Think geometrically, prove algebraically.
— John Tate

Kapitola 3

Linearita

Množina $\mathbb{R}^n$ spolu s operacemi sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem tvoří *lineární prostor* (také zvaný *vektorový prostor*)[1] nad tělesem $\mathbb{R}$. Protože budeme pracovat pouze v prostoru $\mathbb{R}^n$ (a občas v prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$), nebudeme uvádět definici (pomocí axiomů) lineárního prostoru ani odkazovat se na ni – určitě si ji ale najděte a zopakujte!. To nám sice občas zabrání využít celou sílu a krásu lineární algebry, ale zkrátí a zjednoduší to výklad.

3.1 Podprostory

Lineární kombinace vektorů $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k\in\mathbb{R}^n$ je vektor

$$\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{x}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{x}_k \tag{3.1}$$

pro nějaké skaláry $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$. Vektory $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k$ jsou **lineárně nezávislé**[2], jestliže

$$\alpha_1\mathbf{x}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{x}_k=\mathbf{0}\quad\Longrightarrow\quad\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0. \tag{3.2}$$

V opačném případě (tedy když pro nějaká $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, aspoň jedno z nich nenulové, platí $\alpha_1\mathbf{x}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{x}_k=\mathbf{0}$) jsou vektory $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k$ **lineárně závislé**. Lze dokázat (viz Cvičení 3.4) že jestliže jsou vektory lineárně závislé, tak je aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.

Tvrzení 3.1. *Jsou-li vektory $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k$ lineárně nezávislé, koeficienty $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ v (3.1) jsou určeny jednoznačně (tj. soustava (3.1) s neznámými $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ má právě jedno řešení).*

Důkaz. Nechť kromě (3.1) platí také $\mathbf{x}=\beta_1\mathbf{x}_1+\cdots+\beta_k\mathbf{x}_k$. Odečtením obou rovnic máme $\mathbf{0}=(\alpha_1-\beta_1)\mathbf{x}_1+\cdots+(\alpha_k-\beta_k)\mathbf{x}_k$. Ale z (3.2) plyne $\alpha_i-\beta_i=0$, tedy $\alpha_i=\beta_i$. ■

Lineární obal vektorů $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k$ je množina

$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k\}=\{\,\alpha_1\mathbf{x}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{x}_k\mid\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}\,\}$$

[1] Jaký je vlastně rozdíl mezi *množinou* a *prostorem*? Množina je ‘pytel’ prvků (‘věcí’) bez jakékoliv struktury. Prostor je neformální název pro algebraickou strukturu, která má nějaký geometrický význam. *Algebraická struktura* je množina (někdy i více množin) spolu s operacemi definovanými na této množině (příklady: grupa, těleso, lineární prostor, lineární prostor se skalárním součinem). Operace a jejich vlastnosti určují vlastnosti algebraické struktury a tedy i prostoru. Operace se ale v matematickém textu často explicitně nezmiňují (je z kontextu jasné, které to jsou) a tak se místo o algebraické struktuře mluví jen o množině.

[2] Tato formulace je trochu nepřesná, protože lineární nezávislost není vlsatnost jednotlivých vektorů, ale posloupnosti (či seznamu) vektorů $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k$. Přesto je široce používaná.

všech jejich lineárních kombinací. Zde mlčky předpokládáme, že vektorů je konečný počet (lineární obal nekonečné množiny vektorů se musí definovat jinak, více o tom později v §13.2).

Neprázdná množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **lineární podprostor**[3] (nebo jen **podprostor**) lineárního prostoru $\mathbb{R}^n$, jestliže každá lineární kombinace každé (konečné) množiny vektorů z X leží v X (neboli množina X je uzavřená na lineární kombinace):

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in X, \;\; \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k \in X. \tag{3.3}$$

Tvrzení (3.3) je ekvivalentní dvěma tvrzením

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in X, \tag{3.4a}$$

$$\mathbf{x} \in X, \; \alpha \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \mathbf{x} \in X, \tag{3.4b}$$

kde implikace (3.3) ⇒ (3.4) je očividná a implikace (3.4) ⇒ (3.3) by se dokázala např. indukcí. Snadno se ukáže, že lineární obal libovolné množiny vektorů je lineární podprostor.

Každý podprostor je neprázdný, protože sám o sobě to musí být lineární *prostor*, a ten ze své definice musí obsahovat nulový vektor $\mathbf{0}$ (kterému se z historických důvodů také říká *počátek*). Podprostor $X = \{\mathbf{0}\}$ se nazývá **triviální**..

Báze lineárního podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineárně nezávislá množina[4] vektorů, jejichž lineární obal je X. Platí tato zásadní tvrzení (důkazy nejsou krátké a neuvádíme je, najdete je v každé učebnici lineární algebry):

Věta 3.2 (vlastnosti báze).

- *Každý lineární podprostor má (alespoň jednu) bázi.*
- *Každá báze lineárního podprostoru má stejný počet vektorů.*
- *Z každé množiny vektorů lze vybrat bázi jejich lineárního obalu.*
- *Každou lineárně nezávislou množinu vektorů z lineárního podprostoru lze doplnit na jeho bázi.*

Počet vektorů báze lineárního podprostoru X se nazývá jeho **dimenze**, značíme ji $\dim X$. Je-li $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ báze podprostoru X a $\mathbf{x} \in X$, pak (jednoznačně určené) skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ v (3.1) se nazývají **souřadnice** vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Tvrzení 3.3. *Pro každé podprostory $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ platí:*

- $X \subseteq Y$ *implikuje* $\dim X \leq \dim Y$.
- $X \subseteq Y$ *a* $\dim X = \dim Y$ *implikuje* $X = Y$.

Důkaz. Jestliže $X \subseteq Y$, každá báze podprostoru X patří do Y. Dle Věty 3.2 lze tuto bázi doplnit na bázi podprostoru Y, odtud první tvrzení. Jestliže navíc $\dim X = \dim Y$, každá báze X je už bází Y (tedy doplnění nepřidá žádný vektor), odtud druhé tvrzení. ∎

Příklad 3.1. Uveďme jednoduché příklady podprostorů prostorů $\mathbb{R}^n$:

[3] Krátce budeme říkat, že $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je podprostor. To nemůže způsobit zmatení, neboť aby množina byla podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$, musí všechny její prvky patřit do $\mathbb{R}^n$. Např. množina $X \subseteq \mathbb{R}^3$ tedy nemůže být podprostor prostoru $\mathbb{R}^2$, to by byl nesmysl.

[4] Někdy (např. když mluvíme o souřadnicích vektoru vzhledem k bázi) nám záleží na pořadí prvků báze. Pak musíme bázi považovat ne za množinu, ale za *uspořádanou* množinu nebo *posloupnost* vektorů.

