



**DCGI**

**KATEDRA POČÍTAČOVÉ GRAFIKY A INTERAKCE**

# Rotace a Kvaterniony

## Animace

Jiří Bittner

# Obsah přednášky

---

## ■ Rotace a Kvaterniony

*GAE 5.4- 5.5*

- Kvaterniony a interpolace rotací
- Srovnání rotačních reprezentací

## ■ Animace

*GAE 12.1-12.11*

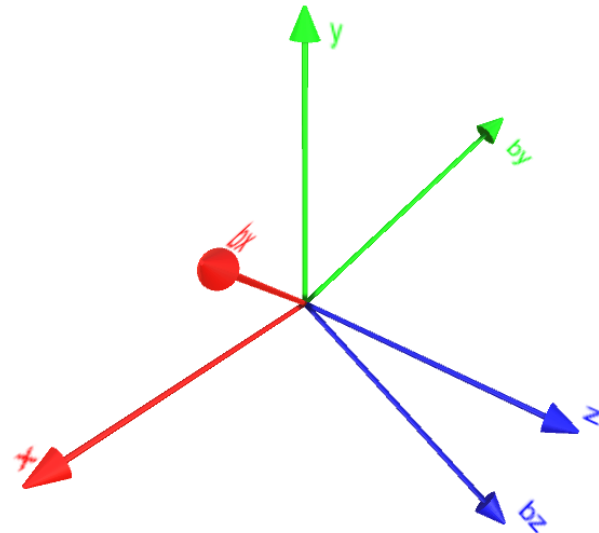
- Typy animací
- Skeletální animace
- Míchání animací a animační klipy
- Inverzní kinematika
- Skinning
- Animační křivky

# 3D Rotace - Matice

- Rotace v  $\mathbb{R}^3$  je lineární zobrazení dané maticí 3x3

$$M_R = \begin{bmatrix} b_x^x & b_x^y & b_x^z \\ b_y^x & b_y^y & b_y^z \\ b_z^x & b_z^y & b_z^z \end{bmatrix}$$

- M je ortonormální a  $\det(M) = 1$
- Rotace báze



# 3D Rotace - Matice

---

- Redundantní reprezentace
  - Parametry svázány podmínkami (ortonormalita, det)
- **Nelze jednoduše interpolovat – kritické pro animace!**
- Jiná reprezentace rotací ve 3D?

# Kvaterniony

---

- Alternativní forma reprezentace rotace
- Zobecnění komplexních čísel
  - Tři imaginární jednotky  $i, j, k$
  - $i^2 = j^2 = k^2 = i j k = -1$
  - $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$
- Kvaternion je čtveřice (vektor v  $R^4$ )

$$\mathbf{q} = [x, y, z, w]$$

$$\mathbf{q} = i x + j y + k z + w = [\mathbf{v}, w]$$

$$\mathbf{v} = [x, y, z] = i x + j y + k z$$

# Kvaterniony a rotace

---

- Jednotkový kvaternion ( $|q| = 1$ ) reprezentuje rotaci ve 3D

$$q = [a \sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}]$$

rotace okolo osy  $a$  o úhel  $\alpha$

# Operace s kvaterniony

---

- Součet  $q_1 + q_2 = [v_1 + v_2, w_1 + w_2]$
- Skalární součin  $q_1 \cdot q_2 = v_1 \cdot v_2 + w_1 \cdot w_2$ 
  - Úhel mezi kvaterniony  $\alpha = \arccos(q_1 \cdot q_2) / (\|q_1\| \cdot \|q_2\|)$
- Násobení kvaternionů  $q_1 * q_2 = [v_1, r_1] * [v_2, r_2]$   
 $= [r_1 v_2 + r_2 v_1 + v_1 \times v_2, r_1 r_2 - v_1 v_2]$ 
  - Skládání rotací (asociativní, nekomutativní)
- Sdružený kvaternion  $q^* = [-v, r]$ 
  - Opačně orientovaná (inverzní) rotace

# Transformace vektoru

---

- Vektor vyjádříme jako kvaternion

$$\mathbf{u} = (x, y, z, 0)$$

- Rotace  $\mathbf{u}$  podle  $\mathbf{q}$

$$\mathbf{u}' = (x', y', z', 0) = \boxed{\mathbf{q} * \mathbf{u} * \mathbf{q}^*}$$

- Dvě kvaternionová násobení + sdružený kvaternion



# Převod kvaternionu na matici

---

- Kvaternion  $\mathbf{q} = [x, y, z, w]$  odpovídá rotační matici

$$R = \begin{pmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2wz & 2xz + 2wy \\ 2xy + 2wz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2wx \\ 2xz - 2wy & 2yz + 2wx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}$$

# Interpolace rotací

---

- Interpolace rotačních matic
  - Špatně - ortonormalita se lineární interpolací poruší
- Interpolace 3D rotací pomocí kvaternionů
  - Lineární interpolace (LERP)
  - Sférická lineární interpolace (SLERP)
    - zachování konstantního úhlového kroku
    - mírně složitější výpočet vah interpolace

# LERP a SLERP

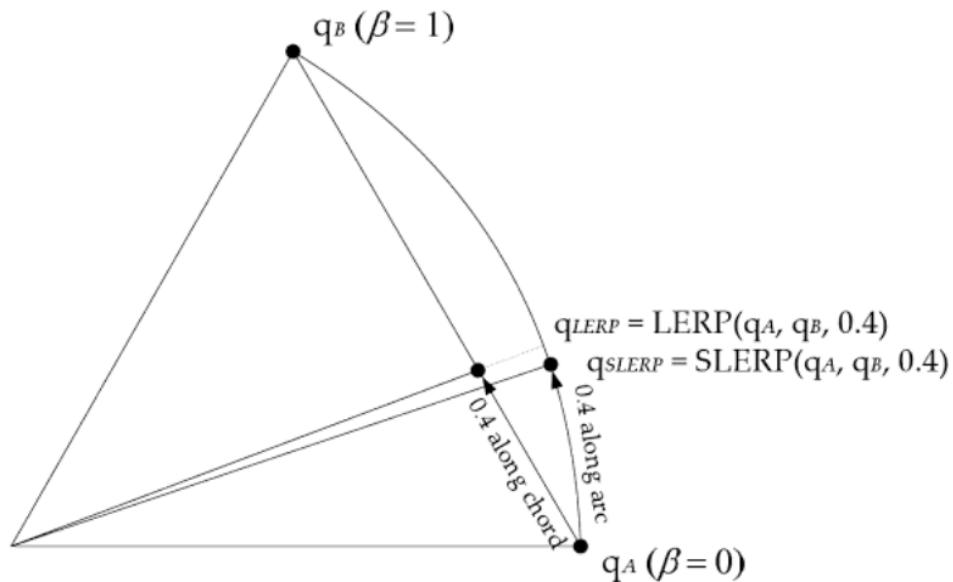
## Interpolace rotací

$$\mathbf{q} = \frac{t_A \mathbf{q}_A + t_B \mathbf{q}_B}{|t_A \mathbf{q}_A + t_B \mathbf{q}_B|}$$

### LERP

$$t_A = 1 - \beta$$

$$t_B = \beta$$



### SLERP

$$t_A = \frac{\sin(1 - \beta)\theta}{\sin \theta}$$

$$t_B = \frac{\sin \beta\theta}{\sin \theta}$$

$$\theta = \arccos q_A q_B$$

zdroj: J. Gregory, Game Engine Architecture

# Reprezentace transformací - SQT

---

- SQT (SRT)
  - Scale, Quaternion, Translation
  - Uniformní scale:  $1+4+3=8$  skalárů
    - Posloupnost SQT lze složit do SQT
  - Neuniformní scale:  $3+4+3=10$  skalárů
- Paměťově úspornější (než matice)
- Korektní interpolace rotace, scale i translace
- Pomalejší aplikace transformace

# Reprezentace transformací - Matice

---

- Matice 4x4
- Obecné afinní transformace + perspektiva
- Jednoduché skládání (násobení matice)
- Rychlá aplikace transformace

# Transformace – Shrnutí

---

- Interpolace transformací pomocí SQT
- Převod na matice těsně před zobrazováním
- Hierarchické skládání transformací pomocí matic
- Transformace vektorů pomocí složené matice (zobrazování)

# Obsah přednášky

---

## ■ Rotace a Kvaterniony

*GAE 5.4- 5.5*

- Kvaterniony a interpolace rotací
- Srovnání rotačních reprezentací

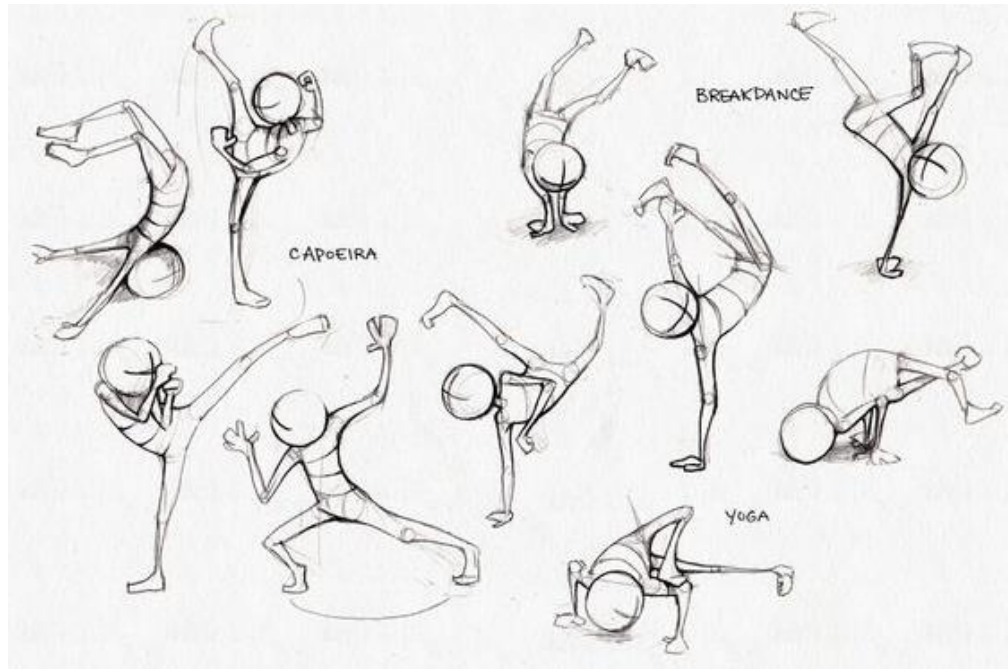
## ■ Animace

*GAE 12.1-12.11*

- Typy animací
- Skeletální animace
- Míchání animací a animační klipy
- Inverzní kinematika
- Skinning
- Animační křivky

