DC3

neděle 5. března 2023 15:15

4.1. Máme vektory $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ a $\mathbf{y} = (-1, 0, 1)$. Spočítejte (a) délku vektoru $\mathbf{x}$, (b) vzdálenost bodů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, (c) úhel mezi vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

a) $\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} \doteq 3{,}74$

b) $\|x-y\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2-1-1} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \doteq 3{,}46$

c) $\cos\varphi = \dfrac{x^T y}{\|x\|\|y\|} = \dfrac{[1,2,3]\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}{\sqrt{14}\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{28}} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7} \doteq 0{,}38$

$\hookrightarrow 4.7$

$\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$

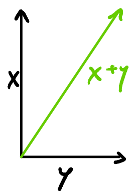
$\varphi = 67^\circ\, 47'\, 32''$

4.2. Pro jaké vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ platí trojúhelníková nerovnost $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ s rovností?

.

$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ $\quad \|x\| = \sqrt{x^T x} \quad \|y\| = \sqrt{y^T y}$

$(x+y)^T(x+y) = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad /^2$



4.3. Najděte bázi ortogonálního doplňku prostoru span$\{(0,1,1),(1,2,3)\}$.

$X = \operatorname{span}\{(0,1,1),(1,2,3)\}$

$X^{\perp} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y \perp X\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x + z = 0$

$y + z = 0 \longrightarrow y = -z \quad x = -z \longrightarrow y = 1,\ x = 1,\ z = -1 \quad \Big\}\ X^{\perp} = \operatorname{span}\{(1,1,-1)\}$

4.5. Pro dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dokažte následující tvrzení, nakreslete obrázek a uvědomte si, jaké známé středoškolské poučky jste to vlastně dokázali.

a) Jestliže $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, pak $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \perp (\mathbf{x}-\mathbf{y})$.

b) Jestliže $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, pak $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$.

a) $(x+y)^T(x-y) = 0$

$x^Tx - \cancel{x^Ty} + \cancel{y^Tx} - y^Ty = 0$

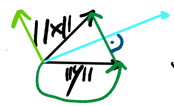
$x^Tx - y^Ty = 0$

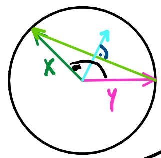
$\|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$

$\|x\| = \|y\| \quad /^2$

$\|x\|^2 = \|y\|^2$

$\|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$

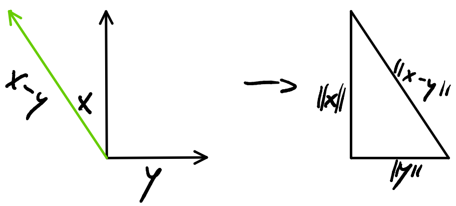




$\Longrightarrow$ uhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé

b) $\|x-y\|^2 = (x-y)^T(x-y) = x^Tx - x^Ty - y^Tx + y^Ty = \|x\|^2 - \underbrace{2x^Ty}_{} + \|y\|^2 \Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2$

$x \perp y \to x^Ty = 0$



$a = \|x\|,\ b = \|y\|,\ c = \|x-y\|$

$a^2 + b^2 = c^2$

$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2$

4.13. Najděte dva ortogonální vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ takové, že $\text{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \text{span}\{(0,1,1), (1,2,3)\}$.

$\to x^T y = 0$

$y = (1,2,3) - rx$

$x^T y = 0$

$x^T((1,2,3) - rx) = 0$

$x^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - r x^T x = 0$

$5 - 2r = 0$

$r = \frac{5}{2}$

$y = (1,2,3) - (0, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

$y = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$x = (0,1,1)$