Pravděpodobnost a statistika

Definice

Uvažujme množinu $\Omega \neq \emptyset$ náhodných elementárních jevů coby výsledků náhodného pokusu. Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdný systém podmnožin množiny Ω takový, že

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

b) *jestliže $A \in \mathcal{A}$, pak $A^c \in \mathcal{A}$, kde A^c je doplněk množiny A.*

c) *jestliže $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1,2,\ldots$, pak $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.*

Potom systém $\mathcal{A}$ nazýváme σ-algebra a její prvky $A, B, C \ldots \in \mathcal{A}$ nazýváme náhodné jevy.

Definice

Nechť $\Omega \neq \emptyset$ *a* $\mathcal{A}$ *je* σ*-algebra definovaná na* Ω*. Pak pravděpodobnost* P *je definovaná jako reálná funkce na* $\mathcal{A}$*, která splňuje*

a) $P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0,$

b) $P(A) \geq 0$ *pro všechna* $A \in \mathcal{A}$,

c) *pro všechny dvojice po dvou diskunktních jevů* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *platí*

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definice

Trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *se nazývá pravděpodobnostní prostor.*

1) $\emptyset$ ... jev nemožný
2) Ω ... jev jistý
3) $A \cup B$ ... sjednocení jevů A a B (jev, který nastává právě tehdy, nastane-li jev A nebo jev B)
4) $A \cap B$ ... průnik jevů A a B (jev, který nastává právě tehdy, nastane-li zároveň jev A i jev B)
5) $B - A$ ... rozdíl jevů A a B (jev, který nastává právě tehdy, nastane-li jev B, ale zároveň nenastane jev A)
6) $A \subset B$ ... A je podjevem jevu B, tedy kdykoliv nastane jev A, víme, že nastal i jev B
7) $A^c = \Omega - A$ ... doplněk jevu A (jev, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A)
8) $A \cap B = \emptyset$ ... jevy A a B jsou disjunktní (nemohou nastat zároveň)
9) Posloupnost jevů $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ taková, že $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ se nazývá disjunktním rozkladem množiny Ω.

1) $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \mathcal{A},$
2) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B),$
3) $P(A^c) = 1 - P(A), \quad \forall A \in \mathcal{A},$
4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{A},$
5) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A),$
6) pro všechny posloupnosti $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ tvořící disjunktní rozklad množiny Ω platí, že $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1;$

Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá klasický, jestliže

a) množina Ω je konečná, tj. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, a všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost, tj. $p_1 = p_2 = \dots = p_m = \frac{1}{m}$, kde $p_i = P(\omega_i)$ pro $i = 1, \dots, m$.

b) σ-algebra $\mathcal{A}$ je systém všech podmnožin množiny Ω,

c) $P(A) = \frac{m_A}{m}$, kde m_A je počet elementárních jevů tvořících jev A.

Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá geometrický, jestliže

a) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (obvykle $d = 1, 2, 3$), tj. elementární jevy mohou být reprezentovány body v nějakém geometrickém útvaru,

b) $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ je Borelovská σ-algebra na Ω (tj. nejmenší σ-algebra obsahující všechny otevřené podmnožiny Ω, tedy z definice i všechny uzavřené podmnožiny a jejich kombinace),

c) $P(A) = \frac{\mu^d(A)}{\mu^d(\Omega)}$, kde μ^d is d-rozměrná Lebesgueova míra (pro naše účely postačí uvažovat $\mu^1(A)$ coby délku úsečky A, $\mu^2(A)$ jako plochu dvojrozměrného útvaru A a $\mu^3(A)$ jako objem trojrozměrného A.

Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá obecný diskrétní, jestliže

a) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ je konečná nebo spočetná,
b) $\mathcal{A}$ je množina všech podmnožin Ω,
c) jsou dány pravděpodobnosti $P(\omega_i)$ elementárních jevů ω_i splňující $\sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1$ a pravděpodobnost každého jevu $A \in \mathcal{A}$ je pak dána vztahem $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$.

Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá obecný spojitý, jestliže

a) $\Omega \subset \mathbb{R}$, tj. elementární jevy mohou být reprezentovány reálnými čísly,
b) $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je Borelovská σ-algebra na $\mathbb{R}$,
c) existuje funkce $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ taková, že $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ a pravděpodobnost libovolného jevu $A \in \mathcal{A}$ je jednoznačně dána vztahem
$$P(A) = \int_A f(x)dx.$$

Poznámka

Podobně jako v případě geometrického pravděpodobnostního prostoru je možné pracovat i zde s obecnější množinou $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3, \ldots,$ *ale to nebude náplní této přednášky.*

Definice

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor. Uvažujme jevy* A *a* B*, kde* $P(B) > 0$*. Pravděpodobnost jevu* A *za podmínky jevu* B *je definovaná jako*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Věta

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor a* B *jev, pro který* $P(B) > 0$. *Pak pro libovolný jev* $A \in \mathcal{A}$ *platí*

a) $P(A|B) \geq 0$,
b) $P(\Omega|B) = 1$,
c) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$ *pro všechny posloupnosti* $\{A_i\}$ *disjunktních jevů.*

Poznámka

Tato věta v podstatě říká, že podmíněná pravděpodobnost má stejné vlastnosti jako pravděpodobnost nepodmíněná.

Důkaz

a) zřejmé z definice podmíněné pravděpodobnosti (čitatel nezáporný, jmenovatel kladný),

b) z definice dostáváme

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1,$$

c) jelikož $A_1, A_2, \dots$ jsou disjunktní, pak i $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots$ musejí být disjunktní, a tedy

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \frac{P((\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\cup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B))}{P(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

Věta

Pro libovolnou posloupnost jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *takovou, že* $P(A_1 \cap A_2 \cap \ \ldots \ \cap A_{n-1}) > 0$, *platí*

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Důkaz

Opakovaným použitím definice podmíněné pravděpodobnosti dostáváme

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n) &= P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) P(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i) = \\ &= P(\cap_{i=1}^{n-2} A_i) P(A_{n-1} | \cap_{i=1}^{n-2} A_i) P(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \dots \\ &= P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i). \end{aligned}$$

Díky monotonii pravděpodobnosti máme

$$P(A_1) \geq P(A_1 \cap A_2) \geq \dots \geq P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0,$$

tedy všechny podmíněné pravděpodobnosti v důkazu jsou korektně definovány.

Věta

Nechť jevy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ tvoří rozklad množiny Ω, tj.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j \text{ a } \cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega.$$

Nechť tyto jevy mají postupně pravděpodobnosti $P(A_1), P(A_2), \ldots,$ a $P(A_i) > 0, \ \forall i = 1, 2, \ldots$ Uvažujme jev $B \in \mathcal{A}$, pro který známe podmíněné pravděpodobnosti

$$P(B|A_i), \ \forall i = 1, 2, \ldots$$

Pak

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

Důkaz

Nechť jevy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ tvoří rozklad množiny Ω, tj. jsou dislunktní. Pak i $(A_i \ \cap B)$ a $(A_j \cap B)$ jsou disjunktní, tj.

$$(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset, \quad \forall i \neq j,$$

a navíc

$$\cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B) = B.$$

Tedy

$$P(B) = P(\cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

Věta

Nechť jevy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *tvoří rozklad množiny* Ω*, tj.*

$$A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j \text{ a } \cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega.$$

Nechť tyto jevy mají postupně pravděpodobnosti $P(A_1), P(A_2), \ldots,$ *a* $P(A_i) > 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots$ *Uvažujme jev* $B \in \mathcal{A}$*, pro který známe podmíněné pravděpodobnosti*

$$P(B|A_i),\ \forall i = 1, 2, \ldots$$

Pak

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Důkaz

Z definice podmíněné pravděpodobnosti pro všechna $i = 1, 2, \dots$ máme

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(A_i \cap B) = P(B|A_i)P(A_i).$$

Z věty o úplné pravděpodobnosti pak máme

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j).$$

Tedy

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)},$$

což jsme chtěli dokázat.

