización de distintos componentes resultantes. Luego se realizan procedimientos de estudio para un sistema representado en un diagrama, para luego terminar con una conclusión respecto a la experiencia.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 PROCESOS CONTINUOS

El proceso continuo, se caracteriza por realizar cierto procedimiento en un determinado tiempo, generalmente largo, sin interrupciones para entradas que se mantienen continuas a través del tiempo.

Para realizar procesos continuos existen sistemas de control que permiten la representación y descomposición del mismo, siendo el proceso continuo manipulable para entender entradas y salidas de sub-procesos. Los sistemas de control principalmente se dividen en sistema de control de lazo abierto y sistema de control de lazo cerrado:

- **Sistema de control de lazo abierto:** Es aquel en que la salida del sistema de control no tiene efecto sobre sí mismo, generalmente este tipo de sistema de control solo sigue una línea y no afecta estados anteriores del sistema usándose como entrada para el mismo.

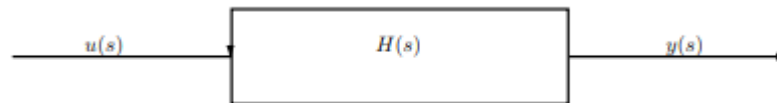


Figura 2.1: Sistema de control de lazo abierto [1].

- **Sistema de control de lazo cerrado:** Es aquel en que la salida del sistema de control si implica un efecto para sí mismo, generalmente la salida de este sistema de control es usado como entrada para el mismo, por lo que se produce una realimentación en la cual la entrada está en función de la salida.

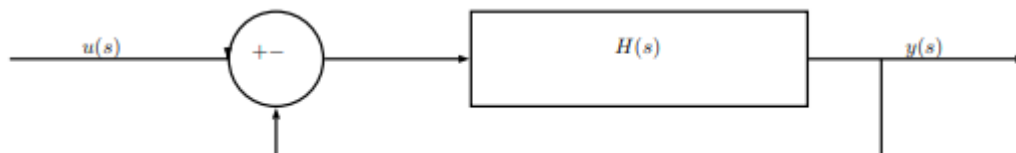


Figura 2.2: Sistema de control de lazo cerrado [1].

2.2 DIAGRAMAS DE BODE

El diagrama de Bode es un gráfico de un sistema lineal en donde se da a conocer la respuesta a la frecuencia de dicho sistema. El diagrama de bode consta de dos gráficos: uno en donde se visualiza la magnitud del sistema y otro donde se visualiza la fase del sistema, ambos en función de la frecuencia.

El diagrama de Bode es una herramienta popular entre los ingenieros de sistemas de control, ya que les

permite lograr el rendimiento deseado del sistema de lazo cerrado mediante el trazado gráfico de la respuesta y frecuencia de lazo abierto por medio de reglas claras y fáciles de entender. Además, los ingenieros pueden ver con facilidad el margen de ganancia y el margen de fase del sistema de control[2].

Para los diagramas de Bode se emplean escalas logarítmicas en el eje de las frecuencias, debido a que en los casos de estudio las frecuencias varían en gran medida su magnitud, por ende, para tener una mejor visualización y comprensión del sistema en general se emplea esta escala.

Para visualizar lo anterior se presentan los siguientes ejemplos[3] donde en primera instancia se da a conocer diagrama de Bode con la respectiva escala logarítmica y luego el uno de la magnitud(módulo) sin la escala:

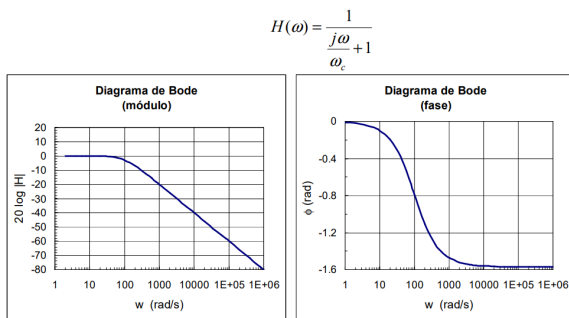


Figura 2.3: Diagrama de Bode.