# Animace

- Cíl: Rozpohybovat objekty !
- Různé způsoby
  - Animace obrázků
  - Rigidní hierarchická animace
  - Per vertex animace
  - Skeletální animace



Zdroj: [lizpopolo.tumblr.com](http://lizpopolo.tumblr.com)



# Animace obrázků

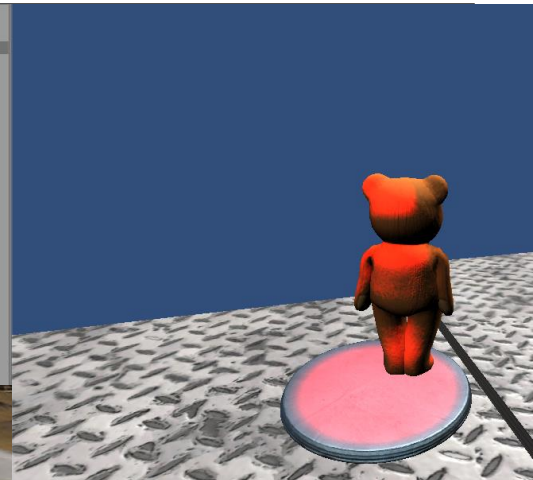
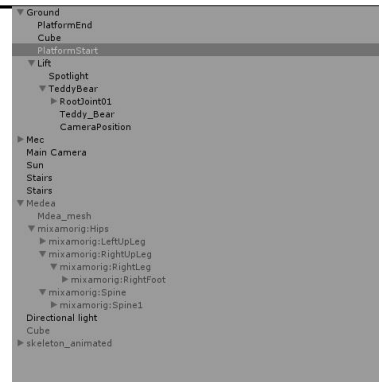
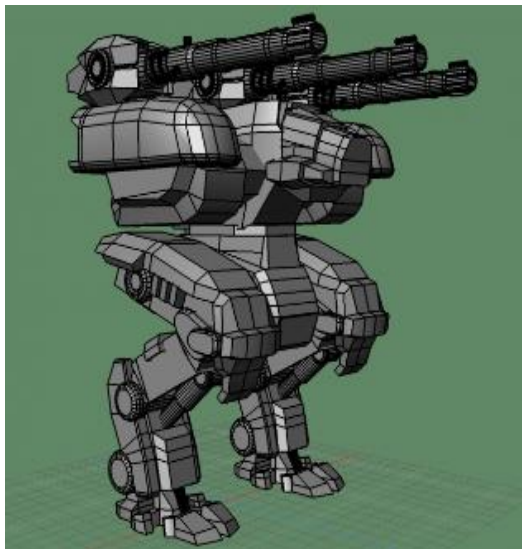
---

- Cell / Sprite animace
- 2D hry



# Rigidní hierarchická animace

- Změna transformací graf scény
- Jednoduché animace
- Stroje



# Animace vrcholů

---

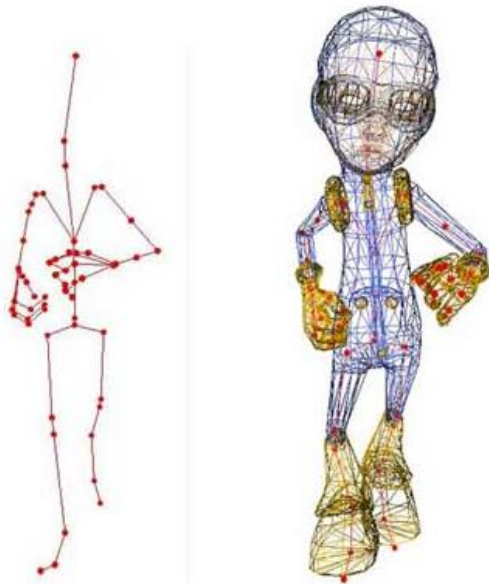
- Per vertex animace
- Morphing (blend shapes)
  - Tvář, výrazy
- Procedurální animace
  - Vodní hladina
- Fyzikální simulace
  - Šaty, látka



# Skeletální animace

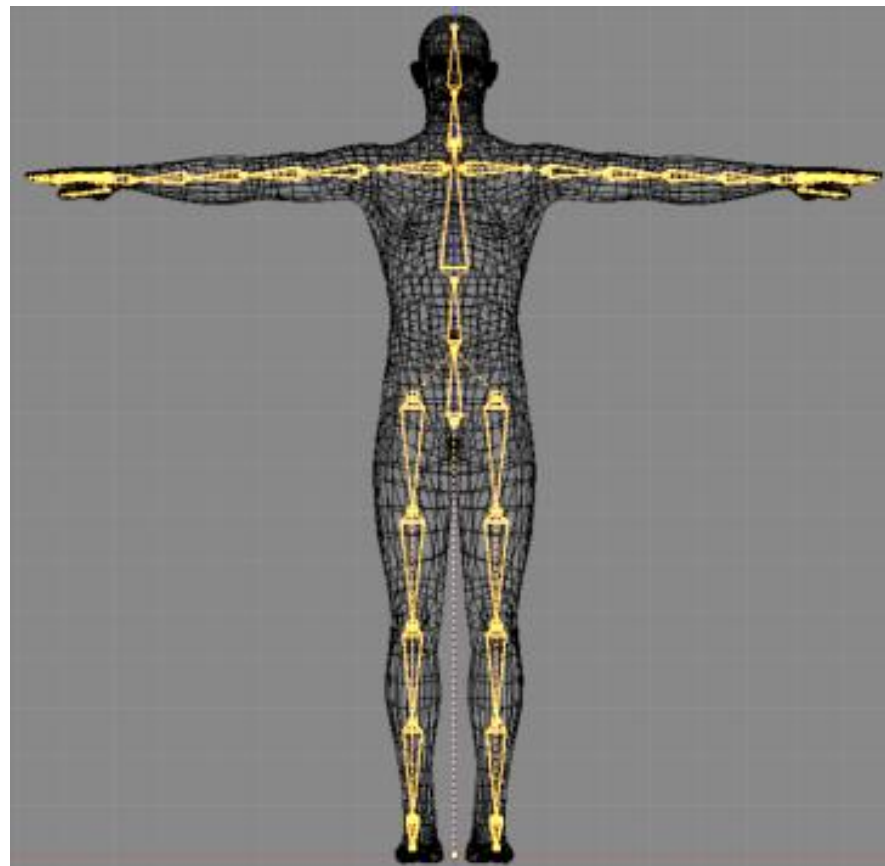
---

- Pomocná struktura určující deformaci modelu = kostra
- Tvar modelu kopíruje polohu kostry
- Kostra má méně stupňů volnosti než 3D model
  - jednodušší animace
  - úspora paměti



# Skeletální animace - vstupy

- Kostra (skeleton, rig)
  - zadaná stromem
  - uzly reprezentují klouby
  - hrany reprezentují kosti
- Pokožka (skin)
  - 3D model
- Kostra i skin jsou navrženy v referenční poloze
  - T-pose, Bind-pose

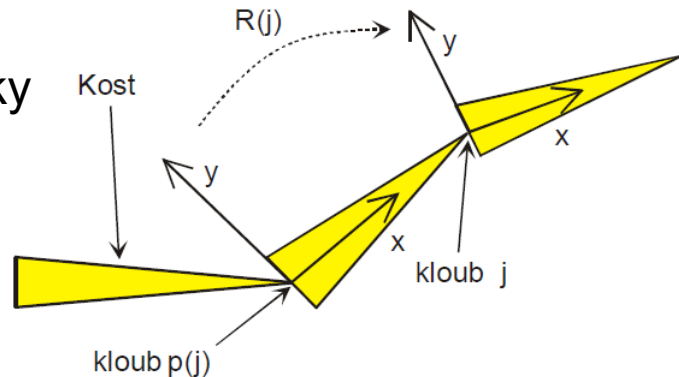


# Skeletální animace - kostra

- Rigidní animace kostry - nikoliv modelu (skinu) !
- Každý kloub
  - jeden předek + transformace vzhledem k němu (SRT/SQT):
  - SCALE (často není využito – jednotkový vektor)
  - ROTATION (kvaternion)
  - TRASLATION (vektor posunutí, často stačí 1 skalár – délka kosti)

Transformace kloubu ovlivňuje všechny potomky

- Hierarchické skládání transformací
- **Animace: změna rotací kloubů**
  - délky kostí často konstantní



# Skeletální animace – dvě fáze

---

1. Určit transformace kloubů – animace kostry
2. Deformace modelu podle kostry - skinning

# Animace kostry

---

- Dopředná kinematika

- přímé ovládání kostry, náročné na tvorbu
- určí se jen **klíčové snímky** (interpolace)

- Motion capture

- záznam pohybu herce
- následné vyčištění a zpracování



- Inverzní kinematika

- nepřímá kontrola kostry, rotace kloubů se spočítají podle cíle

- Dopředná dynamika

- fyzikální simulace
- např. zabití postavy a pád / odhození stranou (ragdoll effect)



# Dopředná kinematika - klíčování

---

- Návrh důležitých klíčových snímků
- Ostatní snímky se dopočítají interpolací
  - interpolačních křivky
- Klíčováním lze kontrolovat cokoliv
  - rotace kloubů
  - metachannels: zvuky, animace textury, materiálů, ...

