Profota Jakub (1.5b) |12|

ACG 3

V každé úloze 1. – 4. označte své odpovědi postupně podle zadání A, B, C, D, pište je na stejnou stránku pod zadání a oddělte je vhodně opticky, např. pomocí zvýrazněné čáry apod. Případné pomocné výpočty pište na jiný arch, který také podepište a odevzdejte. Pokud můžete, pište tiskacím písmem.

Každá úloha 1. – 4. je hodnocena 0 – 4 body, přitom každá z odpovědí na otázky A, B, C, D přispívá do tohoto počtu nejvýše 1 bodem. Při neúplné nebo nejasné odpovědi přihlíží zkoušející také k celkovému charakteru ostatních odpovědí.

1. Daný rekurzivní algoritmus R pracuje tak, že data velikosti $n > 1$ rozdělí na 3 části stejné velikosti, zpracuje 4 tyto části (tj. jednu z nich dvakrát) a pak jejich řešení spojí. Na samotné rozdělení problému a spojení řešení menších částí potřebuje dobu c, kde c je kladná konstanta.

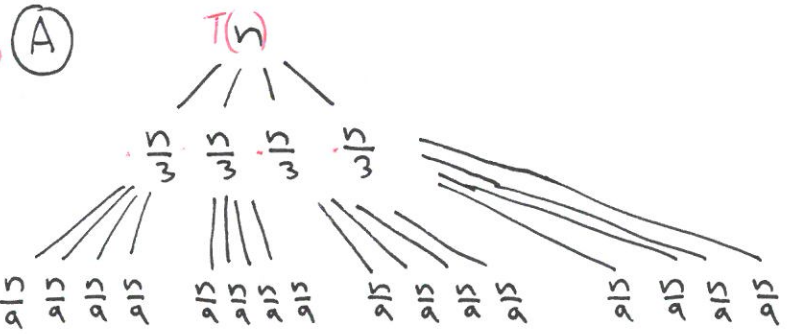
A. Nakreslete první tři úrovně (do hloubky 2 včetně) stromu rekurze.

B. Předpokládejte, že kořen stromu odpovídá činnosti algoritmu R nad daty velikosti n. Vypočtěte cenu uzlu v hloubce 2. Cena uzlu je doba, kterou algoritmus potřebuje na rozdělení dat a sloučení vyřešených podproblémů při velikosti dat, která odpovídá hloubce uzlu.

C. Vypočtěte hloubku stromu rekurze.

D. Určete asymptotickou složitost R, použijte libovolnou metodu, kterou znáte.

1b (A)



0b (B) $\cancel{4 \cdot \frac{n}{9}} + c = \cancel{\frac{4}{9}n} + c$

viz zadání!

0b (D) Pro vstup n je doba běhu $n + \left(\frac{4}{3}n + c\right) + \left(\frac{4}{9}n + c\right) + \left(\frac{4}{27}n + c\right) + \dots$

Složitost?

0.5b (C) Dělí se po 4, hloubka je tedy $\log_4 n$.

dělí se na třetiny → $\log_3$

Profota Jakub (4b)

2. Určujeme počet všech binárních vektorů délky N s vlastností, že v nich nikdy nestojí dvě (nebo více) jedničky těsně vedle sebe (např. vektor 0100100101 je přípustný, vektory 01100, 1110011 přípustné nejsou). Pro danou délku N označme P(N, 0) počet všech vektorů délky N, které mají danou vlastnost a které končí číslicí 0. Analogicky označme P(N, 1) počet všech vektorů délky N, které mají danou vlastnost a které končí číslicí 1.

A) Určete P(1,0), P(2,0), P(1,1), P(2,1).

B) Napište rekurentní vztahy pro výpočet P(N, 0) a P(N, 1) pomocí hodnot P(N−1, 0) a P(N−1, 1).

C) Pomocí metody DP určete hodnotu P(8, 0) + P(8, 1), využijte vztahy a hodnoty získané v odpovědích na otázky A a B.

D) Zdůvodněte asymptotickou složitost postupu, který vypočte všechny hodnoty P(*k*, 0) + P(*k*, 1) pro *k* = 1, 2, ..., N.