Definice

Jevy A a B se nazývají nezávislé, jestliže pro ně platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Definice

Jevy $A_1, A_2, \dots, A_n$ se nazývají vzájemně (totálně) nezávislé, jestliže pro každou množinu indexů $\{k_1, k_2, \dots, k_r\} \subset \{1, \dots, n\}$, $r = 2, \dots, n$, platí

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_r}) = P(A_{k_1}) \cdot P(A_{k_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{k_n}).$$

Definice

Jevy $A_1, A_2, \dots, A_n$ se nazývají po dvou nezávislé, jestliže A_i, A_j jsou nezávislé pro každou dvojici indexů $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$.

Nezávislost doplňkových jevů

Věta

Nechť A, B jsou nezávislé jevy. Pak (A, B^c), (A^c, B) a (A^c, B^c) jsou dvojice nezávislých jevů.

Důkaz

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B - A) = P(B - [A \cap B]) = P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(B) - P(B) \cdot P(A) = P(B) \cdot (1 - P(A)) = \\ &= P(B) \cdot P(A^c). \end{aligned}$$

Důkaz nezávislosti jevů A, B^c je analogický a nezávislost jevů A^c, B^c je přímým důsledkem těchto dvou nezávislostí.

Definice

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor. Reálná funkce* X *definovaná na* Ω *se nazývá náhodná veličina, jestliže* X *je měřitelné zobrazení* $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, *tj.*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

pro libovolnou Borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$.

Poznámka

Na náhodnou veličinu tedy můžeme nahlížet jako na náhodné číslo.

Značení:

1. Náhodné veličiny značíme velkými písmeny $X, Y, Z \dots$
2. Jejich hodnoty značíme malými písmeny $x, y, z \dots$
3. Místo $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ píšeme zkráceně $\{X \in B\}$, např. místo $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ píšeme $\{X \leq x\}$.

Vlastnosti: Součty, součiny, podíly, minima, maxima atd. z více náhodných veličin jsou opět náhodné veličiny.

Definice

Nechť X je náhodná veličina. Její distribuční funkce je reálná funkce F definovaná jako

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Základní vlastnosti distribuční funkce:

Distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X je

1. neklesající, tj. pro každé $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, platí $F(a) \leq F(b)$,
2. zprava spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$,
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Definice

Náhodná veličina X se nazývá diskrétní (nebo také s diskrétním rozdělením pravděpodobnosti), jestliže existuje konečná nebo nekonečná spočetná posloupnost reálných čísel $\{x_i\}$ a k nim odpovídající posloupnost nezáporných čísel $\{p_i\}$, kde $p_i = P(X = x_i)$, takových, že $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny X je tvaru

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\{i: x_i \leq x\}} P(X = x_i) = \sum_{\{i: x_i \leq x\}} p_i,$$

tedy je „skokovitá" se skoky v nabývaných hodnotách x_n a příslušnými velikostmi skoků p_n, přičemž platí, že

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \sum_{\{i: a < x_i \leq b\}} P(X = x_i) = \sum_{\{i: a < x_i \leq b\}} p_i$$

pro všechna reálná čísla a, b taková, že $a \leq b$.

Definice

Náhodná veličina X se nazývá absolutně spojitá (nebo také se spojitým rozdělením pravděpodobnosti), jestliže existuje nezáporná integrovatelná funkce f taková, že

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Funkce f se nazývá hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

Základní vlastnosti hustoty f:

1. $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ s.j. (kde s.j. = skoro jistě = s pravděpodobností 1),
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,
3. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$
   pro všechna reálná čísla a, b taková, že $a \leq b$.

Definice

Míra je definovaná jako nezáporná množinová funkce na $(\Omega, \mathcal{A})$, tj.

1. $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$,
2. $\mu(\emptyset) = 0$,
3. *jsou-li* $A_i \in \mathcal{A}, i \geq 1$ *disjunktní, pak* $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Je-li $\mu(\Omega) = 1$, *nazýváme míru* μ *pravděpodobnostní mírou.*

Definice

Každé náhodné veličině X *a Borelovské množině* $B \in \mathcal{B}$ *lze připsat pravděpodobnostní míru na* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$,

$$\mu_X(B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = P(X \in B),$$

která se nazývá rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

- Pro $B = (-\infty, x]$, dostaneme

  $$P(X \in B) = \mu_X(B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x) = F(x),$$

  tj. distribuční funkci.

- Pro $B = (a, b]$, $-\infty < a \leq b < \infty$, dostaneme

  $$P(X \in B) = \mu_X(B) = \mu_X((a, b]) = P(X \in (a, b]) = F(b) - F(a),$$

  tedy přírustek distribuční funkce.

- Pro $B = (a, b] \cup (c, d]$, $-\infty < a \leq b \leq c \leq d < \infty$, máme

  $$\begin{aligned} P(X \in B) = \mu_X(B) &= \mu_X((a, b] \cup (c, d]) = P(X \in (a, b]) + P(X \in (c, d]) \\ &= (F(b) - F(a)) + (F(d) - F(c)), \end{aligned}$$

  tedy součet přírustků distribuční funkce.

- Obecně tedy můžeme pravděpodobnosti $P(X \in B)$ získat „nasčítáním" přírustků distribuční funkce, matematicky vyjádřeno

  $$P(X \in B) = \mu_X(B) = \int_B 1 d\mu_X(x) = \int_B 1 dF(x), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

- (Téměř) každou náhodnou veličinu X lze jednoznačně vyjádřit jako směs $X = Mix_c(D, S)$, kde D je diskrétní náhodná veličina, S je spojitá náhodná veličina a $c \in \langle 0, 1 \rangle$ je váha diskréní složky ve směsi neboli pravděpodobnost, s níž nastává situace modelovaná diskrétní náhodnou veličinou D.

- Je zřejmé, že v případě $c = 1$ je X diskrétní, zatímco v případě $c = 0$ je X absolutně spojitá.

- O smíšeném rozdělení náhodné veličiny X tedy mluvíme v případě, kdy $c \in (0, 1)$.

- Nechť náhodná veličina X je směs $X = Mix_c(D, S)$, $c \in (0, 1)$, kde D nabývá spočetně mnoha hodnot x_i s pravděpodobnostmi $p_i = P(D = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, a S má hustotu f.