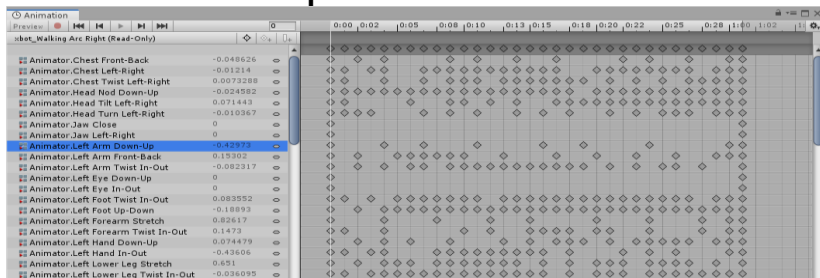
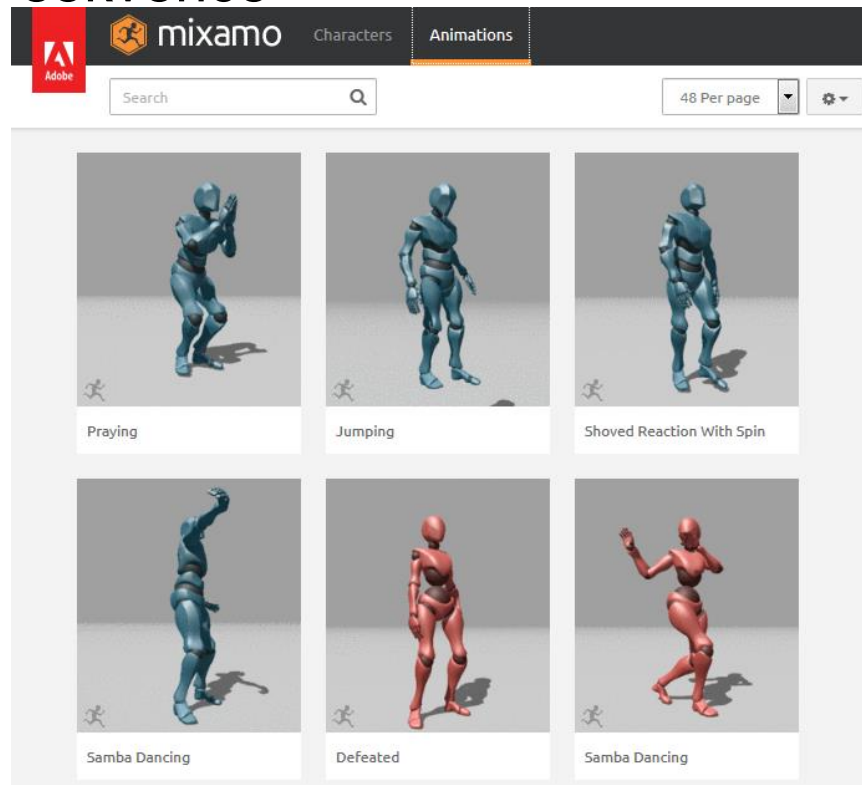
# Animační klipy

- Klip = Základní (krátká) animační sekvence

- Chůze
- Běh
- Úkrok vpravo-vlevo
- Rychlý běh doprava/doleva
- Zamiř rovně-dolu-nahoru
- ...

- Praxe: tisíce animačních klipů

- důležitá komprese kanálů



# Animační klipy – globální vs lokální čas

---

$$t_{local} = clamp((t - t_{start})R, 0, N t_{max}) mod t_{max}$$

$t_{local}$  lokální čas uvnitř klipu

$t$  herní čas

$t_{start}$  čas spuštění klipu

$R$  rychlost přehrávání (může být záporná)

$N$  počet opakování

# Obsah přednášky

---

## ■ Rotace a Kvaterniony

*GAE 5.4- 5.5*

- Kvaterniony a interpolace rotací
- Srovnání rotačních reprezentací

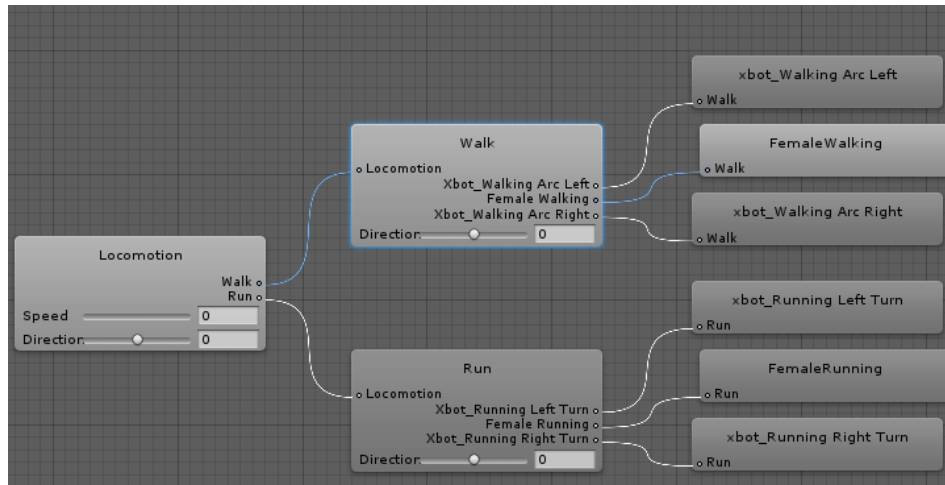
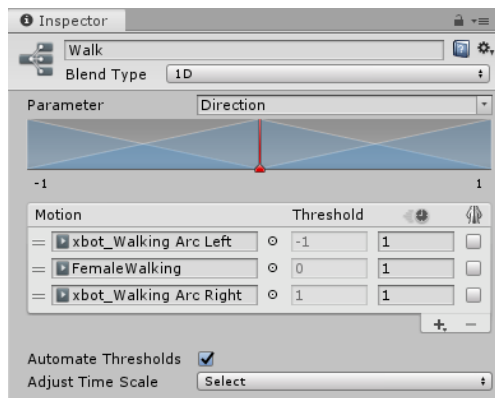
## ■ Animace

*GAE 12.1-12.11*

- Typy animací
- Skeletální animace
- Míchání animací a animační klipy
- Inverzní kinematika
- Skinning
- Animační křivky

# Míchání klipů

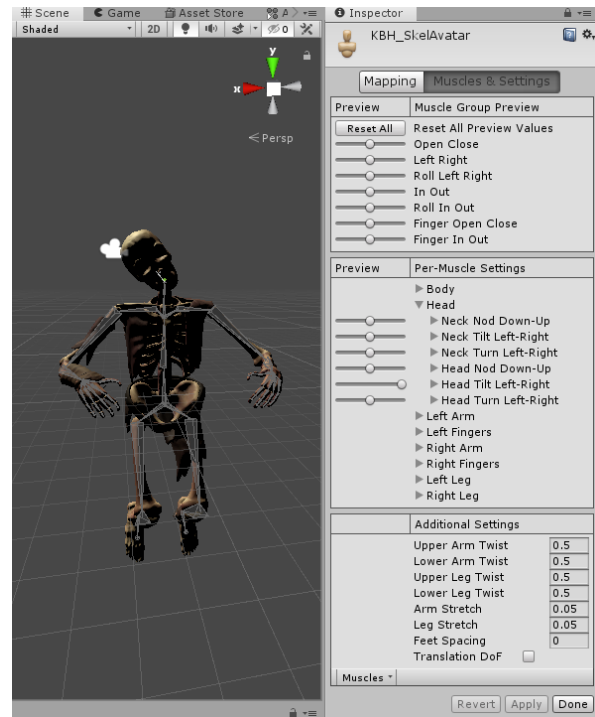
- Několik klipů dohromady
  - Směrový pohyb, kombinace pohybů
  - Obecně popsáno stromem míchání



- LERP na SQT transformacích kloubů

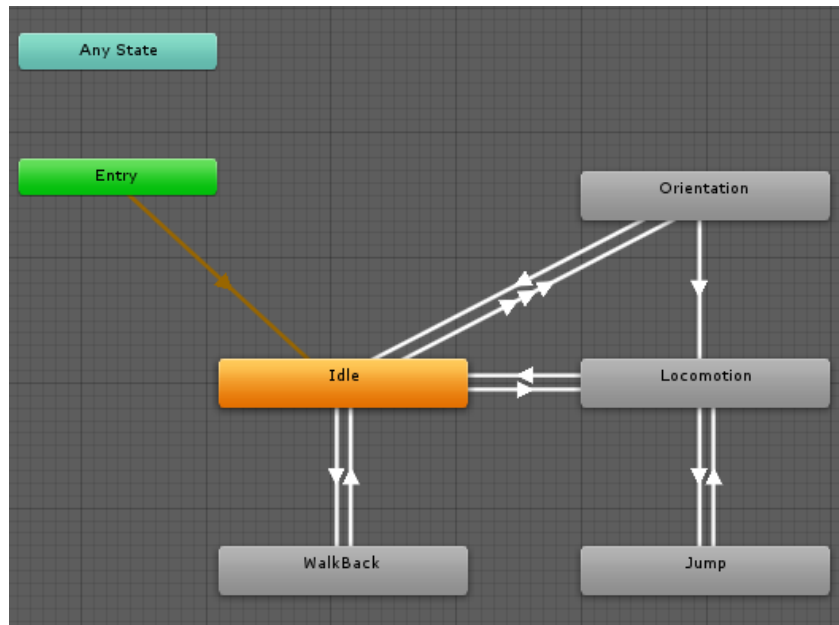
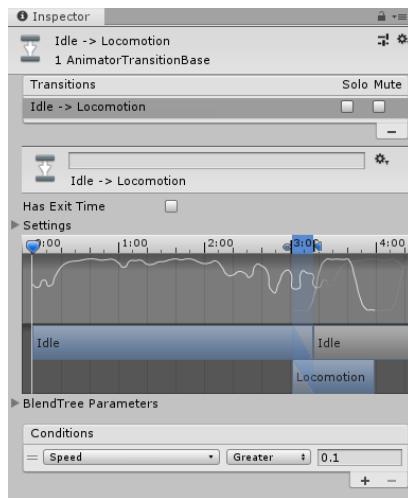
# Míchání klipů

- LERP na SQT transformacích kloubů
  - LERP na S, T
  - SLERP na Q
- LERP v **prostoru svalů**
  - Speciální parametrizace transformací kloubů
  - Obecná transf. (SQT) -> intuitivní parametry v rozsahu -1..1
    - Head Turn Left-Right, Head Tilt Left-Right, ...
  - Omezení nemožných póz
  - Intuitivnější zadávání / interpretace



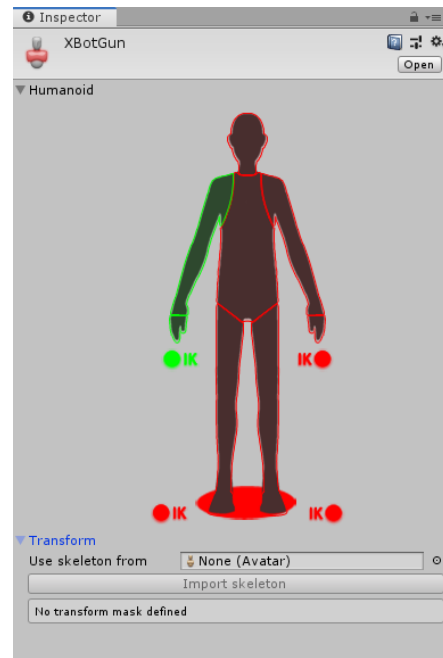
# Animační automat (ASM)

