UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

MODELACIÓN Y SIMULACIÓN

LABORATORIO 3

FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DISCRETAS

JUAN PABLO ROJAS ROJAS

NICOLÁS MARIÁNGEL TOLEDO

Profesor:

Gonzalo Acuña

Ayudante:

Francisco Muñoz

Santiago - Chile

7 de diciembre de 2018

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS .... **iv**

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN **5**

1.1 MOTIVACIÓN 5

1.2 OBJETIVOS 5

1.3 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO 5

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO **7**

2.1 DISCRETIZACIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS 7

2.1.1 Bloqueador de orden cero (Z-OH) 7

2.1.2 Bloqueador de primer orden (F-OH) 8

CAPÍTULO 3. DESARROLLO DE LA PRIMERA PARTE **9**

3.1 DISCRETIZACIÓN DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CONTINUA 11

3.2 FUNCIÓN DISCRETA A CONTINUA 13

CAPÍTULO 4. DESARROLLO DE LA SEGUNDA PARTE **15**

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES **19**

CAPÍTULO 6. BIBLIOGRAFíA **21**

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1 Gráfico de respuesta continua, función de transferencia 3.2 10
3.2 Gráficos de 3.2 discretizadas para $T = 0{,}05$ y $T = 0{,}3$ 11
3.3 Gráfico de la función de transferencia 3.2 discreta luego de ser pasada a continua. 13
4.1 Diagrama hecho en Simulink para mostrar la discretización y vuelta al tiempo continuo de la función para dos periodos de muestreo. 15
4.2 Gráficos para la discretización de la función con periodos de muestreo 0.05 y 0.3. 16
4.3 Gráficos para la vuelta al orden del tiempo de la función discretizada con periodos de muestreo 0.05 y 0.3. 17

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN

Regularmente nos vemos en la necesidad de tomar distintos elementos de nuestro entorno que de alguna u otra forma se relacionan, con el objetivo de analizar sus componentes y funcionamiento conjunto. Para esto definimos un sistema como una parte de la realidad en la que encontramos elementos que se relacionan entre sí para conseguir un objetivo, así, en el estudio es necesario representarlos con sus aspectos esenciales, variables y parámetros que hacen de si un conjunto que puede ser modelado. Algunos de los sistemas pueden ser modelados matemáticamente, en los cuales claramente se puede aplicar teoría y reglas para asignarles entradas que pueden intervenir directamente en salidas ya sea esperadas o no.

En experiencias anteriores estos sistemas han sido representados por medio de funciones continuas, es decir, se definieron como sistemas que evolucionan de modo continuo a lo largo del tiempo. Pero no todos los fenómenos pueden ser estudiados por medio de sistemas que se comporten de esta manera, otros pueden tener variables que cambian en determinadas secuencias de instantes, a los cuales se les denomina como sistemas discretos, por lo que surge la necesidad de poder transformar desde función continua a una función discreta (muestreo) y viceversa.

1.2 OBJETIVOS

- Simular, analizar, controlar y modelar sistemas; implementando funciones de transferencia discretas, mediante el uso de MATLAB y la herramienta Simulink.
- Aplicar conocimientos del curso relacionados con modelos de estado.

1.3 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

El documento consta en primera instancia de un marco teórico que define conceptos importantes para el documento, luego se presenta el primer capítulo de desarrollo, donde se analiza el efecto que tiene el tiempo de muestreo en la discretización de funciones. En el capítulo a continuación se muestra por medio de la herramienta Simulink de MATLAB la discretización y vuelta al tiempo continuo de una función, para finalmente terminar con una conclusión respecto a la experiencia.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 DISCRETIZACIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS

El procedimiento de discretización de funciones o sistemas continuos consta principalmente de obtener desde sistemas que basan su comportamiento en tiempo continuo, sistemas equivalentes que en tiempo discreto se comporten aproximadamente de la misma forma. Para lo anterior se debe muestrear con un periodo de muestreo T un sistema continuo, para realizar esto, entre los diversos métodos se eligen dos con los cuales se trabajara en esta experiencia para conseguir dicho objetivo: Bloqueador de orden cero (Z-OH) y Bloqueador de primer orden (F-OH)

2.1.1 Bloqueador de orden cero (Z-OH)

En un muestreador ideal, un interruptor se cierra cada periodo de muestreo T para admitir una señal de entrada. Un muestreador convierte una señal de tiempo continuo en un tren de pulsos que se presentan en los instantes de muestreo t = 0, T, 2T,...,nT.