A) 1b

- P(1,0) = 1 : vektor délky 1 s 0 na konci, tedy 0
- P(2,0) = 2 : vektor délky 2 s 0 na konci, tedy vektory 00 a 10
- P(1,1) = 1 : vektor délky 1 s 1 na konci, tedy 1
- P(2,1) = 1 : vektor délky 2 s 1 na konci, tedy vektor 01

1b B)

$$P(N,0) = P(N-1,0) + P(N-1,1)$$

$$P(N,1) = P(N-1,0)$$

→ nesmí být 1ky vedle sebe

1b C)

x =	1	2	3	4	5	6	7	8
P(x, 0)	1	2	3	5	8	13	21	34
P(x, 1)	1	1	2	3	5	8	13	21

tedy P(8, 0) = 34 a P(8, 1) = 21 → P(8,0) + P(8,1) = 55

1b D) pro P(n, 0) i P(n, 1) musí být spočteno P(n−1, 0) a P(n−1, 1), to trvá 2·(n−1). P(n, 0) + P(n, 1) je podle B) rovno P(n+1, 0), které trvá 2n. Protože spočtené hodnoty nemusíme znovu přepočítávat, je asymp. složitost lineární − $\Theta(n)$.

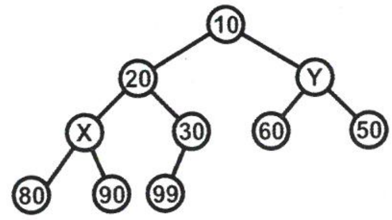
Jednoduše: plníme tabulku 2 × N, pro vyplnění jedné buňky $\Theta(1)$

$\Rightarrow \Theta(n)$

pak sečteme přes řádky $\Rightarrow \Theta(n)$

Profota Jakub (4b)

3. Je dána binární halda na obrázku.



A. Určete všechny dvojice hodnot, které mohou nabývat prvky označené X a Y, pokud předpokládáme, že platí $X < Y$.

B. Na místo prvků X a Y zapište nejmenší možné hodnoty získané v odpovědi A a dále do haldy vložte v daném pořadí prvky 25, 35 a výsledek nakreslete.

C. Z haldy vytvořené v odpovědi B odstraňte dvakrát za sebou její nejmenší prvek a výsledek nakreslete.

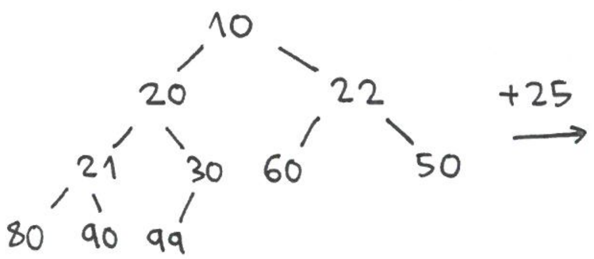
D. Předpokládejme, že binární halda H má právě n prvků. Z haldy H postupně odstraníme $n/2$ prvků pomocí operace ExtractMin. Zdůvodněte asymptotickou složitost této akce.

1b (A) pro Y platí $10 < Y < 50$

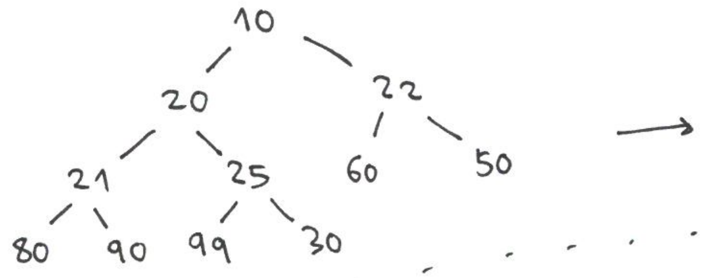
pro X platí $20 < X < 80$

Všechny možné dvojice jsou tedy vyjádřeny jako $20 < X < Y < 50$

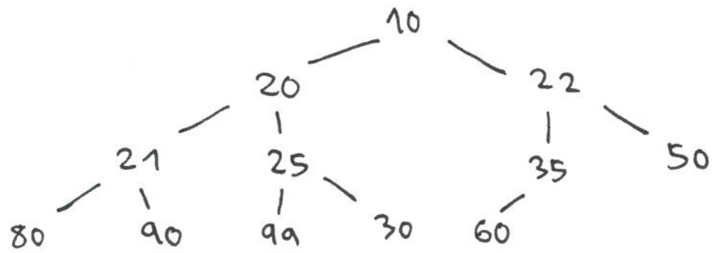
1b (B) nejmenší X je 21 a nejmenší Y je 22