- Množina stavů
  - př. Idle, Motion, Jumping, Fighting, ...
- Každý stav svůj strom míchání klipů
- Předchody mezi stavy (cross-fade)
  - Dočasné míchání (LERP)



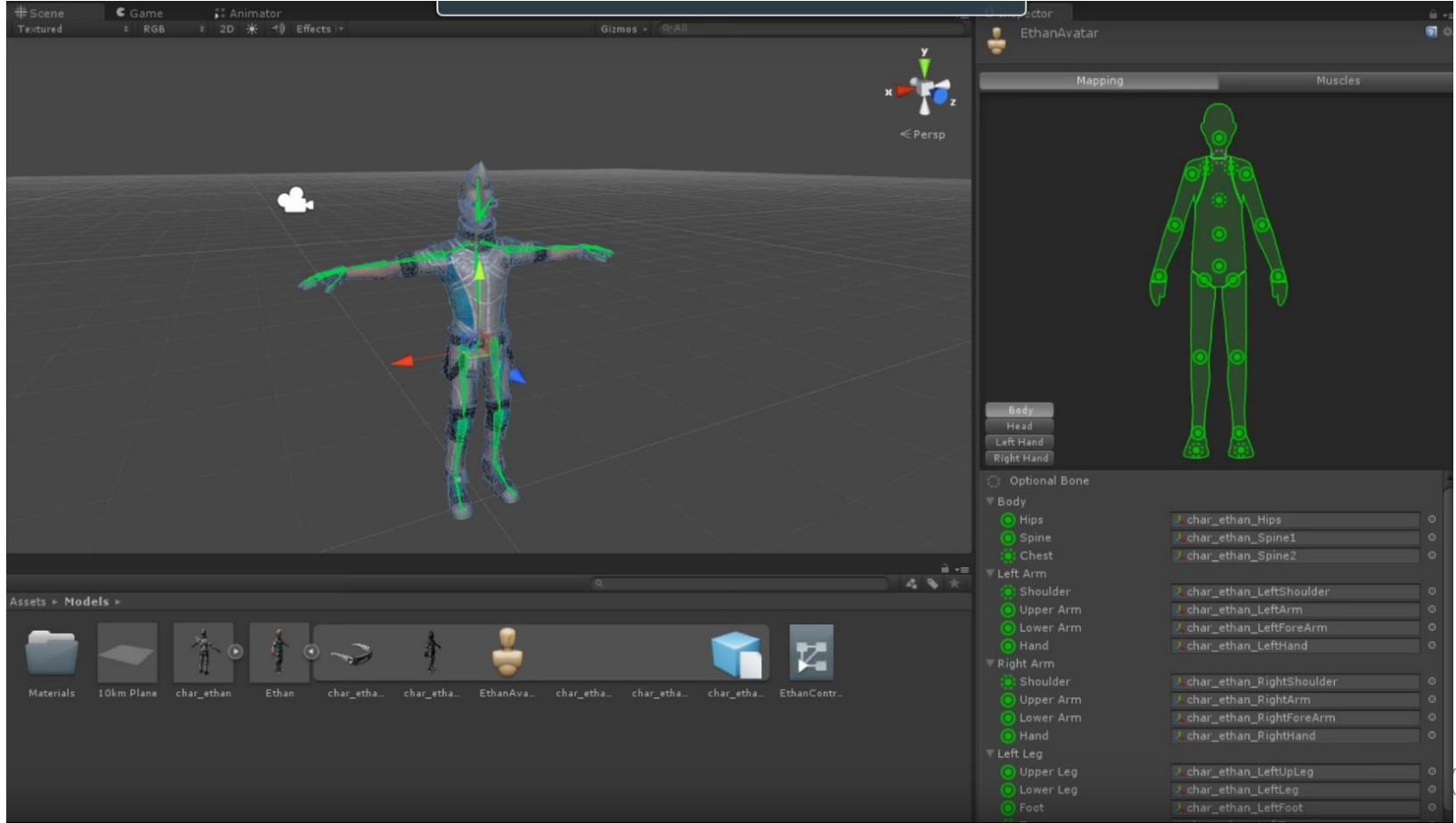
# Animační vrstvy

- Vrstva = animační automat (ASM)
- Interpolace
  - Váhy vrstev (lineární kombinace)
  - Maska míchání (Unity: AvatarMask)
- Aditivní míchání
  - Např. klepání ruky, dýchání (lze sčítat s chůzí i během)
  - Diferenční klip, relativní transformace vůči referenci

