

# Espectroscopía $\beta$

Urko Regueiro Ramos<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Universidad de Santiago de Compostela*

---

## Abstract

Se presenta el estudio de tres fuentes radiactivas ( $^{85}\text{Kr}$ ,  $^{22}\text{Na}$  y  $^{226}\text{Ra}$ ) en el que se han caracterizado sus espectros de emisión beta, obteniendo para cada uno el Q-value y se han comparado los resultados con los predichos por la teoría de Fermi de la desintegración beta permitiéndonos afirmar la existencia del neutrino.

*Keywords:* Q-value  $Q$ , tasa de cuentas  $R$ , tiempo muerto  $\tau$ , energía cinética  $T$ , momento lineal  $p$ , actividad  $\mathcal{A}$ , constante de desintegración radiactiva  $\lambda$ , período de semidesintegración  $t_{\frac{1}{2}}$

---

---

\*Autor correspondiente

*Email address:* `urko.regueiro@rai.usc.es` (Urko Regueiro Ramos)

## 1. Introducción

Los procesos de desintegración  $\beta^+$  y  $\beta^-$  no fueron descubiertos simultaneamente si no que, en 1896, esta última fue descubierta por Becquerel quien en 1900 midió la relación carga-masa  $\frac{m}{e}$  identificando a la partícula beta con el electrón. En 1914, Chadwick, mediante el método que hemos utilizado en este experimento encontró que el espectro de las partículas beta era continuo y aparentemente la distribución de energías de estas partículas violaban la conservación de la energía ya que se creía que solo intervenían tres cuerpos en el proceso. Pero el hecho de que el espectro sea continuo indica que en el proceso han de intervenir como mínimo tres partículas que se repartan la energía cinética liberada en la desintegración. La pieza clave que faltaba era la existencia de una partícula de muy alta penetrabilidad en la materia, bautizada como neutron por Pauli y como neutrino posteriormente por Fermi. Esta es un fermión de espín  $\frac{1}{2}$  y de carga eléctrica nula. En cuanto a la desintegración  $\beta^+$ , en 1932 en el estudio de los rayos cósmicos se descubrió el positrón que posteriormente, produciendo artificialmente elementos que se desintegraban emitiendo estas partículas se puso de manifiesto la desintegración  $\beta^+$ .

Este tipo de desintegración se debe a procesos de interacción débil, donde entra en juego la naturaleza a izquierdas (quiralidad) de los electrones y se produce un reemplazo de un protón por un neutrón 1 o viceversa 2.

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad \text{Desintegración } \beta^+ \quad (1)$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{Desintegración } \beta^- \quad (2)$$

Estas desintegraciones producen un desplazamiento en la posición, hacia la izquierda ( $\beta^+$ ) o derecha ( $\beta^-$ ), de la tabla periódica sin cambiar la masa, es decir, el número atómico no variará. En el caso que nos ocupa hemos estudiado dos emisores beta, uno  $\beta^+$  siendo este el caso del Sodio (vease el proceso en 3) y otro  $\beta^-$  para el caso del Kriptón (vease en 4).

$${}_{11}^{22}\text{Na}_{11} \rightarrow {}_{10}^{22}\text{Ne}_{12} + \beta^+ \quad t_{\frac{1}{2}} = 2.6[\text{años}] \quad (3)$$

$${}_{36}^{85}\text{Kr}_{49} \rightarrow {}_{37}^{85}\text{Rb}_{48} + \beta^- \quad t_{\frac{1}{2}} = 10.76[\text{años}] \quad (4)$$

Veamos cual es la energética de estos procesos ya que, a partir de las mediciones que se han realizado en el laboratorio, hemos caracterizado el espectro de emisión y los Q-values respectivos de cada elemento.

Tomemos en una forma general los procesos  $\beta^+$  y  $\beta^-$  como sigue:[]

$$\beta^+ \quad {}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z-1}^A Y_{N+1} + e^+ + \nu_e \quad (5)$$

$$\beta^- \quad {}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z+1}^A Y_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e \quad (6)$$

Las ecuaciones de balance energético para cada uno de los casos se muestran en las Ecuaciones 7 y 8, donde se ha asumido que la energía de retroceso del núcleo es despreciable y toda la energía del proceso se reparte entre el electrón(positrón) y el neutrino(antineutrino) siendo estos tratados con cinemática relativista habiendo tomado además la masa del neutrino(antineutrino)  $m_\nu \approx m_{\bar{\nu}_e} \approx 0$  bajo la suposición de partículas no masivas. Se han

despreciado a su vez las energías de ligadura de los electrones atómicos y se asupuesto que los nucleos  $X$  e  $Y$  están en su estado fundamental.[2],[4]

$$Q^+ = ( ( M_{[Z]X_N}^A ) - ( M_{[Z+1]Y_{N-1}}^A ) ) \cdot c^2 \quad (7)$$

$$Q^- = ( ( M_{[Z]X_N}^A ) - ( M_{[Z-1]Y_{N+1}}^A ) - 2 \cdot m_e ) \cdot c^2 \quad (8)$$

Denotando como  $M[\#]$  la masa atómica del elemento correspondiente llegamos, bajo las suposiciones hechas anteriormente, a que la energía disponible en la reacción se distribuye entre el electrón(positrón) y el neutrino(antineutrino) como se muestra en la *Ecuación 9*.

$$Q \approx T_e + T_\nu \quad (9)$$

En caso de no estar los nucleos en su estado fundamental tendremos que corregir pertinentemente el Q-value de la forma  $Q = Q_{ex} + E_{ex}$ , donde  $E_{ex}$  es la energía liberada cuando se pasa del estado excitado al estado fundamental.

No fue hasta 1934 cuando Fermi describió estos procesos a través de su teoría de la desintegración beta donde se llegó a la expresión 10 que caracteriza los espectros de estos emisores.[4]

$$R(p) = C \cdot p^2 \cdot (Q - T_e)^2 \cdot F(Z', T) \cdot \|M_{fi}\|^2 \cdot S(p, q) \quad (10)$$

La relevancia de cada término de la expresión 10 merece una explicación ya que es en esta donde se ha centrado nuestro estudio, en la sección 3.4, de los espectros de las fuentes radiactivas utilizadas:

- El término  $p^2 \cdot (Q - T_e)^2$  es un factor estadístico que permite conocer el número de estados finales posibles para las partículas tras la desintegración.
- Al término  $F(Z', T)$  se le denomina función de Fermi y corrige el efecto que tiene el campo Coulombiano sobre el electrón o positrón, atrayendo al primero y repeliendo al segundo.
- El término  $\|M_{fi}\|^2$  es el elemento de matriz nuclear que tiene en cuenta los efectos de los estados nucleares iniciales y finales.
- Por último, el término  $S(p, q)$  se conoce como shape factor y contiene información acerca de la dependencia de los momentos de los leptones en la desintegración.

