10

OPT midterm 5.4.2023 | Příjmení: Kosohorská | Jméno: Monika | 054

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

2 1. (2 body) Najděte vzdálenost bodu $\mathbf{z} = (1,0,1,0) \in \mathbb{R}^4$ od nadroviny $\{\mathbf{x};\ \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} = (1,1,1,2)$, $b = 3$.

p... partikulární řešení $a^Tx = b$ $\quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

vzdálenost = ‖projekce z na rng a − projekce p na rng a‖

$$P = a(a^Ta)^{-1}a^T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad P_z = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad P_p = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \|P_z - P_p\| = \left\|\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\frac{1+1+1+4}{49}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

3 2. Nechť $X = \operatorname{span}\{(1,2,3,4), (1,0,1,0), (0,1,0,0)\}$. Najděte

a) (1 bod) bázi podprostoru $X^\perp$,
b) (1 bod) matici ortogonálního projektoru na podprostor $X^\perp$,
c) (1 bod) matici ortogonálního projektoru na podprostor X.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\operatorname{rng} A)^\perp = \operatorname{null} A^T \quad \|b\| = \sqrt{9} = 3$$

a)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$\boxed{x_4 = t}$ $\qquad x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$

$x_3 + 2x_4 = 0 \qquad x_2 - 2t + 2t = 0 \qquad x_1 - 6t + 4t = 0$

$\boxed{x_3 = -2t} \qquad \boxed{x_2 = 0} \qquad x_1 = 2t$

báze: $\left\{ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $P = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}(2\ 0\ {-2}\ 1) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $P = \left(I_4 - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$

3 3. Máme 5 pozorování $(0,1), (1,1), (2,3), (3,3), (4,4)$ tvaru (x_i, y_i). Hledáme optimální regresní přímku $y = \theta_1 x + \theta_2$, kde $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ jsou hledané parametry.

a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako problém nejmenších čtverců.
b) (2 body) Vyřešte tento problém.

a) $\min_{\theta} \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}}_{\theta} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{b} \right\|^2$

b) A má LN sloupce: $A^TA\theta = A^Tb$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^Tb = \begin{pmatrix} 32 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 32 \\ 10 & 5 & 12 \end{array}\right)_{I-3} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 32 \\ 0 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

$\theta_1 = \frac{4}{5}$

$30 \cdot \frac{4}{5} + 10\theta_2 = 32$

$24 + 10\theta_2 = 32 \qquad \theta_2 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\underline{\underline{\theta = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}}}$

2 4. Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{15\times 5}$ hledáme nejbližší matici hodnosti ≤ 3. Víme, že matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má vlastní čísla $2, \underline{1}, 4, 9, \underline{0}$.

a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako optimalizační problém a napište hodnotu účelové funkce v optimu.
b) (1 bod) Jaké bude optimální řešení tohoto problému, budeme-li hledat matici hodnosti ≤ 4?

a) $\min_B \{\|A - B\|^2,\ B \in \mathbb{R}^{15\times 5},\ \operatorname{rank} B \leq 3\}$

hodnota účelové funkce v optimu: ~~[illegible]~~ $0 + 1 = 1$

b) $Y = V[:, v_2, v_3, v_4, v_5]$ ← vezmeme poslední 4 vlastní vektory matice V ze spektrálního rozkladu matice AA^T

optimální řešení $B^* = YY^TA$ → hodnota účelové fce v optimu $= 0$, tudíž $\underline{\underline{B^* = A}}$

Vase odpovedi na kvizove otazky: c, b, a, e, d

spatne: 5

dobre: 6, 7, 8, 9

chybi:

Celkem bodu za kviz: 4

Zadani vaseho kvizu naleznete na nasledujici strane.

OPT midterm 5.4.2023 | Příjmení: Kosohorská Jméno: Marika | 054

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

054

	5	6	7	8	9
a			X		
b		X			
c	X				
d					X
e				X	

5. Nechť $\mathbf{A}$ je matice s lineárně nezávislými řádky. Matice ortogonálního projektoru na podprostor null $\mathbf{A}^T$ je
   (a) $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
   (b) $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
   (c) $\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
   (d) $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
   (e) neplatí žádné výše uvedené tvrzení

6. Množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$,
   (a) je konečná
   (b) je afinní podprostor dimenze $n-1$
   (c) je vždy lineární podprostor
   (d) je vždy přímka, která nemusí procházet počátkem
   (e) nesplňuje žádnou z uvedených možností

7. Pro úlohu nejmenších čtverců $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2$ platí:
   (a) Optimálních řešení může být nekonečně mnoho.
   (b) Optimální řešení je vždy tvaru $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$.
   (c) Každé řešení úlohy nejmenších čtverců je i řešením soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
   (d) Úloha nemusí mít optimální řešení.
   (e) Hodnota v optimu je vždy 0.

8. Pro která $a \in \mathbb{R}$ je matice $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonální projektor?
   (a) pro $a \in \{0, 1\}$
   (b) pro $a \in [0, 1]$
   (c) pro $a = 0$
   (d) pro $a \geq 0$
   (e) žádná z uvedených možností

9. Máme zadánu symetrickou matici $\mathbf{A}$ řádu n.
   (a) Každý vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$ je řešením úlohy max $\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.
   (b) Optimální řešení úlohy max $\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ vždy existuje.
   (c) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ nabývá vždy maxima pro nějaký vektor $\mathbf{x}$ splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
   (d) Její nejmenší vlastní číslo splňuje $\lambda \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ pro libovolný vektor $\mathbf{x}$ takový, že $\|\mathbf{x}\| = 1$.
   (e) Její největší vlastní číslo λ je vždy kladné a platí $\lambda = \max\ \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ pro vektory $\mathbf{x}$ splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.