- Triviálně, množina $X = \mathbb{R}^3$ je podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$. Jeho dimenze je 3. Jeho báze je např. množina $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ (standardní báze) nebo $\{(1,1,1),(1,-1,0),(2,0,0)\}$.
- Množina $X = \operatorname{span}\{(1,2,3)\} = \{\, \alpha(1,2,3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\,\} \subseteq \mathbb{R}^3$ je podprostor dimenze 1 prostoru $\mathbb{R}^3$. Jeho báze je např. množina $\{(1,2,3)\}$, jiná báze je $\{(2,4,6)\}$. Je to přímka procházející počátkem.
- Množina $X = \operatorname{span}\{(1,2,3),(1,0,-1)\} = \{\, \alpha(1,2,3) + \beta(1,0,-1) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,\}$ je podprostor dimenze 2 prostoru $\mathbb{R}^3$. Jeho báze je např. množina $\{(1,2,3),(1,0,-1)\}$, jiná báze je $\{(3,2,1),(0,2,4)\}$. Je to rovina procházející počátkem. Všimněte si, že tato množina nemá žádnou 'přirozenou' nebo 'standardní' bázi jako mají prostory $\mathbb{R}^n$.
- Množina všech trojic $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ splňujících rovnici $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ je podprostor dimenze 2 prostoru $\mathbb{R}^3$. Jeho báze je libovolná dvojice lineárně nezávislých vektorů $\{(a_1,a_2,a_2),(b_1,b_2,b_3)\}$ splňujících $a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$ a $b_1 + 2b_2 - b_3 = 0$, např. $\{(1,0,1),(0,1,2)\}$. Je to rovina procházející počátkem.
- Množina $X = \operatorname{span}\{(1,2,3,0),(0,1,2,-1),(0,2,4,-2)\} \subseteq \mathbb{R}^4$ je podprostor $\mathbb{R}^4$ dimenze 2. Všimněte si, že vektory jsou lineárně závislé. Báze podprostoru X je např. množina $\{(1,2,3,0),(0,1,2,-1)\}$.
- Všechny možné podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou počátek $\mathbf{0}$ (dimenze 0), všechny přímky procházející počátkem (dimenze 1), všechny roviny procházející počátkem (dimenze 2), a konečně celý prostor $\mathbb{R}^3$ (dimenze 3).
- Množina $X = \{\, (1+\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\,\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (přímka neprocházející počátkem) není podprostor, protože např. $(1,0) \in X$ ale $2(1,0) = (2,0) \notin X$. ♦

3.2 Lineární zobrazení

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže pro každé $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k\mathbf{f}(\mathbf{x}_k). \tag{3.5}$$

Tato podmínka je ekvivalentní dvěma podmínkám, pro každé $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$ a $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}), \tag{3.6a}$$
$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{3.6b}$$

Věta 3.4. *Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární, právě když existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ splňující*[5]

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{3.7}$$

pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. V tom případě je matice $\mathbf{A}$ zobrazením $\mathbf{f}$ určena jednoznačně.

[5] Možná se ptáte, proč tedy nedefinujeme lineární zobrazení rovnou vztahem (3.7). Pro zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je to opravdu možné a definici (3.5) vlastně vůbec nepotřebujeme. Přesto definici (3.5) uvádíme, protože jednak jste na ní zvyklí z lineární algebry a jednak funguje i pro zobrazení mezi obecnými (tj. axiomy definovanými) lineární prostory.

Důkaz. Zobrazení (3.7) je lineární, protože $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{f}(\mathbf{y})$ a $\mathbf{f}(\alpha\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Nechť $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ je standardní báze prostoru $\mathbb{R}^n$. Pro každé $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ máme $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. Z (3.5) plyne

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n\mathbf{f}(\mathbf{e}_n) = \begin{bmatrix}\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{f}(\mathbf{e}_n)\end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Vidíme, že $\mathbf{A}$ je matice se sloupci $\mathbf{f}(\mathbf{e}_1),\dots,\mathbf{f}(\mathbf{e}_n)$.

Matice $\mathbf{A}$ je zobrazením $\mathbf{f}$ určena jednoznačně, protože platí-li $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak samozřejmě platí $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, protože stačí dosadit za $\mathbf{x}$ postupně vektory $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$. ■

Platí-li (3.7), říkáme, že matice $\mathbf{A}$ *reprezentuje* lineární zobrazení $\mathbf{f}$.

Pokud $m = 1$, lineární zobrazení je funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a obvykle se mu říká *lineární funkce* nebo *lineární forma*. Pak je zvykem ji psát jako

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \tag{3.8}$$

což je skalární součin vektorů $\mathbf{a},\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ neboli maticový součin matice $\mathbf{A} = \mathbf{a}^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ a vektoru $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definované jako $\mathbf{f}(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2, 2x_1)$ je lineární. To bychom dokázali ověřením podmínky (3.5). Ovšem je to patrné na první pohled, protože jej lze vyjádřit ve tvaru (3.7):

$$\mathbf{f}(x_1,x_2) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\ x_1-x_2\\ 2x_1\end{bmatrix} = (x_1+x_2, x_1-x_2, 2x_1).$$

♦

Výraz $\mathbf{A}\mathbf{x}$ ve vzorci (3.7) je maticový součin matice $m\times n$ s maticí $n\times 1$, tj. se sloupcovým vektorem (viz §2.2). Je důležité se s tímto výrazem beze zbytku seznámit, protože ho v různém značení budeme potkávat znovu a znovu. Označíme-li $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, podle (2.2) je

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n,\\ &\;\;\vdots\\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Napíšeme-li matici $\mathbf{A}$ pomocí sloupců, máme

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n, \tag{3.10}$$

tedy vektor $\mathbf{A}\mathbf{x}$ je *lineární kombinace sloupců* matice $\mathbf{A}$ s koeficienty $\mathbf{x}$. Tohle si dobře uvědomte! Plyne z toho například, že definice lineární nezávislosti (3.2) pro sloupce matice $\mathbf{A}$ zní

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{3.11}$$

(nedejte se poplést tím, že $\mathbf{x}$ v (3.11) označuje koeficienty lineární kombinace, zatímco v (3.2) označuje kombinované vektory!).

Napíšeme-li matici $\mathbf{A}$ pomocí řádků, máme

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T\mathbf{x} \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

tedy složky vektoru $\mathbf{A}\mathbf{x}$ jsou *skalární součiny řádků* matice $\mathbf{A}$ a vektoru $\mathbf{x}$. Všimněte si, že (3.10) a (3.12) jsou speciální případy (2.21) a (2.20).

