DC12

úterý 16. května 2023 11:58

15.2. Pro daná čísla $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ chceme maximalizovat $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ za podmínek $-1 \leq x_i \leq 1$.

a) Vyřešte úvahou.
b) Sestrojte duální úlohu a upravte ji do co nejjednoduššího tvaru. Vyřešte duální úlohu úvahou (musí vám vyjít stejná optimální hodnota jako u primární úlohy).
c) Napište podmínky komplementarity.
d) Najděte číselné hodnoty optimálních primárních a duálních proměnných (které si odpovídají přes podmínky komplementarity) pro $n = 3$ a $(c_1, c_2, c_3) = (-2, 3, 4)$.

a)
$$\left.\begin{array}{l} \text{pro } c_i > 0 \rightarrow x_i = 1 \\ \text{pro } c_i < 0 \rightarrow x_i = -1 \end{array}\right\} \sum_{i=1}^{n} |c_i|$$
pro $c_i = 0 \rightarrow x_i =$ libovolné

b) $\max c^T x \rightarrow \min 1^T y - 1^T z$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} x \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \end{bmatrix}$$

$$\min \{ y_i - z_i ; \; x_i + z_i = c_i, \; y_i \geq 0, \; z_i \leq 0 \} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \rightarrow \sum |c_i|$$

c) $x_i = -1$ nebo $y_i = 0$; $x_i = 1$ nebo $z_i = 0$

d) $n = 3$, $c = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

15.3. Napište duální úlohu a podmínky komplementarity k následujícím úlohám. Pokud úloha není LP, nejdříve převeďte na LP (dle §12.1). Výslednou duální úlohu co nejvíce zjednodušte, příp. převeďte do skalární formy, je-li skalární forma výstižnější. Kde to má smysl, pokuste se interpretovat duální úlohu a věty o dualitě, podobně jako v Příkladu 15.5.

a) lineární program ze Cvičení 14.8

b) $\min_{x \in \mathbb{R}} \max_{i=1}^{n} |a_i - x|$ (střed intervalu)

a) **Primární:**

$$\begin{aligned} \min\; & 2x_1 - 3x_3 + x_4 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \geq 0 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_3 \geq 0 \\ & x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Duální:

$$\begin{aligned} \max\; & 0y_1 + 5y_2 + 6y_3 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \leq 0 \\ & y_3 \in \mathbb{R} \\ & y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ & -y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 0 \\ & -y - 3y_2 - y_3 \leq -3 \\ & 2y_3 \leq 1 \end{aligned}$$

Podmínky:

$$y_1(x_1 - x_2 - x_3) = 0$$
$$y_2(-x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5) = 0$$

$$x_1(y_1 - y_2 + 2y_3 - 2) = 0$$
$$x_2(-y_1 + 2y_2 - y_3) = 0$$
$$x_3(-y_1 - 3y_2 - y_3 + 3) = 0$$
$$x_4(2y_3 - 1) = 0$$

$x_4 \geq 0$ $\quad 2y_3 \leq 1$ $\quad x_4(2y_3 - 1) = 0$

b) $\min \{ z ; z \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, z \geq a_i - x , z \geq x - a_i \}$

Primární:

$\min 0x + 1z$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

$z \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$

Duální

$\max a^T u - a^T v$

$u \geq 0$

$v \geq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$