Finalmente falta mencionar el caso del Radio. Este no es un emisor beta directo si no un producto de una cadena de desintegración de partículas  $\alpha$  y  $\beta$  que parte de la serie radiactiva natural del  $^{238}\text{U}$ . Nuestro estudio se centrará en los decaimientos  $\beta^-$  de esta cadena por lo que en el análisis tendremos que tener en cuenta que estos aparecerán superpuestos y, para poder tener en cuenta la contribución de cada uno, necesitaremos conocer cual es el peso que tiene cada cual en la serie. Para ello partimos de la actividad inicial del Radio y calcularemos, a partir de las Ecuaciones de Bateman 11, la actividad de los descendientes con la que podremos determinar la contribución al espectro de cada núcleo hijo a partir de la *Ecuación 12*, donde  $\nu_i$  será la contribución de cada elemento en el espectro.

$$A_n = N_1(0) \sum_{i=1}^n c_i \cdot e^{-\lambda_i \cdot t} \quad \text{donde} \quad c_k = \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_i}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_k)} \quad (11)$$

$$\nu_i = \frac{A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (12)$$

En la sección 3.4.3 se tratará más en detalle el análisis realizado para cada uno de los espectros.

## 2. Montaje experimental

Se ha dispuesto en el laboratorio, para la realización del experimento, del material mostrado en la *Figura 1* que se compone de:

- Un espectroscopio beta2.
- Un teslámetro digital con una sonda Hall.
- Un electroimán.
- Un multímetro digital.
- Un contador Geiger-Müller.
- Una fuente de alimentación universal.
- Tres muestras radiactivas,  $^{85}\text{Kr}$ ,  $^{22}\text{Na}$  y  $^{226}\text{Ra}$ .
- Dos muestras radiactivas semicirculares de  $^{90}\text{Sr}$ .

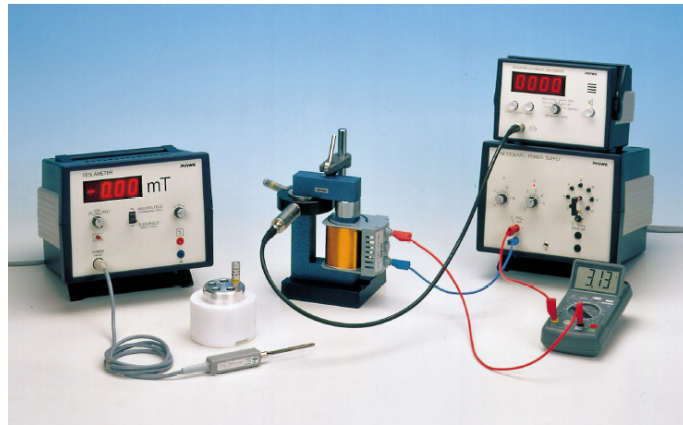
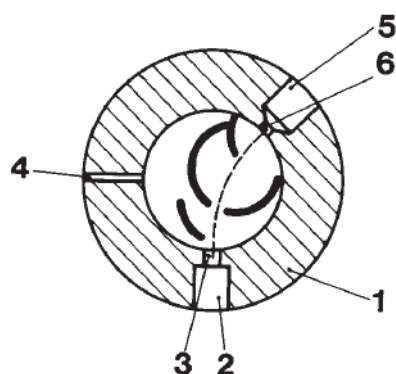
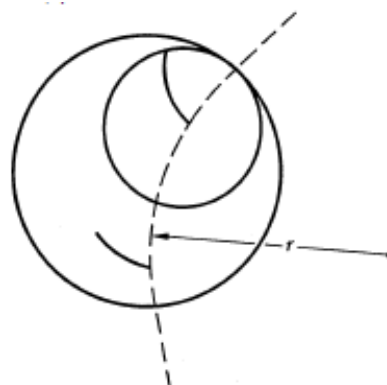


Figure 1: Disposición de los instrumentos en el laboratorio.[3]

Cabe destacar el funcionamiento del espectroscopio utilizado. En la *Figura 2a* puede verse de que forma está diseñado, comenzando por 1 tenemos un muro no magnetizable, en 2 se introducirán las muestras radiactivas mencionadas, al 3 se le denomina Iris y es por donde saldrá el flujo de partículas resultantes de la desintegración, por 4 se introducirá la sonda Hall que nos permitirá medir el campo magnético en el interior del espectroscopio, siendo 6 el denominado Iris será por donde llegarán las partículas emitidas hasta 5 donde se encontrará el detector Geiger-Müller. En cuanto al **radio de trayectoria** que se describe en la *Figura 2b* se estima su valor medio en  $r = 50[\text{mm}]$  y que tendremos en cuenta a la hora de calcular la energía de los electrones de cada elemento radiactivo. Por tanto el recorrido de las partículas que tendrá lugar comenzará al ser emitidas bajo la desintegración de la fuente radiactiva pasando por 3, al aplicar un campo magnético perpendicular a su trayectoria, medido por 4, esta se curvará con un radio  $r$  y las partículas desviadas llegarán a 6 y serán detectadas por el contador en 5. Las partículas que se detectarán serán los electrones y positrones (dependiendo de la polaridad utilizada) productos de la desintegración  $\beta$ , por último mencionar que no se detectarán partículas  $\alpha$  ni  $\gamma$  ya que las primeras no llegarán a desviarse por ser más pesadas y las segundas por no sentir la interacción del campo magnético.



(a) Croquis del interior del espectroscopio- $\beta$



(b) Visualización del radio de trayectoria,  $r$ , del espectroscopio- $\beta$

Figure 2: Espectroscopio- $\beta$ . [3]

En cuanto al montaje para la caracterización realizada del detector Geiger-Müller dispusimos de un trípode junto con una pinza donde se sujeto este hacia abajo, a una distancia( $d$ ), tal que se encontrase entre  $0.5[\text{mm}] < d < 1[\text{mm}]$  de la fuente de  $^{90}\text{Sr}$  para forzar el detector y recibir la mayor cantidad posible de partículas.

### 3. Tratamiento de datos experimentales

El **tratamiento de datos** que se ha realizado puede seguirse en **mi perfil de GitHub** donde se podrán encontrar a su vez los datos recogidos en el laboratorio.

Se expondrán los resultados obtenidos para el ruido de fondo, la caracterización del tiempo muerto del detector, la comprobación de la histéresis existente al aplicar el campo magnético y finalmente el análisis de los espectros de las fuentes radiactivas utilizadas en el experimento.

#### 3.1. Ruido de fondo

Una de las medidas fundamentales que se ha tomado el experimento es el número de cuentas recibidas  $N$  en el detector Geiger-Müller en un intervalo temporal  $t$ . El número de cuentas sigue una distribución de Poisson y por tanto hemos tomado para su incertidumbre el valor  $s(N) = \sqrt{N}$  que emplearemos en todos los cálculos. El error relativo tomado ha sido  $\frac{\sqrt{N}}{N} = 6\%$  tomando todos los  $N > 300$ .

Se ha trabajado sin embargo, con la tasa de conteo  $R$ , que no es más que el cociente del número de cuentas entre el tiempo y que definimos como se muestra en la *Ecuación 13*. La **incertidumbre temporal** para las medidas realizadas se ha tomado de acuerdo al tiempo de reacción medio frente a un estímulo sonoro, siendo este de **0.2[s]**.