Zde je snadný ale důležitý fakt o skládání (viz §1.1.2) lineárních zobrazení:

Tvrzení 3.5. *Složení lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení, přičemž matice složeného zobrazení je součinem matic jednotlivých zobrazení.*

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pro dvě zobrazení, pro více plyne z asociativity skládání zobrazení. Je-li $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ a $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{y}$, pak $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}$. ■

Všimněte si, že v důkazu jsme použili asociativitu maticového součinu (viz §2.1.2). Protože je skládání zobrazení asociativní, musí být i maticový součin. To je velmi přirozený důvod, proč maticový součin musí být asociativní.

3.2.1 Prostor obrazů a nulový prostor

S lineárním zobrazením jsou spjaty dva lineární podprostory, prostor obrazů a nulový prostor. Je-li zobrazení reprezentováno maticí jako $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, hovoříme o prostoru obrazů a nulovém prostoru matice $\mathbf{A}$.

Prostor obrazů (angl. *range*) matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (příp. zobrazení $\mathbf{f}$) je množina[6]

$$\operatorname{rng} \mathbf{A} = \{\, \mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\}. \tag{3.13}$$

Z této definice plyne, že prostor obrazů je

- množina $\mathbf{f}(\mathbb{R}^n)$ všech hodnot, jichž může zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ nabýt.
- množina všech vektorů $\mathbf{y}$, pro které má lineární soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ řešení.
- lineární obal sloupců matice $\mathbf{A}$ (viz (3.10)). Tedy je to lineární podprostor $\mathbb{R}^m$.

Nulový prostor (ang. *null space*) matice $\mathbf{A}$ (příp. zobrazení $\mathbf{f}$) je množina

$$\operatorname{null} \mathbf{A} = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\}. \tag{3.14}$$

Z této definice plyne, že nulový prostor je

- množina všech vektorů, které se zobrazí do nulového vektoru.
- množina všech vektorů, které jsou ortogonální na každý řádek matice $\mathbf{A}$ (viz (3.12)). Z toho je vidět, že je to lineární podprostor $\mathbb{R}^n$.

Pro prostor obrazů a nulový prostor se často používají i jiné názvy. Prostoru $\operatorname{null} \mathbf{A}$ se říká také *jádro* nebo *kernel*, což se častěji používá pro lineární zobrazení mezi obecnými (axiomy definovanými) lineárními prostory. Prostoru $\operatorname{rng} \mathbf{A}$ se říká také *sloupcový prostor* matice $\mathbf{A}$, protože je to lineární obal sloupců. Lineárnímu obalu řádků $\operatorname{rng}(\mathbf{A}^T)$ se pak říká *řádkový prostor*

[6] Někdo raději píše $\operatorname{rng}(\mathbf{A})$ než $\operatorname{rng} \mathbf{A}$, ale přece je normální psát např. $\sin x$ a ne $\sin(x)$.

matice $\mathbf{A}$. Podobně, prostorům $\operatorname{null}\mathbf{A}$ resp. $\operatorname{null}(\mathbf{A}^T)$ se přesněji říká *pravý nulový prostor* resp. *levý nulový prostor* matice $\mathbf{A}$. Čtyřem podprostorům

$$\operatorname{rng}\mathbf{A}, \quad \operatorname{rng}(\mathbf{A}^T), \quad \operatorname{null}\mathbf{A}, \quad \operatorname{null}(\mathbf{A}^T) \tag{3.15}$$

se někdy říká *základní* (nebo *fundamentální*) *podprostory* generované maticí $\mathbf{A}$. Uvidíme později v §4.2, že tyto podprostory jsou po dvojicích svázány operací ortogonálního doplňku.

3.2.2 Hodnost

Hodnost matice je definována jako dimenze lineárního obalu jejích sloupců,

$$\operatorname{rank}\mathbf{A} = \dim\operatorname{rng}\mathbf{A}. \tag{3.16}$$

Věta 3.6. *Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti r existují matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.*

Důkaz. Zvolme libovolnou bázi prostoru $\operatorname{rng}\mathbf{A}$. Nechť tato báze tvoří sloupce matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times r}$, tedy $r = \operatorname{rank}\mathbf{A} = \dim\operatorname{rng}\mathbf{A}$. Nyní j-tý sloupec $\mathbf{a}_j$ matice $\mathbf{A}$ je lineární kombinací sloupců matice $\mathbf{B}$, neboli $\mathbf{a}_j = \mathbf{B}\mathbf{c}_j$ pro nějaké $\mathbf{c}_j \in \mathbb{R}^r$. Je tedy $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, kde matice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ má sloupce $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$. ■

Rozkladu dle Věty 3.6 se říká **rozklad matice podle hodnosti** (angl. *rank factorization*). Lze jej vidět jako 'kompresi' matice $\mathbf{A}$, což při $r \ll \min\{m, n\}$ může být značná úspora. Např.:

- Uložení matice $\mathbf{A}$ do paměti zabere mn čísel, uložení matic $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ jen $(m + n)r$ čísel.
- Přímý výpočet maticového součinu $\mathbf{Ax}$ vyžaduje $O(mn)$ operací. Spočítáme-li ale nejdřív vektor $\mathbf{z} = \mathbf{Cx}$ a pak vektor $\mathbf{y} = \mathbf{Bz}$, potřebujeme jen $O((m + n)r)$ operací.
- Představme si zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ jako přenosový kanál, jehož vstupem jsou proměnné $x_1, \ldots, x_n$ a výstupem $y_1, \ldots, y_m$. Přenos můžeme realizovat jen po r 'drátech' $z_1, \ldots, z_r$.

S pomocí Věty 3.6 dokážeme zásadní fakt, že dimenze lineárního obalu sloupců je rovna dimenzi lineárního obalu řádků:

Věta 3.7. *Pro každou matici $\mathbf{A}$ platí* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^T)$.

Důkaz. Pišme $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ ve Větě 3.6 jako $\mathbf{A}^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T$. Z Tvrzení 3.10 je $\operatorname{rng}(\mathbf{A}^T) \subseteq \operatorname{rng}(\mathbf{C}^T)$. Máme tedy

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}^T) = \dim\operatorname{rng}(\mathbf{A}^T) \le \dim\operatorname{rng}(\mathbf{C}^T) \le r = \operatorname{rank}\mathbf{A}, \tag{3.17}$$

kde první nerovnost plyne z Věty 3.3 a druhá nerovnost z toho, že matice $\mathbf{C}^T$ má r sloupců.