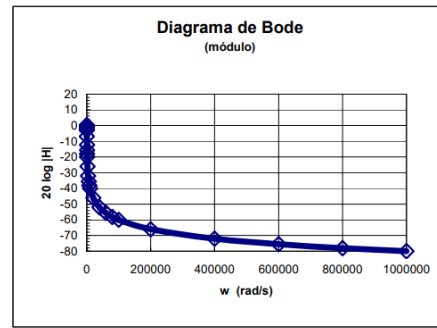


Figura 2.4: Diagrama Bode - magnitud, sin escala logarítmica

CAPÍTULO 3. DESARROLLO DE LA PRIMERA PARTE

3.1 FUNCIÓN DE PRIMER ORDEN

Se tiene la siguiente función de primer orden, de la cual se quiere obtener la función de transferencia.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\frac{du(t)}{dt}, y(0) = 1, u(0) = 0 \quad (3.1)$$

Aplicando Laplace a la ecuación 3.1 se realiza el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} 4L\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + 2L[y(t)] &= 2L\left[\frac{du(t)}{dt}\right] \\ 4[sY - 1] + 2Y &= 2\left[s\frac{1}{s} - 0\right] \\ Y[4s + 2] &= 6 \\ Y &= \frac{3s}{2s + 1} \frac{1}{s} \\ \Rightarrow H(s) &= \frac{3s}{2s + 1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

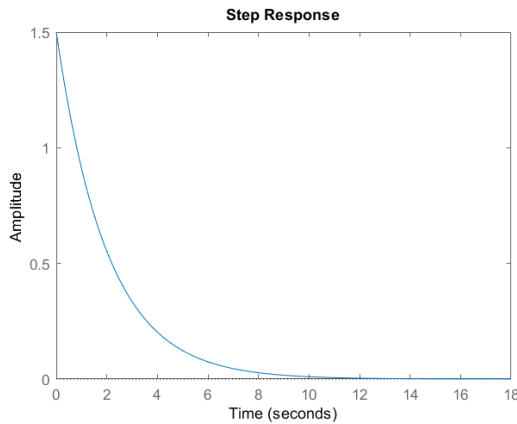


Figura 3.1: Respuesta a escalón de función de primer orden, lazo abierto.

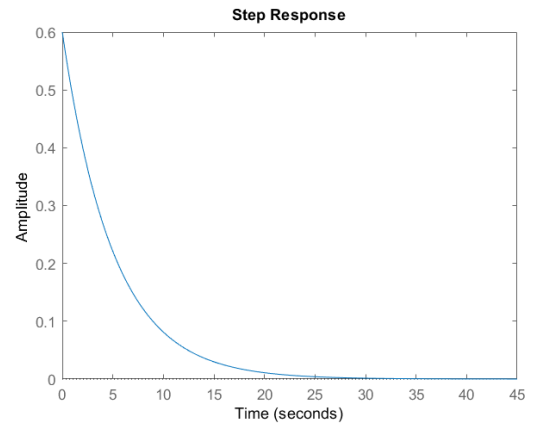


Figura 3.2: Respuesta a escalón de función de primer orden, lazo cerrado

3.2 FUNCIÓN DE SEGUNDO ORDEN

Se tiene la siguiente función de segundo orden, de la cual se quiere obtener la función de transferencia.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) - \frac{d^2u(t)}{dt^2} - 8\frac{du(t)}{dt} - u(t) = 0, y(0) = 1, \frac{dy(0)}{dt} = 1, \frac{du(0)}{dt} = 0, u(0) = 0 \quad (3.3)$$

Aplicando Laplace a la ecuación 3.3 se realiza el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} L\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] + 4L\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + 3L[y(t)] - L\left[\frac{d^2u(t)}{dt^2}\right] - 8L\left[\frac{du(t)}{dt}\right] - L[u(t)] &= 0 \\ [s^2Y - s - 1] + 4[sY - 1] + 3Y - \left[s^2\frac{1}{s}\right] - 8\left[s\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{s} &= 0 \\ Y[s^2 + 4s + 3] &= 2s + 13 + \frac{1}{s} \\ Y &= \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \frac{1}{s} + \frac{2s + 13}{s^2 + 4s + 3} \\ \Rightarrow H(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \end{aligned} \quad (3.4)$$

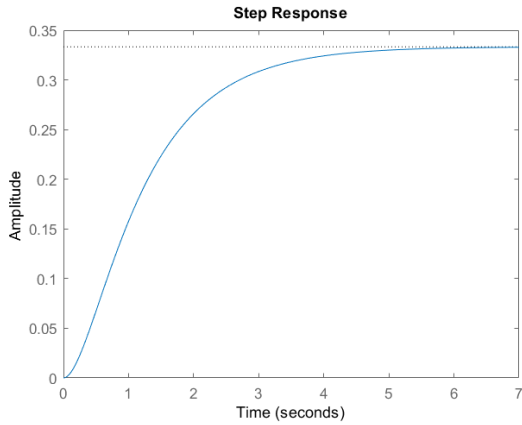


Figura 3.3: Respuesta a escalón de función de segundo orden, lazo abierto.

