Zkouška OPT 10.2.2021

Každý příklad pište na samostatnou stránku a ofoťte do samostatného souboru, jehož jméno (bez přípony) je číslo příkladu.
Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu se nepočítá.

1. **(5b)** Stroj na lisování plastů umí vyrábět dva druhy výrobků (v jeden okamžik ovšem umí vyrábět jen jeden druh), hadičky a gumičky. Hadičky vyrábí rychlostí 200 kg/hod, gumičky rychlostí 140 kg/hod. Je nasmlouváno, že hadiček se nesmí vyrobit více než 6000 kg a gumiček se nesmí vyrobit více než 4000 kg. Z prodeje hadiček je zisk 25 Kč/kg, z prodeje gumiček 30 Kč/kg. Kolik kg máme vyrobit hadiček a gumiček, chceme-li největší zisk a máme-li k dispozici 40 hodin práce stroje? Cenu surovin a cenu za běh stroje nepočítáme. Napište jako lineární program.

2. **(4b)** V geometrii počítačového vidění se vyskytuje rovnice $\mathbf{x}^T\mathbf{F}\mathbf{y} = 0$, kde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ jsou známé vektory a $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ je neznámá matice. Tato rovnice se dá zapsat ve tvaru $\mathbf{a}^T\mathbf{f} = 0$, kde $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^9$ je sloupcový vektor vytvořený ze sloupečků matice $\mathbf{F}$ zapsaných pod sebou a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^9$ je sloupcový vektor, jehož složky jsou výrazy obsahující složky vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Najděte vektor $\mathbf{a}$.

3. Máme podprostor $U = \operatorname{span}\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$.
   (a) **(2b)** Najděte libovolnou bázi podprostoru $U^\perp$.
   (b) **(4b)** Najděte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{x} = (-1, 1, 0)$ na podprostor U. Z možných postupů výpočtu zvolte takový, který vykoná co nejméně aritmetických operací (plus, mínus, krát, děleno) za předpokladu, že už máte bázi podprostoru $U^\perp$. Tento postup jednoznačně popište.

4. Hledáme extrémy funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + 2y$ na množině $X = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 = 0 \,\}$.
   (a) **(3b)** Úlohu vyřešte algebraicky. U každého extrému napište, zda je lokální nebo globální. Pro každý stacionární bod odůvodněte, proč je to minimum, maximum nebo nic z toho. K tomu nemusíte použít podmínky druhého řádu, ale můžete uvést jiný argument (vycházející např. z náčrtku).
   (b) **(3b)** Ověřte výsledek úvahou pomocí náčrtku. Na náčrtku musí být množina X, všechny extrémy, a vrstevnice funkce f procházející každým extrémem.

5. Jsou dány body $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$. Hledáme čísla $a, b \in \mathbb{R}$ taková, aby součet druhých mocnin (kolmých) vzdáleností bodů od roviny $P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by \,\}$ byl minimální.
   (a) **(3b)** Má tato úloha vždy optimální řešení? Vysvětlete.
   (b) **(3b)** Napište algoritmus, který spočítá čísla a, b.

6. **(4b)** Máme dvě rovinné křivky popsané rovnicemi $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = a$ a $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = b$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Hledáme průsečík těchto křivek Newtonovou metodou. Napište iteraci metody.

7. Jsou dány spojitě diferencovatelná funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nenulový vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a číslo $b \in \mathbb{R}$. Hledáme vzdálenost množiny $X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = 0 \,\}$ od nadroviny $H = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b \,\}$.
   (a) **(3b)** Formulujte tuto optimalizační úlohu. Ve vaší formulaci musí být jednoznačně vidět, co jsou proměnné, co účelová funkce a co omezující podmínky.
   (b) **(4b)** Dokažte toto tvrzení: Nechť $\mathbf{x}$ je bod množiny X, který je nejblíže nadrovině H. Jestliže $X \cap H = \emptyset$ a $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, pak tečný prostor k množině X v bodě $\mathbf{x}$ je rovnoběžný s H. (Nápověda: můžete použít podmínky prvního řádu na extrémy vázané rovnostmi.)
   (c) **(4b)** Najděte vzdálenost dvou křivek v rovině: přímky $y = 2x - 3$ a paraboly $y = x^2$.

8. Máme lineární program $\min\{\, \mathbf{b}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{0} \le \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{1} \,\}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ jsou dány.
   (a) **(5b)** Napište duální úlohu a upravte ji do co možná jednoduchého tvaru (jednoduchost se hodnotí).
   (b) **(3b)** Jaké musí být $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}$, aby primární úloha měla optimální řešení? Odpověď napište co možná výstižně a jednoduše. Odpověď odůvodněte. (Nápověda: můžete využít výsledek minulého podúkolu.)

Bodů celkem: 50