23opt_zkousky1

pátek 9. června 2023 15:39

23opt_zko...

Optimalizace **Zkouškový test** 26. 5. 2023

Příjmení a jméno: ______________________

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   - (a) (2 b) Funkce $f(x,y) = e^x + |y| - 2$ je konvexní.
   - (b) (2 b) Množina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1, |x| \le y\}$ je konvexní polyedr.
   - (c) (2 b) Funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + |x| + |y|$ má lokální minimum, které není globální.
   - (d) (2 b) Konvexní polyedr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \ge 5, 4x+y \le 4, x, y \ge 0\}$ nemá vrchol.
   - (e) (2 b) Každý bod uzavřeného intervalu $[-1,1]$ je regulárním bodem funkce $f(x) = (x-1)^{10}$.

Řešení:

(a) Ano, je to součet konvexních funkcí.

(b) Ano, kvadratická podmínka je redundantní.

(c) Ne, je to norma, tedy konvexní funkce.

(d) Ano, nemá, protože je prázdný.

(e) Ne. V bodě 1 má funkce nulovou derivaci.

2. (10 b) Matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ napište ve tvaru SVD $\mathbf{A} = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T$.

Řešení:

Matice

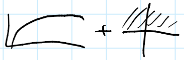
$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix}$$

má vlastní čísla 0 a 90. První vlastní číslo dokonce snadno uhodneme, neboť $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má hodnost 1. Charakteristický polynom je $\lambda^2 - 90\lambda$. Singulární čísla jsou $\sigma_1 = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ a $\sigma_2 = 0$. Tedy SVD rozklad je tvaru $\mathbf{A} = 3\sqrt{10}\mathbf{u}\mathbf{v}^T$, kde $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ je levý/pravý singulární vektor matice $\mathbf{A}$. Nejprve spočteme $\mathbf{v}$, což je vlastní vektor matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ příslušná vlastnímu číslu 90. Tedy řešíme homogenní soustavu s maticí

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 90\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -9 & -27 \\ -27 & -81 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   - (a) (2 b) Funkce $f(x,y) = e^x + |y| - 2$ je konvexní.
   - (b) (2 b) Množina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1, |x| \le y\}$ je konvexní polyedr.
   - (c) (2 b) Funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + |x| + |y|$ má lokální minimum, které není globální.
   - (d) (2 b) Konvexní polyedr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \ge 5, 4x+y \le 4, x, y \ge 0\}$ nemá vrchol.
   - (e) (2 b) Každý bod uzavřeného intervalu $[-1,1]$ je regulárním bodem funkce $f(x) = (x-1)^{10}$.

a)

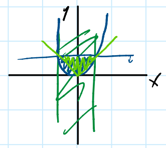
$e^x =$  Ano

b)

$-1 \le x \le 1$

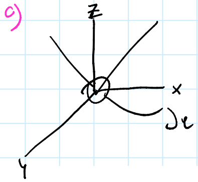
$x^2 \le y \le 1$

$|x| \le y$



Ano

c)



Je globální NE

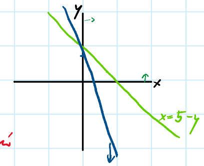
d)

$x + y \ge 5$

$4x + y \le 4$

$x, y \ge 0$

Ano, nemá



e)

$(x-1)^{10}$

NE

$x = -1 \to -2^{10}$

$x = 0 \to -1^{10}$

$x = 1 \to 0$

Aby byl bod regulární:

1. Spojitě dif → platí, až na x=1
2. Jakobi je LN

$\hookrightarrow f = 0 \to \underline{f' = 0}$

2. (10 b) Matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ napište ve tvaru SVD $\mathbf{A} = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T$.

$$A^TA = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix} \to \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 81-\lambda & -27 \\ -27 & 9-\lambda \end{bmatrix} = 81 \cdot 9 - 81\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - \overset{729}{27^2} = \lambda^2 - 90\lambda$$

