DC6

neděle 26. března 2023 17:06

7.1. Vyřešte úlohu $\max\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1\}. = \lambda_n$

$y^Ty = 1$

$$x^TAx = \underbrace{x^TV}_{y^T}\Lambda \underbrace{V^Tx}_{y} = \lambda_1 y_1^2 + \dots \lambda_n y_n^2$$

$$y^T y = \lambda_n$$

7.3. Řekli jsme, že minimální hodnota výrazu $\mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ za podmínky $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1$ je λ_1. Dokažte to přesně.

$$y_1 = 1 - y_2^2 - \dots - y_n^2 \longrightarrow \lambda_1(1 - y_2^2 - \dots - y_n^2) + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = \underbrace{\lambda_1}_{\text{nejmenší hodnota}} + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)_{y_2} + \dots + (\lambda_n - \lambda_1)_{y_n}}_{\text{vždycky větší}}$$

7.5. Přidejme k úloze (7.1) omezení, že $\mathbf{x}$ musí být kolmé na vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Tedy minimalizujeme $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ přes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ za podmínek $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$ a $\mathbf{v}_1^T\mathbf{x} = \cdots = \mathbf{v}_k^T\mathbf{x} = 0$. Dokažte, že optimální hodnota této úlohy je λ_{k+1} a optimum se nabývá pro $\mathbf{x} = \mathbf{v}_{k+1}$.

$$x^TAx = \underbrace{x^TV}_{y^T}\Lambda \underbrace{V^Tx}_{y} = \lambda_1 y_1^2 + \dots \lambda_n y_n^2$$

$y_i = 0$ pro $i = 1 \dots k$ ale $y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1 \implies y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2 = 1$

7.6. Jsou-li $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ sloupce matice $\mathbf{X}$, dokažte tyto rovnosti (srov. (7.3)):

$$\operatorname{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}) = \langle \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X}\rangle = \langle \mathbf{A}, \underbrace{\mathbf{X}\mathbf{X}^T}_{\text{symetrická}}\rangle = \mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k^T\mathbf{A}\mathbf{x}_k.$$

$\langle A, B\rangle = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij}$ $\quad \langle A, B\rangle = tr(A^TB)$ $\quad \langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle = tr(B^TA) = tr(A^TB)$

$$\langle A, B\rangle = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij} \qquad \langle A, B\rangle = tr(A^T B) \qquad \langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle = tr(B^T A) = tr(A^T B)$$

pro A čtvercová, pak $\langle AX, X\rangle = \langle X, AX\rangle = tr(\overbrace{X^TAX}) \rightarrow C = X^TAX \qquad c_{ij} = x_i^TAx_j \rightarrow \sum_{ij}^{k} c_{ij} = x_1^TAx_1 + \dots + x_k^TAx_k$

$\langle A, XX^T\rangle = \langle XX^T, A\rangle = tr(X^TXA)$

$\hookrightarrow tr(XX^TA)$

7.8. Jsou dány čtyři body $\mathbf{a}_1 = (3, -3, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -3, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (3, 1, 0)$ v $\mathbb{R}^3$. Najděte množinu $X \subseteq \mathbb{R}^3$, která minimalizuje součet čtverců kolmých vzdáleností bodů k podprostoru X, kde X je

a) přímka procházející počátkem,
b) rovina procházející počátkem,
c) přímka která může ale nemusí procházet počátkem.

Vždy najděte vektor $\mathbf{x}_0$ a ortonormální bázi lineárního podprostoru X' tak, aby $X = \mathbf{x}_0 + X'$. Dále spočítejte ortogonální projekce bodů na podprostor X (je snad jasné, co myslíme projekcí na afinní podprostor) a souřadnice těchto projekcí v ortonormální bázi podprostoru X'. Použijte (a) spektrální rozklad, (b) SVD. Můžete použít počítač.

```
A =

     3    -2     1     3
    -3    -3     0     1
     4    -2    -1     0

>> [V D] = eig(A*A')

V =

   -0.6164    0.3771    0.6912
    0.3196    0.9221   -0.2181
    0.7197   -0.0864    0.6889

D =

    5.4877         0         0
         0   19.5624         0
         0         0   37.9500
```

span přímky

span roviny

největší λ

a) $Y = \begin{bmatrix} 0.6912 \\ -0.2181 \\ 0.6889 \end{bmatrix}$ projekce bodů na přímku Y^TA

b) $Y = \begin{bmatrix} 0.3771 & 0.6912 \\ 0.9221 & -0.2181 \\ -0.0864 & 0.6889 \end{bmatrix}$ projekce bodů na rovinu YY^TA

c) $T =$

```
>> T = A*[1 1 1 1]'*1/4

T =

    1.2500
   -1.2500
    0.2500
```

$P = (A - T)$

```
    1.7500   -3.2500   -0.2500    1.7500
   -1.7500   -1.7500    1.2500    2.2500
    3.7500   -2.2500   -1.2500   -0.2500
```

```
>> [V D] = eig(P*P')

V =

    0.6491    0.3784   -0.6599
   -0.5246    0.8509   -0.0280
   -0.5509   -0.3644   -0.7508

D =

    0.0279         0         0
         0   17.5635         0
         0         0   32.6586
```

span přímky

↳ výsledek = T - span

7.10. Pro matici $\mathbf{A} = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} -13 & 2 & -22 \\ -16 & 14 & -4 \end{bmatrix}$ najděte matici $\mathbf{B}$ hodnosti jedna takovou, že $\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|$ je minimální. Pak spočtěte $\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|$. Spočtěte pomocí (a) spektrálního rozkladu, (b) SVD. Použijte počítač.

$[U\ S\ V] = \mathrm{svd}(A)$

$B = (U S V^T) \cdot 15$

```
>> [U S V] = svd(A)

U =

    0.8000    0.6000
    0.6000   -0.8000


S =

     2     0     0
     0     1     0


V =

   -0.6667    0.3333   -0.6667
    0.3333   -0.6667   -0.6667
   -0.6667   -0.6667    0.3333
```

$\longrightarrow S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pronulování nejmenšího diag. prvku

```
>> (U*S*V')*15

ans =

  -16.0000    8.0000  -16.0000
  -12.0000    6.0000  -12.0000
```