- Označme distribuční funkce náhodných veličin X, D a S postupně jako F_X, F_D, resp. F_S. Pak

$$F_X(x) = cF_D(x) + (1-c)F_S(x) = c \sum_{i:x_i \leq x} p_i + (1-c) \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

- Pro každou hodnotu x, které náhodná veličina X nabývá, pak platí, že
$$P(X = x) = F_X(x) - \lim_{t \to x-} F_X(t).$$

- Hodnoty $x : P(X = x) > 0$ tedy tvoří spočetnou množinu bodů nespojitosti distribuční funkce F_X a příslušné pravděpodobnosti $P(X = x)$ jsou velikosti skoků v těchto bodech x.

- Lze uvažovat i náhodnou veličinu X, která je směsí dvou náhodných veličin stejného typu, tj. $X = Mix_c(Y, Z)$, kde Y i Z jsou buď obě diskrétní nebo obě absolutně spojité náhodné veličiny, přičemž $c \in (0, 1)$ je pravděpodobnost, s níž nastává situace modelovaná náhodnou veličinou Y.

- I zde platí, že označíme-li distribuční funkce náhodných veličin X, Y a Z postupně jako F_X, F_Y, resp. F_Z, pak

$$F_X(x) = cF_Y(x) + (1 - c)F_Z(x).$$

- Navíc platí, že
  - jsou-li Y a Z diskrétní, pak X je diskrétní a

    $$P(X = x) = cP(Y = x) + (1 - c)P(Z = x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

  - jsou-li Y a Z absolutně spojité s hustotami f_Y, resp. f_Z, pak X je absolutně spojitá a pro její hustotu f_X platí

    $$f_X(x) = cf_Y(x) + (1 - c)f_Z(x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

- Lze uvažovat i náhodnou veličinu X, která je směsí více náhodných veličin, tj.

$$X = Mix_{c_1,\dots,c_n}(X_1,\dots,X_n),$$

kde $c_i \geq 0$ pro všechna $i = 1\dots,n$, $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$, přičemž c_i je pravděpodobnost, s níž nastává situace modelovaná náhodnou veličinou X_i.

- Označíme-li distribuční funkce náhodných veličin $X_1,\dots,X_n$ postupně jako $F_{X_1},\dots,F_{X_n}$, pak

$$F_X(x) = c_1 F_{X_1} + \dots + c_n F_{X_n}(x).$$

- Navíc platí, že
  - jsou-li všechny náhodné veličiny $X_1,\dots,X_n$ diskrétní, pak X je diskrétní a

$$P(X = x) = c_1 P(X_1 = x) + \dots + c_n P(X_n = x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

  - jsou-li $X_1,\dots,X_n$ absolutně spojité s hustotami $f_{X_1},\dots,f_{X_n}$, pak X je absolutně spojitá a pro její hustotu f_X platí

$$f_X(x) = c_1 f_{X_1} + \dots + c_n f_{X_n}(x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Definice

Nechť náhodná veličina X má distribuční funkci $F_X(x)$. Její kvantilová funkce je definována jako

$$q_X(\alpha) = \frac{1}{2}(\sup_{t\in\mathbb{R}} F_X(t) \leq \alpha + \inf_{t\in\mathbb{R}} F_X(t) \geq \alpha).$$

Poznámka

- *Kvantilová funkce $q_X(\alpha)$ je v jistém smyslu inverzní funkcí k distribuční funkci $F_X(x)$.*
- *Využívá se zejména ve statistice při hledání daného podílu α extrémních hodnot.*

Definice

Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Střední hodnota (anglicky "expected value") $\mathbb{E}X$ náhodné veličiny X je hodnota

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

pokud integrál existuje.

- Nechť X je diskrétní náhodná veličina nabývající hodnot x_1, x_2, $x_3, \ldots$ Pak její střední hodnota je

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i),$$

pokud řada konverguje.

- Nechť X je absolutně spojitá náhodná veličina s hustotou f. Pak její střední hodnota je

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

pokud integrál existuje.

- Nechť X je směs $X = Mix_c(D, S)$. Pak její střední hodnota je

$$\mathbb{E}X = c\mathbb{E}D + (1 - c)\mathbb{E}S.$$

1. $\mathbb{E}a = a$,
2. $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$,
3. $X_1 \leq X \leq X_2 \; s.j. \Rightarrow \mathbb{E}X_1 \leq \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}X_2$,
4. $X \geq 0 \; s.j. \Rightarrow \mathbb{E}X \geq 0$.

Věta

Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nechť $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pak

$$\mathbb{E}\phi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dF_X(x),$$

pokud integrál existuje.

1. Nechť X je diskrétní náhodná veličina nabývající hodnot x_1, x_2, $x_3, \ldots$ Pak
$$\mathbb{E}\phi(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(x_i) \cdot P(X = x_i),$$
pokud řada konverguje.

2. Nechť X je absolutně spojitá náhodná veličina s hustotou f. Pak
$$\mathbb{E}\phi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx,$$
pokud integrál existuje.

3. Nechť X je směs $X = Mix_c(D, S)$. Pak
$$\mathbb{E}\phi(X) = c\mathbb{E}\phi(D) + (1 - c)\mathbb{E}\phi(S).$$

Definice

Nechť X je náhodná veličina definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
$\mathbb{E}X^n$ se nazývá n-tý moment náhodné veličiny X,
$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^n$ se nazývá n-tý centrální moment náhodné veličiny X,
$\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|$ se nazývá absolutní moment náhodné veličiny X.

Definice

Druhý centrální moment se nazývá rozptyl (anglicky "variance") a značí se $varX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$.

Definice

Nechť X, Y jsou náhodné veličiny takové, že $\mathbb{E}X^2 < \infty$ a $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Pak jejich kovariance je definovaná jako

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y).$$

Poznámka

Povšimněme si, že $cov(X, X) = var(X)$.

1. Nechť X je náhodná veličina. Pak $varX = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
2. Nechť a je konstanta. Pak $var\ a = 0$.
3. Nechť X je náhodná veličina a a je reálné číslo. Pak $var(aX) = a^2 varX$.
4. Nechť X je náhodná veličina a a je konstanta. Pak $var(X + a) = varX$.
5. Nechť X je náhodná veličina s konečnou střední hodnotou a konečným nenulovým rozptylem. Nechť

   $$Z = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{varX}}.$$

   Pak $\mathbb{E}Z = 0$ a $varZ = 1$.
6. Pro náhodné veličiny X, Y platí, že

   $$var(X + Y) = varX + varY + 2cov(X, Y).$$

7. Pro náhodné veličiny X, Y platí, že $cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY)$ - $\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.

Věta

Nechť X je náhodná veličina s konečným rozptylem. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí, že

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{varX}{\varepsilon^2}.$$

Důkaz

Uvažujme náhodnou veličinu $Y = X - \mathbb{E}X$ s distribuční funkcí F. Pak

$$varX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 dF(y) \geq \int_{|y|\geq\varepsilon} y^2 dF(y) \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \int_{|y|\geq\varepsilon} dF(y) = \varepsilon^2 P(|Y| \geq \varepsilon) = \varepsilon^2 P(|X - \mathbb{E}X)| \geq \varepsilon).$$

- X nabývá hodnot 0 a 1 s pravděpodobnostmi $1 - p$, resp. p.
- Hodnota p, $0 < p < 1$, se nazývá parametr alternativního rozdělení.
- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1 - p & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$$

- Střední hodnota je $\mathbb{E}X = p$ a rozptyl $varX = p(1 - p)$.

