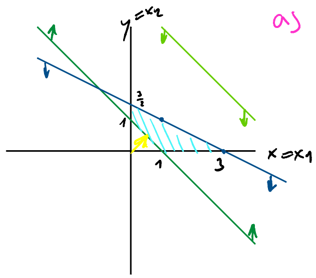
DC10

sobota 22. dubna 2023 18:32

12.1. Najděte graficky množinu optimálních řešení úlohy

$$\begin{aligned} \min\ & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{za podm.}\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

pro následující případy: (a) $\mathbf{c} = (-1, 0, 1)$, (b) $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$, (c) $\mathbf{c} = (0, 0, -1)$.



a) $-c^* = (1, 0)$ $\longrightarrow$

BOD: $[3, 0]$

b) $-c^* = (0, -1)$ $\downarrow$

Nekonečně mnoho bodů z mn. $x_1 \in \langle 1, 3\rangle$ a $x_2 = 0$

c) První dvě souřadnice nemění směr.
Je neomezená, kvůli x_3

12.2. Následující úlohy nejprve převeďte na rovnicový tvar (tj. tvar s nezápornými proměnnými a omezeními typu lineární rovnice, viz §12.1). Potom je převeďte do maticové formy $\min\{\, \mathbf{r}^T\mathbf{u} \mid \mathbf{Pu} = \mathbf{q},\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\,\}$ (výsledkem tedy budou $\mathbf{u}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$).

a)

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 - 3x_3 + x_4 \\ \text{za podmínek}\ & x_1 - x_2 - x_3 \geq 0 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

b) lineární program (12.11)

$\longrightarrow$ prevedení s pomocí skluz. proměnné $\longrightarrow$

rovnicový tvar:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - u &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x + v &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, u, v \geq 0$

a) $c = (2, 0, -3, 1)$ $\min\{\, c^Tx \mid x \in \mathbb{R}^4,\ Ax = b,\ x_1, x_2, x_3, x_4, u, v \geq 0 \,\}$

maticově

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

b)

již v rovnicovém tvaru

$$m\ \overset{n}{\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}} \rightarrow x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} m\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right. \\ n\{ \end{array} \begin{bmatrix} \overset{n}{\mathbb{1}^T} & \cdots & \overset{n}{\mathbb{0}^T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0}^T & \cdots & \mathbb{1}^T \\ \mathbb{I}_n & \cdots & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a \\ \\ b \end{bmatrix}$$

12.3. Vyřešte úvahou tyto jednoduché lineární programy a napište (jednoduchý) výraz pro optimální hodnotu. Odpovědi dokažte. Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ a číslo $k \in \{1, \dots, n\}$ jsou dány.

a) $\max\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{0} \le \mathbf{x} \le \mathbf{1} \,\}$

↳ přepis pro jednu proměnnou x_i: $\max\{c_i x_i \mid x_i \in \mathbb{R},\ 0 \le x_i \le 1\}$

↳ z toho plyne: pro $c < 0 \Rightarrow x = 0$, $c > 0 \Rightarrow x = 1$ } Optimální $\Rightarrow$ $x_i = 0$ → $\sum_i \max\{c_i, 0\}$

$\max\{c_i, 0\}$

12.4. Pokuste se úlohy transformovat na LP. Pokud to nedokážete, vysvětlete proč.

a) $\min\{\, \underbrace{|x_1| + |x_2|}_{f} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ 2x_1 - x_2 \ge 1,\ -x_1 + 2x_2 \ge 1 \,\}$

Pro $z \ge f$, ale nebude nikdy $z > f$, takže $z = f$

↳ lineární

$z_1 \ge |x_1|$ a $z_2 \ge |x_2|$

↳ $\min\{z_1 + z_2 \mid x_1, x_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R},\ z_1 \ge x_1,\ z_1 \ge -x_1,\ z_2 \ge x_2,\ z_2 \ge -x_2,\ 2x_1 - x_2 \ge 1,\ -x_1 + 2x_2 \ge 1\}$

12.9. Firma na výrobu kánoí má 120 zaměstnanců, z nichž každý pracuje maximálně 30 hodin týdně. Polovina zaměstnanců pracuje v truhlářské dílně, 20 zaměstnanců pracuje v dílně na zpracování plastů a zbytek v kompletační dílně. Firma vyrábí dva typy kánoí: standardní kánoe s čistým ziskem 7 EUR za kus a luxusní kánoe s čistým ziskem 10 EUR za kus. Na výrobu jedné standardní kánoe je třeba 4.5 hodiny práce v truhlářské dílně a dvě hodiny v každé ze zbylých dvou dílen. Jedna luxusní kánoe vyžaduje 5 hodin práce v truhlárně, hodinu v dílně na plasty a 4 hodiny kompletace. Průzkum trhu odhalil, že ne méně jež 1/3 a ne více než 2/3 vyrobených kánoí by měly být luxusní. Kolik kterých kánoí má firma týdně vyrobit, aby byl její čistý zisk maximální? Formalizujte jako optimalizační úlohu, kterou už ale neřešte.

0 | TRUHLÁŘ (60) | 60 PLAST (20) | 80 KOMPLET (40) | 120

STAND (S): 7 EUR
LUX (L): 10 EUR

0 | 1/3 LUX 2/3 | 1

celkový čas

$\max\{7S + 10L \mid S, L \in \mathbb{R},\ 4.5S + 5L \le 60 \cdot 30,\ 2S + L \le 20 \cdot 30,\ 2S + 4L \le 40 \cdot 30,\ (S+L)/3 \le L \le (S+L)/3\}$