Otro aspecto tenido en cuenta ha sido la medición de la radiación de fondo en el laboratorio que durante un período de 1800.59[s] se han detectado 670[Cuentas] obteniendo una **tasa sobre la radiación de fondo**  $R_f = 0.3721(144)[\frac{\text{Cuentas}}{s}]$  con la que corregiremos toda tasa de conteo obtenida de aquí en adelante restando esta cantidad.

$$R = \frac{N}{t} \left[ \frac{\text{Cuentas}}{s} \right] \quad (13)$$

#### 3.2. Tiempo muerto

En todos los sistemas de detección siempre tendremos un mínimo intervalo temporal que separará dos mediciones, pudiendo distinguirlas como dos eventos diferentes. Este límite mínimo temporal se conoce como tiempo muerto del detector y, puede suceder que dos eventos entrasen en este intervalo haciendo que la medida no sea correcta ya que se confundiría como uno solo y debido a la naturaleza aleatoria de la desintegración radiactiva este tipo de sucesos pueden ocurrir. En un detector perfecto podríamos detectar todos los eventos posibles y por tanto el mínimo intervalo temporal no sería constante y vendría dado por una distribución de Poisson. Sin embargo, para el caso que nos ocupa, las pérdidas debidas al tiempo muerto, tiempo en el que nuestro detector estará inoperativo, serán mayores cuanto mayor sea el número de cuentas que reciba el detector y es por ello que, para caracterizar el tiempo muerto, utilizaremos una fuente de  $^{90}\text{Sr}$  adquirida el 11 de Abril de 1983 con una actividad inicial de  $A(0) = 40700[\text{Bq}]$ . La actividad de esta fuente a día 8 de

Abril de 2021 se ha calculado mediante la *Ecuación 14* obteniendo  $A_{Sr} = 15993(98)[Bq]$ .

$$A(t) = A(0) \cdot \exp\left(-\frac{\ln(2) \cdot t}{t_{\frac{1}{2}}}\right) \quad (14)$$

El Geiger-Müller utilizado es un detector de ionización por lo que al llegar un suceso se ionizará el gas haciendo que se transporte un electrón del cátodo al ánodo recibiendo así la señal. El tiempo que tarda el electrón será el tiempo muerto  $\tau$  y durante este intervalo el campo eléctrico queda apantallado haciendo imposible la detección de otro suceso. Hemos caracterizado  $\tau$  mediante el método de las dos fuentes que consiste en, haciendo uso de dos fuentes radiactivas, medimos el número de cuentas de cada una de ellas por separado y combinadas. Dado que las perdidas en las tasas siguen una relación no lineal, la tasa observada debido a la combinación de ambas será menor que la suma de las tasas debidas a cada una de las fuentes por separado, pudiendo calcular el tiempo muerto de la diferencia observada a partir de la *Ecuación 15*, donde  $R_{cc}$  será la tasa de conteo de la combinación de las fuentes,  $R_{ci}$  y  $R_{cd}$  las tasas de las fuentes por separado. Notar que estas tasas están corregidas con la tasa de radiación de fondo pudiendo así aproximar la ecuación del tiempo muerto para el caso de no haber radiación de fondo por simplicidad.[1]

Para realizar la tarea dispusimos de dos fuentes semicirculares de  $^{90}Sr$  que, para no causar variaciones en las tasas colocamos y medimos de forma sistemática como sigue:

1. Colocamos primeramente una fuente semicircular y medimos como se explicó en la sección 2 obteniendo  $R_{ci}$ .
2. Se mide de forma análoga colocando la otra fuente semicircular al lado de la primera obteniendo  $R_{cd}$ .
3. Finalmente se retira la primera fuente y se mide solamente la segunda obteniendo  $R_{cd}$

$$\tau = \frac{R_{ci} \cdot R_{cd} - \sqrt{R_{ci} \cdot R_{cd} \cdot (R_{cc} - R_{ci}) \cdot (R_{cc} - R_{cd})}}{R_{ci} \cdot R_{cd} \cdot R_{cc}} \quad (15)$$

Tras las medidas y el cálculo a partir de dicha ecuación llegamos a obtener los valores mostrados en la *Tabla 1* para el tiempo muerto que, realizando una media ponderada llegamos al valor mostrado en la *Tabla 2* para  $\tau$ .

Tiempo muerto $\tau$ [ $\mu s$ ]				
333.64(204.35)	717.49(212.03)	709.70(212.52)	686.40(214.88)	466.01(211.07)

Table 1: Valores de  $\tau$  tras el cálculo a partir de la *Ecuación 15*.

Tiempo muerto medio [ $\mu s$ ]
578(94)

Table 2: Tiempo muerto medio para el detector.

Estamos ahora en disposición de hacer una segunda corrección a las tasas de conteo sabiendo que el contador Geiger-Müller es no paralizante, teniendo que la tasa de conteo real vendrá dada por la *Ecuación 16*, donde  $R^{real}$  será la tasa de conteo real.

$$R^{real} = \frac{R}{1 - \tau \cdot R} \quad (16)$$

Cabe mencionar que para las incertidumbres tanto del tiempo muerto como para las tasas reales se han obtenido aplicando el tratamiento de propagación de incertidumbres pertinente, pudiéndose visualizar su cálculo en el perfil de GitHub mencionado al comienzo de la *Sección 3*.

### 3.3. *Ciclo de histéresis*

Al utilizar una sonda Hall para medir el campo magnético generado por el electroimán necesitaremos estudiar como afecta al material de la sonda el magnetizarlo ya que este puede presentar un ciclo de histéresis que afecte a la precisión de nuestras medidas del campo magnético propagando un error en los posteriores cálculos. Para comprobarlo hemos introducido la sonda Hall en el espectrómetro beta y hemos tomado pares de medidas de intensidad frente al campo magnético, comenzando con polaridad positiva de  $0[A]$  hasta  $2[A]$ , con esto magnetizaremos el material de la sonda y es ahora cuando empezaremos a bajar la intensidad hasta  $0[A]$  pudiendo estudiar así cuanta magnetización retiene el material debido a dominios magnéticos en su estructura y por tanto poder corregir futuras medidas [7]. Análogamente se ha medido para la polaridad negativa. Con los datos obtenidos para ambas polaridades se han representado, observándose en la *Figura 3* como existe una clara histéresis. Para intentar subsanar el error que produciría en nuestras medidas se ha intentado obtener el campo remanente a partir de un ajuste lineal, de la forma que muestra la *Ecuación 17*, en ambas polaridades para las medidas de bajada a partir del término independiente,  $b$ . Los resultados que hemos obtenido para cada uno de los ajustes se muestran en la *Tabla 3*.

$$B = a \cdot I + b \quad (17)$$



Ajuste polaridad positiva		Ajuste polaridad negativa	
$a[\frac{mT}{A}]$	$b[mT]$	$a[\frac{mT}{A}]$	$b[mT]$
117.49(60)	13.27(67)	118.37(67)	-4.58(70)

Table 3: Parámetros obtenidos de los ajustes para las tomas en la bajada.