- X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- Je jednoznačně dáno dvěma parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0, 1)$.
- Pravděpodobnosti $P(X = k)$ jsou tvaru

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ pro } k = 0, 1, \ldots, n.$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \sum_{0 \le k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{pro } 0 \le x < n \\ 1 & \text{pro } x \ge n. \end{cases}$$

- Střední hodnota je $\mathbb{E}X = np$ a rozptyl $varX = np(1-p)$.

Výpočet střední hodnoty

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-k-1} \\
&= np(p + (1-p))^{n-1} = np.
\end{aligned}
$$

Výpočet rozptylu

- Pro výpočet rozptylu využijeme vztah

$$varX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X(X-1) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2.$$

- Výpočet první složky je analogický předešlému, tedy

$$\mathbb{E}X(X-1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \ldots = n(n-1)p^2$$

- Takto získáme rozptyl

$$varX = np(1-p).$$

- X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2, \dots$
- Je jednoznačně dáno jedním parametrem $\lambda > 0$.
- Pravděpodobnosti $P(X = k)$ jsou tvaru

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ pro } k = 0, 1, \dots$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \sum_{0 \leq j \leq x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} & \text{pro } 0 \leq x < \infty. \end{cases}$$

- Střední hodnota a rozptyl jsou $\mathbb{E}X = varX = \lambda$ (výpočty jsou analogické těm pro binomické rozdělení).

Vztah mezi binomickým a Poissonovým rozdělením

Uvažujme náhodnou veličinu $X \sim Binom(n, p)$, kde $n \to \infty$ a $p \to 0$, přičemž $np = \lambda$. Pak

$$P(X = k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \underset{n\to\infty, p\to 0}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

čímž dostáváme rozdělení Poissonovo.

- X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2, \dots$
- Je jednoznačně dáno jedním parametrem $p \in (0, 1)$.
- Pravděpodobnosti $P(X = k)$ jsou tvaru

$$P(X = k) = p(1-p)^k \text{ pro } k = 0, 1, \dots$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \sum_{0 \le k \le x} p(1-p)^k & \text{pro } x \ge 0. \end{cases}$$

- Použitím vztahů pro geometrické řady dostaneme střední hodnotu $\mathbb{E}X = \frac{1-p}{p}$ a rozptyl $varX = \frac{1-p}{p^2}$.

- Je jednoznačně dáno třemi parametry $N, K, n \in \mathbb{N}$, kde $N \geq K$ a $N \geq n$.
- X nabývá hodnot $k \in \mathbb{N} : \max\{0, n+K-N\} \leq k \leq \min\{n, K\}$
- Pravděpodobnosti $P(X = k)$ jsou tvaru

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ pro } k = \max\{0, n+K-N\}, \dots, \min\{n, K\}.$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < \max\{0, n+K-N\} \\ \sum_{k \leq x} \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} & \text{pro } x \in \langle \max\{0, n+K-N\}, \min\{n, K\}) \\ 1 & \text{pro } x \geq \min\{n, K\}. \end{cases}$$

- Střední hodnota je $\mathbb{E}X = n\frac{K}{N}$ a rozptyl $varX = n\frac{K}{N}(1 - \frac{K}{N})\frac{N-n}{N-1}$.

- X nabývá hodnot z intervalu $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry, které X jednoznačně určují.
- Hustota je tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{pro } x < a, x > b. \end{cases}$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{pro } x \geq b. \end{cases}$$

- Střední hodnota a rozptyl jsou

$$\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}, \quad varX = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

- X nabývá hodnot z intervalu $(0, \infty)$.
- Je jednoznačně určeno parametrem $\lambda > 0$.
- Hustota je tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

- Použitím integrace per partes dostaneme

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Dvojitým použitím per partes dostaneme

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

a tedy rozptyl je

$$varX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Vlastnosti exponenciálního rozdělení:

1. *Je to tzv. „rozdělení bez paměti":*

   Pro náhodnou veličinu X s exponenciálním rozdělením platí

   $$P(X > x + y | X > y) = P(X > x) \quad \forall x > 0, y > 0.$$

2. *Souvislost s Poissonovým rozdělením:*

   Náhodná veličina X popisující dobu čekání na nějakou událost má exponenciální rozdělení $Exp(\lambda)$ právě tehdy, když náhodná veličina Y popisující počet takových událostí za dobu t má Poissonovo rozdělení $Po(\lambda t)$.

- X nabývá hodnot z $\mathbb{R}$.
- Je jednoznačně určeno dvěma parametry $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma^2 > 0$.
- Hustota je tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ \sigma^2}}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

- Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ \sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

- Střední hodnota je $\mathbb{E}X = \mu$ a rozptyl $varX = \sigma^2$.

- X nabývá hodnot z $\mathbb{R}$.
- Hustota je tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

- Distribuční funkce má tvar

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \; -\infty < x < \infty.$$

- Střední hodnota je $\mathbb{E}X = 0$ a rozptyl $varX = 1$.
- Hodnoty $\Phi(x)$ lze nalézt ve statistických tabulkách.
- Díky symetrii rozdělení platí $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, takže hodnoty $\Phi(x)$ jsou často tabelovány pouze pro kladná x.

Transformace náhodných veličin s normálním rozdělením

Věta

1. *Náhodná veličina* X *má normované normální rozdělení právě tehdy, když* $Y = \mu + \sigma X$ *má normální rozdělení s parametry* μ *a* σ^2.
2. *Náhodná veličina* X *má normální rozdělení s parametry* μ *a* σ^2 *právě tehdy, když* $Y = a + bX$ *má normální rozdělení s parametery* $a + b\mu$ *a* $b^2\sigma^2$.
3. *Nechť* X, Y *jsou náhodné veličiny,* $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ *a* $cov(X, Y) = 0$. *Pak* $Z = X + Y$ *má rozdělení* $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

- ... součty, rozdíly, součiny, podíly, minima, maxima atd. náhodných veličin jsou opět náhodné veličiny.

- Dále jestliže X je náhodná veličina, pak

$$Y = \varphi(X)$$

je také náhodná veličina pro libovolnou funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Věta

Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí F a nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Označme $Y = \varphi(X)$ a G její distribuční funkci. Pak

$$G(y) = \int_{\{x;\varphi(x)\leq y\}} dF(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Speciálně je-li X diskrétní s nabývanými hodnotami a příslušnými pravděpodobnostmi $\{x_n, p_n\}$, pak

$$G(y) = \sum_{\{x_n;\varphi(x_n)\leq y\}} p_n, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

a je-li spojitá s hustotou f, pak

$$G(y) = \int_{\{x;\varphi(x)\leq y\}} f(x)\, dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Důkaz

Označme $B_y = \{x; \varphi(x) \le y\}$. Pak

$$G(y) = P(Y \le y) = P(\varphi(X) \le y) = P(X \in B_y) = \int_{B_y} dF(x) =$$

$$= \int_{\{x;\varphi(x)\le y\}} dF(x).$$

- Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny X a Y (matematická definice nezávislosti bude později) s distribučními funkcemi $F(x)$, resp. $G(y)$.
- Cílem je získat rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$.
- Nechť $H(z)$ je distribuční funkce Z. Pak

$$H(z) = \int\int_{x+y\leq z} dF(x)dG(y)$$

Definice

Rozdělení pravděpodobnosti dané distribuční funkcí $H(z)$ se nazývá konvoluce dvou rozdělení s distribučními funkcemi $F(x)$ a $G(y)$. H se pak nazývá konvolucí distribučních funkcí F a G.

