SILLIPAV

Na nasledujicich radcich naleznete hodnoceni jednotlivych prikladu, kontakt na opravujiciho a jeho pripadny komentar.

1. 0b (voracva1@fel.cvut.cz)

   Tady to neni spravne ani pro ten pripad n=2

2. 3b (dlaskto2@fel.cvut.cz)
3. 2b (spetlrad@fel.cvut.cz)
4. 3b (cechj@fel.cvut.cz)
5. 2b (petr@olsak.net)
6. 3b (petr@olsak.net)

celkem 13b

Jméno	Příjmení	Už. jméno
Pavel	**Sillinger**	**sillipav**

Řešení testu pište perem na papír (tedy ne do počítače), dovoleno je také psát elektronickým perem na tablet. Zadání příkladů nemusíte opisovat. Každý příklad pište na zvláštní stránku. Na každou stránku napište nahoru číslo příkladu a podpříklady uvoďte příslušným písmenem v kroužku.

Do řešení pište nejen odpovědi ale i jejich odůvodnění a postupy řešení. Správná odpověď bez odůvodnění je neplatná!

Na konci testu vaše řešení oscanujte nebo ofoťte a nahrajte do Brute do úlohy Test2. Každý příklad odevzdejte ve zvláštním souboru, jehož jméno bude číslo příkladu. Dovolené formáty jsou PDF a ZIP, přičemž v ZIPu může být jakýkoliv formát (JPG, PNG, PDF). Tedy celkem odevzdáte buď šest souborů 1.pdf, 2.pdf, ..., 6.pdf, nebo jeden ZIP ve kterém budou např. 1.jpg, 2.jpg, ..., 6.jpg. Do Brute můžete nahrávat opakovaně, ovšem bere se v úvahu vždy jen poslední verze (dřívější verze se těmi pozdějšími přemažou).

Odevzdávání dokončete do 17:45. Ovšem Brute zůstane otevřené až do 18:00 pro případ, že by někdo měl technické problémy. Odevzdání (např. emailem) po tomto termínu není možné. Velmi proto doporučujeme dostatečnou dobu před koncem nahrát aspoň nějakou verzi řešení, pak ještě počítat, a na konci nahrát znovu vylepšenou verzi řešení.

Během testu můžete používat materiály k předmětu (skripta, slajdy, Vaše zápisky), nesmíte ale s nikým komunikovat. Prosíme, nezneužívejte situace a nepodvádějte. Při pochybostech můžeme studenta z příkladu ústně vyzkoušet. Při odhaleném podvodu předmět pro studenta okamžitě končí.

Otázka 1

Napište vzorec pro gradient funkce $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}^T\mathbf{x})(\mathbf{b}^T\mathbf{x})$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ jsou dané vektory.

Otázka 2

Hledáme lokální maximum funkce $\cos x + x/2$ čistou Newtonovou metodou.

1. Napište iteraci algoritmu.
2. Pro počáteční odhad $x_0 = 0$ vypočítejte odhad x_1 po jedné iteraci metody.

Otázka 3

Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.96 & -0.72 & -0.4 \\ 1.28 & 0.96 & -0.3 \end{bmatrix}$.

1. Najděte matici $\mathbf{B}$ hodnosti 1 takovou, že $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ je minimální (kde $\|\cdot\|$ značí Frobeniovu normu).
2. Jaká je vzdálenost (ve Frobeniově normě) matice $\mathbf{A}$ od množiny matic hodnosti 1?

V tomto příkladě doporučujeme použít Matlab.

Otázka 4

Máme funkci $f(x, y) = 1/(x + y)$ a bod $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

1. Najděte první derivaci (Jacobiho matici) funkce.
2. Najděte druhou derivaci (Hessovu matici) funkce.
3. Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce v bodě (x_0, y_0). Výsledný polynom zjednodušte.
4. Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce v bodě (x_0, y_0). Výsledný polynom zjednodušte.

Otázka 5

Hledáme lokální extrémy funkce $x + y$ na množině $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - 2xy + y^2 = 1 \}$.