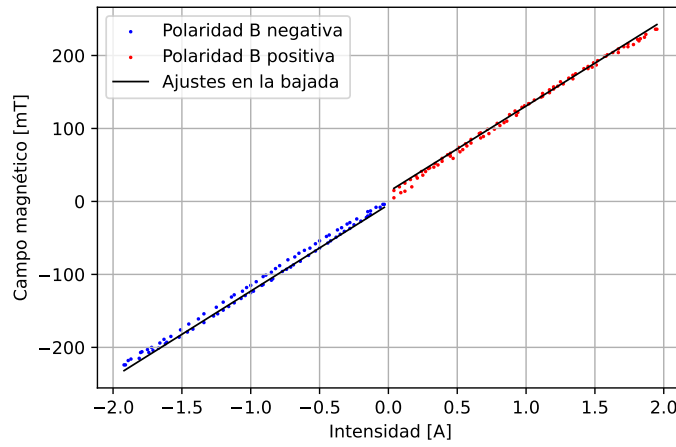


Figure 3: Datos y ajustes de las subidas y bajadas para cada una de las polaridades del campo magnético frente a la intensidad.

Realizando un test  $\chi^2$  a cada uno de los ajustes obtenemos que:

- Para la polaridad positiva, con 44 grados de libertad y un  $\chi^2 = 61.82$ , el nivel de confianza es del 4%
- Para la polaridad negativa, con 48 grados de libertad y un  $\chi^2 = 58.77$ , el nivel de confianza es del 14%

Por tanto podemos asegurar que las tendencias no corresponden a un comportamiento lineal y además, dado que el valor de los términos independientes obtenidos de los ajustes no son iguales como para tomar de ahí el campo remanente no podremos determinar el error de este en nuestras medidas de forma sencilla por lo que optamos por escoger un valor para la **incertidumbre del campo magnético** basado en las fluctuaciones que se podían observar en el teslámetro, siendo  $s(B) = 4[\text{mT}]$  el valor que utilizaremos en el tratamiento de datos.

### 3.4. Fuentes radiactivas

En esta sección comenzaremos el estudio del espectro de las fuentes radiactivas utilizadas. Para ello partiremos de lo explicado al final de la sección 1 y de la *Ecuación 10*. Lo primero ha sido la toma de datos, poniendo las muestras en el espectroscopio y ambos detectores en posición (teslámetro y Geiger) mediremos para cada valor de campo magnético el número de cuentas detectadas en un intervalo temporal. Dependiendo del tipo de desintegración hemos cambiado la polaridad del campo (positiva para curvar electrones y negativa para positrones). Por tanto trabajaremos con el campo magnético para poder obtener tanto el momento lineal a partir de la relación entre la fuerza de Lorentz y la centrífuga como la energía cinética asociada a los electrones(positrones) que han llegado al detector Geiger tras recorrer la trayectoria circular producida por el campo magnético generado. Las expresiones utilizadas vienen dadas por la *Ecuación 18* y *19* donde  $p$  es el momento,  $T$  la energía cinética,  $m$  y  $e$  la masa y carga del electrón y  $c$  la velocidad de la luz.

$$p = e \cdot B \cdot r \quad (18)$$

$$T = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m^2 \cdot c^4} - m \cdot c^2 \rightsquigarrow T = \sqrt{(e \cdot B \cdot r)^2 \cdot c^2 + m^2 \cdot c^4} - m \cdot c^2 \quad (19)$$

Ahora estamos en disposición de utilizar la ecuación de espectros 10, teniendo en cuenta que la función de Fermi viene dada por la *Ecuación 20*, donde  $S$  y  $\eta$  (siendo positiva para electrones y negativa para positrones) vienen dados por las *expresiones 21* y *22* respectivamente.

$$F(Z', T) = \frac{2 \cdot (1 + S) \cdot \|\Gamma(S + i\eta)\|^2}{\Gamma(1 + 2 \cdot S)^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot p \cdot r}{\hbar}\right)^{(2 \cdot S - 2)} \cdot \exp(\pi \cdot \eta) \quad (20)$$

$$S = \sqrt{1 - \alpha^2 \cdot Z^2} \quad (21)$$

$$\eta = \pm \frac{Z \cdot e^2 \cdot c}{\hbar \cdot p} \quad (22)$$

Mencionar aquí que debido a la complejidad de la forma de la función de Fermi se ha tomado para el cálculo de su incertidumbre mediante propagación la formula para el caso no relativista dada por la *Ecuación 23*. [5]

$$F(Z', T) \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \eta}{1 - \exp(-2 \cdot \pi \cdot \eta)} \quad (23)$$

Si tomamos ahora el elemento de matriz nuclear  $\|M_{fi}\|$  constante por simplicidad llegamos a poder expresar 10 como la *expresión 24*.

$$(Q - T) = a \cdot \sqrt{\frac{R(p)}{p^2 \cdot F(Z', T) \cdot S(p, q)}} \quad (24)$$

A partir de esta expresión podemos obtener el diagrama de Fermi-Kurie el cual nos permitirá obtener, realizando un ajuste lineal de la forma 25, el Q-value de la desintegración con el branching ratio (BR) más probable.

A su vez realizaremos un ajuste no lineal a la *Ecuación 26* para contrastar los Q-value que obtenemos en cada caso a excepción del espectro del Radio ya que como mencionamos este es un producto de una serie radiactiva.

$$\sqrt{\frac{R(p)}{p^2 \cdot F(Z', T) \cdot S(p, q)}} = \frac{(b - T)}{a}, \text{ donde } Q = b \quad (25)$$

$$R(p) = C \cdot p^2 \cdot (Q - T)^2 \cdot F(Z', T) \cdot S(p, q) \quad (26)$$

#### 3.4.1. *Sodio-22*

Para el análisis del espectro del  $^{22}\text{Na}$  hemos utilizado una muestra con una actividad, calculada a partir de la *Ecuación 14*, de  $A_{\text{Na}} = 53311.56(1179.65) \text{ [Bq]}$ . Este isótopo es un emisor  $\beta^+$  y, como podemos ver en su esquema de desintegración en la *Figura 4*, se desintegra mediante captura electrónica y en el 89.9 % de los casos[6] por emisión  $\beta^+$  al elemento estable  $^{22}\text{Ne}$ .

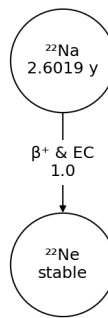
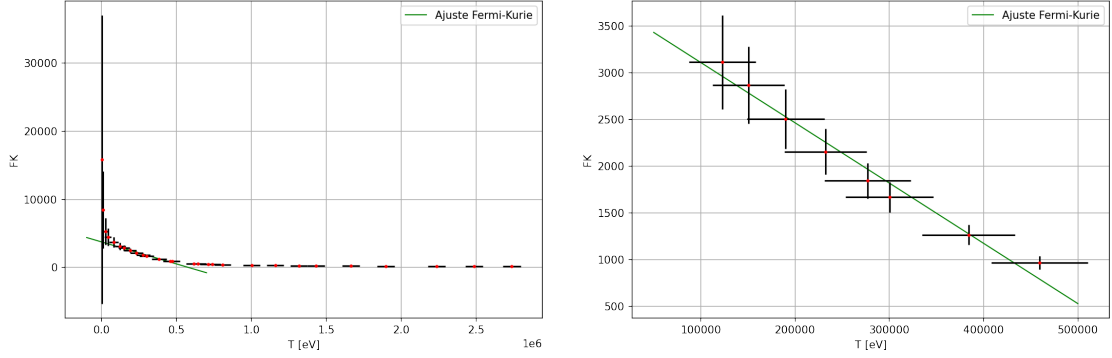