- Konvoluci distribučních funkcí značíme $H = F * G$.

Věta

Nechť F a G jsou distribuční funkce nezávislých diskrétních náhodných veličin X, resp. Y, s odpovídajícími pravděpodobnostmi $\{p_n\}$, resp. $\{q_n\}$, nabývaných hodnot $n \in \mathbb{N}$, tj.

$$F(x) = \sum_{0 \le n \le x} p_n \quad a \quad G(y) = \sum_{0 \le n \le y} q_n.$$

Nechť $H = F * G$ (tj. H je distribuční funkcí náhodné veličiny $Z = X + Y$). Pak H je daná vztahem

$$H(z) = \sum_{0 \le n \le z} h_n, \ kde \ h_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \, q_{n-k}.$$

Věta

Nechť X a Y jsou nezávislé spojité náhodné veličiny s odpovídajícími hustotami $f(x)$, resp. $g(y)$, a nechť $Z = X + Y$. Pak hustota $h(z)$ náhodné veličiny Z je daná vztahem

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy. \tag{1}$$

Definice

Funkce $h(z)$ definovaná vztahem (1) se nazývá konvoluce hustot $f(x)$ a $g(y)$ a značí se $h = f * g$.

Poznámka

Funkce $h(z)$ je skutečně hustota pravděpodobnosti, neboť $h(z) \geq 0$ a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(z)dz &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dydx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)dx\right) g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1. \end{aligned}$$

- **Konvoluce dvou alternativních rozdělení**
  Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, $X \sim Alt(p)$ a $Y \sim Alt(p)$. Pak pro $Z = X + Y$ platí $Z \sim Binom(2, p)$.

- **Konvoluce dvou binomických rozdělení**
  Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, $X \sim Binom(n_1, p)$ a $Y \sim Binom(n_2, p)$. Pak pro $Z = X + Y$ platí $Z \sim Binom(n_1 + n_2, p)$.

- **Konvoluce dvou Poissonových rozdělení**
  Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, $X \sim Po(\lambda_1)$ a $Y \sim Po(\lambda_2)$. Pak pro $Z = X + Y$ platí $Z \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.

- **Konvoluce dvou rovnoměrných rozdělení**

  Nechť

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & \text{pro } c \leq y \leq d \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro $d - c \geq b - a$ platí

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{pro } z \leq a + c \text{ nebo } b + d \leq z \\ \frac{z-(a+c)}{(b-a)(d-c)} & \text{pro } a + c \leq z \leq b + c \\ \frac{1}{d-c} & \text{pro } b + c \leq z \leq a + d \\ \frac{(b+d)-z}{(b-a)(d-c)} & \text{pro } a + d \leq z \leq b + d. \end{cases}$$

- **Konvoluce dvou normálních rozdělení**
  Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Pak pro $Z = X + Y$ platí $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

- **Konvoluce dvou exponenciálních rozdělení**
  Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, $X \sim Exp(\lambda)$ a $Y \sim Exp(\lambda)$ Pak $Z = X + Y$ má hustotu

$$h(z) = \begin{cases} \lambda^2 z \exp\{-\lambda z\} & z > 0, \\ 0 & z \leq 0. \end{cases}$$

Důsledek: $X_1, \ldots, X_k$ jsou nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim Exp(\lambda)$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $Z = X_1 + \ldots + X_k$ má hustotu

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} z^{k-1} \exp\{-\lambda z\} & z > 0, \\ 0 & z \leq 0. \end{cases}$$

Definice

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Uvažujme náhodné veličiny X_1, X_2, ..., X_n definované na tomto prostoru. Pak vektor $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ se nazývá náhodný vektor.

Poznámka

Náhodný vektor je tedy zobrazení z Ω do $\mathbb{R}^n$ a hodnoty náhodného vektoru mohou být interpretovány jako body v n-dimenzionálním prostoru.

Definice

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ *je náhodný vektor definovaný na pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*. Sdružená distribuční funkce* $F_{\mathbb{X}}$ *náhodného vektoru* $\mathbb{X}$ *je reálná funkce* n *proměnných definovaná jako*

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) =$$
$$= P(\cap_{i=1}^{n}\{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\}), \quad x_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, \dots, n.$$

Vlastnosti distribuční funkce náhodného vektoru:

1. $F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n)$ je neklesající v každé proměnné x_i při pevných hodnotách ostatních proměnných x_j, $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$.
2. $F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n)$ je zprava spojitá v každé proměnné.
3. $\lim_{x_i \to -\infty} F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = 0$, $i = 1, \dots, n$, kde ostatní proměnné x_j, $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$, jsou pevné.
4. $\lim_{x_1, \dots, x_n \to \infty} F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Definice

Náhodný vektor $\mathbb{X}$ *má diskrétní rozdělení, jestliže existuje posloupnost* $\{\mathrm{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathrm{x}_k \in \mathbb{R}^n$, *a odpovídající posloupnost* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *kladných čísel taková, že* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, *kde*

$$p_k = P(\mathbb{X} = \mathrm{x}_k) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) = \mathrm{x}_k\}).$$

Distribuční funkce diskrétního náhodného vektoru $\mathbb{X}$ je tvaru

$$F_{\mathbb{X}}(\mathrm{x}) = \sum_{\{k : \mathrm{x}_k \leq \mathrm{x}\}} p_k, \quad \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n,$$

kde $\mathrm{x}_k \leq \mathrm{x}$ znamená, že $x_k^i \leq x^i$ pro všechny složky x_k^i, x^i, $i = 1, \ldots, n$, vektorů x_k, resp. x.

Definice

Náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ *má absolutně spojité rozdělení, jestliže existuje nezáporná funkce* $f_{\mathbb{X}}$ *n proměnných taková, že*

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbb{X}}(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n,$$

kde funkce $f_{\mathbb{X}}$ *se nazývá sdružená hustota náhodného vektoru* $\mathbb{X}$ *nebo také sdružená hustota náhodných veličin* $X_1, \dots, X_n$.