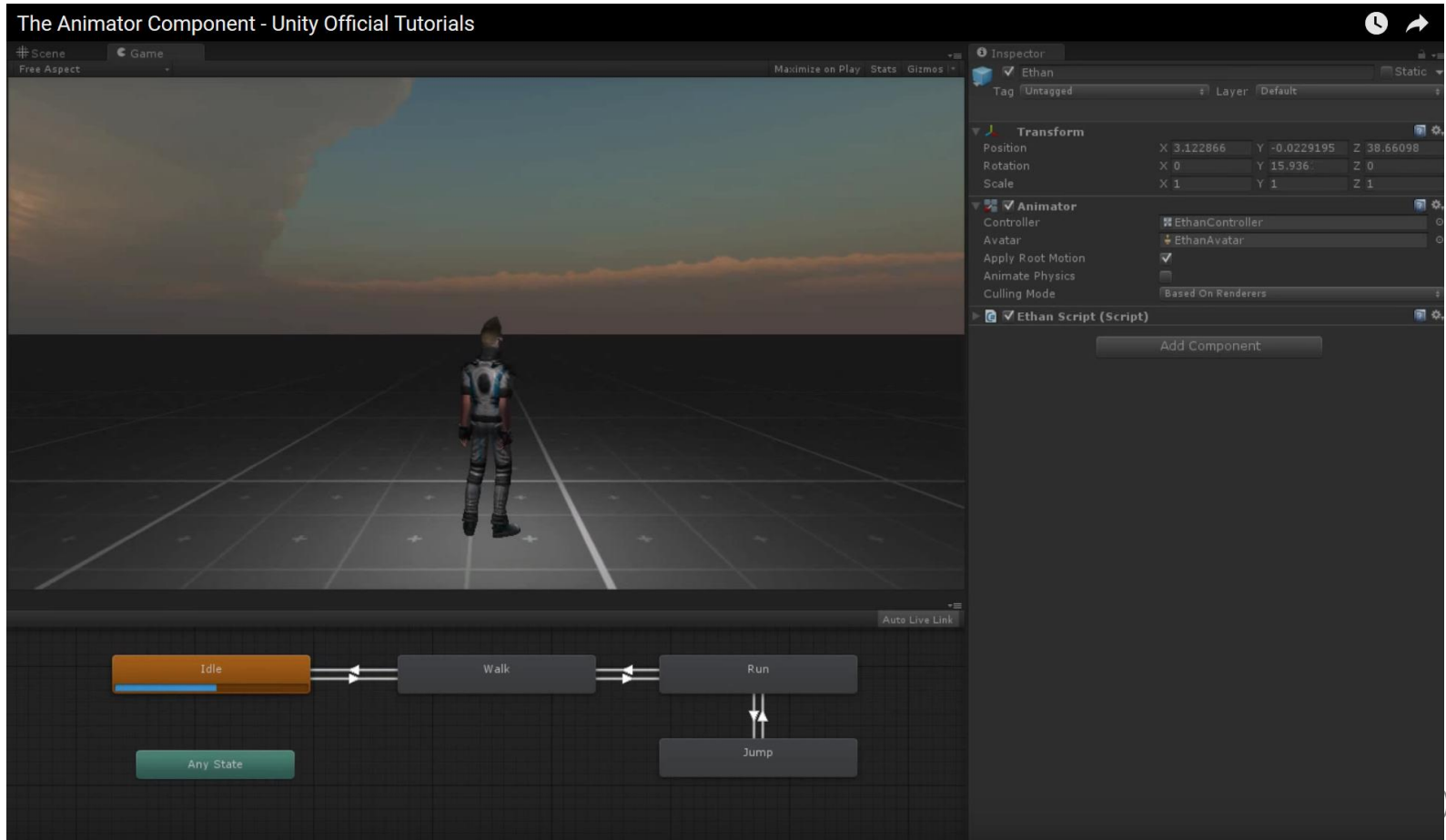




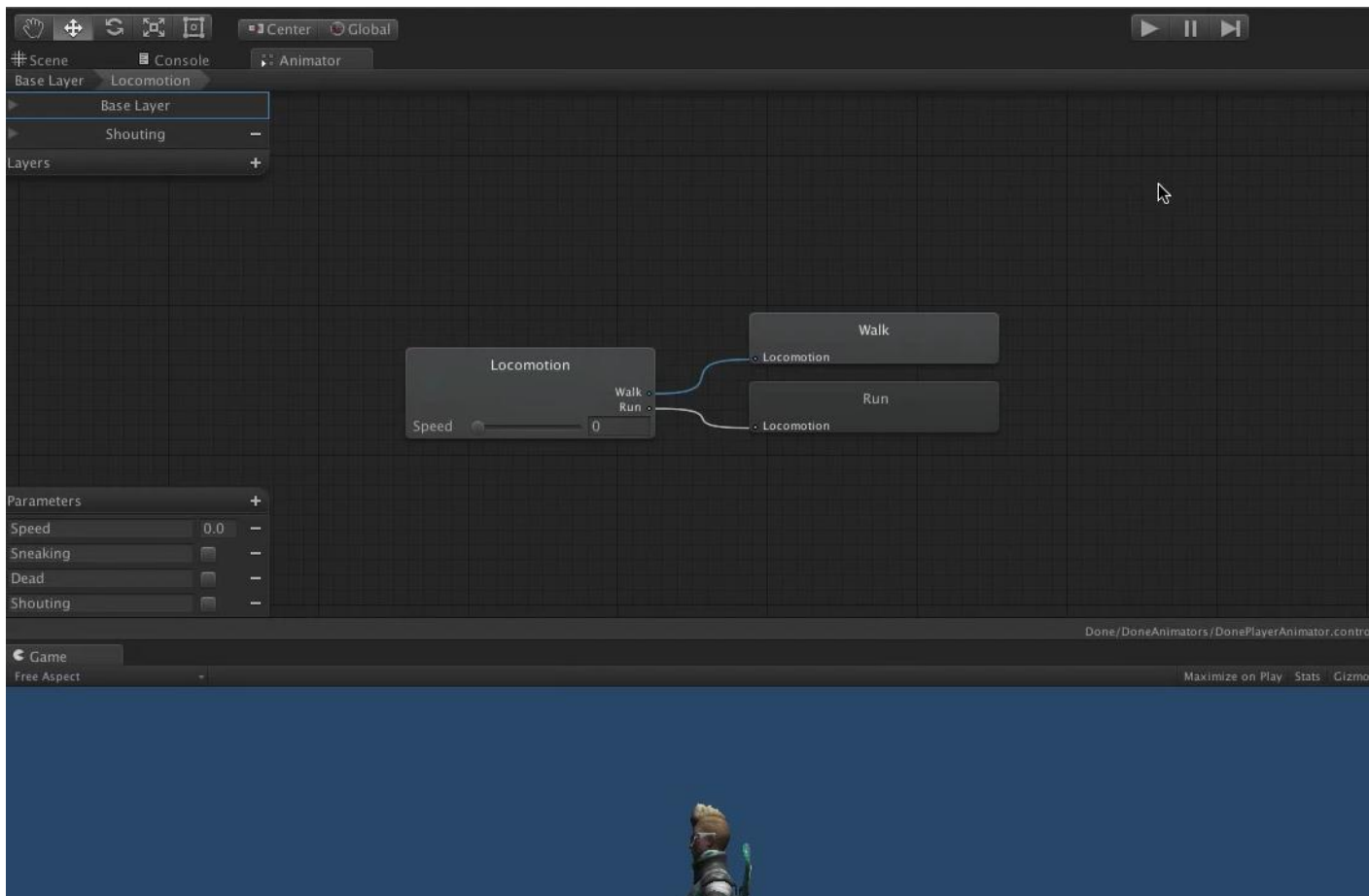
# Animation Skeleton - Rig



# Animation State Machine

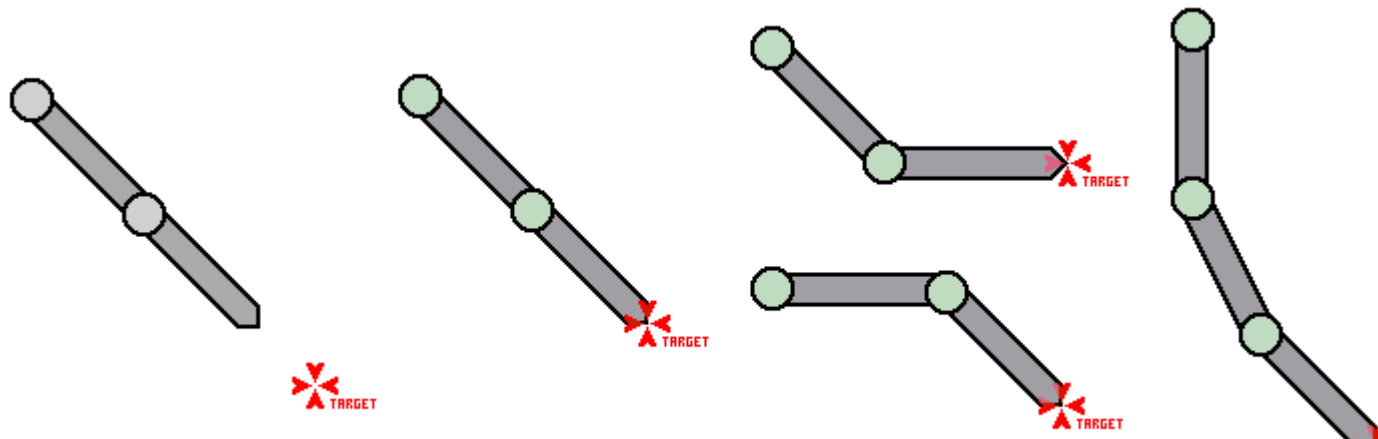


# Blend Trees



# Inverzní kinematika (IK)

- Posprocess smíchané animace
- Zadána cílová pozice (a rotace) pro koncový efektor
  - Ruka na klice od dveří, pozice nohy na terénu, sledování cíle, ...
- IK spočítá transformace aby koncový efektor na cíl dosáhl
  - Najdi rotace všech kloubů v předcích
  - Minimalizuj **chybu koncového efektoru a změnu od referenční pozice**



# Inverzní kinematika

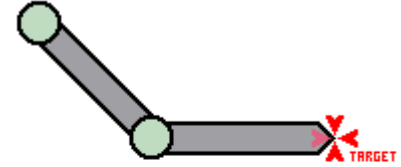
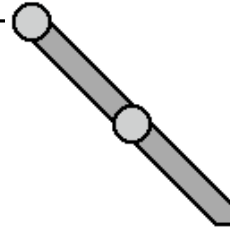
---

- Řešení soustavy rovnic
- Analytické řešení
  - Inverze Jakobiánu (matice parciálních derivací:  $\frac{\delta x}{\delta \alpha_1}, \frac{\delta y}{\delta \alpha_1} \dots \frac{\delta z}{\delta \alpha_n}$ )
  - Pro max. 6-7 stupňů volnosti (složitě pro delší řetězce)
  - Human Arm Linkage (HAL) řetězec: 7 stupňů volnosti (3 rameno, 1 loket, 3 zápěstí)
- Numerické řešení
  - Cyclic coordinate descent
  - Mění pouze jednu rotaci v jednom kroku o malé delta

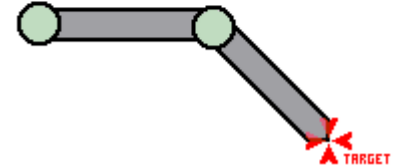
# Inverzní kinematika

## ■ Problémy

- Nemusí existovat řešení
- Řešení nemusí být jednoznačné
- Zachování časové konsistence



T



- Více podrobností předmět MMA – magistr OI

# Obsah přednášky

---

## ■ Rotace a Kvaterniony

*GAE 5.4- 5.5*

- Kvaterniony a interpolace rotací
- Srovnání rotačních reprezentací

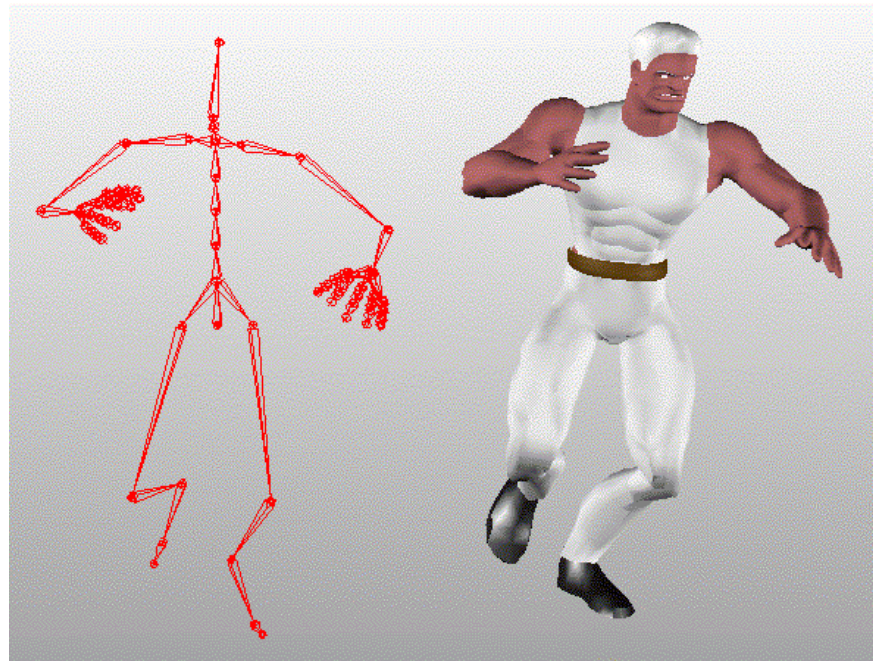
## ■ Animace

*GAE 12.1-12.11*

- Typy animací
- Skeletální animace
- Míchání animací a animační klipy
- Inverzní kinematika
- Skinning
- Animační křivky

# Skinning

- Skinning – obalení kostry “kůží” (povrchem)
- Povrch – (detailní) polygonální síť
- Typy
  - Rigid skinning
  - Linear blend skinning
  - Spherical blend skinning



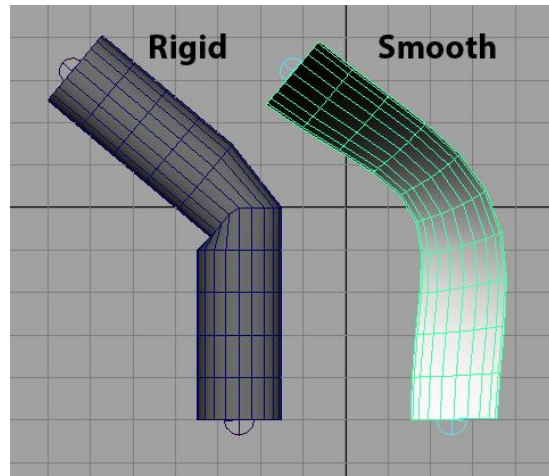


# Rigid skinning

- Každý vrchol  $v$  má přiřazen jeden kloub  $j$
- $F(j)$  je transformace v animované poloze
- $A(j)$  je transformace v referenční poloze (T-pose)

