Zkouška OPT 13.2.2021

Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu se nepočítá.

1. **(4b)** Auto B stojí 30 km východně od auta A a rozjede se přímočaře na západ rychlostí 80 km/h. V tu samou chvíli se auto A rozjede na sever rychlostí 60 km/h. Za jakou dobu bude vzdálenost mezi auty nejmenší a jaká bude tato vzdálenost?

2. Ke každému z následujících tvrzení napište, zda pro **každou** matici $\mathbf{P}$ je pravdivé či ne. Odpovědi dokažte.
   (a) **(2b)** Je-li $\mathbf{P}$ ortogonální projektor, pak $\mathbf{P}$ je ortogonální matice.
   (b) **(2b)** Je-li $\mathbf{P}$ ortogonální projektor, pak $\mathbf{P}$ není ortogonální matice.
   (c) **(3b)** Je-li $\mathbf{P}$ ortogonální projektor, pak $\mathbf{P}$ je pozitivně semidefinitní.

3. Máme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou vzorcem $f(x, y) = x \sin(x + y)$ a bod $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
   (a) **(2b)** Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce f v bodě (x_0, y_0).
   (b) **(3b)** Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce f v bodě (x_0, y_0). Výsledek zjednodušte.
   (c) **(2b)** Odpovězte a odůvodněte: Je bod (x_0, y_0) stacionární? Je to lokální minimum? Je to lokální maximum?

4. Hledáme vzdálenost bodu $(2, 1)$ od množiny $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y \}$.
   (a) **(3b)** Úlohu lze formulovat jako minimalizaci vhodné funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bez omezení. Napište funkci f.
   (b) **(3b)** Úlohu chceme řešit Newtonovou metodou. Napište vzorec pro iteraci této metody pro danou úlohu.

5. Maximalizujeme $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$ za podmínky $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 1$ přes proměnné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{C}$ je symetrická pozitivně definitní matice.
   (a) **(4b)** Najděte vzorec pro optimální bod $\mathbf{x}$. Výsledný vzorec zjednodušte. Napovíme, že každý stacionární bod Lagrangeovy funkce odpovídá globálnímu extrému.
   (b) **(2b)** Jak by se řešení změnilo, kdyby podmínka byla $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \leq 1$ místo $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 1$? Odpověď dokažte.
   (c) **(3b)** Jak byste geometricky sestrojili optimální bod pro případ $n = 2$? Popište tuto geometrickou konstrukci slovy s pomocí náčrtku, na kterém bude kromě vektoru $\mathbf{a}$ a křivky $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 1$ také optimální bod $\mathbf{x}$. Pokud bude něco s něčím rovnoběžné nebo něco na něco kolmé, vyznačte to obvyklými značkami.

6. Máme lineární program $\max\{ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ (pozor, je tam maximum) daný simplexovou tabulkou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrr|r} -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

   (a) **(3b)** Udělejte jednu iteraci simplexové metody a napište výslednou simplexovou tabulku. Pokud to nejde, vysvětlete.
   (b) **(2b)** Pro tuto tabulku napište bázi, bázové řešení a hodnotu účelové funkce.

7. Minimalizujeme funkci $f(x, y) = \max\{x,\ x - y + 1\} + |x + y - 2|$ za podmínek $x, y \geq 0$.
   (a) **(3b)** Transformujte úlohu na lineární program. Pokud myslíte, že to nejde, odůvodněte a následující úkol nedělejte.
   (b) **(3b)** Napište k tomuto lineárnímu programu duální úlohu.

8. **(6b)** Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definovaná vzorcem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \sum_{i=1}^n (1/x_i)$, kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Najděte minimum této funkce na množině $\mathbb{R}^n_+ = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$. Diskutujte řešení v závislosti na vektoru $\mathbf{c}$.

Bodů celkem: 50