Poznámka

Stejně jako v případě náhodných veličin, i zde bychom mohli uvažovat zobecnění náhodného vektoru pomocí pravděpodobnostní míry borelovských množin z $\mathbb{R}^n$. *Nicméně pro naše účely postačí uvažovat diskrétní a spojité náhodné vektory každý zvlášť.*

Definice

Rozdělení (tj. distribuční funkce nebo pravděpodobnostní funkce, resp. hustota) náhodného vektoru $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})^T$*, který je podvektorem náhodného vektoru* $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$*, se nazývá marginální rozdělení (marginální distribuční funkce, marginální pravděpodobnostní funkce, resp. marginální hustota).*

- Je-li náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ diskrétní se sdruženými pravděpodobnostmi

$$P(X_1 = .,\ \dots,\ X_{i-1} = .,\ X_i = .,\ X_{i+1} = .,\ \dots,\ X_n = .),$$

kde náhodné veličiny X_l nabývají hodnot $x_{l,1}, \dots, x_{l,k_l}$ pro $l = 1, \dots, n$, pak marginální pravděpodobnosti náhodných veličin X_i jsou

$$P(X_i = x) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \dots \sum_{j_{i-1}=1}^{k_{i-1}} \sum_{j_{i+1}=1}^{k_{i+1}} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} P(X_1 = x_{1,j_1},\ \dots,\ X_{i-1} = x_{i-1,j_{i-1}},$$
$$X_i = x,\ X_{i+1} = x_{i+1,j_{i+1}},\ \dots,\ X_n = x_{n,j_n}).$$

- Je-li náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ spojitý se sdruženou hustotou $f_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n)$, pak marginální hustota náhodných veličin X_i se získají jako $(n-1)$-dimenzionální integrály

$$f_{X_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

Uvažujme náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$. Jeho základní charakteristiky jsou:

1. Vektor středních hodnot
$$\mathbb{E}\mathbb{X} = (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_n)^T.$$
2. Varianční (nazývaná občas také kovarianční) matice $Var\mathbb{X}$ s prvky
$$cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$
3. Korelační matice $Corr\mathbb{X}$ s prvky
$$corr(X_i, X_j) = \frac{cov(X_i, X_j)}{\sqrt{varX_i}\sqrt{varX_j}}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Poznámka

Pro korelaci platí, že $-1 \leq corr(X, Y) \leq 1$.

Definice

Říkáme, že náhodné veličiny X_1, X_2 ..., X_n *jsou (vzájemně) nezávislé, jestliže pro každou* r*-tici indexů* $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}, 1 \leq r \leq n$, *a pro každé* $x_{i_j} \in \mathbb{R}$ *platí*

$$P(\cap_{j=1}^r \{\omega : X_{i_j}(\omega) \leq x_{i_j}\}) = \Pi_{j=1}^r P(\{\omega : X_{i_j}(\omega) \leq x_{i_j}\})$$

(neboli $P(X_{i_1} \leq x_{i_1}, \ldots, X_{i_r} \leq x_{i_r}) = P(X_{i_1} \leq x_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(X_{i_r} \leq x_{i_r})$, *tj.* $F_{(X_{i_1}, \ldots, X_{i_r})}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) = F_{X_{i_1}}(x_{i_1}) \cdot \ldots \cdot F_{X_{i_r}}(x_{i_r})$ *).*

Poznámka

Analogicky jako u náhodných jevů můžeme i zde definovat nezávislost náhodných veličin X_1, X_2 ..., X_n *po dvou. Definici nezávislosti po dvou bychom dostali z uvedené definice pro* $r = 2$.

Věta

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ *je dikrétní náhodný vektor. Náhodné veličiny* $X_1, X_2 \ldots, X_n$ *jsou nezávislé právě tehdy, když*

$$P(X_1 = x_1^{(i)}, \ldots, X_n = x_n^{(i)}) = \Pi_{j=1}^{n} P(X_j = x_j^{(i)})$$

pro všechna $\mathrm{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}),\ i = 1, 2, \ldots,$ *kterých může* $\mathbb{X}$ *nabývat.*

Věta

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ *je spojitý náhodný vektor. Náhodné veličiny* $X_1, X_2 \ldots, X_n$ *jsou nezávislé právě tehdy, když*

$$f_{\mathbb{X}}(x_1, x_2 \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n),\ \forall (x_1, x_2 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Věta

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s konečnými středními hodnotami. Pak

1. $\mathbb{E}XY = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$.
2. *Jestliže navíc* $\mathbb{E}X^2 < \infty$ *a* $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, *pak* $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Poznámka

Jestliže $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$, *pak říkáme, že náhodné veličiny jsou nekorelované. To však neimplikuje nezávislost!*

Definice

Mějme náhodné veličiny $X_1, X_2, X_3, \ldots$ *a náhodnou veličinu* X *definované na pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- *Říkáme, že* X_n *konverguje k* X *skoro jistě, jestliže*

$$P\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

- *Jestliže pro všechna* $\varepsilon > 0$ *platí, že*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0,$$

  říkáme, že X_n *konverguje k* X *v pravděpodobnosti.*

Věta

Konvergence skoro jistě $\Rightarrow$ *konvergence v pravděpodobnosti.*

Věta

Slabý zákon velkých čísel:
Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejnou střední hodnotou μ a shodným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak pro $n \to \infty$ platí, že

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \to \mu$$

v pravděpodobnosti.

Věta

Silný zákon velkých čísel:
Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin se střední hodnotou $\mu < \infty$ a rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak pro $n \to \infty$ platí, že

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \to \mu$$

skoro jistě (a tudíž i v pravděpodobnosti).

Věta

Nechť $X_1, X_2, \dots$ *jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou* μ *a konečným rozptylem* σ^2*. Označme náhodnou veličinu*

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \quad n = 1, 2, \dots$$

a $F_n(x)$ *distribuční funkci náhodné veličiny* Z_n*. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$*, kde* $\Phi(x)$ *je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení* $N(0, 1)$*.*

Poznámka

Centrální limitní věta (dále jen CLV) má mnoho verzí. Uvedená věta se nazývá Lévy-Lindebergova CLV.

Hlavní úlohy statistiky

1. Volba správného modelu
2. Odhady parametrů
   1. bodové
   2. intervalové
3. Testování hypotéz

- Nechť $X_1, X_2 \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $N(0,1)$. Pak náhodná veličina

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

má rozdělení χ_n^2 (čti "chí-kvadrát rozdělení s n stupni volnosti").

- Nechť X je náhodná veličina s rozdělením $N(0,1)$ a Y na ní nezávislá náhodná veličina s rozdělením χ_n^2. Pak náhodná veličina

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y}}\sqrt{n}$$

má rozdělení t_n (čti "Studentovo t-rozdělení s n stupni volnosti").

- Nechť U a V jsou nezávislé náhodné veličiny s rozděleními χ_n^2, resp. χ_m^2. Pak náhodná veličina

$$W = \frac{U/n}{V/m}$$

má rozdělení $F_{n,m}$ (čti "Fisherovo-Snedecorovo rozdělení s parametry n a m").

Definice

Náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, X_2 \dots, X_n)^T$ *nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s distribuční funkcí* F_θ*, která závisí na parametru* θ*, se nazývá náhodný výběr.*

Definice

Funkce

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

náhodného výběru $\mathbb{X} = (X_1, X_2 \dots, X_n)^T$ *se nazývá výběrový průměr a*

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

se nazývá výběrový rozptyl. $S_n = \sqrt{S_n^2}$ *je pak výběrová směrodatná odchylka.*

Věta

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ *je náhodný výběr z rozdělení* $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. *Pak*

1. *výběrový průměr* $\bar{X}_n$ *a výběrový rozptyl* S_n^2 *jsou nezávislé náhodné veličiny,*
2. *výběrový průměr* $\bar{X}_n$ *má rozdělení* $N(\mu, \sigma^2/n)$,
3. *náhodná veličina* $(n-1)S_n^2/\sigma^2$ *má rozdělení* $\chi^2_{(n-1)}$,
4. *náhodná veličina* $T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$ *má rozdělení* $t_{(n-1)}$.

