MA 4-21

1. Nalezněte tečnou rovinu k ploše $z^2 + xy + xz = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $y + 3z = 1$.

2. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f \, dx \, dy$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

3. Pro $a > 0$ je dán válec

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, \ 0 \leq z \leq 1\}$$

s hustotou $f(x, y, z) = z$. Pro jakou hodnotu parametru a bude moment setrvačnosti válce P vzhledem k ose z roven jeho objemu?

4. Zjistěte, je-li pole $\vec{F} = \left(\cos y + \dfrac{g(y)}{x}, \ 3y^2 \ln x - x \sin y\right)$ potenciální pro nějakou funkci $g(y)$ a v kladném případě najděte jeho potenciál.

5. Pomocí rozvoje logaritmu

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

nalezněte Taylorův rozvoj funkce $f(x) = 2x \ln(1 + 3x)$ v bodě $x_0 = 0$ a určete poloměr konvergence.

Řešení.

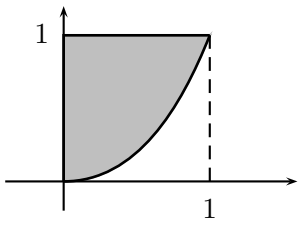
1. Normála k ploše v hledaném bodě je násobek normály k zadané rovině:

$$(y + z, x, 2z + x) = \alpha(0, 1, 3).$$

Odtud $x = z = \alpha = -y$. Dosazením do rovnice plochy dostaneme dva body pro $\alpha = \pm 1$. Tečné roviny jsou dvě, $y + 3z \pm 2 = 0$.

2. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^1 f \ dy \, dx$, v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin\varphi/\cos^2\varphi} f\varrho \, d\varrho d\varphi + \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{1/\sin\varphi} f\varrho \ d\varrho d\varphi.$$



3. V cylindrických souřadnicích je moment setrvačnosti

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^1 \varrho^3 z \, dz d\varrho d\varphi = \frac{1}{4} \pi a^4.$$

Porovnání s objemem dává $\frac{1}{4}\pi a^4 = \pi a^2$, tj. $a = 2$.

4. Nutná podmínka $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ je splněna pro funkci $g(y) = y^3 + C$. Výpočtem zjistíme, že potenciál je $f = x \cos y + (y^3 + C) \ln x + K$.

5. Pomocí rozvoje logaritmu máme

$$f(x) = 2x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3x)^n}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n} \, x^{n+1}.$$

Poloměr konvergence je $R = 1/3$.