Figure 4: Esquema de desintegración del Sodio-22.[8]

El Q-value tiene un valor de  $0.546 \text{ [MeV]}$  y la transición que tiene lugar es permitida por lo que podremos hacer uso de la aproximación permitida, donde el shape factor toma el valor  $S(p, q) = 1$ . A partir de la toma de datos y la energía cinética calculada se presenta la *Figura 6a* donde podemos observar la distribución de energías para este elemento y los errores asociados a cada punto. Primeramente hemos tratado de determinar el Q-value a partir de un ajuste a la *Ecuación 25* obteniendo el diagrama de Fermi-Kurie que se muestra en la *Figura 5a* y una representación del ajuste en la *Figura 5* adyacente donde observamos que el ajuste se ha realizado en el rango de energías entre  $0.1 \text{ [MeV]}$  y  $0.5 \text{ [MeV]}$ . Se ha elegido este criterio ya que a bajas energías se puede observar como nos alejamos de la linealidad debido probablemente al error que pueden introducir las medidas con el teslámetro y las cuales no podemos corregir adecuadamente como vimos en la Sección 3.3.



(a) Diagrama de Fermi-Kurie y ajuste para el Sodio-22.

(b) Visualización de la zona donde se ha realizado el ajuste lineal

Figure 5: Diagrama de Fermi-Kurie para el Sodio-22.

Los resultados obtenidos de nuestro análisis se muestran en la *Tabla 4* y, habiendo realizado un test  $\chi^2$  para el ajuste se encuentra que, con 6 grados de libertad y un  $\chi^2 = 747.83$  damos con un nivel de confianza por debajo del 0.01 %.

Parámetros del ajuste Fermi-Kurie	
a	b [MeV]
155.103(10.592)	0.582(23)

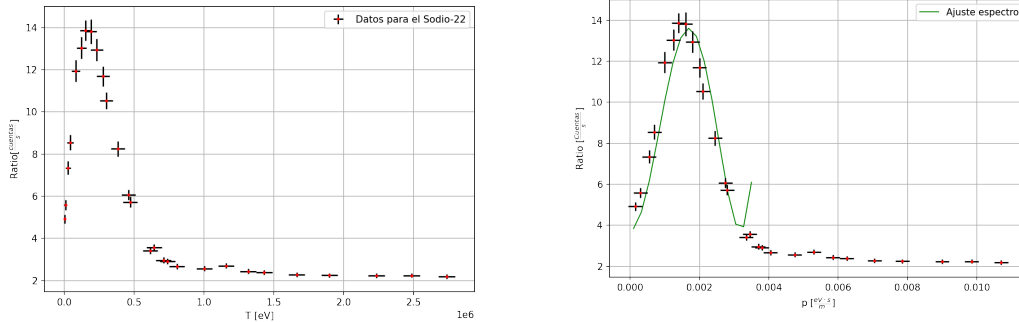
Table 4: Resultados del ajuste a la *Ecuación 25* para el Sodio-22.

Encontramos por tanto un Q-value para la transición de 0.582(23) [MeV], no encontrándose muy lejos del valor teórico.

El siguiente paso ha sido analizar el espectro de momentos ajustando a la *Ecuación 26* obteniendo de nuevo un valor para el Q-value con el que podamos contrastar el anterior. En la *Figura 6b* podemos observar como se ajustan los datos a la ecuación de estudio y en la *Tabla 5* aparecen los resultados obtenidos tras el análisis.

Podemos observar como hay un ligero desplazamiento en el eje de momentos hacia la derecha pudiendo deberse esto a: errores en la magnitud de campo magnético medido, no haber introducido el valor correspondiente para el elemento de matriz nuclear o bien por no estar bien determinado el ruido de fondo, pudiendo de esta forma perturbar el ratio de cuentas. He tratado de ajustar este desplazamiento lo máximo posible introduciendo un término independiente ( $I$ ), como muestro en la *Ecuación 27*, resultando en una mejora del valor de  $\chi^2$  para  $I = 3.76$ , ajustándose la nueva función mejor a nuestros datos experimentales.

$$R(p) = I + C \cdot p^2 \cdot (Q - T)^2 \cdot F(Z', T) \cdot S(p, q) \quad (27)$$



(a) Espectro de energías para el Sodio-22.

(b) Distribución de momentos para el Sodio-22 de acuerdo con la *Ecuación 27*

Figure 6: Espectro del Sodio-22.

Realizando el test  $\chi^2$ , se encuentra que para 14 grados de libertad y un  $\chi^2 = 68.91$  el nivel de confianza está por debajo del 0.01 %.

Parámetros del ajuste al espectro de momentos	
C	Q [MeV]
$3.053(2.985) \cdot 10^{-5}$	0.571(14)

Table 5: Resultados del ajuste a la *Ecuación 27* para el Sodio-22.

Observamos que esta vez obtenemos un valor para el Q-value de 0.571(14) [MeV] que es más próximo al teórico pero no entra en el rango de error dado. Mencionar también que, como puede verse en la *Figura 6b*, el valor máximo para el momento se da en el punto mínimo que alcanza el descenso, para el cual el término  $(Q - T)$  es nulo.

### 3.4.2. Krypton-85

El Krypton-85 es un radioisótopo del krypton que presenta dos principales decaimientos como muestra el diagrama de la *Figura 7*, uno mediante desintegración  $\beta^-$  con un branching ratio del 99.56 % y un Q-value de 0.687 [MeV] y el otro mediante emisión beta seguido de radiación gamma con un branching ratio del 0.44 %.[6]

Esta vez en nuestro análisis tendremos que tener en cuenta que el  $^{85}\text{Kr}$  presenta desintegración prohibida de primer orden tipo Gamow-Teller, por lo que el shape factor no será constante como en el caso del Sodio y deberemos añadir el primer término no trivial en la expansión de onda plana que hacemos sobre las funciones de onda de los leptones en el desarrollo de la teoría de Fermi. Sabemos que en algunos casos donde se presentan procesos prohibidos de primer orden el shape factor viene dado por la *Ecuación 28* que hemos tenido en cuenta en nuestro análisis.