Ale nerovnost (3.17) platí pro každou matici $\mathbf{A}$. Můžeme ji tedy použít na $\mathbf{A}^T$, čímž dostaneme $\operatorname{rank}\mathbf{A} \le \operatorname{rank}(\mathbf{A}^T)$. Obě nerovnosti dohromady dají $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^T)$. ■

Z Věty 3.2 plyne, že dimenze lineárního obalu množiny vektorů nemůže být větší než počet těchto vektorů. To spolu s Větou 3.7 znamená, že pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je

$$\operatorname{rank}\mathbf{A} \le \min\{m, n\}. \tag{3.18}$$

Když $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \min\{m, n\}$, říkáme, že matice má **plnou hodnost**. Je $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ právě když $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce, a $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$ právě když $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé řádky.

Z Věty (3.18) plyne, že každá množina více než n vektorů v $\mathbb{R}^n$ je lineárně závislá. Tento známý fakt se může zdát očividný, ale pro jeho důkaz jsme potřebovali (netriviální) Větu 3.7.

Je užitečné si pamatovat horní mez na hodnost součinu matic (důkaz viz Cvičení 3.15):

$$\operatorname{rank}(\mathbf{AB}) \le \min\{\operatorname{rank}\mathbf{A}, \operatorname{rank}\mathbf{B}\}. \tag{3.19}$$

3.2.3 Matice s plnou hodností

Matice s plnou hodností, tj. s lineárně nezávislými sloupci nebo lineárně nezávislými řádky, jsou důležité a 'hezké'. Uvedeme řadu vlastností, které jsou tomu ekvivalentní. Důkazy vět jsou jednoduché, spíše jde o to shrnout a uspořádat dosavadní poznatky (a nezamotat se v tom).

Věta 3.8. *Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou následující výroky ekvivalentní:*

1. $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
2. *Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ má řešení pro každé $\mathbf{y}$.*
3. $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
4. *Zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ je surjektivní, tj. $\mathbf{f}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$ (viz §1.1.2).*
5. *Řádky matice $\mathbf{A}$ jsou lineárně nezávislé.*
6. *Matice $\mathbf{A}$ má pravou inverzi, tj. $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ pro nějakou matici $\mathbf{B}$.*
7. *Matice $\mathbf{AA}^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je regulární.*

Důkaz.

- $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$ plyne přímo z definic.
- $3 \Leftrightarrow 5$ plyne z definice hodnosti a z Věty 3.7.
- $2 \Rightarrow 6$ platí, neboť soustava $\mathbf{Ab}_i = \mathbf{e}_i$ má řešení $\mathbf{b}_i$ pro každé i (kde $\mathbf{e}_i$ resp. $\mathbf{b}_i$ je i-tý sloupec matice $\mathbf{I}$ resp. $\mathbf{B}$). Pro důkaz $6 \Rightarrow 2$ položíme $\mathbf{x} = \mathbf{By}$.
- Tvrzení $1 \Leftrightarrow 7$ plyne z rovnosti (5.5a), uvedené později. ∎

Věta 3.9. *Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou následující výroky ekvivalentní:*

1. $\operatorname{null} \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$ *(tj. nulový prostor je triviální).*
2. *Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
3. $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$.
4. *Zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ je injektivní (viz §1.1.2).*
5. *Sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou lineárně nezávislé.*
6. *Matice $\mathbf{A}$ má levou inverzi, tj. $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ pro nějakou matici $\mathbf{B}$.*
7. *Matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární.*

Důkaz.

- Ekvivalence $1 \Leftrightarrow 2$ plyne z definice nulového prostoru (3.14).
- Ekvivalence $2 \Leftrightarrow 5$ plyne z definice lineární nezávislosti (3.2), tj. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Ekvivalence $3 \Leftrightarrow 5$ plyne z definice hodnosti (3.16).
- Tvrzení 4 říká, že pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ je $\mathbf{Ax} = \mathbf{Ay} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{y}$, tj. $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Ale to je definice (3.2) lineární nezávislosti sloupců $\mathbf{A}$. Tedy platí $2 \Leftrightarrow 4$.
- Tvrzení 6 je ekvivalentní tomu, že matice $\mathbf{A}^T$ má pravou inverzi, tj. $\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{I}$. Tedy $3 \Leftrightarrow 6$ plyne z ekvivalence $3 \Leftrightarrow 6$ ve Větě 3.8.
- Tvrzení $1 \Leftrightarrow 7$ je plyne z rovnosti (5.5b), uvedené později. ∎

Z těchto vět plyne, že čtvercová matice má plnou hodnost, právě když je regulární (viz §2.1.4).

Nakonec uvedeme snadné tvrzení, které se bude později mockrát hodit:

Tvrzení 3.10. *Pro libovolné matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *platí:*

- $\operatorname{rng}(\mathbf{AB}) \subseteq \operatorname{rng}\mathbf{A}$.
- $\operatorname{rng}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rng}\mathbf{A}$, *jestliže řádky matice* $\mathbf{B}$ *jsou lineárně nezávislé.*
- $\operatorname{null}(\mathbf{AB}) \supseteq \operatorname{null}\mathbf{B}$.
- $\operatorname{null}(\mathbf{AB}) = \operatorname{null}\mathbf{B}$, *jestliže sloupce matice* $\mathbf{A}$ *jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz.

- Máme dokázat, že jestliže soustava $\mathbf{z} = \mathbf{ABx}$ má řešení, pak soustava $\mathbf{z} = \mathbf{Ay}$ má řešení. To je ale jasné, protože vezmeme $\mathbf{y} = \mathbf{Bx}$.
- Druhé tvrzení navíc říká, že jestliže má $\mathbf{A}$ lineárně nezávislé řádky a soustava $\mathbf{z} = \mathbf{Ay}$ má řešení, pak soustava $\mathbf{z} = \mathbf{ABx}$ má řešení. To platí, neboť dle Věty 3.8 má soustava $\mathbf{Bx} = \mathbf{y}$ řešení pro každé $\mathbf{y}$.
- Vynásobíme-li rovnost $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ maticí $\mathbf{A}$ zleva, dostaneme $\mathbf{ABx} = \mathbf{0}$.
- Druhé tvrzení říká, že když $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce, pak $\mathbf{ABx} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{Bx} = \mathbf{0}$. To platí, neboť dle Věty 3.9 platí $\mathbf{Ay} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{y} = \mathbf{0}$. ∎

3.2.4 Věta o hodnosti a nulitě

Zatímco dimenze prostoru obrazů matice se jinak nazývá hodnost, dimenzi nulového prostoru matice se někdy říká **nulita** matice. Zopakujeme nyní veledůležitou větu o vztahu hodnosti a nulity, známou jako *rank-plus-nullity theorem*.

