3.5

OPT midterm 5.4.2023 | Příjmení: LINHA | Jméno: Vojtěch | 102

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. Nechť $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4);\ x_1 = x_4\}$, $\mathbf{z} = (4, 3, 2, 1)$. Najděte kolmou projekci vektoru $\mathbf{z}$

0.5

a) (2 body) na X,
b) (1 bod) na $X^\perp$

a) $P = (z^T a_1)a_1 + (z^T a_2)a_2 + (z^T a_3)a_3 = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$A = \text{span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ortogonální báze}}\Big)$ $\quad P = AA^T z$

?

b) [redacted]

$X^\perp = \text{null}(X)$

2. (2 body) Pro afinní podprostor $X = (1, 2, 3, 4) + \text{span}\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ najděte matici a vektor pravých stran soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, jejíž řešení je X.

0

[redacted]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b}$$

3. Závislost proměnné z na proměnných x, y modelujeme regresní funkcí $z \approx f(x, y) = a(x - y)^2 + be^{x+y} + cxy + d$. Odhadujeme parametry $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ funkce z naměřených bodů (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, 100$, ve smyslu nejmenších čtverců.

2

a) (2 body) Formulujte úlohu v maticové podobě.
b) (1 bod) Za jakých předpokladů bude mít úloha jediné řešení? Takové řešení napište.

a) $$\underbrace{\begin{bmatrix} (x_1 - y_1)^2 & e^{x_1 + y_1} & x_1 y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{100} - y_{100})^2 & e^{x_{100} + y_{100}} & x_{100} y_{100} & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{100} \end{bmatrix}}_{b}$$

[redacted]

$\min \|Ax - b\|^2$

[redacted]

4. Matice $\mathbf{A}$ typu $10^4 \times 50$ má prvky 0 nebo 1. Každý řádek i odpovídá jedné osobě a každý sloupec j streamovací službě (Netflix, Spotify atd.), přičemž $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když si osoba i předplácí službu j.

1

a) (1 bod) Co vyjadřují prvky matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$? Interpretujte jejich numerické hodnoty.
b) (1 bod) Matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má jen 15 nenulových singulárních čísel $s_1, \ldots, s_{15}$. Napište teoretickou chybu aproximace matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ maticí hodnosti nejvýše 10.

a) Průnik počtu osob platící službu
Na diagonále je počet [redacted] osob plat. danou službu
Počet osob platící jednu platformu (řádek) současně s druhou (sloupec)

b) $s_{11} \leq \ldots \leq s_{15}$
Počet [redacted] chybových sing. čísel je 5

Vase odpovedi na kvizove otazky: b, a, d, d, a

spatne: 5, 6, 8

dobre: 7, 9

chybi:

Celkem bodu za kviz: 2

Zadani vaseho kvizu naleznete na nasledujici strane.

OPT midterm 5.4.2023 Příjmení: LINHA Jméno: Vojtěch 102

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

102

	5	6	7	8	9
a		X			X
b	X				
c					
d			X	X	
e					

5. Nechť $n \geq 2$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je nenulový vektor. Ortogonální projektor promítající na podprostor span$\{\mathbf{a}\}$ je
   (a) je matice plné hodnosti
   (b) je symetrická regulární matice
   (c) je singulární matice
   (d) je široká matice, která není čtvercová
   (e) žádná z uvedených možností

6. Hledáme afinní podprostor X dimenze 5 minimalizující součet čtverců kolmých vzdáleností od vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{1000} \in \mathbb{R}^{50}$.
   (a) Hledaný afinní podprostor X nemusí existovat.
   (b) X je vždy lineárním obalem 5 lineárně nezávislých vektorů.
   (c) Neplatí žádná z uvedených možností.
   (d) X je afinním podprostorem prostoru $\mathbb{R}^5$.
   (e) X je afinním podprostorem prostoru $\mathbb{R}^{50}$.

7. Máme zadánu symetrickou matici $\mathbf{A}$ řádu n.
   (a) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ nabývá vždy maxima pro nějaký vektor $\mathbf{x}$ splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
   (b) Její největší vlastní číslo λ je vždy kladné a platí $\lambda = \max \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ pro vektory $\mathbf{x}$ splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
   (c) Každý vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$ je řešením úlohy $\max\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.
   (d) Její nejmenší vlastní číslo splňuje $\lambda \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ pro libovolný vektor $\mathbf{x}$ takový, že $\|\mathbf{x}\| = 1$.
   (e) Optimální řešení úlohy $\max\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ vždy existuje.

8. Nechť $\mathbf{A}$ je matice s lineárně nezávislými řádky. Matice ortogonálního projektoru na podprostor null $\mathbf{A}^T$ je
   (a) $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
   (b) $\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
   (c) $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
   (d) $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
   (e) neplatí žádné výše uvedené tvrzení

9. Množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$,
   (a) je afinní podprostor dimenze $n-1$
   (b) je konečná
   (c) je vždy lineární podprostor
   (d) je vždy přímka, která nemusí procházet počátkem
   (e) nesplňuje žádnou z uvedených možností