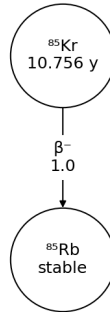


Figure 7: Esquema de desintegración del Krypton-85.[8]

Hemos procedido utilizando una muestra de Krypton-85 con una actividad desde su fabricación de  $A_{Kr} = 12719.94(204.85)$  [Bq] y lo primero ha sido, al igual que para el caso del Sodio, obtener el diagrama de Fermi-Kurie y ajustar los datos a la *Ecuación 25* para obtener el Q-value como el punto de intersección de la recta con el eje de energías como podemos ver en la *Figura 8*. Se han seleccionado para el ajuste los cinco puntos en el intervalo de energías de entre 0.3 [MeV] y 0.6 [MeV] debido a los efectos no lineales a bajas energías hemos descartado los primeros y debido a que los últimos se alejan de la tendencia lineal en la zona de estudio.

$$S(p, q) = p^2 + q^2 \quad (28)$$

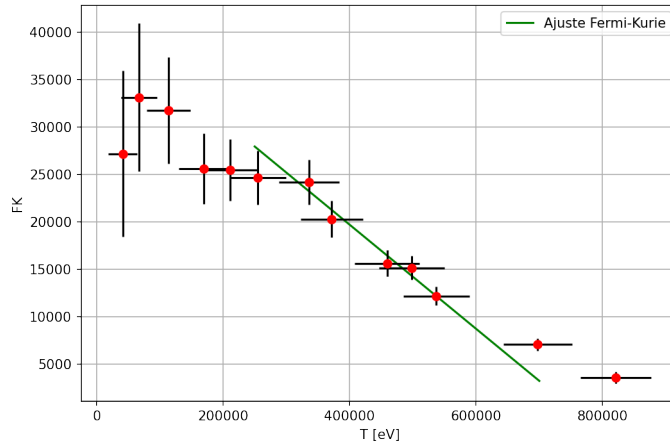


Figure 8: Diagrama de Fermi-Kurie y ajuste para el Krypton-85.

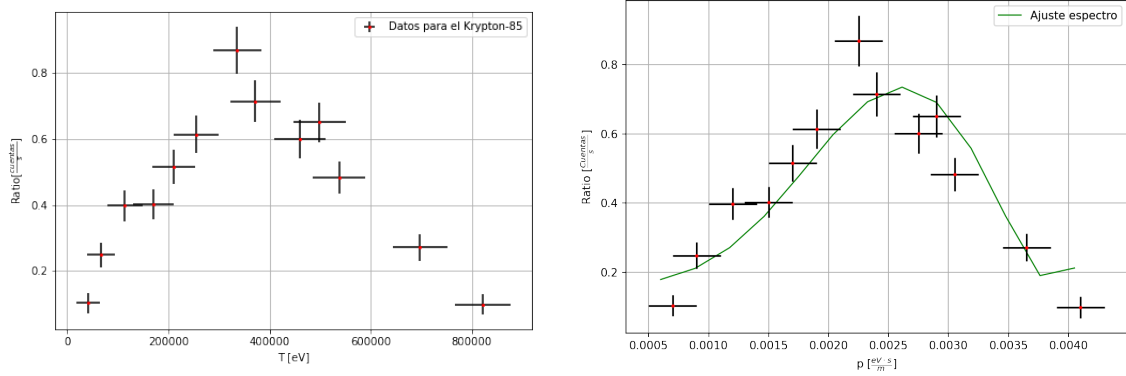
El ajuste ha arrojado un  $\chi^2 = 1884.15$  que, con 3 grados de libertad nos da un intervalo de confianza por debajo del 0.01 %. Los parámetros obtenidos se muestran en la *Tabla 6*.

Parámetros del ajuste Fermi-Kurie	
a	b [MeV]
18.192(2.007)	0.759(36)

Table 6: Resultados del ajuste a la *Ecuación 25* para el Krypton-85.

Obtenemos para el Q-value un valor de 0.759(36) [MeV] y vemos como se encuentra un poco alejado del valor teórico pudiéndose deber esto, como pasaba con el Sodio, a variaciones en las medidas del campo magnético. Otra posible fuente de error distinta de las comentadas hasta ahora ha podido ser la elección del shape factor ya que no sabemos si este se amolda al decaimiento tratado. Cabe mencionar también que no hemos podido realizar un estudio estadístico en condiciones por la limitación en las medidas, pudiendo haber sido más preciso tomando durante un periodo mayor de tiempo en el rango de entre 0.3 [MeV] y 0.7 [MeV].

Pasamos a analizar ahora la *Ecuación 27* para los espectros teniendo en cuenta el shape factor seleccionado y, al igual que para el sodio, un término independiente( $I$ ) que corrija el desplazamiento en el eje de momentos que se produce hacia la derecha, quedando la expresión como se ha descrito en la *Ecuación 27*. En la *Figura 9a* y *9b* se presenta, la distribución de energías para este elemento y la distribución de momentos con el ajuste realizado respectivamente, ambas con sus respectivos errores asociados. Se presentan en la *Tabla 7* los resultados obtenidos del ajuste.



(a) Espectro de energías para el Krypton-85.

(b) Ajuste no lineal a la *Ecuación 27*

Figure 9: Espectro del Krypton-85.



Para el término independiente se ha obtenido un valor de  $I = 0.162$ . A su vez, realizando un test  $\chi^2$ , se encuentra que para 11 grados de libertad y un  $\chi^2 = 2.84$  el nivel de confianza es del 99%.

Parámetros del ajuste al espectro de momentos	
C	Q [MeV]
0.527(116)	0.765(25)

Table 7: Resultados del ajuste a la *Ecuación 27* para el Krypton-85.

Como resultado final para el Krypton-85 obtenemos un Q-value del ajuste a la *Ecuación 27* de 0.765(25) [MeV] similar al obtenido en el ajuste lineal pero quedando alejado del valor teórico.

### 3.4.3. *Radio-226*

El radio-226 pertenece a una serie radiactiva natural, como se comentó en la *Sección 1*, siendo el padre el Uranio-238. El espectro de energías obtenido para el Radio así como el esquema de desintegración se muestran en la *Figura 10* y *11a* respectivamente. En esta sección trataremos de determinar el Q-value de las desintegraciones  $\beta^-$  que se producen en la cadena teniendo en cuenta que, dada la poca precisión que tenemos en nuestro experimento, seleccionaremos los branching ratios más probables en los siguientes decaimientos:[6]

1. El tercer hijo, Plomo-214 con un período de semidesintegración de 27.06 [min], sufre desintegración  $\beta^-$  (100 %) al Bismuto-214. Tendremos en cuenta su branching ratio de 44.5 % con un Q-value de 0.666 [MeV].
2. El producto anterior, Bismuto-214 con un período de semidesintegración de 19.71 [min], se desintegra mediante  $\beta^-$  (99.979 %) en el Polonio-214 y tendremos en cuenta su branching ratio de 19.20 % con su respectivo Q-value de 3.269 [MeV].
3. Pasamos al sexto descendiente de la cadena, el Plomo-210 con un período de semidesintegración de 22.20 [años], que sufre una desintegración  $\beta^-$  (100 %) desembocando en el Bismuto-210 donde el branching ratio que tomaremos será el de 84 % y un Q-value de 0.17 [MeV].
4. Por último tenemos la desintegración  $\beta^-$  (100 %) del séptimo descendiente, el Bismuto-210 con período de semidesintegración de 5.012 [dias], que llega al Polonio-210. Se presenta un branching ratio del 100 % con un Q-value de 1.162 [MeV].

He tomado la decisión de escoger los branching ratios más probables con la energía más alta ya que esta última es la que será detectada con mayor probabilidad debido a la limitada precisión de nuestro equipo, pudiendo "ocultar" las otras energías de menor valor.

