DC8

úterý 11. dubna 2023 9:44

**10.1.** Funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má stacionární bod $(2,1,5)$. Co se dá o tomto stacionárním bodě říci, když Hessova matice $f''(2,1,5)$ v něm má vlastní čísla

a) $\{\underbrace{2,3,-1}_{\text{sedlový bod}}\}$ indefinitní

b) $\{2,3,0\}$ ↳ nelze určit

c) $\{\underbrace{2,1,1}_{\text{lokální minimum}}\}$ poz. def.

10.2. Pro následující funkce najděte stacionární body. Pro každý stacionární bod určete, zda je to lokální minimum, lokální maximum, či ani jedno. Pokud to určit neumíte, odůvodněte.

d) $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$

$$\nabla f(x,y) = [3 - 3x^2 - 3y^2 \,;\, -6xy]$$

$$3 - 3x^2 - 3y^2 = 0$$
$$-6xy = 0$$

| x | y |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 0 | 1 |
| -1 | 0 |
| 1 | 0 |

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}$$

$\to \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} 0 \\ -36 \end{matrix}$ SEDLO

$\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} 0 \\ -36 \end{matrix}$ SEDLO

$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} 6 \\ 36 \end{matrix}$ Lok. min.

$\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} -6 \\ 36 \end{matrix}$ Lok. max

e) $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$

$$\nabla f(x,y) = [6y^2 - 6x^2 \,;\, 12xy - 12y^3]$$

$$6y^2 - 6x^2 = 0$$
$$12xy - 12y^3 = 0$$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 1 | -1 |

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x - 36y^2 \end{bmatrix}$$

$\to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to$ SEDLO

$\begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -24 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} -12 & -12 \\ -12 & -24 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$

$\Big\}$ LOK. MAX

10.3. Najděte lokální extrémy funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané vzorcem $f(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{a}^T\mathbf{x} - \sum_{i=1}^n x_i \log x_i}_{\text{jedna proměnná}}$, kde $\mathbf{a}$ je známý vektor.

$$f(x) = \sum_i g_i(x_i) \;\to\; g_i(x) = a_i x - x \log x$$

extrémy v bodě $x = (x_1, \dots, x_n)$ iff má $g_i$ extém v bodě $x_i$

10.5. Najděte všechna řešení rovnice $\sin x = \frac{1}{2}x$ (sinus je v radiánech) na kalkulačce s největší přesností, jakou dokážete.

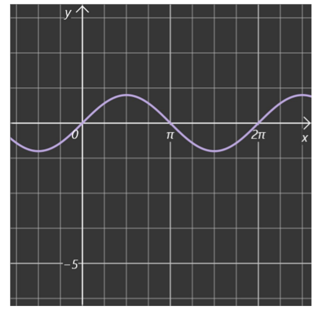
$\sin x - \frac{1}{2}x = 0$

Newtonova metoda:

$\underline{x = 0}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2\sin x_k - x_k}{2\cos x_k - 1}$$

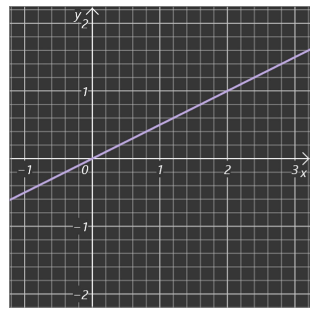
Sin x :




Pro $x_0 = 2$

$x_k = 1{,}895494267$

$\frac{1}{2}x$ :




10.6. Najděte lokální extrém funkce $f(x, y) = x^2 - y + \sin(y^2 - 2x)$ čistou Newtonovou metodou. Počáteční odhad zvolte $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Můžete použít počítač.

$$\nabla f(x,y) = \left[2x - 2\cos(y^2 - 2x),\ -1 + 2y\cos(y^2 - 2x)\right]$$

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 - 4\sin(y^2 - 2x) & 4y\sin(y^2 - 2x) \\ 4y\sin(y^2 - 2x) & -4y^2\sin(y^2 - 2x) + 2\cos(y^2 - 2x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 - 4\sin(b^2 - 2a) & 4b\sin(b^2 - 2a) \\ 4b\sin(b^2 - 2a) & -4b^2\sin(b^2 - 2a) + 2\cos(b^2 - 2a) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2a - 2\cos(b^2 - 2a) \\ -1 + 2b\cos(b^2 - 2a) \end{bmatrix}$$

Pro $[a, b] = (1, 1)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6521 \\ 0{,}7185 \end{bmatrix}$$

$(1,1) \to (0{,}6521;\ 0{,}7985) \to (0{,}6778;\ 0{,}7272) \to (0{,}6794;\ 0{,}7313) \to \ldots$