La retención de datos es un proceso de generación de una señal de tiempo continuo h(t) a partir de una secuencia en tiempo discreto x(kT) [1].

La función de transferencia del bloqueador de orden cero es la siguiente:

$$G_{Z-OH}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \tag{2.1}$$

Con T, constante de tiempo de muestreo.

Este método tiene diversas características [2]:

- Conserva la ganancia estática.
- No preserva las respuestas al impulso ni siquiera en frecuencia.
- Si G(s) es estable, G(z) también lo es.
- Los polos en s se transforman mediante $e^{Ts} = z$, pero no así los ceros, ya que estos dependen de las fracciones parciales.

2.1.2 Bloqueador de primer orden (F-OH)

Este retenedor mantiene el valor de la muestra anterior, así como la de la presente, y mediante extrapolación predice el valor de la muestra siguiente. Esto se logra mediante la generación de la pendiente de salida igual a la pendiente de un segmento de linea que conecta la muestra actual con la anterior y proyectando esta desde el valor de la muestra actual [3].

La función de transferencia del bloqueador de primer orden es la siguiente:

$$G_{Z-FH}(s) = \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)^2 \cdot \frac{Ts+1}{T} \tag{2.2}$$

Este método tiene diversas características [2]:

- Conserva la ganancia estática.
- No preserva las respuestas al impulso, escalón ni en frecuencia.
- Si G(s) es estable, G(z) también lo es.
- Los polos en s se transforman mediante $e^{Ts} = z$, pero no asi los ceros ya que estos dependen de las fracciones parciales.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO DE LA PRIMERA PARTE

Primero se debe obtener la función de transferencia H(s) de la siguiente función con condiciones iniciales nulas (obtenida del enunciado [4]:

$$14\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 7\frac{dy(t)}{dt} + 21y(t) - 5\frac{du(t)}{dt} - 15u(t) = 0 \tag{3.1}$$

Aplicando Laplace a la ecuación 3.1 se realiza el siguiente desarrollo:

$$14L\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] - 7L\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + 21L[y(t)] - 5L\left[\frac{du(t)}{dt}\right] - 15L[u(t)] = 0$$

$$14s^2Y - 7sY + 21Y - 5sU - 15U = 0$$

$$Y[14s^2 - 7s + 21] = U(5s + 15)$$

Finalmente obteniendo la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y}{U} = H(s) = \frac{5s + 15}{14s^2 - 7s + 21} \tag{3.2}$$

Para realizar los gráficos a que aparecen en la primera parte de esta experiencia se seleccionó un tiempo de dominio de 10 segundos, es decir un vector de 0 a 10 con subdivisiones dependiendo del tiempo de muestreo para cada caso.
Luego de obtenida la función de transferencia, utilizando la función $step()$ de MATLAB y tomando como entrada el escalón se obtuvo la siguiente respuesta continua:

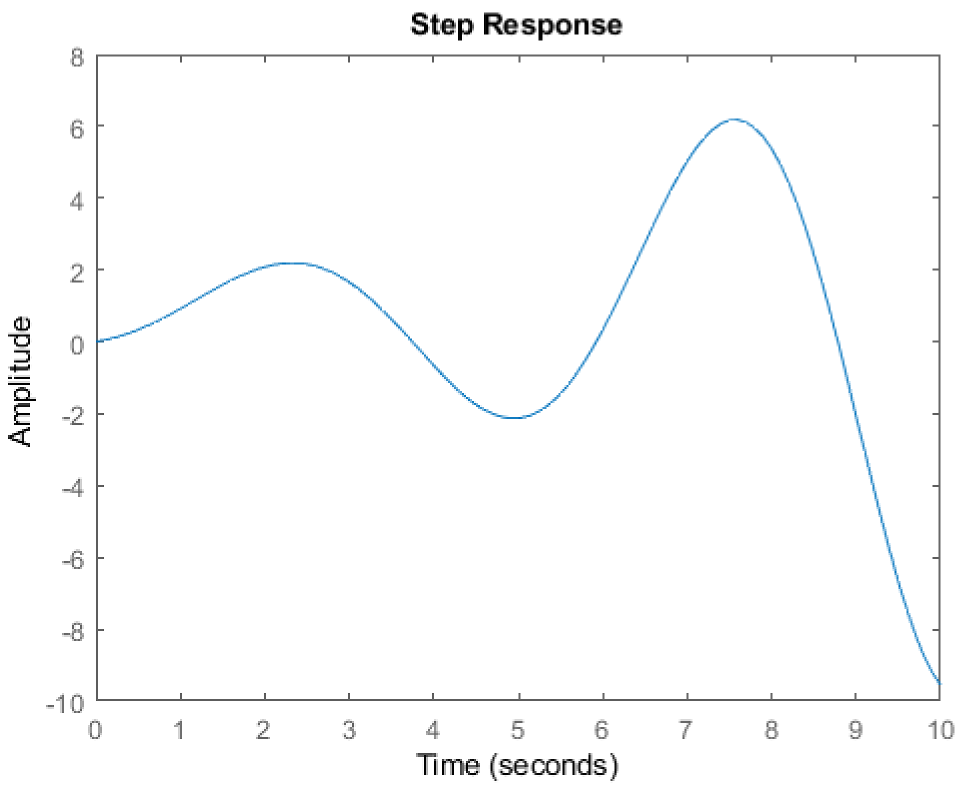

Figura 3.1: Gráfico de respuesta continua, función de transferencia 3.2

3.1 DISCRETIZACIÓN DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CONTINUA

Para realizar la discretización de la función de transferencia 3.2, MATLAB proporciona la función $c2dm()$, que dada la entrada de un numerador y denominador de una función de transferencia continua, el tiempo de muestreo y por ultimo el método de muestreo que para estos casos se utiliza bloqueador de orden cero(Z-OH), se obtiene el numerador y denominador de dicha función discreta.
Para dos gráficas distintas se utilizaron tiempos de muestreo $T = 0{,}05$ y $T = 0{,}3$, que luego realizado el procedimiento en MATLAB de obtener el vector "eje y" a partir de la función discretizada, el vector "eje x" (ambos del mismo largo), y por último aplicada la función de MATLAB para graficar funciones discretas $stairs()$, se obtiene el siguiente resultado gráfico:

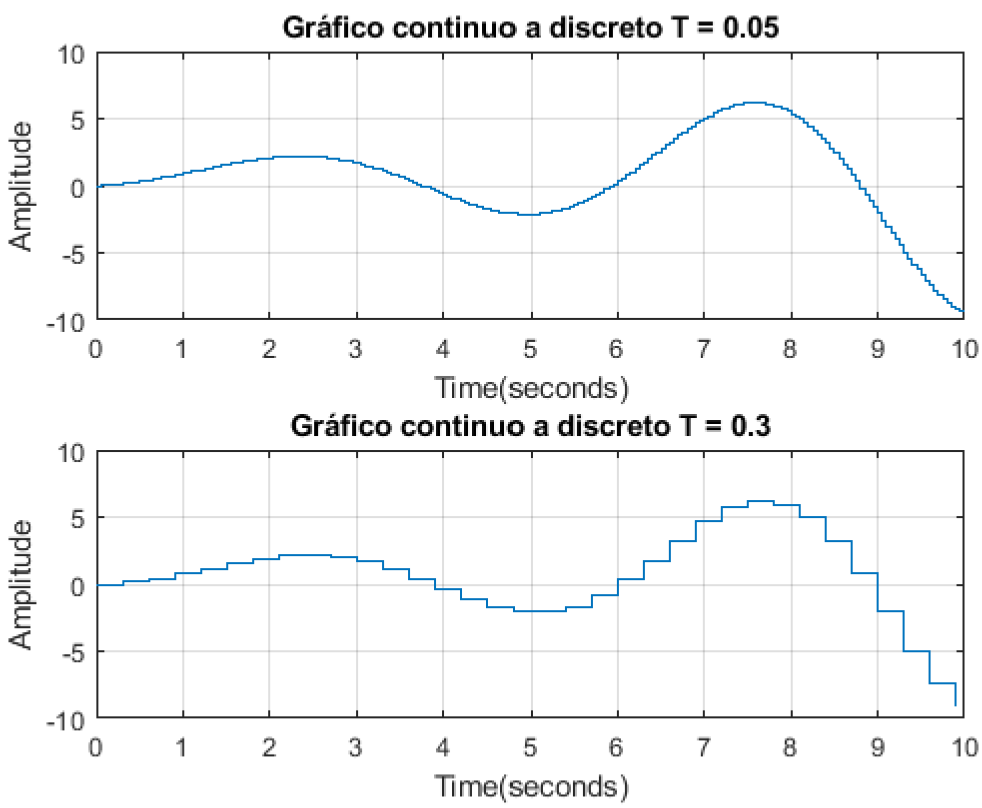

Figura 3.2: Gráficos de 3.2 discretizadas para $T = 0{,}05$ y $T = 0{,}3$

Cabe destacar que ambos gráficos fueron realizados sobre el dominio del tiempo considerado(10 segundos) con una cantidad de puntos obtenidos desde razón entre el tiempo considerado y el tiempo de muestreo, es por esto que la cantidad de puntos para cada caso se presenta de la siguiente manera:

Función Discretizada	Tiempo de muestreo	Cantidad de puntos
1	0.05	200
2	0.3	33.3

Cuadro 3.1: Tabla de tiempos de muestreo con la respectiva cantidad de puntos en el gráfico

Si bien la forma de los gráficos presentados en la figura 3.2 son similares, se puede notar que en Gráfico de continuo a discreto con T = 0.3 la curva es escalonada, esto es debido a que se tomaron menos puntos en el intervalo de 0 a 10 segundo comparado con el gráfico de continuo a discreto con T = 0.05.

Además en la figura 3.1 también se aprecia un intervalo de 0 a 10 segundos, lo cual es muy similar a los gráficos de la figura 3.2, con la diferencia que en la respuesta continua existen infinitos puntos entre intervalos y se observa una curva pulcra sin escalones.

3.2 FUNCIÓN DISCRETA A CONTINUA

Para realizar este procedimiento se toma una de las funciones discretizadas en un tiempo de muestreo T, para este caso se toma la función con tiempo de muestreo $T = 0{,}05$ y a través de la función de MATLAB $d2cm()$ que permite pasar de una función discreta a continua, se obtiene el numerador y denominador de la función discreta, para este caso la función $d2cm()$ también requiere de un tiempo de muestreo, y este es $T = 0{,}1$.
El resultado gráfico es el siguiente:

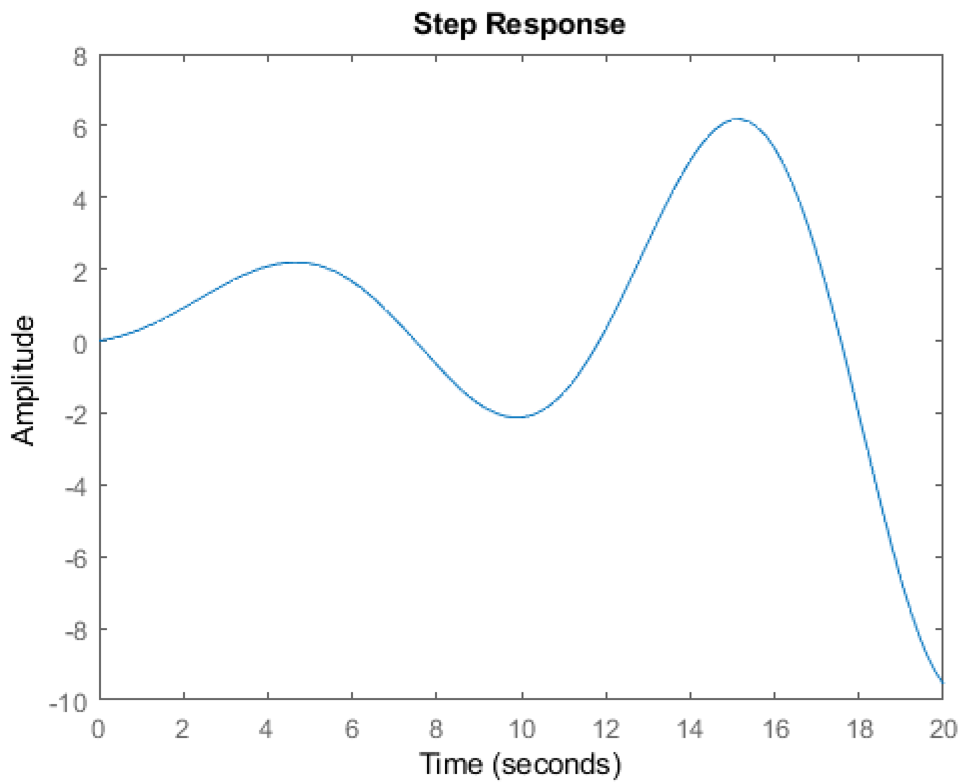

Figura 3.3: Gráfico de la función de transferencia 3.2 discreta luego de ser pasada a continua.