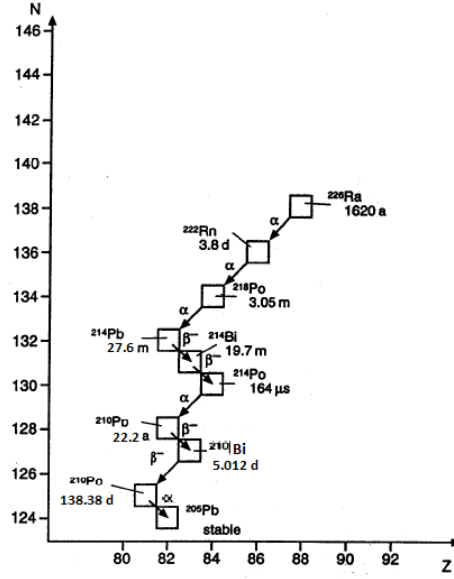


Figure 10: Esquema de desintegración del Radio-226.[4]

Para analizar el espectro he tenido en cuenta en la *Ecuación 27* cada una de las desintegraciones  $\beta^-$  anteriormente mencionadas teniendo ahora una contribución de cuatro términos como mostramos en la *Ecuación 29*. A su vez se ha tenido en cuenta el peso( $\nu$ ) de cada uno de los decaimientos calculando la actividad de estos en la cadena a través de las ecuaciones de Bateman descritas en la *Sección 1*, haciendo uso del paquete de python 'radioactivedecay' [8] obtenemos las actividades de cada uno de los elementos de la cadena como mostramos en la *Tabla 8*.

$$R(p) = I + \sum_{i=1}^4 \nu_i \cdot C_i \cdot p^2 \cdot (Q_i - T)^2 \cdot F(Z'_i, T) \cdot S_i(p, q) \quad (29)$$

#### Actividad [Bq]

<u>Ra-226</u>	<u>Rn-222</u>	<u>Po-218</u>	<u>Pb-214</u>	<u>Bi-214</u>	<u>Po-214</u>	<u>Pb-210</u>	<u>Bi-210</u>
3273.30	3273.32	3273.32	3272.67	3273.32	3272.64	2339.43	2338.85

Table 8: Actividades de los elementos que conforman la cadena de desintegración del Ra-226.

Comprobamos como los cinco primeros descendientes tienen igual actividad debido a encontrarse en equilibrio secular con el Ra-226 ya que el período de semidesintegración de este último es mayor, haciendo que el resto de descendientes inestables se tengan que amoldar a su ritmo.

Haciendo uso de la *Ecuación 12* y tomando los valores de la actividad de los elementos a estudiar, sease el Pb-214, el Bi-214, el Pb-210 y el Bi-210 obtenemos el peso que toma cada uno en la ecuación del ajuste como vemos en la *Tabla 9*.

Pesos $\nu_i$			
<u>Pb-214</u>	<u>Bi-214</u>	<u>Pb-210</u>	<u>Bi-210</u>
0.29	0.29	0.21	0.21

Table 9: Contribución de cada decaimiento en el espectro del Ra-226.

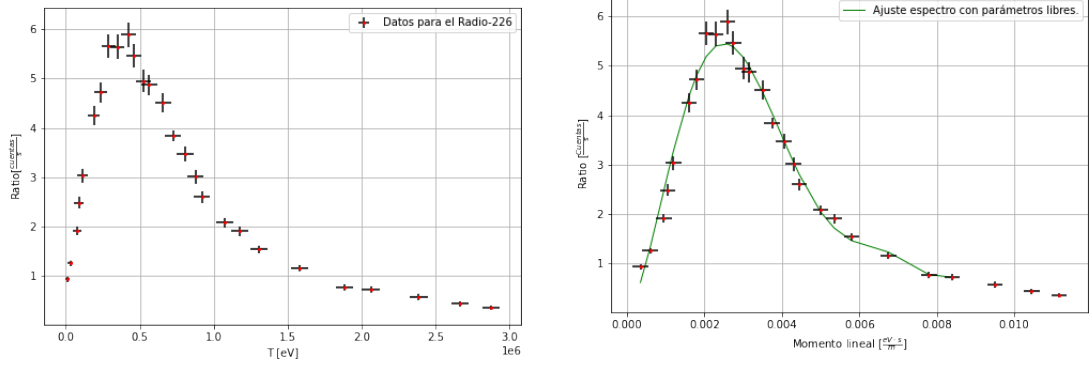
Dispuestos los valores de la actividad y los pesos de cada elemento hemos analizado tres casos para la *Ecuación 29* ya que consideramos que era necesario debido a la dificultad del ajuste para este último elemento.

Para el primer caso estudiamos la *Ecuación 29* con todos los términos libres y un **término independiente** de valor  $I = 0.065$ , obteniendo para el ajuste los resultados que se muestran en la *Tabla 10* así como la representación en la *Figura 11b*. Mencionar que en el ajuste acotamos el rango de los parámetros  $Q_i$  condicionando su valor a un intervalo centrado en su Q-value teórico ya que de no hacerlo obteníamos valores negativos para los parámetros  $Q_i$ .

Ajuste 1 con términos libres				
	<u>Pb-214</u>	<u>Bi-214</u>	<u>Pb-210</u>	<u>Bi-210</u>
<u><math>C_i</math></u>	$1.879(238.523) \cdot 10^6$	$0.001(1.405) \cdot 10^6$	$-0.066(348.681) \cdot 10^6$	$-3.604(31.862) \cdot 10^6$
<u><math>Q_i</math> [MeV]</u>	0.562(18.343)	3.999(1219.096)	0.113(1092.427)	0.584(21.882)

Table 10: Ajuste 1 a la *Ecuación 29* con términos libres para el espectro del Ra-226.

En este caso el ajuste ha arrojado un  $\chi^2 = 9.915$  que, con 16 grados de libertad nos da un intervalo de confianza del 87.10 %.



(a) Espectro de energías para el Radio-226.

(b) Ajuste no lineal a la Ecuación 29 con los parámetros libres.

Figure 11: Espectro y análisis del Radio-226.

A la vista de los resultados anteriores dispusimos a analizar un segundo y tercer caso, primero fijando los Q-values teóricos analizando de seguido el valor de los coeficientes  $C_i$  y el siguiente dejando los Q-values libres fijando los valores de  $C_i$  anteriormente obtenidos. Los resultados para estos dos últimos casos se muestran en la *Tabla 11* y *12*, pudiendo observar el ajuste en la *Figura 12a* y *12b* respectivamente.

### Ajuste 2 con $Q_i$ fijas

	<u>Pb-214</u>	<u>Bi-214</u>	<u>Pb-210</u>	<u>Bi-210</u>
$\underline{C_i}$	$25.420(1.786) \cdot 10^3$	$2.040(758) \cdot 10^3$	$-10.993(703) \cdot 10^3$	$46.299(3.886) \cdot 10^3$

Table 11: Ajuste 2 a la Ecuación 29 con los parámetros  $Q_i$  fijos para el espectro del Ra-226.