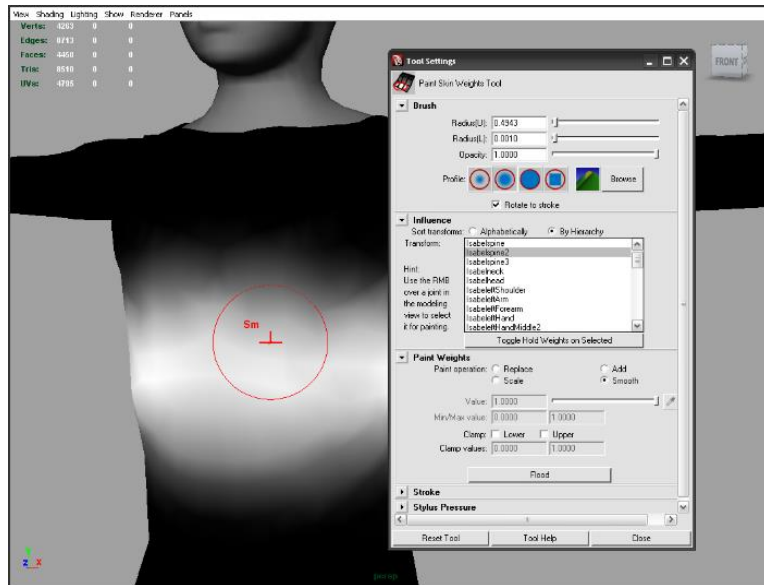
$$v' = F(j) A^{-1}(j) v$$

- Nevhodné pro vrcholy poblíž kloubů
- Používáno ve starších hrách



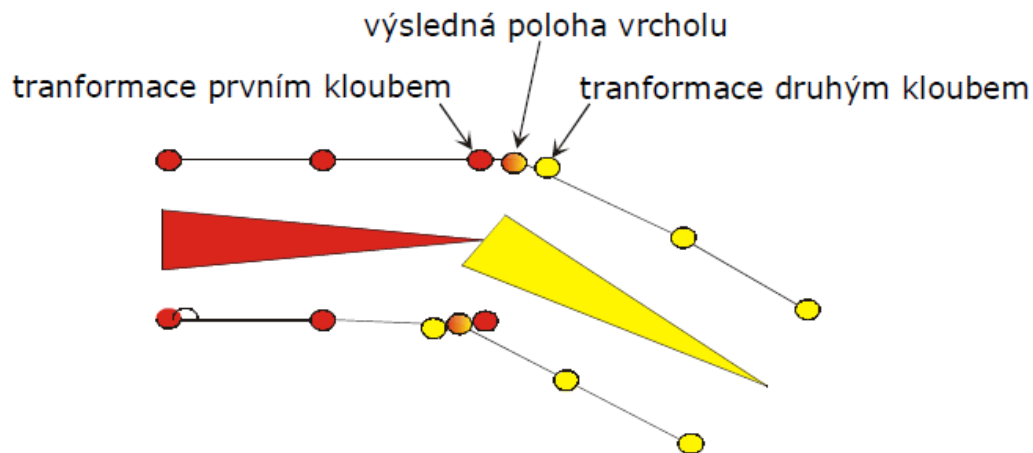
# Linear Blend Skinning

- Každý vrchol  $v$  ovlivňován několika klouby  $j_1, \dots, j_m$  s danými váhami  $w_1, \dots, w_m$ 
  - Typicky 2-4 klouby
- Váha popisuje míru vlivu kloubu  $j$  na pozici vrcholu  $v$
- Váhy musí být konvexní, tj.
  - $w_1 \geq 0, \dots, w_m \geq 0$
  - $w_1 + \dots + w_m = 1$



# Linear Blend Skinning

$$\mathbf{v}' = w_1 \mathbf{F}(j_1) \mathbf{A}^{-1}(j_1) \mathbf{v} + \dots + w_m \mathbf{F}(j_m) \mathbf{A}^{-1}(j_m) \mathbf{v}$$



# Linear Blend Skinning

---

- Hladká deformace skinu
- Jednoduchá implementace
- Rychlý výpočet
- LBS nezachovává ortonormalitu a tudíž ani objem deformovaného skinu
  - Artefakty při větších rotacích



# Pokročilé metody skinningu

---

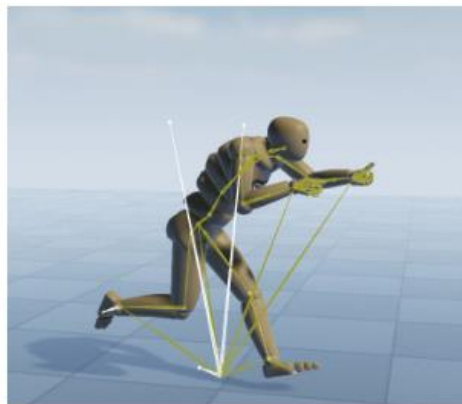
- Redukování artefaktů
- Přidání pomocných kloubů
  - rozprostření rotace
- Sférické míchání, Duální kvaterniony

[Kavan08 - Geometric Skinning with Approximate Dual Quaternion Blending]



# Sdílení Animací

- Kostra + animace sdílená mnoha *skiny*
- Přemapování (retargeting) animací
  - Přepočítání animací na jinou kostru (úprava translačních komponent)



Base Character



Short Stocky Character



Tall Skinny Character

Zdroj: Unreal Engine 4 doc

# Obsah přednášky

---

## ■ Rotace a Kvaterniony

*GAE 5.4- 5.5*

- Kvaterniony a interpolace rotací
- Srovnání rotačních reprezentací

## ■ Animace

*GAE 12.1-12.11*

- Typy animací
- Skeletální animace
- Míchání animací a animační klipy
- Inverzní kinematika
- Skinning
- Animační křivky

# Animační křivky

---

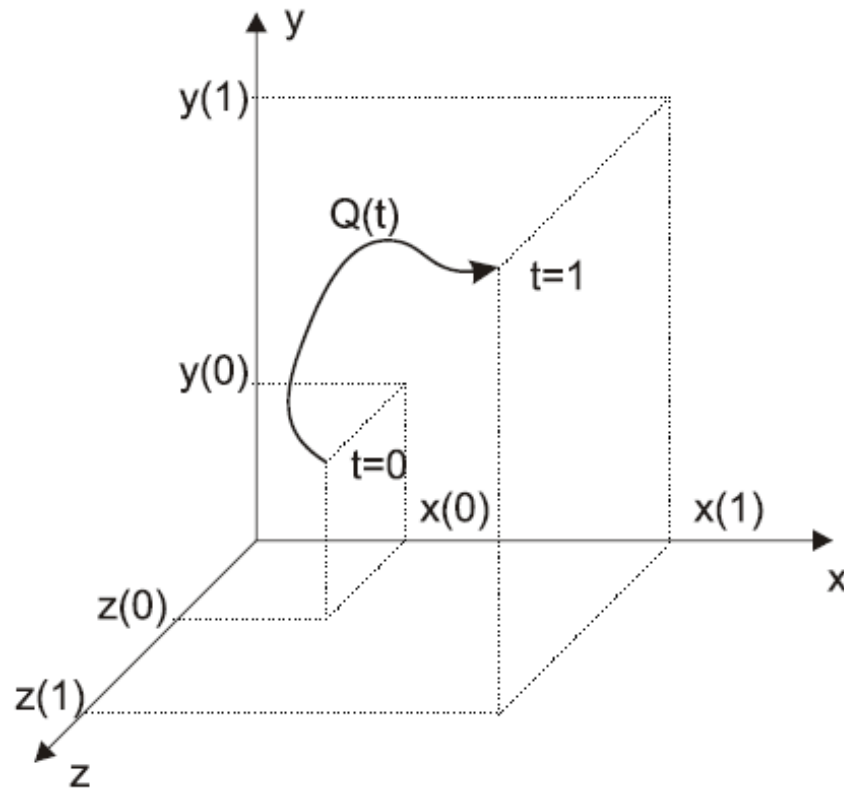
- K čemu potřebujeme křivky?
- Interpolace hodnot **mezi klíčovými snímky**
  - pozice
  - orientace
  - rychlost
  - zrychlení
  - barva
  - ...
- Požadavky
  - jednoduchá specifikace
  - intuitivní na použití
  - rychlý výpočet



# Parametrická rovnice křivky

$$\mathbf{Q}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

- $\mathbf{Q}(t)$  je bod na křivce v čase  $t \in [0, 1]$
- $\mathbf{Q}(0)$  je počáteční bod
- $\mathbf{Q}(1)$  je koncový bod
- $\mathbf{Q}$  v různé dimenzi