Věta 3.11. *Pro každou matici* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *platí*

$$\underbrace{\dim\operatorname{rng}\mathbf{A}}_{\operatorname{rank}\mathbf{A}} + \dim\operatorname{null}\mathbf{A} = n. \tag{3.20}$$

Důkaz. Nechť báze prostoru $\operatorname{rng}\mathbf{A}$ jsou sloupce matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times r}$. Tedy existuje matice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$. Nechť báze prostoru $\operatorname{null}\mathbf{A}$ jsou sloupce matice $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times q}$.

Protože sloupce $\mathbf{B}$ jsou báze $\operatorname{rng}\mathbf{A}$, pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ tak, že $\mathbf{Ax} = \mathbf{By}$, to jest $\mathbf{Ax} = \mathbf{ACy}$, to jest $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{Cy}) = \mathbf{0}$. To ale znamená $\mathbf{x} - \mathbf{Cy} \in \operatorname{null}\mathbf{A}$, proto existuje právě jeden vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q$ tak, že $\mathbf{x} - \mathbf{Cy} = \mathbf{Dz}$.

A jsme hotovi. Ukázali jsme totiž, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedno $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ a právě jedno $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{Cy} + \mathbf{Dz}$. To ale znamená, že sloupce matice $\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(r+q)}$ jsou báze prostoru $\mathbb{R}^n$. Tedy musí být $r + q = n$, což je rovnost (3.20). ∎

Interpretace věty 3.11:

- Každá dimenze na vstupu zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ se buď 'splácne' do nulového vektoru nebo se objeví na výstupu.
- Počet lineárně nezávislých řešení lineární homogenní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ je $n - \operatorname{rank}\mathbf{A}$.

- Dle Věty 3.7 je rovnost (3.20) ekvivalentní rovnosti

$$\dim \operatorname{rng}(\mathbf{A}^T) + \dim \operatorname{null} \mathbf{A} = n. \tag{3.21}$$

  Zde $\operatorname{rng}(\mathbf{A}^T)$ je lineární obal řádků matice $\mathbf{A}$ (řádkový prostor $\mathbf{A}$) a $\operatorname{null} \mathbf{A}$ je množina všech vektorů ortogonálních na řádky $\mathbf{A}$. V §4.2 ukážeme, že tyto dva podprostory jsou ortogonální doplněk jeden druhého. Rovnost (3.21) tedy říká, že součet dimenzí podprostoru a jeho ortogonálního doplňku je n (Věta 4.1).

3.3 Afinní podprostor a zobrazení

Afinní kombinace vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je lineární kombinace $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$, ve které koeficienty kombinace splňují

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1.$$

Afinní obal vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ je množina všech jejich afinních kombinací. Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **afinní podprostor**[7] lineárního prostoru $\mathbb{R}^n$, jestliže každá afinní kombinace každé (konečné) množiny vektorů z A leží v A (neboli množina A je uzavřená na afinní kombinace):

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in A, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k \in A. \tag{3.22}$$

Afinní kombinace *nezávisí na počátku*. To znamená, že afinní kombinace vektorů posunutých o libovolný vektor $\mathbf{x}_0$ je rovna afinní kombinaci neposunutých vektorů posunuté o $\mathbf{x}_0$. To snadno dokážeme:

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0)+\cdots+\alpha_k(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{x}_k-(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{x}_k)-\mathbf{x}_0.$$

Na rozdíl od toho, obecná lineární kombinace na počátku závisí.

K tomu (mírně neformální) poznámka: Jestliže s prvky lineárního (pod)prostoru provádíme operace afinní kombinace, tyto prvky si stačí představovat/kreslit jako body. Poloha počátku není důležitá, protože afinní kombinace na něm nezávisí. Afinní kombinaci bodů na papíře lze sestrojit pomocí pravítka a měřítka bez znalosti polohy počátku. Naproti tomu, jestliže s prvky lineárního (pod)prostoru provádíme operace lineární kombinace, tyto prvky si představujeme jako šipky spojující počátek s koncovým bodem (přesněji jako *volné vektory*), protože lineární kombinaci vektorů můžeme sestrojit pouze se znalostí polohy počátku. To je důvod, proč se prvkům afinního (pod)prostoru říká *body* zatímto prvkům pouhého lineárního (pod)prostoru *vektory*.

Příklad 3.3. Afinní obal dvou bodů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ je množina

$$\operatorname{aff}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = \{\, \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 \mid \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \,\}.$$

Pokud $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, je touto množinou přímka procházející body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Tato přímka je afinní podprostor $\mathbb{R}^3$. Na obrázku dole vlevo je několik bodů na přímce a příslušné koeficienty (α_1, α_2).

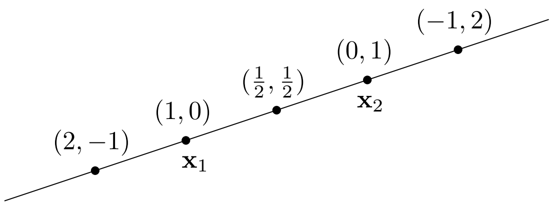
Naproti tomu, lineární obal dvou vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ (pokud jsou lineárně nezávislé) je rovina procházející těmito dvěma body a počátkem $\mathbf{0}$.

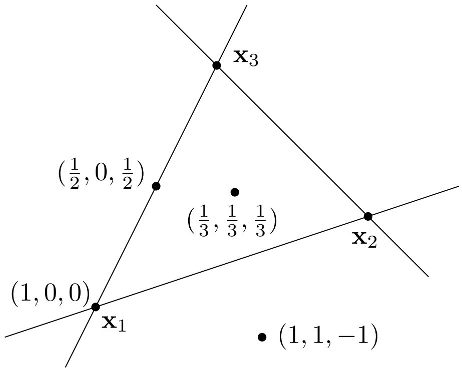
[7] Všimněte si, že definujeme afinní *podprostor* lineárního prostoru, ale už ne afinní *prostor* sám o sobě. Definice afinního prostoru bez odkazu k nějakému lineárnímu prostoru (tj. pomocí axiomů) existuje, ale neuvádíme ji.

Afinní obal tří bodů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2. \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^3$ je množina

$$\operatorname{aff}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \{\, \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \,\}.$$

Pokud body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ neleží v přímce, je touto množinou rovina jimi procházející. Tato rovina je afinní podprostor $\mathbb{R}^3$. Na obrázku vpravo je několik bodů v této rovině a příslušné koeficienty $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.





(Protože afinní kombinace nezávisí na poloze počátku, do obrázků jsme počátek ani nekreslili a prvky prostoru $\mathbb{R}^3$ jsme kreslili jako body, viz poznámka výše.) ♦

Pro množinu $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ označme

$$X + \mathbf{x} = \mathbf{x} + X = \{\, \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in X \,\}. \tag{3.23}$$

Věta 3.12.