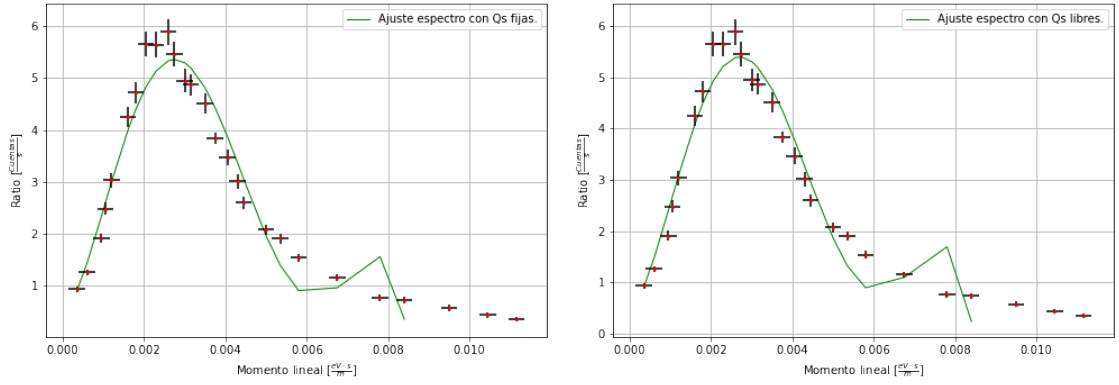
Para este ajuste obtenemos, con 20 grados de libertad y un  $\chi^2 = 37.23$ , un intervalo de confianza del 1%. Se tiene además que el **término independiente** arroja un valor de  $I = 0.48$ .

### Ajuste 3 con $C_i$ fijos

	Pb-214	Bi-214	Pb-210	Bi-210
$Q_i$ [MeV]	0.574(107)	3.289(31)	0.068(119)	1.083(91)

Table 12: Ajuste 3 a la *Ecuación 29* con los parámetros  $C_i$  fijos para el espectro del Ra-226.

Teniendo para este último ajuste un  $\chi^2 = 37.23$  con 20 grados de libertad estando en un intervalo de confianza menor del 0.5%. Se obtiene para el **término independiente** un valor de  $I = 0.48$ .



(a) Ajuste no lineal a la *Ecuación 29* con las  $Q_i$  fijas.

(b) Ajuste no lineal a la *Ecuación 29* con los  $C_i$  fijos.

Figure 12: Análisis del Radio-226.

#### 4. Resultados

De la *Sección 3* extraemos los resultados obtenidos para cada uno de los puntos tratados:

Se ha determinado que el ruido de fondo en el laboratorio durante la realización del experimento ha sido de  $R_f = 0.3721(144)[\frac{Cuentas}{s}]$ .

A la hora de caracterizar los instrumentos de medida se tiene que, para el contador Geiger-Müller obtenemos un tiempo muerto de  $\tau = 578(94)[\mu s]$  mientras que para el teslámetro se identifica la presencia de histéresis habiendo escogido para intentar subsanar los errores que se presentan en los valores medidos del campo magnético una incertidumbre de  $s(B) = 4[mT]$ .

En cuanto al análisis de las fuentes radiactivas empleadas hemos obtenido, para el Sodio-22 y el Krypton-85 los Q-value que se muestran en la *Tabla 13* mientras que para el Radio-226 los obtenidos en la *Tabla 14*.

	Sodio-22	Krypton-85
$Q_{teo} [MeV]$	0.546	0.687
$Q_{FK} [MeV]$	0.582(23)	0.759(36)
$Q_F [MeV]$	0.571(14)	0.765(25)

Table 13: Resultados para los Q-value de las muestras de Sodio y Krypton para los ajustes(subíndices FK y F para denotar Fermi-Kurie y Fermi) de la *Sección 3.4.1* y *3.4.2* respectivamente.

	Radio-226			
	Pb-214	Bi-214	Pb-210	Bi-210
$Q_{teo} [MeV]$	0.666	3.269	0.17	1.162
$Q_1 [MeV]$	0.562(18.343)	3.999(1219.096)	0.113(1092.427)	0.584(21.882)
$Q_3 [MeV]$	0.574(107)	3.289(31)	0.068(119)	1.083(91)

Table 14: Resultados para los Q-value de la muestra de Radio para los ajustes 1 y 3 de la *Sección 3.4.3*.

## 5. Conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos observamos como para el Sodio y el Krypton el Q-value de las reacciones de desintegración están próximos a sus valores teóricos a pesar de no entrar en el rango de error debido a, como dijimos con anterioridad, las fluctuaciones que pudieron tener lugar a la hora de medir el campo magnético y el haber englobado en una constante factores que supusimos constantes(en el caso del Sodio) en un principio tales como el factor de forma como el elemento de matriz nuclear. Podemos observar también en los test  $\chi^2$  que acompañan a cada ajuste que, para los ajustes de Fermi-Kurie estos dan un intervalo de confianza muy pequeño lo que refleja un comportamiento no lineal en la tendencia aún habiendo escogido las medidas en las zonas donde se supone un comportamiento lineal según la teoría (en el caso del Krypton al introducir un factor de forma se conseguiría una linealidad en el diagrama de Fermi-Kurie), para los ajustes a la ecuación de espectros obtenemos un valor de  $\chi^2$  un poco menor pero dando aún así un intervalo de confianza muy pequeño. Para el Radio los resultados obtenidos no han sido mucho mejores, aún teniendo unos intervalos de confianza mayores(como se puede comprobar en la *Sección 3.4.3*) las incertidumbres relativas a los Q-value son enormes debido a las limitaciones que le hemos impuesto al ajuste 1. Se han obtenido valores negativos para los parámetros  $C_i$  incluso fijando el Q-value teórico en el ajuste 2 lo cual nos indica que algo está fallando y, fijándonos en que el Q-value más probable en la desintegración del Bi-214 tiene un valor teórico de 3.269 [MeV] y nuestros datos solo llegan hasta los 2.8 [MeV], como podemos ver en la *Figura 11a*, es de esperar que este sea uno de los motivos por los que el ajuste no alcance unos valores fieles al comportamiento de los decaimientos. Sin embargo, hemos dejado los valores negativos para estos coeficientes ya que nos sirven para hacernos una idea del valor aproximado de los Q-values y como operar en el análisis de la teoría de Fermi de la desintegración  $\beta$ . Hay que tener en cuenta también las limitaciones en la estadística ya que no se ha podido medir lo necesario para tener una mayor precisión y un buen barrido en energías para cada muestra radiactiva, sin embargo los resultados han sido satisfactorios ya que he podido corroborar la teoría de Fermi y obtener, con mayor o menor precisión, unos resultados con un orden de magnitud acorde a los valores teóricos y unos espectros que se adaptan en buena medida a los datos experimentales.

## References

- [1] G.F. Knoll, Radiation detection measurement, John Wiley and Sons, New York (1979)
- [2] Modern Physics, 3rd Edition, Kenneth S. Krane, Ed: John Wiley, 2012.
- [3] Guión de prácticas Laboratorio de física nuclear.
- [4] Programa de física nuclear y de partículas, J.J. Saborido (2008/2009)
- [5] Beta decay-[https://en.wikipedia.org/wiki/Beta\\_decay#History](https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_decay#History)
- [6] National Nuclear Data Center-<https://www.nndc.bnl.gov/>
- [7] Histéresis-<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Solids/hyst.html>
- [8] A. Malins & T. Lemoine, radioactivedecay: A Python package for radioactive decay calculations. Journal of Open Source Software, 7 (71), 3318 (2022)- <https://doi.org/10.21105/joss.03318>
- [9] Teoría de Fermi y Decaimiento Beta-<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/quantum/fermi2.html#c1>