Definice

Nechť F je spojitá a monotónní distribuční funkce a $0 < \beta < 1$. Pak hodnotu z_β takovou, že $F(z_\beta) = \beta$, nazýváme β-kvantil rozdělení s distribuční funkcí F.

Poznámka

1. *Výraz β-kvantil používaný ve statistice je vlastně hodnota $q(\beta)$ kvantilové funkce q. Jestliže tedy distribuční funkce F není spojitá nebo není monotónní, pak β-kvantil můžeme dodefinovat analogicky k definici kvantilové funkce q.*
2. *Pro náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F a kvantily z_β je*

$$P(z_{\alpha/2} < X < z_{1-\alpha/2}) = F(z_{1-\alpha/2}) - F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

3. *β-kvantily rozdělení používaných ve statistice budeme značit u_β pro normované normální rozdělení, $t_{\beta,n}$ pro rozdělení t_n a $\chi^2_{\beta,n}$ pro rozdělení χ^2_n.*

Definice

Nechť $(x_1, x_2 \dots, x_n)^T$ *je realizace náhodného výběru* $(X_1, X_2 \dots, X_n)^T$. *Pak*

$$F_{emp}(x) = \frac{\#\{x_i : x_i \leq x\}}{n},$$

kde $\#$ *značí počet prvků, se nazývá empirická distribuční funkce.*

Definice

Nechť $(x_1, x_2 \dots, x_n)^T$ *je realizace náhodného výběru* $(X_1, X_2 \dots, X_n)^T$, $F_{emp}(x)$ *příslušná empirická distribuční funkce a* z_β *značí* β*-kvantil náhodné veličiny s distribuční funkcí* F_{emp}. *Pak hodnoty* $z_{1/4}$, $z_{1/2}$ *a* $z_{3/4}$ *se nazývají 1.kvartil, 2.kvartil (též "medián"), resp. 3.kvartil. Nejčastěji zatoupený prvek v realizaci náhodného výběru se nazývá modus.*

Poznámka

Občas se 1.kvartil definuje jako $z^* = max(x_i : F_{emp}(x_i) \leq 1/4)$ *nebo* $z^{**} = min(x_i : F_{emp}(x_i) \geq 1/4)$, *popř. jako* $z^{***} = z^* + \frac{1}{4}(z^{**} - z^*)$. *Analogicky se pak definuje i 2. a 3.kvartil.*

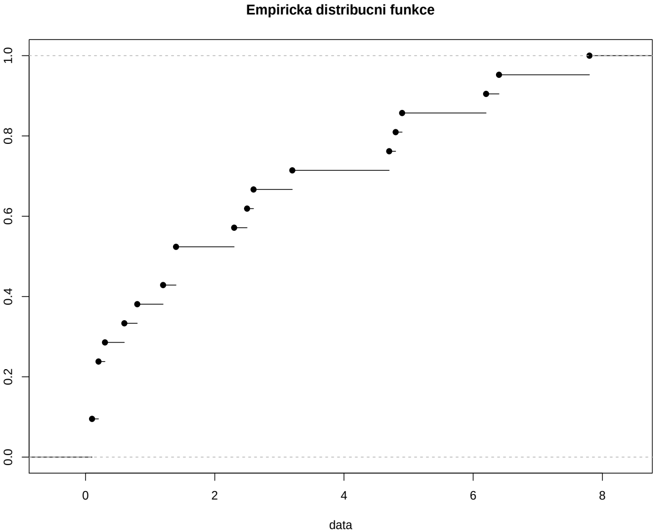
Příklad

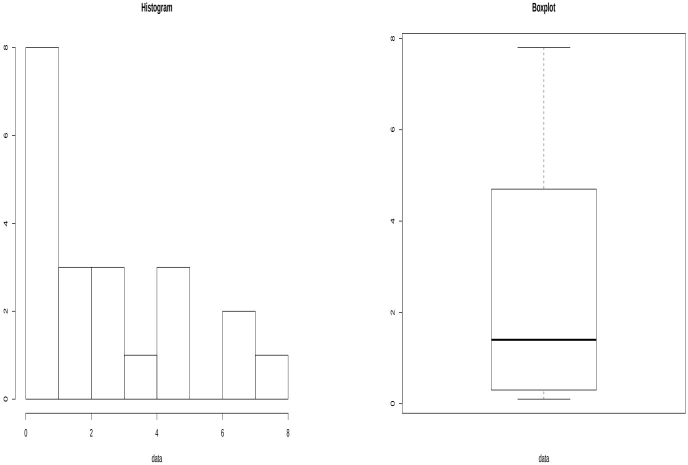
Sledovali jsme doby mezi příchody zákazníků (v minutách) a naměřili jsme těchto 21 hodnot:
4.9, 6.2, 2.6, 0.6, 0.3, 2.3, 3.2, 1.4, 6.4, 4.8, 1.2
2.5, 0.2, 0.2, 0.8, 0.1, 0.1, 1.4, 7.8, 0.2, 4.7.

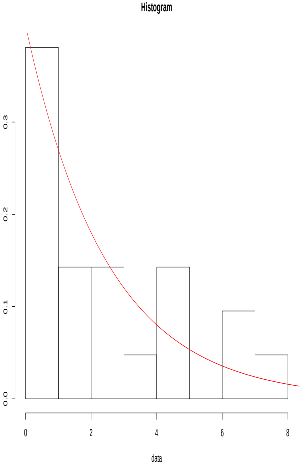
Pro přehlednost si hodnoty seřadíme od nejmenší po největší:
0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.2, **0.3**, 0.6, 0.8, 1.2, 1.4, **1.4**,
2.3, 2.5, 2.6, 3.2, **4.7**, 4.8, 4.9, 6.2, 6.4, **7.8**.

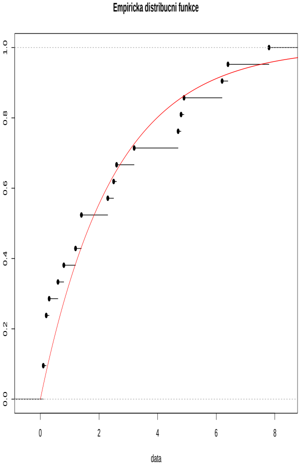
Máme zde:

- výběrový průměr (pro danou realizaci) $\bar{X}_{21} = 2.471$,
- výběrový rozptyl (pro danou realizaci) $S_{21}^2 = 5.81$,
- výběrovou směrodatnou odchylku (pro danou realizaci) $S_{21} = 2.21$,
- 1.kvartil $= 0.3$, medián (tj. 2.kvartil) $= 1.4$ a 3.kvartil $= 4.7$,
- min $= 0.1$, max $= 7.8$, modus $= 0.2$.


Empiricka distribucni funkce
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2
4
6
8
data


Histogram
0
2
4
6
8
0
2
4
6
8
data
Boxplot
0
2
4
6
8
data


Histogram
0.0
0.1
0.2
0.3
0
2
4
6
8
data


Empiricka distribucni funkce
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2
4
6
8
data

Definice

Nechť $(x_1, x_2 \ldots, x_n)^T$ *je realizace náhodného výběru* $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ *a rozdělení* $X_1, \ldots, X_n$ *závisí na parametru* θ. *Bodový odhad parametru* θ *je libovolná funkce* $\hat{\theta}(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ *náhodného výběru* $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$, *jejíž předpis nezávisí na* θ.