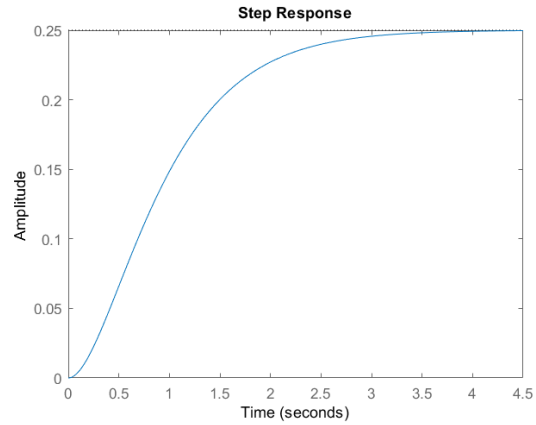


Figura 3.4: Respuesta a escalón de función de segundo orden, lazo cerrado

3.3 FUNCIÓN DE TERCER ORDEN

Se tiene la siguiente función de tercer orden, de la cual se quiere obtener la función de transferencia.

$$3\frac{dy^3(t)}{dt^3} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y - \frac{du^3(t)}{dt^3} - 3u = 0 \quad (3.5)$$

$$y(0) = 1, \frac{dy(0)}{dt} = 1, \frac{dy^2(0)}{dt^2} = 1, u(0) = 0, \frac{du(0)}{dt} = 0, \frac{du^2(0)}{dt^2} = 0$$

Aplicando Laplace a la ecuación 3.5 se realiza el siguiente desarrollo:

$$3L\left[\frac{dy^3(t)}{dt^3}\right] + 2L\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + 5L[y] - L\left[\frac{du^3(t)}{dt^3}\right] - 3L[u] = 0$$

$$3[s^3Y - s^2 - s - 1] + 2[sY - 1] + 5Y - \left[s^3\frac{1}{s}\right] - 3\frac{1}{s} = 0$$

$$Y[3s^3 + 2s + 5] = 4s^2 + 3s + 5 + 3\frac{1}{s}$$

$$Y = \frac{3}{3s^3 + 2s + 5} \frac{1}{s} + \frac{4s^2 + 3s + 5}{3s^3 + 2s + 5}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{3}{3s^3 + 2s + 5} \quad (3.6)$$

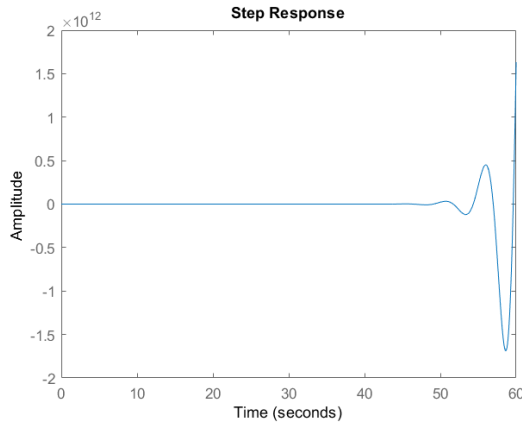


Figura 3.5: Respuesta a escalón de función de tercer orden, lazo abierto.

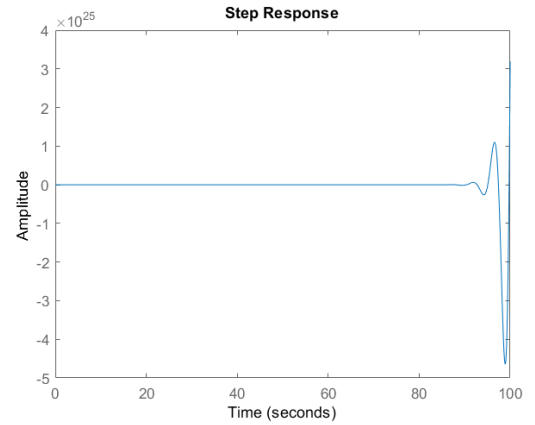


Figura 3.6: Respuesta a escalón de función de tercer orden, lazo cerrado

3.4 TABLAS DE COMPARACIÓN

Tabla 3.1: Comparación de polos, ceros y ganancia estática para funciones de lazo abierto.

