DC11

úterý 2. května 2023 14:46

13.1. Odpovězte, zda následující množiny jsou konvexní a odpověď dokažte z definice konvexní množiny:

a) interval $[a, b]$

b) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$

c) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \}$

a) pro libovolnou $\alpha \in [0,1]$ je $(1-\alpha)a + \alpha b \in [a,b]$ Konvexní

b) Není konvexní

c) Konvexní

e) $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \}$

Konvexní

g) $\mathbb{Z}$ (množina celých čísel)

Nekonvexní

13.2. Jsou následující množiny konvexní? Odpověď nemusíte dokazovat z definice kovexní množiny, stačí uvést přesvědčivý argument. Jestliže množina není konvexní, napište její konvexní obal jako množinu řešení soustavy (co možná nejjednodušší) rovnic a nerovnic.

a) $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \}$

b) $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 = 1 \}$

a) Konvexní, jedná se o průnik poloprostorů a nadroviny

b) Nekonvexní, obal je koule $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$

e) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy = 1 \}$
f) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2 \} \cap \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 2 \}$
g) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \}$
h) $\{-1, 0, 1\}$
i) $\{(1,1), (2,2)\}$
j) $\{(1,1), (1,2), (3,1)\}$

e) Nekonvexní, konvexní obal je $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 1\}$

f) Konvexní, průnik dvou koulí

g) Nekonvexní, k.o. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1, x+y \geq 1\}$

h) Nekonvexní, k.o. interval $[-1, 1]$

i) Nekonvexní, k.o. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, x = y\}$

j) Nekonvexní, k.o. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 1, x + 2y \leq 5\}$

13.5. Nakreslete lineární, afinní, nezáporný a konvexní obal náhodně zvolených k vektorů v $\mathbb{R}^n$ pro všech devět případů $k, n \in \{1, 2, 3\}$.

13.7. Jsou následující množiny konvexní mnohostěny? Zápornou odpověď odůvodněte. Kladnou odpověď dokažte tak, že množinu napíšete jako množinu řešení soustavy konečně mnoha lineárních nerovnic (tj. jako průnik konečně mnoha poloprostorů).

a) $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} \leq 1 \}$, kde $\mathbf{C}$ je positivně definitní
b) $\{ \alpha \mathbf{v} \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$, kde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
~~c)~~ ($\star$) $\{ \mathbf{C}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1 \}$, kde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
d) $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \}$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou dány

a) Konvexní je jen množina (elipsoid), mnohostěn je jen pro $n=1$

b) Ano. Průnik: $Ax = 0$

b) Ano. Průnik: $Ax = 0$

$\mathrm{null}\{A\} = \mathrm{span}\{v\}$

v = směr. vektor přímky proch. počátkem

d) Ano.