1. Najdi všechny body (x, y) podezřelé z lokálního extrému.
2. Aniž byste mechanicky použili podmínky druhého řádu pro vázané extrémy, rozhodněte o každém podezřelém bodu, je-li to lokální extrém a případně jakého typu. (Nápověda: Co je množina přípustných řešení?)

Otázka 6

Máme funkci $f(x, y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y$.

1. Najděte všechny stacionární body funkce.
2. Vyberte si jeden stacionární bod a určete, zda je to lokální extrém a případně jakého typu.

Sillinger

1/

Gradient $f(x) = \nabla f(x) = (f'(x))^T$

$f(x) = (a^T x)(b^T x) = (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)(b_1 x_1 + \dots + b_n x_n)$

$f'(x)$

$n = 2$

$(a_1\ a_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot (b_1\ b_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$(a_1 x + a_2 y) \cdot (b_1 x + b_2 y)$

$a_1 b_1 x^2 + a$

2/

$f(x) = \cos x + \frac{x}{2}$ $\quad g(x) = f'(x)^T \quad \max = -\min$

$-f(x) = -\cos x - \frac{x}{2}$ $\quad f'(x)^T = \left[\sin x - \frac{1}{2}\right] = f'(x)$ ✓

$x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1} f'(x_k)^T$ ✓

$f''(x) = [\cos x]$ ✓

3b.

---

1. $x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1} f'(x_k)^T$

$= x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

$= x_k - \frac{\sin x_k - \frac{1}{2}}{\cos x_k}$ ✓ $\Leftarrow$ Alg

2. $x_1 = x_0 - \frac{\overset{0}{\sin x_0} - \frac{1}{2}}{\underset{=1}{\cos x_k}}$ $\quad x_0 = 0$

$x_1 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{1}{2}$ ✓

3)

Sillingo

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}96 & -0{,}72 & -0{,}4 \\ 1{,}28 & 0{,}96 & -0{,}3 \end{bmatrix}$$

25

① $\underline{B}$ rank $B = 1$

min $\|A - B\|$ $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$[U\ S\ V] = \mathrm{svd}(A)$

$s = S \Rightarrow$ sin. čísla → odstranit nejmenší dát rovno nule a zmenšit rank

$B = U \cdot s \cdot V^T$

$$B = \begin{bmatrix} -0{,}96 & -0{,}72 & 0 \\ 1{,}28 & 0{,}96 & 0 \end{bmatrix}$$ Matlab

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

2

② d = vzdálenost

$$d = \sqrt{2^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{16+1}{4}} = \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2$

x 0

4) $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ $\quad (x_0, y_0) = (0,1)$

Silkyor

3

① $f'(x,y) \Leftarrow$ Jacobian

$$\frac{f(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$\frac{f(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f'(x,y) = \left[-\frac{1}{(x+y)^2} \quad -\frac{1}{(x+y)^2}\right]$$

② $f''(x,y) =$ ~~Hess~~. matics

$$a = \frac{f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{2}{(x+y)^3}$$

$$b = \frac{f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{2}{(x+y)^3}$$

$$c = \frac{f(x,y)}{\partial xy} = \frac{2}{(x+y)^3}$$

$$H = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{(x+y)^3} & \frac{2}{(x+y)^3} \\ \frac{2}{(x+y)^3} & \frac{2}{(x+y)^3} \end{bmatrix}$$

③ $T_1 = f(x,y)$

$$f'(x_0,y_0) = \left[-\frac{1}{1} \quad -\frac{1}{1}\right] = [-1 \quad -1]$$

$$T_1(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) + f'(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x_0 - x_0 \\ y_0 - y_0 \end{pmatrix}$$

$$f''(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T_1(x,y) = 1 + [-1 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} x-0 \\ y-1 \end{bmatrix} = 1 + (-x - (y-1)) =$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y-1 \end{bmatrix} \quad = 1 - x - y + 1 = -x - y + 2$$