Funciones	Polos	Ceros	Ganancia Estática	Tiempo de estabilización
De primer orden	-0.5000	0	0.7500	7.8241
De segundo orden	-3 -1	-	1	4.3175
De tercer orden	0.5000 + 1.1902i 0.5000 - 1.1902i -1.0000 + 0.0000i	-	1	NaN

En la Tabla 3.1, se puede apreciar que en este caso solo la función de primer orden posee ceros, esto se debe a que es la única función de transferencia que para este caso tiene un polinomio de grado mayor que 0 en el numerador. La función de tercer orden no tiene tiempo de estabilización porque la función utilizada no es un sistema estable (nunca se estabiliza).

Tabla 3.2: Comparación de polos, ceros y ganancia estática para funciones de lazo cerrado.

Funciones	Polos	Ceros	Ganancia Estática	Tiempo de estabilización
De primer orden	-0.2857	0	0.4286	19.5604
De segundo orden	-2 -2	-	1	2.9170
De tercer orden	0.6136 + 1.3403i 0.6136 - 1.3403i -1.2273 + 0.0000i	-	1	NaN

En la Tabla 3.2, se puede ver que, para las funciones de segundo y tercer orden, dado que ambos tienen una ganancia estática $K = 1$, no hay cambios en su ganancia estática al estar en un sistema de lazo cerrado. En cambio, la función de primer orden posee una menor ganancia estática que en el sistema de lazo abierto, esto se debe a que, como K define cuanto se atenúa la entrada ($K < 1$), en el sistema de lazo cerrado se vuelve a retroalimentar esta atenuación, haciendo más significativa esta atenuación con el objetivo de que el sistema sea más estable a perturbaciones y variaciones internas.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO DE LA SEGUNDA PARTE

Se comienza por simplificar el sistema para poder realizar la función *step()* en MATLAB y poder graficar la respuesta que tiene a un escalón el diagrama de bloque [1].

Se comienza uniendo las funciones 4 y 5 que se poseen una conexión en paralelo, obteniendo la función $F_4 + F_5$, esto se puede ver en la siguiente figura:

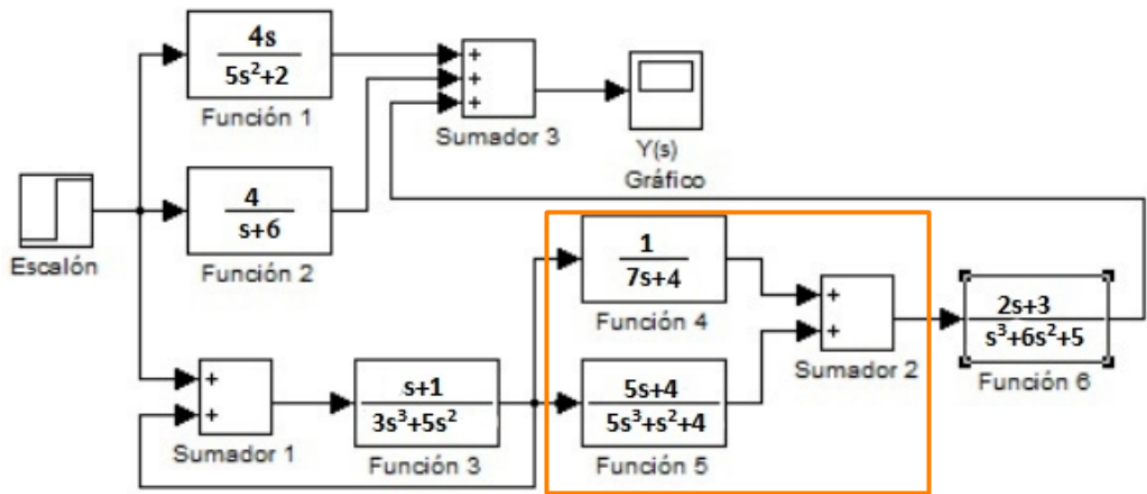


Figura 4.1: Unión en paralelo de las funciones 4 y 5.

