

- Pravděpodobnostní prostor**  $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\text{množina všech náhodných elem. jevů}, \sigma\text{-algebra, pravděpodobnost})$
- Základní vlastnosti:**
1.  $0 \leq P(A) \leq 1$

2.  $P(A^c) = 1 - P(A)$

3.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4.  $A \subset B \rightarrow P(A) \leq P(B)$

5.  $A \subset B \rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$

**Podmíněná pravděpodobnost** - jev A za podmínky jevu B (např. pst, že padne 6 za podmínky, že padlo sudé číslo), chová se jako nepodmíněná pst.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  → průnik lze hledat např. skrz tabulku či obrázek (případně u nezávislých jevů skrz vzorec níže)

**Věta o násobení pstí (řetězové pravidlo)** -  $P(\bigcap_{i=1}^n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

**Věta o úplné psti** - známe  $P(B|A_i) \rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i)$ , např. pst, že nám během roku praskne nějaký z X typů žárovek

**Bayesova věta** - známe  $P(B|A_i) \rightarrow P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)P(B|A_j)}$ ; např. jaká je pst, že člověk s pozitivním testem je opravdu nakažený, když máme danou spolehlivost - ideálně řešit skrz tabulku

**Nezávislost jevů** - dva jevy jsou nezávislé, pokud platí  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ , např. při prvním hodu padne panna a při druhém orel. Pro více jevů je potřeba pro totální nezávislost dokázat nezávislost všech n-tic pro  $n \geq 2$ . Pokud pro každou dvojici jevů platí, že jsou jevy nezávislé, pak jsou obecně po dvou nezávislé.

**Náhodná veličina X** - zobrazení  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , které přiřazuje jevům náhodná čísla (lze na to pohlížet jako na náhodné číslo); operace s náhodnými veličinami vrací náhodné veličiny

**Distribuční funkce** -  $F(x) = P(X \leq x)$ , např. jaká je šance, že budeme na bus čekat méně jak x minut. Je neklesající a zprava spojitá v každém bodě. Platí, že  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .

**Tabulka základních informací o diskrétních, spojitých a směsích n. v.:**

Diskrétní	Spojité	Směs $Mix_c(D, S)$
F(x) je skokovitá, velikost skoků odpovídá jejich pravděpodobnostem, $F(x) = \sum_i P(X = x_i)$	F(x) je spojitá a její derivace je f(x), tj. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$	F(x) je směs dílčích distribučních funkcí $F_D$ (s "váhou" c) a $F_S$ , tj. $F(x) = cF_D(x) + (1 - c)F_S(x)$
	f(x) - hustota pravděpodobnosti, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$	
$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i)$	$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$	$EX = cEX_D + (1 - c)EX_S$
$EX^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot P(X = x_i)$	$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$	

**Základní vlastnosti střední hodnoty EX:**

1. a je konst.  $\rightarrow \mathbb{E}a = a$
2.  $\mathbb{E}(aX + bY) = aEX + bEY$
3.  $X_1 \leq X \leq X_2 \rightarrow EX_1 \leq EX \leq EX_2$

**Variance** - česky rozptyl,  $var X = \mathbb{E}(X - EX)^2$ ,

**Základní vlastnosti variance var X**

1. X je n.v.  $\rightarrow var X = EX^2 - E^2 X$
2. a je konst.  $\rightarrow var(a) = 0$
3. X je n.v., a je reálné číslo  $\rightarrow var(aX) = a^2 var X$
4.  $X, Y \rightarrow var(X + Y) = var X + var Y + 2cov(X, Y)$

**Čebyševova nerovnost** - X je n.v. a pro každé  $\mathcal{E} > 0$  platí, že  $P(|X - EX| \geq \mathcal{E}) \leq \frac{var X}{\mathcal{E}^2}$ ; např. odhadněte, že při 120 hodech padne 10-15 šestek (tohle jsou zrovna prý dost blbá čísla, ale princip snad jde poznat :D)

**Alt(p)** - model pro "úspěch/neúspěch"; např. šestka padne v hodu s pravděpodobností p

**Binom(n,p)** - model pro "počet úspěchů v n nezávislých situacích"; např. počet šestek, které padají s pravděpodobností p, v n hodech

**Po(λ)** - model pro "počet vzájemně nezávislých událostí v intervalu"; např. počet prasklých žárovek v průběhu měsíce; λ vztahujeme k našemu časovému intervalu

**Ge(p)** - model pro "počet neúspěchů před prvním úspěchem"; např. počet hodů kostkou než padne šestka

**HypGe(N,K,n)** - model pro "vybíráme z hromady N předmětů, ze kterých má K předmětů specifickou vlastnost, celkem n předmětů"; např. z klobouku, kde je 10 kuliček, z toho 3 černé, vybíráme 6

**Ro(a,b)** - model pro "dobu čekání na událost, která přichází v pravidelných intervalech"; např. doba, kterou od příchodu budeme čekat na bus, co jezdí každých 10 minut

**Exp(λ)** - model pro "dobu čekání na události, které jsou navzájem nezávislé"; např. doba, za kterou praskne další žárovka; λ lze označit za intenzitu (prasknou obvykle 3 žárovky za měsíc → λ = 3)

**Norm(μ, σ²)** - v realitě často se vyskytující rozdělení, převod na normované pomocí  $Y = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$

**Tabulka jednotlivých modelů rozdělení:**

$P_x$	<i>Hodnoty X</i>	$P(X = k)$ nebo $f(x), F(x)$	$\mathbb{E}X$	$var X$
Alt(p)	0 nebo 1	$p^k(1 - p)^{1-k}$	$p$	$p(1 - p)$
Binom(n,p)	$< 0, n >$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$np$	$np(1 - p)$
Po(λ)	$< 0, \infty)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\lambda$	$\lambda$
Ge(p)	$< 0, \infty)$	$p(1 - p)^k$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
HypGe(N,K,n)	$< \max(0, n + K - N), \min(n, K) >$	$\frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n \frac{K}{N}$	$n \frac{K}{N} (1 - \frac{K}{N}) \frac{N-n}{N-1}$
Ro(a,b)	$< a, b >$	$\frac{1}{b-a}, \frac{x-a}{b-a}$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exp(λ)	$(0, \infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}, 1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Norm(μ, σ²)	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \Phi$	$\mu$	$\sigma^2$