Como bien se puede observar la nueva figura 3.3 es muy similar a la figura 3.1, con la diferencia que para apreciar la similitud el intervalo de tiempo en el que se gráfica es de 0 a 20 segundos, a diferencia de la figura 3.1 que va de los 0 a 10 segundos.
La función original recuperada a partir de la función discreta que se muestreó con T = 0.05 segundos no queda en su forma original, esto debido a que el tiempo de muestreo que se utiliza para recuperar la función continua es de T = 0.1 segundos, por lo tanto, en el intervalo que se presenta en primera instancia la función original de 0 a 10 segundos como se aprecia en la figura 3.1, en la figura recuperada se pierden la mitad de

los datos.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO DE LA SEGUNDA PARTE

Usando la función de transferencia 3.2 obtenida en la sección anterior, se crea el siguiente diagrama en Simulink de MATLAB para mostrar la discretización de la función original con periodos 0.3 y 0.05 usando un bloqueador de orden cero, para luego retornar las funciones al orden del tiempo usando un bloqueador de primer orden, utilizando los mismos periodos de muestreo.

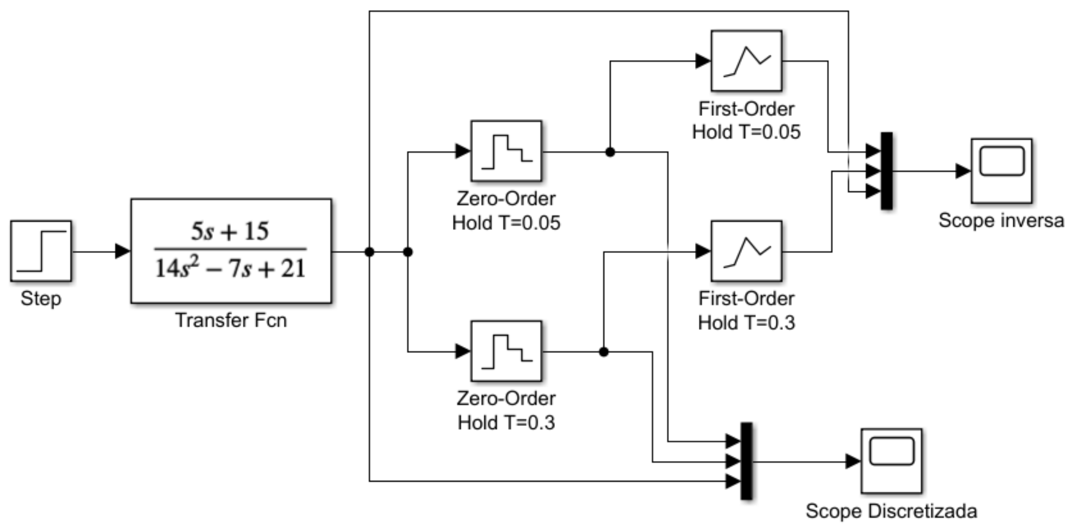

Figura 4.1: Diagrama hecho en Simulink para mostrar la discretización y vuelta al tiempo continuo de la función para dos periodos de muestreo.

En esta figura los scopes se utilizan para obtener dos figuras con 3 gráficos cada una por medio del uso de un multiplexor, estos gráficos son, la función discreta o retornada al orden del tiempo (en ambos periodos de muestreo para cada una) junto a la función original continua.