- *Je-li X lineární podprostor $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak množina $X + \mathbf{x}$ je afinní podprostor $\mathbb{R}^n$.*
- *Je-li A afinní podprostor $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in A$, pak množina $A - \mathbf{x}$ je lineární podprostor $\mathbb{R}^n$.*

Důkaz. První tvrzení: Chceme dokázat, že afinní kombinace bodů z množiny $X + \mathbf{x}$ leží v této množině. Nechť tedy $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$ a chceme dokázat implikaci

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in X + \mathbf{x} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k \in X + \mathbf{x},$$

neboli[8]

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x} \in X \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \mathbf{x} = \alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) \in X.$$

Tato implikace platí díky linearítě X.

Druhé tvrzení: Chceme dokázat, že lineární kombinace vektorů z množiny $A - \mathbf{x}$ leží v této množině. Nechť tedy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ a chceme dokázat implikaci

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in A \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) \in A - \mathbf{x}.$$

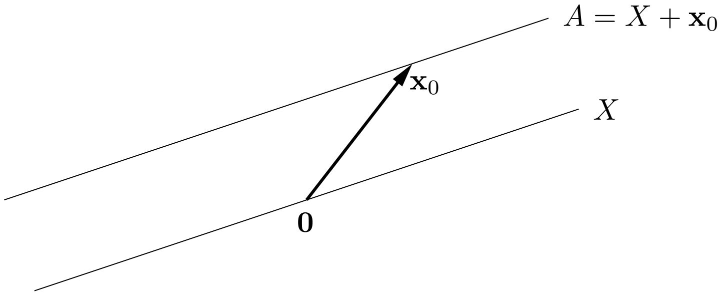
Pravá strana této implikace jde psát jako

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) + \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k + (1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_k)\mathbf{x} \in A.$$

To je ale pravda, neboť $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k + (1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_k) = 1$ a tedy poslední výraz je afinní kombinace vektorů z A, která podle předpokladu leží v A. ■

[8]Zde používáme skutečnost, že k výroku typu $\mathbf{x} \in X$ můžeme přičíst libovolný vektor a výrok se tím nezmění. Přesněji, pro každé $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathbf{x} \in X \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} + \mathbf{y} \in X + \mathbf{y}$. To snadno plyne z (3.23).

Věta 3.12 říká, že afinní podprostor není nic jiného, než 'posunutý' lineární podprostor (tedy nemusí procházet počátkem, na rozdíl of lineárního podprostoru). Třetí tvrzení věty navíc ukazuje, že tento lineární podprostor je afinním prostorem určen jednoznačně:



Dimenze neprázdného[9] **afinního podprostoru** je dimenze tohoto lineárního podprostoru. Afinnímu podprostoru $\mathbb{R}^n$ dimenze 0, 1, 2 a $n-1$ se říká po řadě **bod**, **přímka**, **rovina**, a **nadrovina**.

Věta 3.13. *Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní podprostor právě tehdy, když je množinou řešení nějaké lineární soustavy, tj. existují $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}$ splňující $A = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \,\}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že množina A je neprázdná (pro $A = \emptyset$ věta zjevně platí, protože prázdná množina je afinní podprostor a je to také řešení nějaké lineární soustavy).

Důkaz $\Leftarrow$: Nechť $A = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \,\}$. Nechť $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in A$ a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. Dokažme, že $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k \in A$:

$$\mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \alpha_1\mathbf{b} + \cdots + \alpha_k\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Jiný důkaz $\Leftarrow$: Nechť $X = \operatorname{null} \mathbf{A}$ a $\mathbf{x}_0$ je libovolný bod splňující $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ (tzv. *partikulární řešení* soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$). Pak

$$A \;= \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \,\} = \{\, \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0 \mid \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{0} \,\} = X + \mathbf{x}_0. \qquad (3.24)$$

Tedy dle Věty 3.12 je A afinní podprostor.

Důkaz $\Rightarrow$: Nechť A je afinní podprostor a nechť $\mathbf{x}_0 \in A$. Pak (dle Věty 3.12) je množina $X = A - \mathbf{x}_0$ lineární podprostor, tedy (viz poznámka v §3.2.1) existuje matice $\mathbf{A}$ tak, že $X = \operatorname{null} \mathbf{A}$. Nechť $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$. Pak dle (3.24) je $X + \mathbf{x}_0 = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \,\}$. ■

Díky Větě 3.13 se afinnímu podprostoru říká také *lineární varieta*. Je to speciální případ *algebraické variety*, což je množina řešení soustavy polynomiálních rovnic. Jejich studiem se zabývá *algebraická geometrie*.

Shrňme: každý lineární podprostor lze reprezentovat buď jako $\operatorname{rng} \mathbf{A}$ pro nějakou matici $\mathbf{A}$, nebo jako $\operatorname{null} \mathbf{A}$ (tj. množinou řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$) pro nějakou (jinou!) matici $\mathbf{A}$. Každý afinní podprostor lze reprezentovat buď jako $\mathbf{x}+X$ pro nějaký vektor $\mathbf{x}$ a lineární podprostor X, nebo jako množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pro nějaké $\mathbf{A}, \mathbf{b}$.

Body $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou **afinně nezávislé**, jestliže žádný není afinní kombinace ostatních. Afinní nezávislost lze ovšem definovat i jinak (důkaz věty neuvádíme, i když není těžký):

[9] Na rozdíl od lineárního podprostoru může být afinní podprostor prázdný. Dimenze prázdného afinního podprostoru se někdy konvencí definuje jako -1.

Věta 3.14. *Pro body* $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ *jsou následující výroky ekvivalentní:*

1. *Žádný bod není roven afinní kombinaci ostatních bodů.*
2. *Platí (srov. se (3.2))*

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0, \;\; \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0. \tag{3.25}$$

3. *Vektory* $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1$ *jsou lineárně nezávislé.*
4. *Vektory* $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix}$ *jsou lineárně nezávislé (kde* $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ *značí vektor* $\mathbf{x}$ *s přidanou jedničkou jako* $(n+1)$*-ní souřadnicí*[10]*).*

Příklad 3.4. Dva body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ jsou afinně nezávislé, právě když $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ (neboli nejsou identické). Tři body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^n$ jsou afinně nezávislé, právě když neleží v jedné přímce (neboli nejsou *kolineární*). Viz Příklad 3.3. Čtyři body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \mathbb{R}^n$ jsou afinně nezávislé, právě když neleží v jedné rovině (neboli nejsou *koplanární*). ♦

Zobrazení $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nazveme **afinní**, pokud (3.5) platí pro všechna $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. Lze dokázat (proveďte!), že zobrazení $\mathbf{f}$ je afinní, právě když existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tak, že

