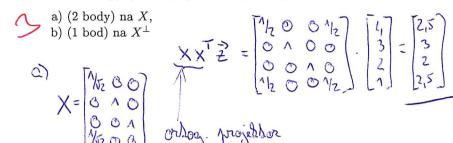
Jméno:

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. Nechť $X=\{(x_1,x_2,x_3,x_4);\;x_1=x_4\},$ $\mathbf{z}=(4,3,2,1).$ Najděte kolmou projekci vektoru \mathbf{z}



b) Arajehee ma
$$x^{2} \sim negehee \times$$

$$(I - X \times T) = \frac{2}{2} - \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n.5 \\ 0 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

2. (2 body) Pro afinní podprostor $X = (1, 2, 3, 4) + \text{span}\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ najděte matici a vektor pravých stran soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jejíž řešení je X.

plakí
$$A \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \land A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\$$

- 3. Závislost proměnné z na proměnných x, y modelujeme regresní funkcí $z \approx f(x, y) = a(x y)^2 + be^{x + y} + cxy + d$. Odhadujeme parametry $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ funkce z naměřených bodů $(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, 100$, ve smyslu nejmenších čtverců.
 - a) (2 body) Formulujte úlohu v maticové podobě.
 - b) (1 bod) Za jakých předpokladů bude mít úloha jediné řešení? Takové řešení napište.
- - b) Jedine ræsení bude proce, Jedyž A má lin neráv sloupce () ATA je regularni Polé resent vypada = (ATA) ATB = ab
 - 4. Matice **A** typu $10^4 \times 50$ má prvky 0 nebo 1. Každý řádek i odpovídá jedné osobě a každý sloupec j streamovací službě (Netflix, Spotify atd.), přičemž $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když si osoba i předplácí službu j.
- a) (1 bod) Co vyjadřují prvky matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$? Interpretujte jejich numerické hodnoty.
 - b) (1 bod) Matice A^TA má jen 15 nenulových singulárních čísel s_1, \ldots, s_{15} . Napište teoretickou chybu aproximace matice A^TA maticí hodnosti nejvýše 10.
 - a) ATA endered Lynn 50x50 num hodnosa v poli i, j je poest predplatitela, steri predplaci slubbu sinderen i a j raroven (pro i=j ~ poced predpl sluby i)
 - b) olyba aproximace by byla 32+ 52+ 52+ 513+ 514 + 515

Vase odpovedi na kvizove otazky: c, a, e, c, c

spatne:

dobre: 5, 6, 7, 8, 9

chybi:

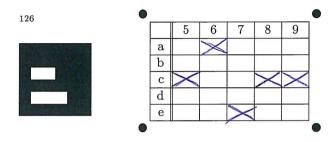
Celkem bodu za kviz: 5

Zadani vaseho kvizu naleznete na nasledujici strane.

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)



- 5. Máme zadánu symetrickou matici \mathbf{A} řádu n.
 - (a) Její největší vlastní číslo λ je vždy kladné a platí $\lambda = \max \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ pro vektory \mathbf{x} splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
 - (b) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ nabývá vždy maxima pro nějaký vektor \mathbf{x} splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
 - (c) Její nejmenší vlastní číslo splňuje $\lambda \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ pro libovolný vektor \mathbf{x} takový, že $\|\mathbf{x}\| = 1$.
 - (d) Optimální řešení úlohy max $\{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ vždy existuje.
 - (e) Každý vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice \mathbf{A} je řešením úlohy max $\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}|\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\}$.
- 6. Rozhodněte, co platí pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
 - (a) Neplatí žádná z uvedených možností.
 - (b) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ má minimum v bodě 0.
 - (c) A má vlastní číslo 0.
 - (d) A je pozitivně definitní.
 - (e) Optimální hodnota úlohy min $\{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{x}\| = 1\}$ je kladná.
- 7. Pro která $a \in \mathbb{R}$ je matice $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonální projektor?
 - (a) pro $a \ge 0$
 - (b) pro a = 0
 - (c) pro $a \in \{0, 1\}$
 - (d) pro $a \in [0, 1]$
 - (e) žádná z uvedených možností
- 8. Máme matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takové, že každá matice \mathbf{A}_i má ortonormální sloupce. Označme $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k$ součin těchto matic.
 - (a) Matice **B** je ortogonální jen tehdy, když $k \leq 2$.
 - (b) Matice B je identická.
 - (c) Matice B je ortogonální.
 - (d) Matice B má ortonormální sloupce, ale nemusí být ortogonální.
 - (e) Neplatí žádné výše uvedené tvrzení.
- 9. Hledáme afinní podprostor X dimenze 5 minimalizující součet čtverců kolmých vzdáleností od vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{1000} \in \mathbb{R}^{50}$.
 - (a) Neplatí žádná z uvedených možností.
 - (b) X je afinním podprostorem prostoru \mathbb{R}^5 .
 - (c) X je afinním podprostorem prostoru \mathbb{R}^{50} .
 - (d) Hledaný afinní podprostor X nemusí existovat.
 - (e) X je vždy lineárním obalem 5 lineárně nezávislých vektorů.