$\lambda(\lambda - 90) = 0$

$\lambda_1 = 0 \to \sqrt{0} = 0$ nulu neřeším

$\lambda_2 = 90 \to \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ $\leftarrow \sigma_1$

vl. číslo A

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \end{bmatrix} \qquad V = \frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$A^TA - 90I$

$$\lambda_2: \begin{bmatrix} -9 & -27 \\ -27 & -81 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -9 & -27 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \end{array}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow \underbrace{v_2 = -1 \to v_1 = 3}_{v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}}$

$$u = \frac{1}{\sigma_1} \cdot A \cdot v = \frac{1}{3\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Její obecné řešení je $(3t, -t)$. Tomu odpovídá jednotkový vlastní vektor $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)$. Levý singulární vektor dopočteme jako

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}\mathbf{v} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}(3, -1)^T = \frac{1}{30}(-10, 20, 20)^T.$$

Tedy našli jsme SVD

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \sigma_1 \mathbf{u}\mathbf{v}^T.$$

3. Firma vyrábí dva druhy produktů. První se prodává za 40 a druhý za 60. K výrobě každého výrobku se používají tři vstupní suroviny, kterých je k dispozici 70, 40 a 90 jednotek. K výrobě prvního produktu je potřeba 1 jednotka druhé i třetí suroviny a 2 jednotky první suroviny, druhý produkt potřebuje po jedné jednotce první a druhé suroviny a 3 jednotky třetí suroviny. Firma chce maximalizovat tržby z vyráběných produktů.
   (a) (2 b) Formulujte optimalizační úlohu (Podmínky celočíselnosti zanedbejte).
   (b) (5 b) Spočtěte její optimální řešení.
   (c) (3 b) Formulujte podmínky komplementarity pro úlohu z bodu (a).

Řešení:

(a) Jedná se o lineární program $\max 40x + 60y$ z.p. $2x + y \leq 70$, $x + y \leq 40$, $x + 3y \leq 90$, $x, y \geq 0$.

(b) Přípustná řešení tvoří trojúhelník, jehož vrcholy jsou $(0, 30), (15, 25), (30, 10), (35, 0), (0, 0)$. Ty spočítáme řešením odpovídajících soustav lin. rovnic. Porovnáním funkčních hodnot zjistíme, že optimum je v bodě $(15, 25)$.

(c) Podmínky komplementarity: v optimu primáru $\mathbf{x}$ a duálu $\mathbf{z}$ musí platit $2x+y = 70$ nebo $z_1 = 0$, $x+y = 40$ nebo $z_2 = 0$, $x+3y = 90$ nebo $z_3 = 0$ a dále $x = 0$ nebo $2z_1+z_2+z_3 = 40$, $y = 0$ nebo $z_1 + z_2 + 3z_3 = 60$.

4. Uvažujme funkci $f(x, y, z) = 3x^2 - y^2 + 3xy + z^2$.
   (a) (2 b) Jaká je směrová derivace funkce f ve směru $(0, 0, 1)$?
   (b) (4 b) Napište Taylorův polynom prvního řádu kolem bodu $(1, 1, 0)$. Pokud budete používat nějaké derivace, rozepište je, nepoužívejte f' či f''.
   (c) (2 b) Napište obecnou iteraci gradientní metody použitou na minimalizaci funkce f.
   (d) (2 b) Napište obecnou iteraci Newtonovy metody použitou na minimalizaci funkce f. Zúčastněné matice nemusíte případně invertovat.

Řešení:

(a) Směrová derivace funkce f ve směru $(0, 0, 1)$ je parciální derivace podle proměnné z, tedy $2z$.

(b) Derivace funkce f je $(6x + 3y, -2y + 3x, 2z)$. Vzhledem k tomu, že $f(1, 1, 0) = 5$ a $f'(1, 1, 0) = (9, 1, 0)$, má Taylorův polynom tvar

$$T_1(x, y, z) = f(1, 1, 0) + f'(1, 1, 0)((x, y, z) - (1, 1, 0)) = -5 + 9x + y.$$

(c) $(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}) = (x_k, y_k, z_k) - \alpha_k \nabla f(x_k, y_k, z_k)$, což můžeme psát jako

$$((1 - 6\alpha_k)x_k - 3\alpha_k y_k, -3\alpha_k x_k + (1 + 2\alpha_k)y_k, (1 - 2\alpha_k)z_k)$$

