Na tahak

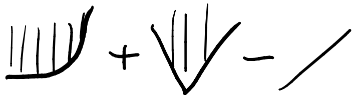
pondělí 12. června 2023 23:39

a) $f(x,y) = e^x + |y| - 2$ konvexní?

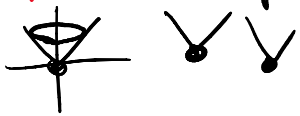
b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1;\ x^2 \le y \le 1;\ |x| \le y\}$ konvexní polyedr?

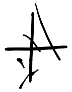
c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + |x| + |y|$ má lok. min, které není globální?

d) Každý bod $[-1,1]$ je reg. bod $f(x) = (x-1)^{10}$

a)  ANO

b) ANO uzavřené polopr

c)  NE

d)  ANO z obrázku

e) Reg bod: der $\neq 0$, ekkoli: LN $\exists$ $\quad [-1,1]$ $\quad -1 \to (-2)^{10}$, $\quad 1 \to 0 \to f' = 0$

NE

Matice $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ napište ve tvaru SVD $A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix} \to \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 81-\lambda & -27 \\ -27 & 9-\lambda \end{bmatrix} = 81 \cdot 9 - 81\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - \overset{729}{27^2} = \lambda^2 - 90\lambda$$

$$\lambda(\lambda - 90) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \to \sqrt{0} = 0 \leftarrow \text{nulu neřeším}$$

$$\lambda_2 = 90 \to \sqrt{90} = 3\sqrt{10} = \sigma$$

$$\lambda_2: \begin{bmatrix} -9 & -27 \\ -27 & -81 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \left.\begin{matrix} v_2 = -1 \\ v_1 = 3 \end{matrix}\right\} v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$v_{sing} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u = \frac{1}{\sigma_1} \cdot A \cdot v = \frac{1}{3\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Firma vyrábí dva druhy produktu:

- První za 40. Druhý za 60
- Potřebuje tři suroviny: od každé max 70 40 90
- První potřebuje: 2,1,1
- Druhý potřebuje: 1,1,3

a) Formulujte opt. problém

b) Spočtěte optimální řešení

c) Formulujte podmínky komplementarity z bodu (a)

1.)

	P_1	P_2
Cena	40	60

2.) a)

$$\max \; 40P_1 + 60P_2$$

z.p.

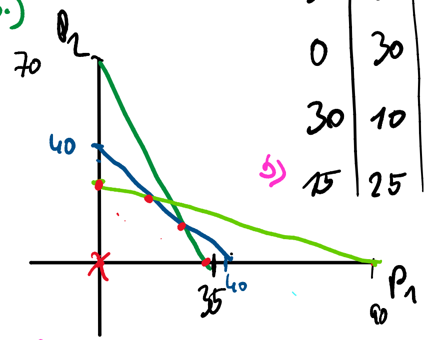
$$2P_1 + 1P_2 \leq 70$$

$$P_1 + P_2 \leq 40$$

$$P_1 + 3P_2 \leq 90$$

$$P_1, P_2 \geq 0$$

3.)



4.)

P_1	P_2	Tržby
35	0	1400
0	30	1800
30	10	1800
b) 15	25	2100

Prim

$\max \; 40P_1 + 60P_2$	$\min \; 70y_1 + 40y_2 + 90y_3$
$2P_1 + P_2 \leq 70$	$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 40$
$P_1 + P_2 \leq 40$	$y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 60$
$P_1 + 3P_2 \leq 90$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
$P_1, P_2 \geq 0$	

c) P.K.:

$$2P_1 + P_2 = 70 \lor y_1 = 0$$

$$P_1 + P_2 = 40 \lor y_2 = 0$$

$$P_1 + 3P_2 = 90 \lor y_3 = 0$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 = 40 \lor P_1 = 0$$

$$y_1 + y_2 + 3y_3 = 60 \lor P_2 = 0$$

4. Uvažujme funkci $f(x, y, z) = 3x^2 - y^2 + 3xy + z^2$.

(a) (2 b) Jaká je směrová derivace funkce f ve směru $(0, 0, 1)$?

(b) (4 b) Napište Taylorův polynom prvního řádu kolem bodu $(1, 1, 0)$. Pokud budete používat nějaké derivace, rozepište je, nepoužívejte f' či f''.

(c) (2 b) Napište obecnou iteraci gradientní metody použitou na minimalizaci funkce f.

(d) (2 b) Napište obecnou iteraci Newtonovy metody použitou na minimalizaci funkce f. Zúčastněné matice nemusíte případně invertovat.

a) $f'_z = 2z$

b) $$T^1_{(1,1,0)} = f(1,1,0) + f'\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} = (3-1+3) + \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 6x+3y & -2y+3x & 2z \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 9 \quad\quad & 1 \quad\quad & 0 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} = 5 + 9x - 9 + y - 1 = 9x + y - 5$$

c) $x = a - f'(a)^T$

$$f' = \begin{bmatrix} 6x+3y \\ -2y+3x \\ 2z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6a+3b \\ -2b+3a \\ 2c \end{bmatrix}$$

d) $x = a - (f''(a))^{-1} (f'(a))^T$

$$f'' = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6a+3b \\ -2b+3a \\ 2c \end{bmatrix}$$