Luego, se tiene que la nueva función de transferencia creada tiene una conexión en serie con la función 6, esto se puede apreciar en la siguiente figura:

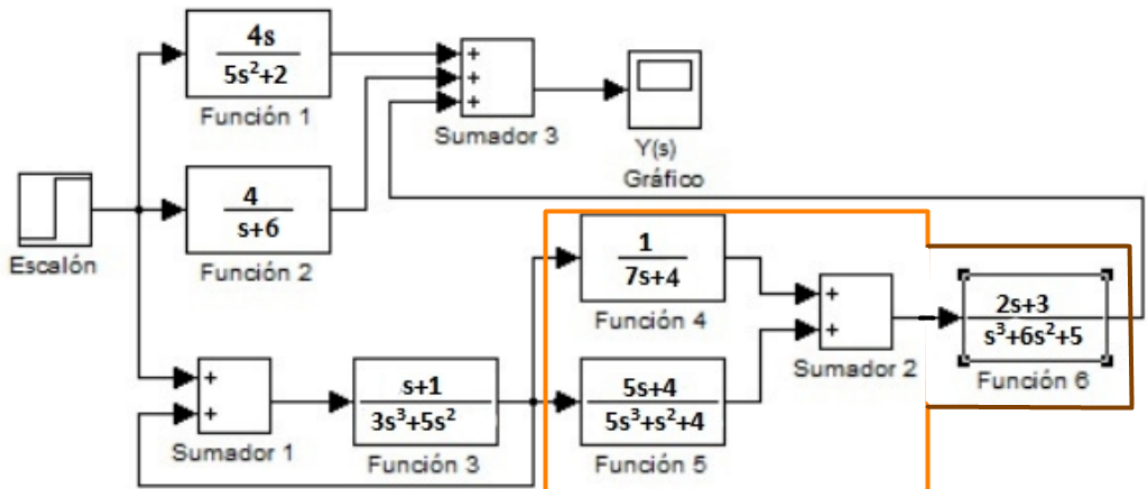


Figura 4.2: Unión en serie con la nueva función de transferencia y la función 6.

Para poder seguir trabajando con la sección de abajo, se simplifica la retroalimentación positiva definiéndola como una sola función de transferencia, en la siguiente figura se muestra el espacio que reemplazará la función 3 con retroalimentación positiva incluida:

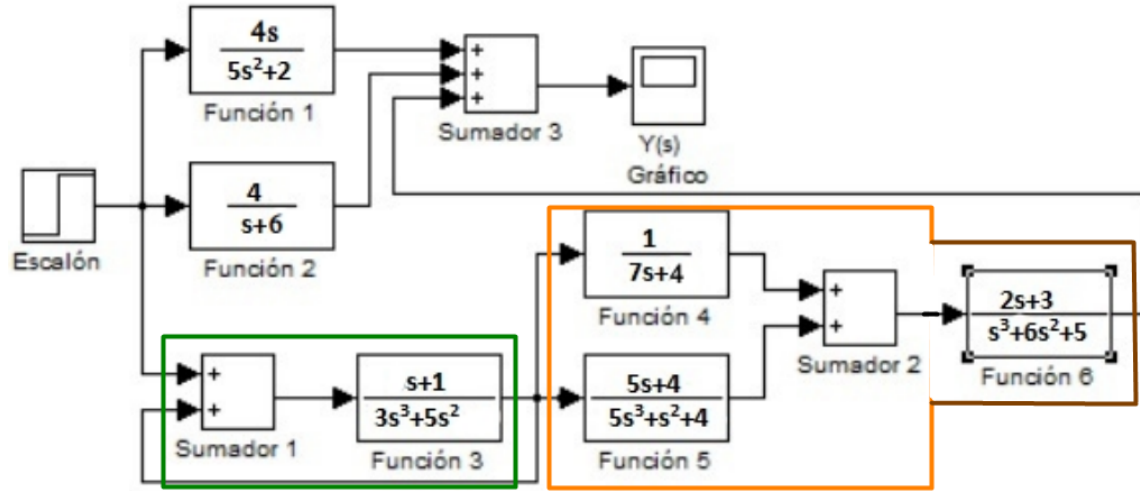


Figura 4.3: Retroalimentación de la función 3 para reemplazarla con una función sin retroalimentación.