A continuación se muestra la figura obtenida para el scope discretizado:

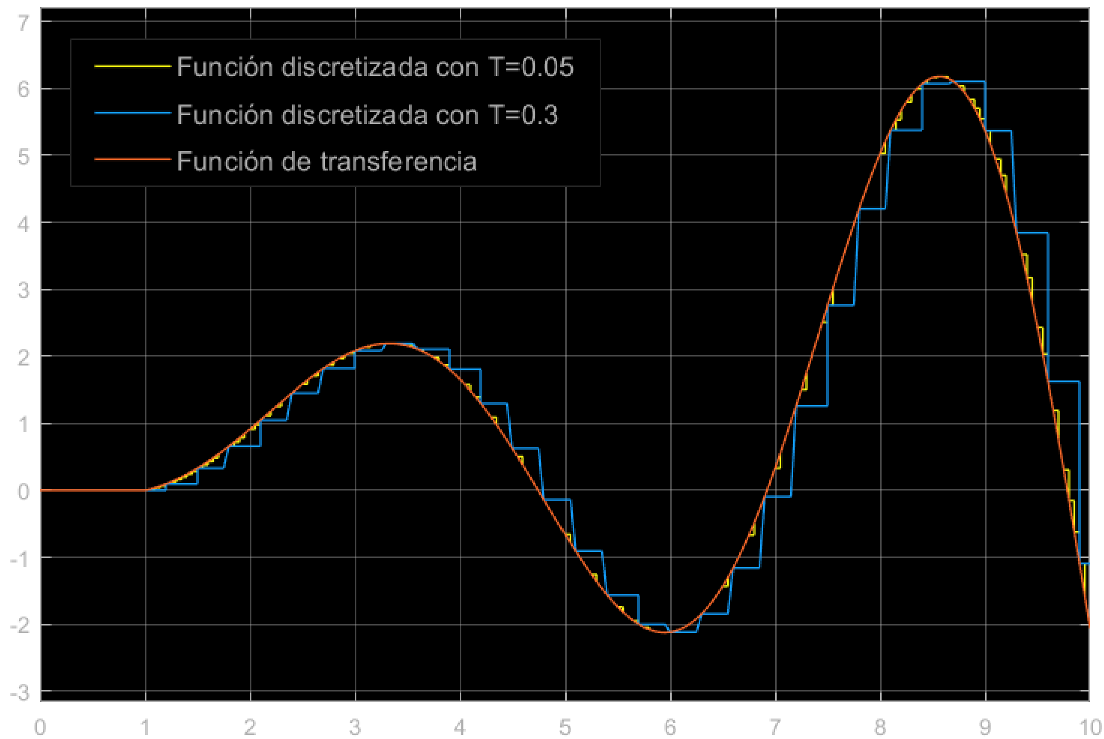

Figura 4.2: Gráficos para la discretización de la función con periodos de muestreo 0.05 y 0.3.

En la Figura 4.2 se puede ver que discretizando la función de transferencia con un periodo de muestra de 0.3, se crea una función discretizada que posee harta diferencia con la función original, por lo que es muy probable que cuando esta función discretizada vuelva al orden del tiempo, haya problemas de disimilitud entre esta función y la original. En cambio, discretizando la función continua con un periodo de muestra de 0.05, se crea una función que a simple vista es casi igual a la función de transferencia original.

A continuación se muestra la figura obtenida para el scope vuelto al orden del tiempo (*scope inverso*):