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{3.26}$$

Pro $m = 1$ se zobrazení (3.26) nazývá také **afinní funkce**[11] $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a má tvar

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b, \tag{3.27}$$

kde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.5. Zobrazení $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definované jako $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + 1, x_1 - x_2 - 2, 2x_1)$ je afinní. To bychom mohli dokázat ověřením podmínek (3.5) pro $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. Ale je to patrné i z toho, že zobrazení lze vyjádřit ve tvaru (3.26):

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

♦

Příklad 3.6. Často potkáme zobrazení ve tvaru

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \tag{3.28}$$

To je afinní zobrazení (3.26), kde $\mathbf{b} = -\mathbf{A}\mathbf{x}_0$. Zatímco v (3.26) eplicitně vidíme posunutí v hodnotě (vektor $\mathbf{b}$), v (3.28) explicitně vidíme posunutí v argumentu. ♦

[10] Tento vektor dobře znají počítačoví grafici jako *homogenní souřadnice* bodu $\mathbf{x}$.

[11] V lineární algebře znamená 'lineární funkce' něco jiného než v matematické analýze. Např. funkci jedné proměnné $f(x) = ax + b$ znáte ze základní školy jako lineární, v lineární algebře však lineární není – je afinní. Ovšem soustavě rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se říká 'lineární' i v lineární algebře.

Příklad 3.7. Pro dané body $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$ máme za úkol najít afinní zobrazení $\mathbf{f}$ takové, aby platilo $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$. Řešíme tedy lineární soustavu $\mathbf{y}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}$, $i = 1, \ldots, k$, pro neznámé $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Tuto soustavu můžeme napsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1 & \cdots & \mathbf{y}_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_k \\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

Je-li $k = n+1$ a body $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ jsou afinně nezávislé, matice $\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_k \\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$ je regulární a tedy soustava má jediné řešení. ♦

Shrňme: každé lineární zobrazení lze reprezentovat jako $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pro nějakou $\mathbf{A}$ a každé afinní zobrazení jako $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ pro nějaké $\mathbf{A}, \mathbf{b}$.

3.4 Cvičení

3.1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou lineární nebo afinní podprostory $\mathbb{R}^n$ a když ano, určete jejich dimenze:

a) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = 0 \,\}$ pro dané $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
b) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b \,\}$ pro dané $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$
c) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1 \,\}$
d) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}\mathbf{x}^T = \mathbf{I} \,\}$ pro dané $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
e) $\left\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i = 0 \,\right\}$
f) $\mathbf{a} + \operatorname{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ jsou známé vektory takové, že $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně nezávislé.

3.2. Je množina $\{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0 \,\}$ lineární podprostor? Pokud ano, najděte jeho libovolnou bázi.

3.3. Máme podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^3$ s bází $(1, 2, 3), (-1, 0, 1)$. Nechť $\mathbf{x} = (2, 2, 2)$. Platí $\mathbf{x} \in X$? Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v této bázi.

3.4. Dokažte, že jestliže jsou vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ lineárně závislé, pak je aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.

3.5. Nechť X je lineární podprostor $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Je množina $\mathbf{f}(X)$ lineární podprostor $\mathbb{R}^m$? Odpověď dokažte.

3.6. Je dáno zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, kde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ je pevný vektor a $\times$ označuje vektorový součin dvou vektorů[12]. Jde tedy o zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Je toto zobrazení lineární? Pokud ano, najděte matici $\mathbf{A}$ tak, aby $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Čemu je rovno $\mathbf{A}^T$? Jakou hodnost má $\mathbf{A}$?

3.7. Máme zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definované jako $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, 2x - 1, x - y)$. Je toto zobrazení lineární? Pokud ano, napište ho ve formě (3.7). Je toto zobrazení afinní? Pokud ano, napište ho ve formě (3.26). Obě odpovědi dokažte z definic.

[12] Tedy $\times$ zde neoznačuje kartézský součin množin, jako jinde ve skriptech.

3.8. Mějme nehomogenní lineární soustavu

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

dvou rovnic o třech neznámých. Napište množinu řešení soustavy jako $X + \mathbf{x}_0$, kde $X \subseteq \mathbb{R}^3$ je lineární podprostor (napište jeho bázi) a $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

3.9. Zjisti, zda existuje lineární funkce f splňující tyto podmínky:

a) $f(1,2) = 2,\ f(3,4) = 3$.
b) $f(1,2) = 2,\ f(3,4) = 3,\ f(5,6) = 4$.
c) $f(1,0,1) = -1,\ f(0,1,2) = 1,\ f(1,1,3) = 2$.

3.10. Najděte bázi prostoru obrazů a bázi nulového prostoru následujících lineárních zobrazení:

a) $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3 + 2x_1)$
b) $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_2 + x_1)$

3.11. Sloupce matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ jsou báze podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když $\dim X = m$ a $X = \operatorname{rng} \mathbf{A}$. Proč?

3.12. Nechť matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají stejné rozměry a obě mají lineárně nezávislé sloupce. Dokažte, že sloupce matic tvoří báze stejného podprostoru (tj. $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \operatorname{rng} \mathbf{B}$), právě když $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$ pro nějakou regulární matici $\mathbf{C}$.

3.13. Pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ se stejným počtem řádků dokažte tvrzení:

a) $\operatorname{rng} \mathbf{A} \subseteq \operatorname{rng}[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$
b) $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \operatorname{rng}[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$ jestliže $\operatorname{rng} \mathbf{B} \subseteq \operatorname{rng} \mathbf{A}$
c) $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \operatorname{rng}[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$ jestliže $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$
d) $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \operatorname{rng} \mathbf{B}$ právě když $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \mathbf{B}] = \operatorname{rank} \mathbf{B}$

3.14. Máme matici $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ takové, že $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Může mít matice $\mathbf{A}$ lin. nezávislé řádky? Může mít lin. nezávislé sloupce? Odpověď dokažte z definice lineární nezávislosti.

3.15. Dokažte, že pro libovolné dvě matice platí nerovnost (3.19).

3.16. Navrhněte postup, jak spočítat afinní zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které zobrazí trojúhelník s vrcholy $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{R}^2$ na trojúhelník s vrcholy $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 \in \mathbb{R}^2$. Zobrazení má zobrazit bod $\mathbf{p}_1$ do bodu $\mathbf{q}_1$ atd.