Ahora se tiene que la función 3 con retroalimentación positiva se encuentra conectada en serie con la otra función simplificada anteriormente, al realizar esta conexión se obtiene el siguiente diagrama, donde se muestra nueva función de transferencia representada en función de las otras funciones que reemplaza:

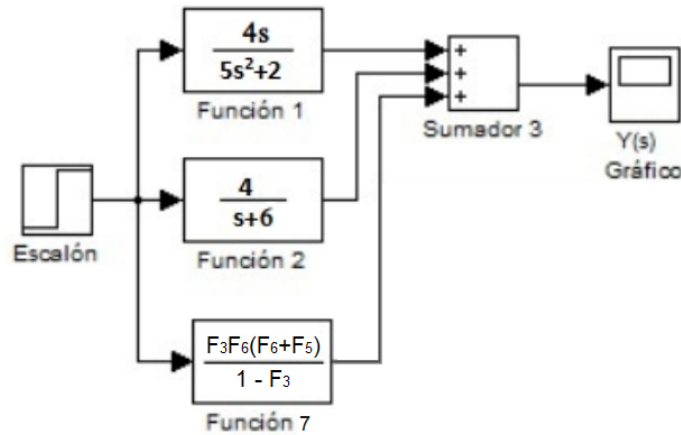


Figura 4.4: Unión en serie en toda la sección de abajo, creando una nueva función representada por la unión en paralelo y en serie de otras funciones.

Al realizar la conexión en paralelo de la Figura 4.4, se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{2520s^{12} + 23784s^{11} + 61656s^{10} + 76376s^9 + 83506s^8 + 88433s^7 + 65993s^6 + 46400s^5 + 33814s^4 + 1410s^3 + 896s^2 - 632s + 80}{525s^{13} + 7580s^{12} + 35030s^{11} + 58667s^{10} + 59543s^9 + 80674s^8 + 67016s^7 + 39513s^6 + 35378s^5 + 9678s^4 - 652s^3 - 1112s^2 - 2800s - 960}$$

Esta función de transferencia tiene la siguiente respuesta a un escalón:

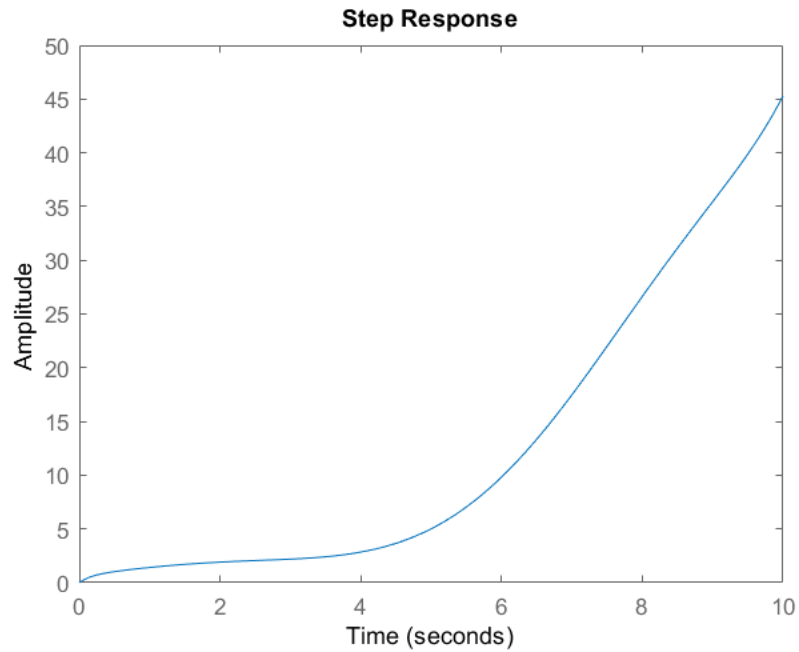


Figura 4.5: Respuesta a un escalón unitario de la función de transferencia equivalente al diagrama de bloque.