# Lineární interpolace

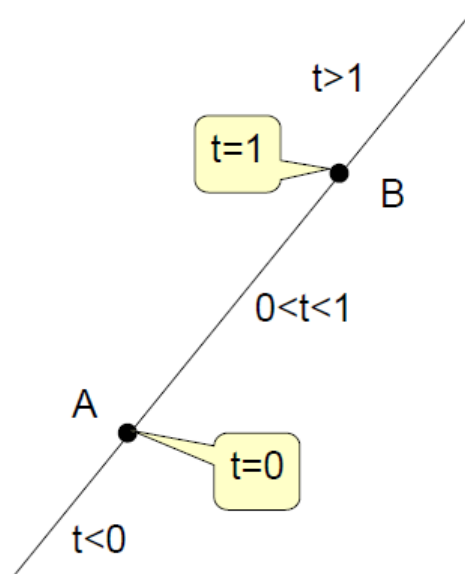
- Parametrická rovnice úsečky

$$Q(t) = [x(t), y(t), z(t)] = A + t (B-A)$$

$$Q(0)=A$$

$$Q(1)=B$$

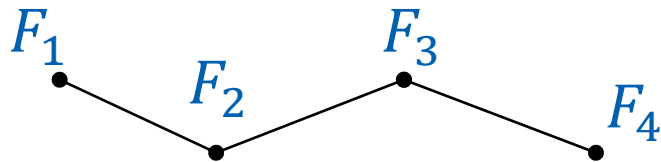
$$Q(0.5)=(A+B)/2$$



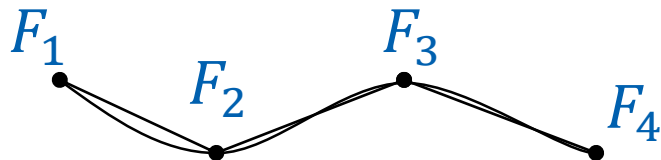
# Animační křivky

---

- Lineární interpolace
  - Nespojité derivace, nepřirozený pohyb

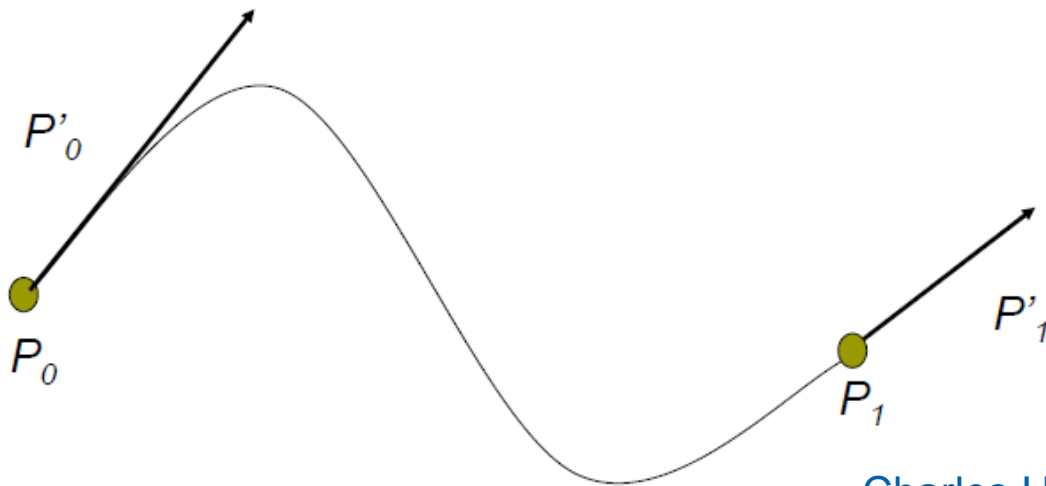


- Nejpoužívanější animační křivky založené na **Hermitovské interpolaci**



# Hermitovská kubika

- Jeden úsek
  - dva řídící body  $P_0, P_1$
  - dva tečné vektory  $P'_0, P'_1$



Charles Hermite (1822-1901)

# Hermitovská interpolace

$$Q(t) = P_0 F_0(t) + P_1 F_1(t) + P'_0 F_2(t) + P'_1 F_3(t)$$

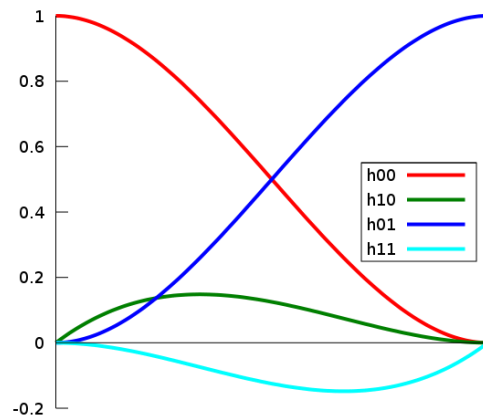
## Hermitovy polynomy

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$F_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

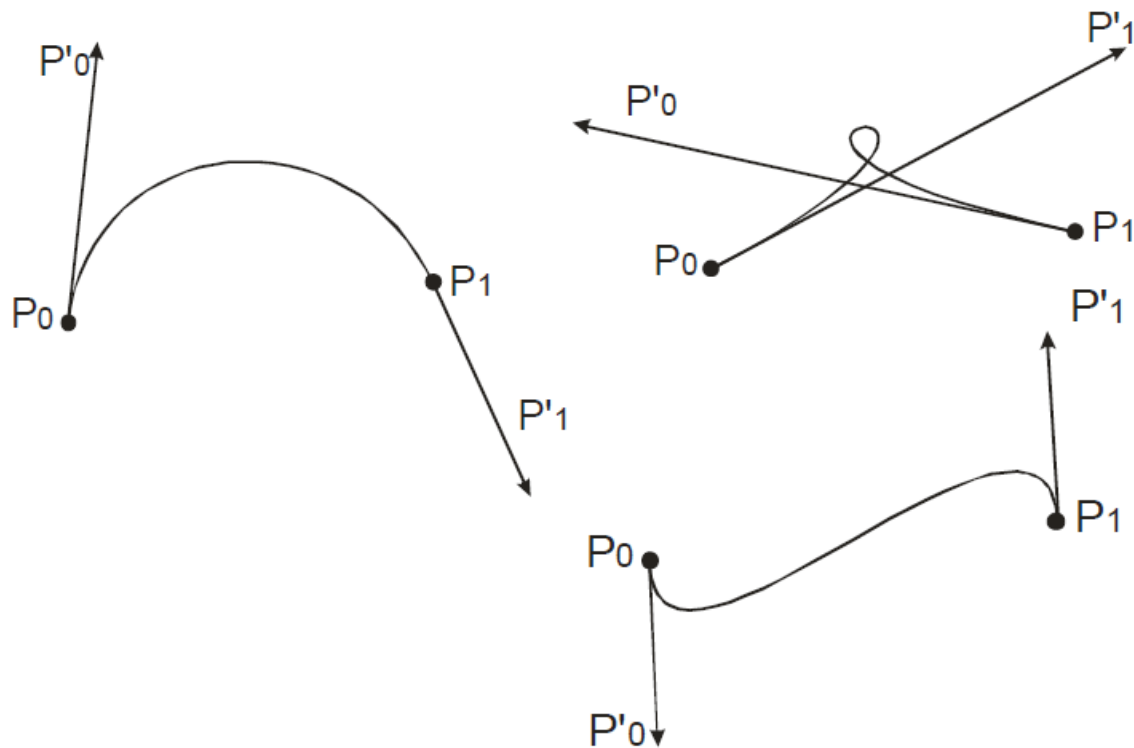
$$F_3(t) = t^3 - t^2$$



- Křivka prochází  $P_0$  a  $P_1$ 
  - $Q(0) = P_0$ ,  $Q(1) = P_1$

# Příklady

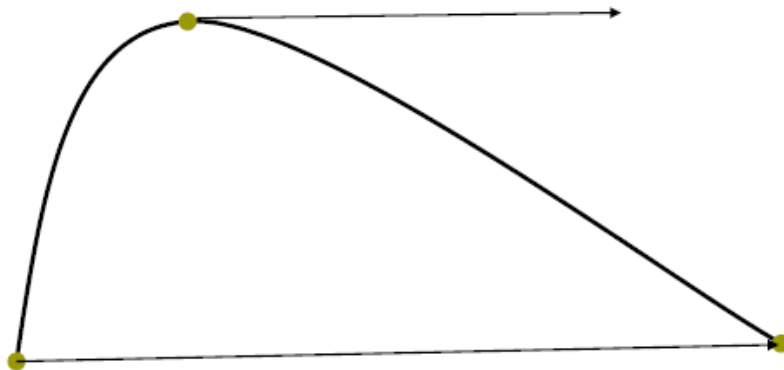
---



# Catmull-Rom spline

---

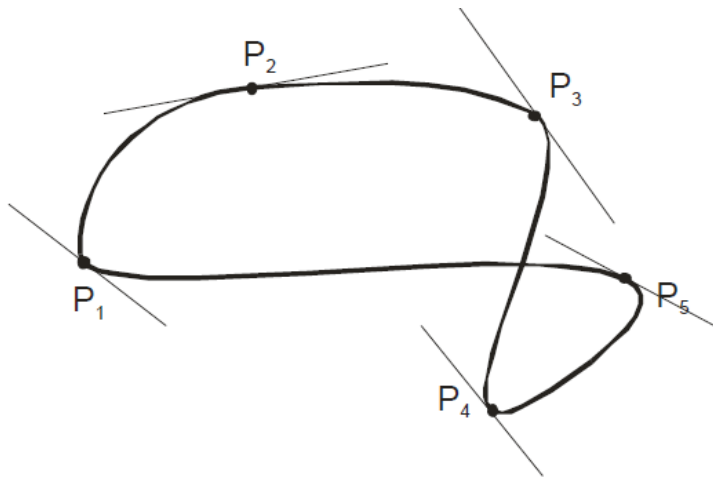
- Hermitovská interpolace se speciální volbou tečných vektorů
- Tečný vektor v bodě P
  - rovnoběžný s vektorem daným dvěma sousedními body
  - jeho velikost je poloviční
- Spojitá derivace!



# Catmull-Rom spline

---

- Uzavřená křivka je speciální případ
  - jinak je nutné přidat navíc počáteční a koncový bod