3.17. Které z těchto výroků jsou pravdivé? Každý výrok dokažte nebo najděte protipříklad. Některé výroky mohou platit jen pro určité rozměry matic – najděte co nejobecnější podmínky na rozměry matic, aby výroky byly pravdivé.

a) Pokud $\mathbf{AB}$ má plnou hodnost, pak $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají plnou hodnost.
b) Pokud $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají plnou hodnost, pak $\mathbf{AB}$ má plnou hodnost.
c) Pokud $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají triviální nulový prostor, pak $\mathbf{AB}$ má triviální nulový prostor.
d) ($\star$) Pokud $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou úzké s plnou hodností a platí $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{0}$, pak matice $[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$ je úzká s plnou hodností.
e) ($\star$) Pokud matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ má plnou hodnost, pak $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ mají plnou hodnost.

3.18. V §2.1.4 jsme zmínili a v §3.2.3 dokázali, že jestliže nějaké matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ splňují $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, pak $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé řádky a $\mathbf{B}$ má lin. nezávislé sloupce. Dokažte obecnější tvrzení: jestliže matice $\mathbf{AB}$ je regulární, pak $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé řádky a $\mathbf{B}$ má lin. nezávislé sloupce.

3.19. ($\star$) Mějme vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$. Vektor $\mathbf{x}_i$ nazveme *klíčový*, není-li lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}$. Dokažte, že množina klíčových vektorů je báze podprostoru $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$. Všimněte si, že vlastně dokazujete první tvrzení Věty 3.2.

3.20. ($\star$) Máme lineárně nezávislé vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ a hledáme vektory $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ tak, aby vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ byly lineárně nezávislé. Dokažte, že to jde udělat následovně. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matice s řádky $\mathbf{a}_1^T, \ldots, \mathbf{a}_m^T$. Vybereme množinu $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ lineárně nezávislých sloupců matice $\mathbf{A}$ (viz předchozí cvičení). Pak zvolíme vektory $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ jako $n-m$ vektorů standardní báze $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ kde $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus J$.

3.21. ($\star$) Dokažte Větu 3.14.

Nápověda a řešení

3.1.a) Lineární podprostor, dimenze $n-1$ pro $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ a n pro $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

3.1.b) Afinní podprostor dimenze $n-1$ pro $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ a n pro $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $b = 0$. Pro $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $b \neq 0$ je množina prázdná (tedy není afinní podprostor).

3.1.c) Není lineární ani afinní podprostor (je to sféra).

3.1.d) Pro $n = 1$ a $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ je množinou jediný bod, tedy afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}$. Pro $n = 1$ a $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ je množina prázdná (tedy není afinní podprostor). Pro $n > 1$ je množina také prázdná, protože soustava $\mathbf{a}\mathbf{x}^T = \mathbf{I}$ nemá řešení pro žádné $\mathbf{a}, \mathbf{x}$ (možný důkaz: je $\operatorname{rank}\mathbf{I} = n$, ale $\operatorname{rank}(\mathbf{a}\mathbf{x}^T) \leq 1$).

3.1.e) Lineární podprostor dimenze $n-1$.

3.1.f) Je to rovina v $\mathbb{R}^n$, která neprochází počátkem (prochází bodem $\mathbf{a}$), tedy je to afinní podprostor dimenze 2.

3.2. Ano. Je to vlastně množina $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = 0 \,\}$ (tedy nadrovina procházející počátkem s normálovým vektorem $\mathbf{a}$), kde $n = 4$ a $\mathbf{a} = (1, 0, 1, 0)$. Bázi získáme řešením homogenní soustavy $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = x_1 + x_3 = 0$. Báze má tři prvky, např. $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$.

3.3. Je $\mathbf{x} \in X$, právě když $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ pro nějaké $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pokud tato lineární soustava má řešení, pak (α, β) jsou souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (zde je drobná nesrovnalost: někdy jsme o bázi mluvili jako o *množině* vektorů, protože nám na pořadí vektorů báze nezáleželo.

3.4. Jsou-li vektory lin. závislé, pak $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ kde aspoň jedno z čísel $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ je nenulové. Je-li např. $\alpha_1 \neq 0$, pak $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ lze napsat jako $\mathbf{x}_1 = \alpha'_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha'_k\mathbf{x}_k$ kde $\alpha'_i = \alpha_i/\alpha_1$.

3.5. Ano. Důkaz: Dle (3.3) máme dokázat, že pro každé $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k \in \mathbf{f}(X)$ platí $\sum_i \alpha_i\mathbf{y}_i \in \mathbf{f}(X)$. Protože $\mathbf{f}(X) = \{\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X \,\}$, je $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(X)$ právě když existuje $\mathbf{x} \in X$ tak, že $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Tedy máme dokázat, že pro každé $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in X$ existuje $\mathbf{x} \in X$ tak, že $\sum_i \alpha_i\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. To je ale pravda, protože $\sum_i \alpha_i\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{f}(\sum_i \alpha_i\mathbf{x}_i)$ a $\mathbf{x} = \sum_i \alpha_i\mathbf{x}_i \in X$.

3.6. Je lineární, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{bmatrix}$ je antisymetrická hodnosti 2 pro $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

3.7. Je afinní. Je $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = (0, -1, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = (x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

3.8. Např. $(1,-1,2) + \operatorname{span}\{(1,-1,1)\} = \{\,(1+\alpha, -1-\alpha, 2+\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\,\}$.

3.9.a) Je $f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$. Rešíme soustavu $a_1 + 2a_2 = 2$, $3a_1 + 4a_2 = 3$. Tato soustava má řešení, tedy lineární funkce existuje.

3.9.b) Ano.

3.9.c) Ne.

3.10.a) $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^2$ a tedy báze $\operatorname{rng} \mathbf{A}$ je např. $(0,1), (1,0)$. Báze $\operatorname{null} \mathbf{A}$ je např. $(1,1,3)$.

3.10.b) Báze $\operatorname{rng} \mathbf{A}$ je např. $(2,1,1), (1,-1,2)$. Báze $\operatorname{null} \mathbf{A}$ je např. $(0,0)$.

3.14. Matice je regulární, právě když je čtvercová a má lineárně nezávislé sloupce. Uvědomte si, že lineární kombinaci sloupců matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$ lze psát jako $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta}\end{bmatrix} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\boldsymbol{\beta}$ a použijte definici lineární nezávislosti (3.2).

3.15. Dle Tvrzení 3.10 je $\operatorname{rng}(\mathbf{AB}) \subseteq \operatorname{rng} \mathbf{A}$, z toho $\operatorname{rank}(\mathbf{AB}) \leq \operatorname{rank} \mathbf{A}$. Dle Věty 3.7 je $\operatorname{rank}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rank}((\mathbf{AB})^T) = \operatorname{rank}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T) \leq \operatorname{rank}(\mathbf{B}^T) = \operatorname{rank} \mathbf{B}$.

3.16. Viz Příklad 3.7.