④ $$T_2(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f'(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}}_{-x-y+2} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}^T f''(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$= -x - y + 2 + \frac{1}{2} \left(x \quad y-1\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = -x - y + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2x+2y-2 \\ 2x+2y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= -x - y + \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2xy - 2x + 2xy - 2x + 2y^2 - 2y - 2y + 2\right) = -3x - 3y + x^2 + 2xy + y^2 + 3$$

$$(2x^2 + 4xy - 4x - 4y + 2y^2 + 2)$$

5)

$f(x,y) = x+y$

$g = (2x^2 - 2xy + y^2 - 1)$

2b

$L = x+y+\lambda(2x^2-2xy+y^2-1)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 4\lambda x - 2\lambda y = 0 \Rightarrow 4\lambda x - 2\lambda y = -1$

$2\lambda(2x-y) = -1$

$\lambda = -\frac{1}{2(2x-y)}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + (-2\lambda x) + 2\lambda y = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$

$1 + \left(-2 \cdot \left(-\frac{1}{2(2x-y)}\right) \cdot x\right) + 2\left(-\frac{1}{2(2x-y)}\right) \cdot y = 0$

$1 + \left(\frac{x}{2x-y}\right) - \frac{y}{2x-y} = 0 \quad / \cdot (2x-y)$

$2x-y \neq 0$

$2x \neq y$

(1)

$2x - y + x - y = 0$

$3x = 2y$

$x = \frac{2y}{3} \quad 2y \cdot \frac{1}{3}$

$2\left(\frac{2y}{3}\right)^2 - 2\frac{2y}{3}y + y^2 - 1 = 0$

$\frac{8y^2}{9} - \frac{4y^2}{3} + y^2 - 1 = 0 \quad / \cdot 9$

$8y^2 - 12y^2 + 9y^2 - 1 = 0$

$5y^2 = 1$

$y^2 = \frac{1}{5}$

$y = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$y = +\frac{1}{\sqrt{5}} \quad x = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt{5}}$

$y = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad x = -\frac{1}{3\sqrt{5}}$

Stac. body = $\left(-\frac{1}{3\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{3\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\Downarrow$ minimum $\quad \Downarrow$ maximum

(2)

6)

$f(x,y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y$

První derivace $f'(x) = 0$

Stacionární bod

⇓

bod podezřelý z extrému

Sillinger

$\frac{f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 2xy = 0$ $D(f) = \mathbb{R}^2$

3b

$\frac{f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y - 4 = 0$

① $3x^2 + 2xy = 0 \Rightarrow x \cdot (3x + 2y) = 0$

$x^2 - 2y - 4 = 0$

$x = 0$: $-2y - 4 = 0$, $2y = -4$, $\underline{y = -2}$

$3x + 2y = 0$, $3x = -2y$, $2y = -3x$ $\Rightarrow$ $2y = -3x$, $y = \frac{-3x}{2}$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x+4)(x-1) = 0$

$x = -4$, $x = 1$

$y = 6$, $\underline{x = -4}$; $y = -\frac{3}{2}$, $\underline{x = 1}$

Stac. body: $(x,y) \Rightarrow (0,-2), (1,-\frac{3}{2}), (-4,6)$

② $\frac{f}{\partial x^2} = 6x + 2y$

$\frac{f}{\partial y^2} = -2$

$\frac{f}{\partial xy} = 2x$

$H_{(-4,6)} = \begin{bmatrix} 6x+2y & 2x \\ 2x & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24+12 & -8 \\ -8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}$

minory $Sub_1 = -12 < 0$

$Sub_2 = 24 - 64 < 0$

$- \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ $Sub_1 = 12 > 0$, $Sub_2 = 24 - 64 < 0$

indefinitní = sedlový bod

~~nedef.~~

$H_{(0,-2)} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $Sub_1 = -4$, $Sub_2 = 8$

$- \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $Sub_1 = 4$, $Sub_2 = 8$

neg definitní

lok maximum

radši toto