DC9

úterý 18. dubna 2023 10:10

11.1. Na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ najděte lokální extrémy funkce

d) $f(x, y) = x^2y$ $\hookrightarrow x^2 = 1 - y^2$

dosadíme

$\hookrightarrow f(y) = (1-y^2)y \quad y \in \langle -1, 1 \rangle$

vnitřek kružnice

kraj

$f'(y) = 1 - 3y^2$

$1 - 3y^2 = 0$
$3y^2 = 1$
$y^2 = \frac{1}{3}$
$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$
$\hookrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\hookrightarrow y = \pm 1$
$x = 0$

| $x$ | $y$ | |
|---|---|---|
| $0$ | $1$ | max |
| $0$ | $-1$ | min |
| $+\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | max |
| $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | min |
| $+\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ | max |
| $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | min |

11.4. Najděte bod nejblíže počátku na křivce

c) $x^2y = 1$

$\hookrightarrow x^2 = \frac{1}{y}$ pro $x^2 + y^2 \rightarrow f(y) = \frac{1}{y} + y^2$

$f'(y) = -\frac{1}{y^2} + 2y \rightarrow -\frac{1}{y^2} + 2y = 0$

$y^3 = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$x^2 = \sqrt[3]{2}$

$x = \pm\sqrt[6]{2}$

11.8. Dokažte, že funkce $f(x, y) = x$ nabývá za podmínky $x^3 = y^2$ minimum pouze v počátku. Ukažte, že metoda Lagrangeových multiplikátorů toto minimum nenajde.

Křivka podmínce nemá fce v bodě (0,0) tečný prostor, a proto Lagr. multi. nebudou fungovat

pro $y = \pm\sqrt{x^3}$

$L = x + \lambda(x^3 - y^2)$

$L'_{(x,y)} = [1 + 3\lambda x^2, -2\lambda y]$

$1 + 3\lambda x^2 = 0$ ✗ rozpor
$-2\lambda y = 0 \rightarrow y = 0 \,/\, \lambda = 0$
$\hookrightarrow x = 0$ ✗ rozpor

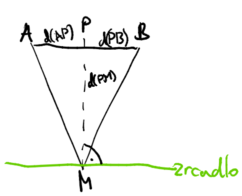
soustava nemá řešení

11.11. *Fermatův princip* v paprskové optice říká, že cesta mezi libovolnými dvěma body na paprsku má takový tvar, aby ji světlo proběhlo za čas kratší než jí blízké dráhy. Později se zjistilo, že správným kritériem není *nejkratší* ale *extrémní* čas. Tedy skutečná dráha paprsku musí mít čas větší nebo menší než jí blízké dráhy. Z tohoto principu odvoďte:

a) Zákon odrazu od zrcadla: úhel dopadu se rovná úhlu odrazu.

Odvození udělejte:

(i) Pro rovinné zrcadlo a rovinné rozhraní (což vede na minimalizaci bez omezení).




Podle Fermatova principu je celk. čas cesty od A do B součtem časů potřebných pro každou cestu.:

$t = t(AP) + t(PB) + t(PM)$ kde $t(X) = \frac{d(X)}{v}$ kde $v$ = rychlost světla

Minimalizace času je, díky konzistenci rychlosti světla, minimalizací dráhy. A to hlavně $d(PM)$

11.16. Minimalizujte $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ za podmínky $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = 1$. Jaký je geometrický význam úlohy?

→ Hledání nejmenšího čtverce vektoru x na rovině $a^T x = 1$

Použijeme Lag. multip.

$L = x^T x + \lambda(a^T x - 1)$

$L' = [2x^T - \lambda a,\ a^T - 1]$

$x = a^T a - a^T$

$\lambda = \frac{2}{a^T a}$

$x^T x = a^T(a^T a)^{-} a$