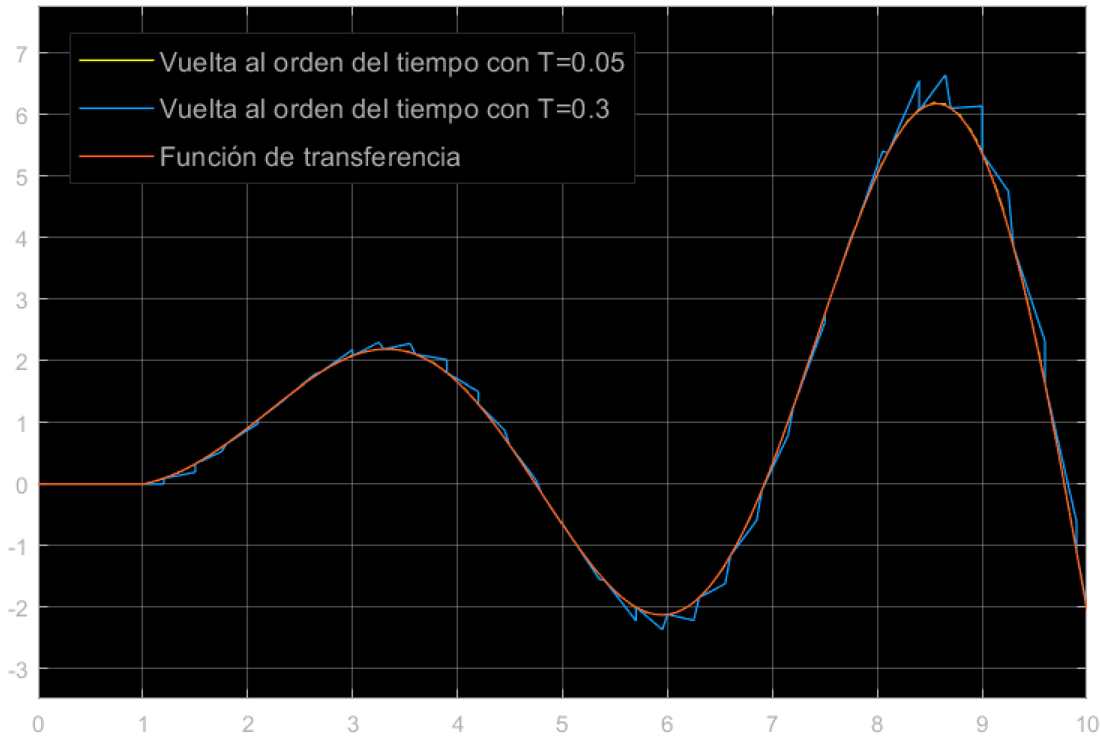

Figura 4.3: Gráficos para la vuelta al orden del tiempo de la función discretizada con periodos de muestreo 0.05 y 0.3.

En la Figura 4.3 se puede ver que pasa cuando se realiza el proceso inverso de la Figura 4.2, es decir, se transforman estas funciones discretas en funciones continuas usando el bloqueador de primer orden y el mismo periodo de muestreo respectivamente.

Se llega a una conclusión similar que con la Figura 4.2, con un periodo de muestreo de 0.3 la función es similar en algunas partes, pero en las curvas más bruscas tiene problemas en la extrapolación, dado que le faltan datos para determinar bien la forma de la curva. En cambio con un periodo de muestreo de 0.05, la función obtenida a simple vista es casi igual que la función continua original.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

A través de la herramienta de MATLAB fue exitoso el proceso de encontrar la respuesta al escalón de la función continua, así como también el proceso de discretización para dos tiempos de muestreo utilizando el método de bloqueador de orden cero. El tiempo de muestreo es un factor muy importante para la obtención de la función final discretizada, lo cual se vio reflejado en los recursos gráficos que se presentaron para cada uno de los casos que fueron de utilidad para realizar el correspondiente análisis del comportamiento.

El tiempo de muestreo también es clave para recuperar la función original continua desde una función discreta, como se presentó en el procedimiento de recuperación, al utilizar tiempos de muestreo distintos de discreto a continua y de continuo a discreto, la cantidad de información cambia en los mismos intervalos.

Respecto a la herramienta Simulink de MATLAB, se logra simular, analizar y modelar un sistema continuo, realizando una discretización de este sistema en dos periodos ($T_1 = 0{,}05$ y $T_2 = 0{,}3$), con el objetivo de minimizar la cantidad de muestras necesarias para no perder información en la función discreta. Por medio de la Figura 4.3 se llega a la conclusión de que si se usa un periodo muy grande ($T = 0{,}3$ para la figura), en la extrapolación de la función discreta para volverla al tiempo se pierde una cantidad considerable de información en las curvas más bruscas, es decir, faltaron más muestras para poder definir bien la función continua original.

En cambio, en este caso, usando un periodo $T = 0{,}05$ la función discreta vuelta al tiempo es muy similar a la función original, por lo que no tendría sentido utilizar periodos más pequeños para discretizar esta función, ya que se estaría utilizando más información porque sí.

CAPÍTULO 6. BIBLIOGRAFÍA

[1] D. V. V. López, *Computadoras digitales para el control de procesos*, 2012. dirección: `http://homepage.cem.itesm.mx/vlopez/notas2p.pdf`.

[2] U. popular del Cesar, *Discretización de funciones de transferencia*, 2013. dirección: `https://es.slideshare.net/davinso1/unidad-3-c2control2-1`.

[3] P. Turmero, *Sistemas lineales*, 2014. dirección: `https://www.monografias.com/trabajos102/los-sistemas-lineales/los-sistemas-lineales.shtml`.

[4] F. Muñoz y G. Acuña, *Modelación y Simulación - Laboratorio 3*, 2018. dirección: `http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/`.