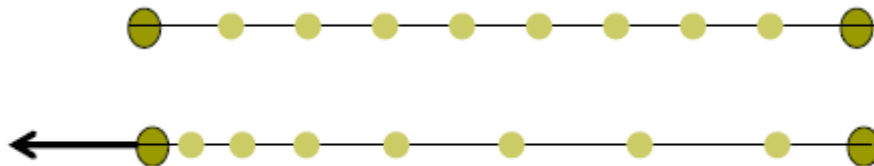




# Vzorkování / Rasterizace křivky

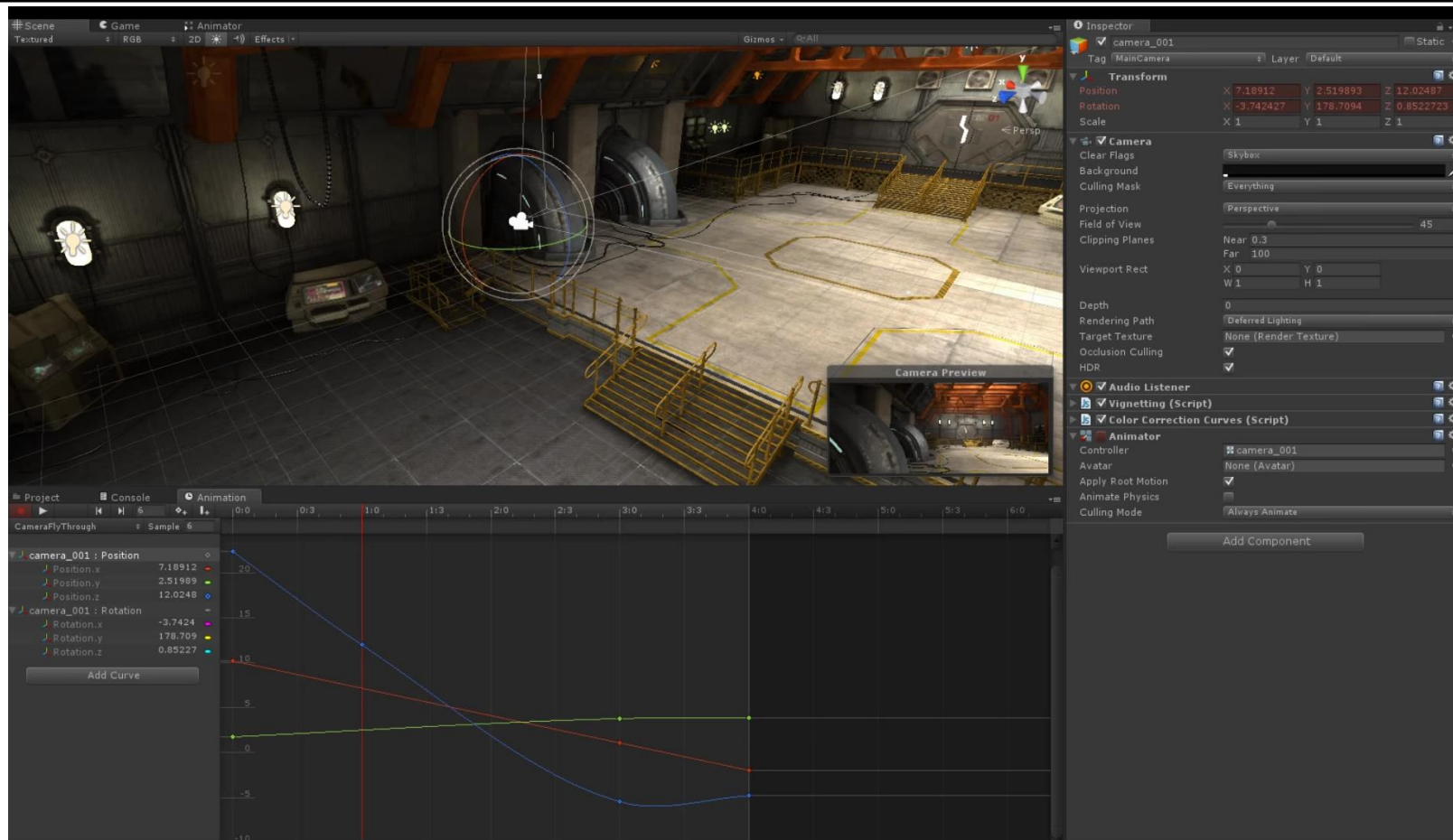
---

- Výpočet  $n$  bodů na křivce
- Triviální řešení: konstantní časový posun
  - pohyb po křivce ale může být zrychlený!
- Tečné vektory nulové

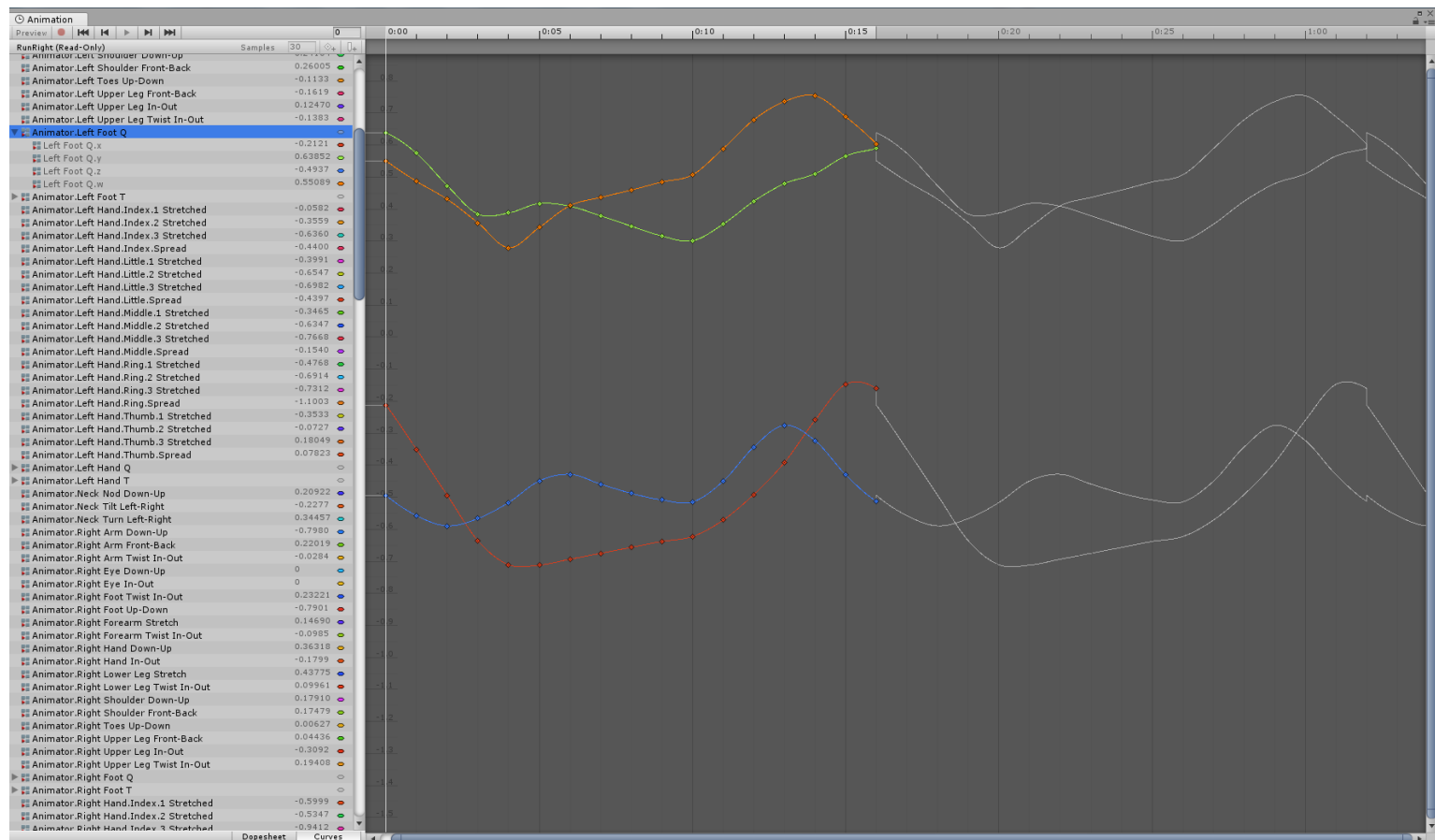


- $P'_0$  nenulové
- Parametrizace délkou oblouku (arc-length)
  - Stejná vzdálenost bodů na křivce
  - Výpočet dělením intervalu, nebo hustým vzorkováním

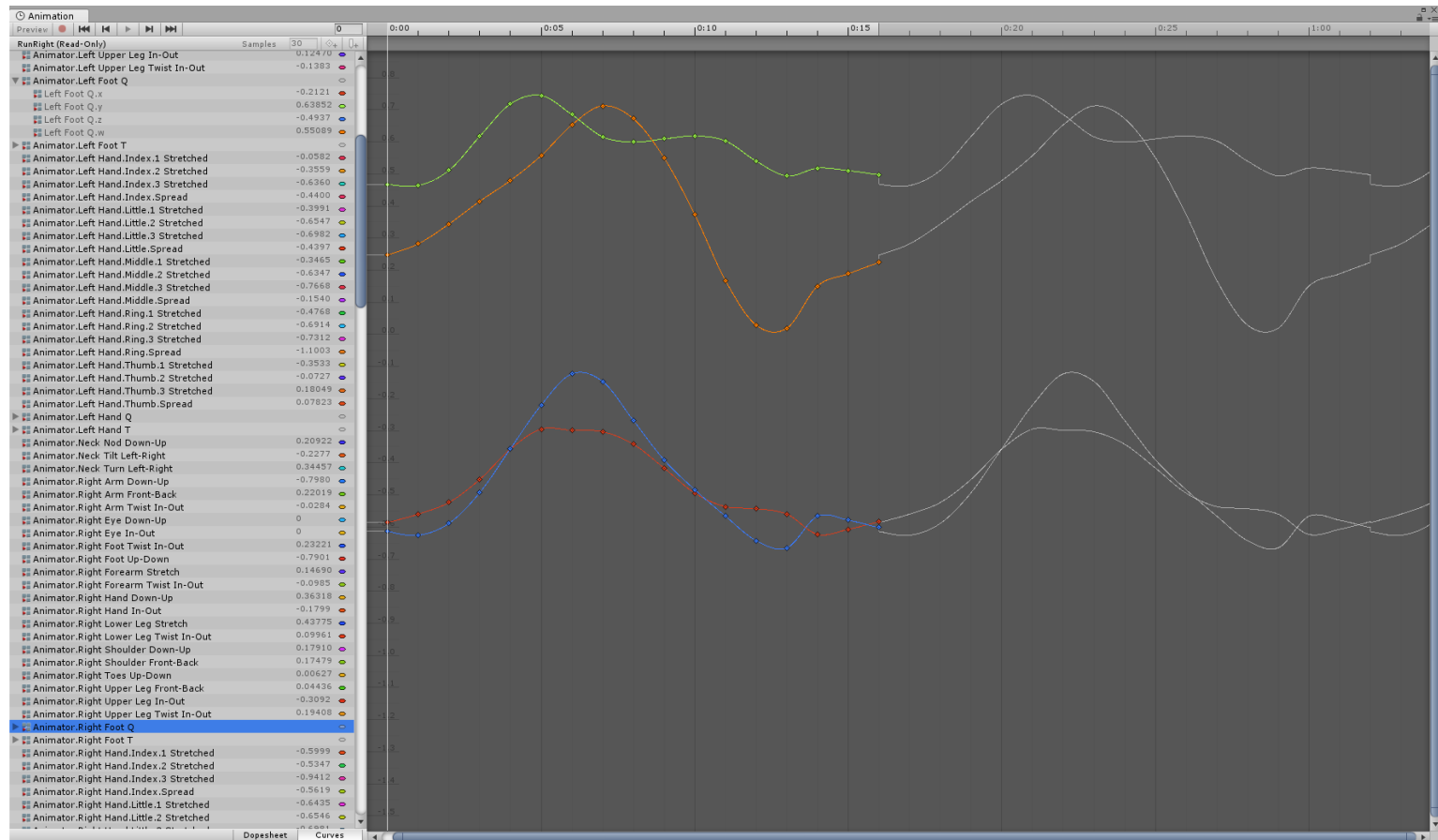
# Animation View in Unity – Křivky



# Příklad – rotace levá noha



# Příklad – rotace pravá noha





**DCGI**

**KATEDRA POČÍTAČOVÉ GRAFIKY A INTERAKCE**

**Otázky?**