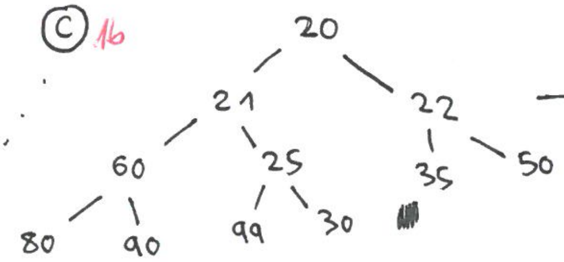
+25 →



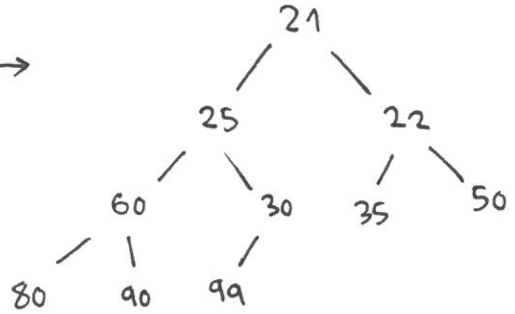
→ +35 →



(C) 1b



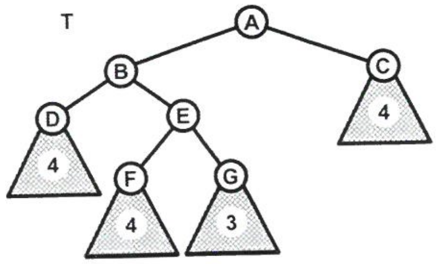
→ pokračování (C) →



1b (D) Nalezení minima je $\Theta(1)$, probublání nového kořene dolů $\Theta(\log_2 n)$, které se při odstranění $n/2$ prvků dostane až na $\Theta(\log_2 (n-1))$. Probublání se zavolá $n/2$. Složitost akce tedy bude $\Theta(n \cdot \log_2 n)$.

Profota Jakub 2.5b

4. Na obrázku je AVL strom T. Jednotlivé podstromy s kořeny v uzlech C, D, F, G jsou naznačeny schematicky a je v nich vepsána jejich hloubka (to jest počet hran na cestě z kořene podstromu do nejhlubšího uzlu v tomto podstromu).



A. Strom T je znázorněn bezprostředně po vložení klíče k (který není zobrazen) pomocí operace Insert. Zdůvodněte, do kterého ze čtyř podstromů s kořeny v C, D, F, G byl klíč k vložen.

B. Po vložení klíče k do T je nutno provést rotaci v T. Nakreslete T po provedení této rotace a napište, o kterou ze čtyř rotací L, R, LR, RL se jedná.

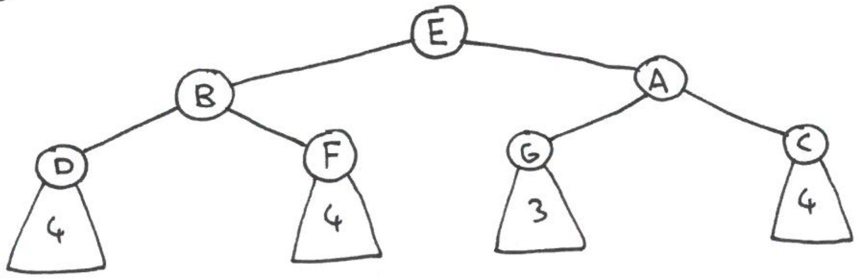
C. Do stromu T aktualizovaného v otázce B byl vložen další klíč k_2 pomocí operace Insert. Hodnota k_2 je maximální z hodnot všech klíčů v T. Při vložení k_2 se neprovedla žádná rotace. Zdůvodněte, proč je taková situace možná.

D. Do prázdného AVL stromu vložíme postupně pomocí operace Insert n^2 navzájem různých klíčů. Vyjádřete asymptoticky (to jest s využitím O/Θ/Ω notace) maximální počet jednoduchých rotací, které při této akci nastanou. Svůj závěr krátce zdůvodněte.

0.5b

(A) Hloubka podstromu v uzlu E je 5, v uzlu B je 6. Pak má kořen AVL stromu vlevo podstrom hloubky 7 a vpravo 5. abs(7 − 5) > 1, musí se vyvažovat. Klíč byl vložen do levého podstromu. D Nemohl být vložen do podstromu v uzlu D a ani v uzlu F, jinak by strom před vložením nebyl vyvážený. Byl vložen do podstromu v uzlu G. po vložení k je podstrom F moc hluboký

1b (B) jedná se o rotaci LR:



0b (C) Podle mě to možné není. Vložil by se úplně vpravo a došlo by tak k nevyvážení. Napadá mě jenom varianta, že při vkládání maxima stromu tam již toto maximum je, tedy by se nevložil tedy by se strom nijak nezměnil.

podstrom C nemusí být úplný

1b (D) V ideálním případě nemusí dojít k žádné rotaci, tedy dolní mez je $\Omega(0)$. V nejhorším případě dojde k rotaci každý druhý vložený prvek (kořen nepočítáme), tedy horní mez $O(\frac{n^2}{2})$, to je $O(n^2)$. ~~Θ bych tipnul tak na Θ(n).~~