(d) Hessova matice:

$$f''(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Firma vyrábí dva druhy produktů. První se prodává za 40 a druhý za 60. K výrobě každého výrobku se používají tři vstupní suroviny, kterých je k dispozici 70, 40 a 90 jednotek. K výrobě prvního produktu je potřeba 1 jednotka druhé i třetí suroviny a 2 jednotky první suroviny, druhý produkt potřebuje po jedné jednotce první a druhé suroviny a 3 jednotky třetí suroviny. Firma chce maximalizovat tržby z vyráběných produktů.
   (a) (2 b) Formulujte optimalizační úlohu (Podmínky celočíselnosti zanedbejte).
   (b) (5 b) Spočtěte její optimální řešení.
   (c) (3 b) Formulujte podmínky komplementarity pro úlohu z bodu (a).

1.)

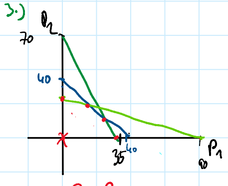
	P_1	P_2
cena	40	60
	2:1:1	1:1:3

2.) → max $40P_1 + 60P_2$

z.p.
$2P_1 + 1P_2 \leq 70$
$P_1 + P_2 \leq 40$
$P_1 + 3P_2 \leq 90$
$P_1 P_2 \geq 0$

$P_1 = 30$ $\quad$ $2P_2 = 50 \to P_2 = 25$
$P_2 = 10$ $\quad$ $P_1 = 15$

3.)



P_1	P_2	
35	0	1400
0	30	1800
30	10	1800
15	25	$\underline{\underline{2100}}$

Primár

$40P_1 + 60P_2$

$2P_1 + P_2 = 70$ $\quad z_1 \geq 0$
$P_1 + P_2 = 40$ $\quad z_2 \geq 0$
$P_1 + 3P_3 = 90$ $\quad z_3 \geq 0$

Duál

$2z_1 + z_2 + z_3 = 40$ $\quad \vee \; P_1 = 0$
$z_1 + z_2 + 3z_3 = 60$ $\quad \vee \; P_2 = 0$

4. Uvažujme funkci $f(x, y, z) = 3x^2 - y^2 + 3xy + z^2$.
   (a) (2 b) Jaká je směrová derivace funkce f ve směru $(0, 0, 1)$?
   (b) (4 b) Napište Taylorův polynom prvního řádu kolem bodu $(1, 1, 0)$. Pokud budete používat nějaké derivace, rozepište je, nepoužívejte f' či f''.
   (c) (2 b) Napište obecnou iteraci gradientní metody použitou na minimalizaci funkce f.
   (d) (2 b) Napište obecnou iteraci Newtonovy metody použitou na minimalizaci funkce f. Zúčastněné matice nemusíte případně invertovat.

a) $f'_z = 2z$

b) $T^1_{(1,1,0)} = f(1,1,0) + f'\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} = (3-1+3) + \begin{bmatrix} \underset{9}{6x+3y} & \underset{1}{-2y+3x} & \underset{0}{2z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} = 5 + 9x - 9 + y - 1 = 9x + y - 5$

c) $x = a - \alpha f'(a)^T$

$f' = \begin{bmatrix} 6x + 3y \\ -2y + 3x \\ 2z \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 6a + 3b \\ -2b + 3a \\ 2c \end{bmatrix}$

d) $x = a - (f''(a))^{-1}(f'(a))^T$

$$((1-6\alpha_k)x_k - 3\alpha_k y_k, -3\alpha_k x_k + (1+2\alpha_k)y_k, (1-2\alpha_k)z_k)$$

(d) Hessova matice:

$$f''(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}) = (x_k, y_k, z_k) - \alpha_k f''(x_k, y_k, z_k)_k^{-1} f'(x_k, y_k, z_k)^T$$

$2z \quad c \quad 2c$

d) $x = a - \left(f''(a)\right)^{-1}\left(f'(a)\right)^T$

$$f'' = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6a+3b \\ -2b+3a \\ 2c \end{bmatrix}$$