Y posee el siguiente diagrama de Bode:

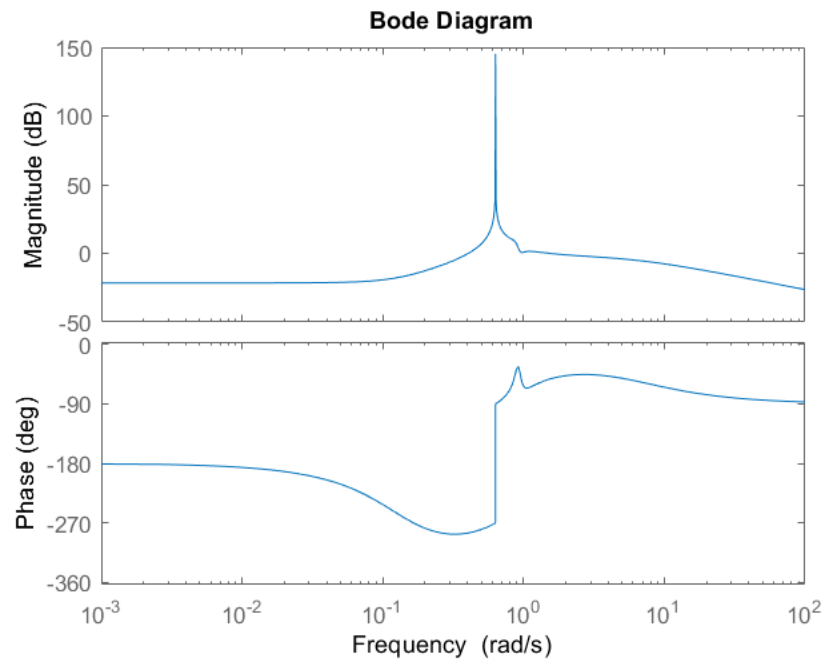


Figura 4.6: Diagrama de Bode de la función de transferencia equivalente al diagrama de bloque.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Se logra realizar un análisis de sistemas de primer y segundo orden por medio de sus funciones de transferencia, agregando también a este análisis una función de tercer orden. Para el sistema de primer orden, como no tiene algún valor constante en el numerador, se obtiene una función que tiende a 0 mientras mayor es el tiempo. Mientras que para la segunda función (para lazo abierto), la función tiende a $1/3$ mientras mayor es el tiempo. Como estas dos funciones tienen polos donde las partes reales son negativas, y también se puede ver que en las figuras no tienden a un valor infinito, se puede concluir que estas dos funciones son estables. Pero para la función de tercer orden se puede ver por medio de las Figuras 3.5 y 3.6 (también por medio de los polos de esta función) que la función definida no es estable, dado que tiende al infinito cuando t es grande, en vez de tender hacia un valor constante.

Luego para el desarrollo de la segunda parte, se logra simplificar el diagrama de bloque presentado utilizando las funciones *series()*, *parallel()* y *feedback()* de MATLAB, para así poder llegar a una sola función que represente todo este diagrama. Finalmente, se determina que este sistema no es un sistema estable, dado que sus polos no todos tienen parte real negativa y al realizar un gráfico completo (en el tiempo) de la respuesta que tiene frente a un escalón, el resultado tiende al infinito.

Un problema que sucedió en el desarrollo de esta experiencia, fue en el desarrollo de la segunda parte, debido a que el resultado obtenido al simplificar manualmente el diagrama de bloque (realizando la multiplicación final de funciones en un programa matemático externo) resultó ser distinto a la función de transferencia recibida al realizar el mismo proceso en MATLAB, es decir, estas funciones poseían distintos numeradores y denominadores, siendo el grado de los polinomios obtenidos manualmente de un grado menor que los calculados por MATLAB. Finalmente, ambas funciones eran equivalentes, sólo que MATLAB no logró realizar la última simplificación para llegar al mismo resultado, llegando a la función de transferencia mostrada en el desarrollo.

CAPÍTULO 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] F. Muñoz y G. Acuña, *Modelación y Simulación - Laboratorio 2*, 2018. dirección: <http://www.udesantiagoovirtual.cl/moodle2/>.
- [2] MathWorks, *Diagrama de Bode*, 2018. dirección: <https://la.mathworks.com/discovery/diagrama-de-bode.html>.
- [3] F. J. Molinos, *Diagrama de Bode*, 2018. dirección: <https://www.ugr.es/~jmolinos/files/elaboraciondediagramasdebode.pdf>.