Poznámka

Pro jednoduchost si můžeme bodový odhad představit jako hodnotu $\hat{\theta}$ *získanou z realizace* $(x_1, x_2 \ldots, x_n)^T$ *náhodného výběru* $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$, *kde tato hodnota co možná nejlépe odhaduje parametr* θ. *Jelikož však při opakování náhodného výběru získáváme různé realizace, můžeme pro každou z nich dostat jinou hodnotu odhadovaného parametru, tudíž bodový odhad je náhodná veličina.*

Definice

Jestliže pro bodový odhad $\hat{\theta}(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ *parametru* θ *platí, že* $\mathbb{E}\hat{\theta}(X_1, X_2 \ldots, X_n) = \theta$, *pak tento odhad nazýváme nestranným.*

Definice

Jestliže pro bodový odhad $\hat{\theta}(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ *parametru* θ *platí, že*

1. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\hat{\theta}(X_1, X_2 \ldots, X_n) = \theta$ *(je tzv. asymptoticky nestranný),*
2. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{var}\hat{\theta}(X_1, X_2 \ldots, X_n) = 0$,

pak tento odhad nazýváme konzistentním.

Definice

Jestliže existuje více nestranných bodových odhadů, pak ten s nejmenším rozptylem $\mathrm{var}\hat{\theta}(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ *nazýváme eficientním.*

Nechť $(x_1, x_2 \ldots, x_n)^T$ je realizace náhodného výběru $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ a rozdělení náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$ závisí na parametrech $\theta_1, ..., \theta_k \in \Theta$, kde Θ je množina parametrů.

Předpoklad: $\mathbb{E}X_1^i < \infty \ \forall i = 1, ...k$ a $\mathbb{E}X_1^i$ závisí na $\theta_1, ..., \theta_k$.

Metoda: Položíme do rovnosti teoretické a odhadnuté momenty, tj.

$$\mathbb{E}X_1^i = m_i, \quad \text{kde} \quad m_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^i \quad \text{pro všechna} \quad i = 1, ...k.$$

Takto získáme soustavu k rovnic o k neznámých $\theta_1, ..., \theta_k$, jejichž řešením jsou hledané odhady parametrů $\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_k$.

Alternativa: Je-li $k = 2$, pak místo i-tých momentů, $i = 1, 2$, můžeme položit $\mathbb{E}X_1 = \bar{x}_n$ a $varX_1 = s_n^2$, kde x_n a s_n^2 jsou hodnoty výběrového průměru, resp. výběrového rozptylu, získané z dat.

Výhoda: Jednoduchost.

Nevýhoda: Řešení nemusí existovat.

Nechť $(x_1, x_2 \ldots, x_n)^T$ je realizace náhodného výběru $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ a rozdělení (tj. $P_\theta(X_1 = .)$ v diskrétním případě nebo hustota f_θ ve spojitém případě) náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$ závisí na parametru θ.

Definice

Hodnota $\hat{\theta}$ se nazýva maximálně věrohodným odhadem, jestliže

$$\prod_{i=1}^{n} P_{\hat{\theta}}(X_1 = x_i) = \max_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^{n} P_\theta(X_1 = x_i),$$

resp.

$$\prod_{i=1}^{n} f_{\hat{\theta}}(x_i) = \max_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i).$$

Poznámka

Obvykle je jednodušší pracovat s logaritmy těchto součinů, abychom při hledání extrému funkce derivovali součet, nikoliv součin.

Pro náhodný výběr z diskrétního rozdělení:

1. Zkonstruujeme věrohodnostní funkci $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(X_1 = x_i)$.
2. Zkonstruujeme logaritmicko-věrohodnostní funkci $l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log P_\theta(X_1 = x_i)$.
3. Položíme $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$.
4. Řešením rovnice $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$ je hledaný maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}$.

Pro náhodný výběr ze spojitého rozdělení:

1. Zkonstruujeme věrohodnostní funkci $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$.
2. Zkonstruujeme logaritmicko-věrohodnostní funkci $l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f_\theta(x_i)$.
3. Položíme $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$.
4. Řešením rovnice $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$ je hledaný maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}$.

Definice

Nechť $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ *je náhodný výběr a* $\alpha \in (0,1)$.

1. *Dvojice* $(\theta_L^*(X_1,\ldots,X_n), \theta_U^*(X_1,\ldots,X_n))$ *se nazývá* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad (nebo též interval spolehlivosti; označení* $(1-\alpha)\cdot 100$ %*-CI) parametru* θ*, jestliže*

$$P(\theta_L^*(X_1,\ldots,X_n) < \theta < \theta_U^*(X_1,\ldots,X_n)) = 1-\alpha.$$

2. $(\theta_D^*(X_1,\ldots,X_n))$ *se nazývá dolní* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* θ*, jestliže*

$$P(\theta_D^*(X_1,\ldots,X_n) < \theta) = 1-\alpha.$$

3. $(\theta_H^*(X_1,\ldots,X_n))$ *se nazývá horní* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* θ*, jestliže*

$$P(\theta_H^*(X_1,\ldots,X_n) > \theta) = 1-\alpha.$$

Věta

Nechť $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ *je náhodný výběr z rozdělení* $N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}$ *je neznámý parametr a* $\sigma^2 > 0$ *je známá konstanta. Pak*

1. $(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ *je* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* μ,
2. $\bar{X}_n - u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *je dolní* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* μ,
3. $\bar{X}_n + u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *je horní* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* μ.

Věta

Nechť $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ *je náhodný výběr z rozdělení* $N(\mu, \sigma^2)$ *a oba parametery* $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ *jsou neznámé. Pak*

1. $(\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}})$ *je* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* μ,
2. $\bar{X}_n - t_{1-\alpha,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ *je dolní* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* μ,
3. $\bar{X}_n + t_{1-\alpha,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ *je horní* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* μ.
4. $\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\right)$ *je* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* σ^2,
5. $\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}$ *je dolní* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* σ^2,
6. $\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}}$ *je horní* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* σ^2.

Věta

Nechť $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ *je náhodný výběr z libovolného rozdělení s rozptylem* $0 < \sigma^2 < \infty$. *Pak asymptotický* $(1-\alpha)\cdot 100$ % *intervalový odhad střední hodnoty* $\mu = \mathbb{E}X$ *je*

$$(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}).$$

Důkaz

Připomeňme, že pro velká n platí $\frac{S_n}{\sigma} \to 1$, tj. S_n je aproximace σ. Z CLV víme, že $\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ má přibližně (asymtoticky) normální rozdělení, tj.

$$P(u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P(u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}S_n} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P(\frac{\sum X_i}{n} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \frac{\sum X_i}{n} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{X}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \bar{X}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha,$$

což je definice $(1-\alpha) \cdot 100\%$ intervalového odhadu parametru μ.

Věta

1. *Nechť* $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ *je náhodný výběr z rozdělení* $Alt(p)$, $0 < p < 1$. *Pak* $(1-\alpha) \cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* p *je*

$$(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}).$$

2. *Nechť* $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ *je náhodný výběr z rozdělení* $Po(\lambda)$, $\lambda > 0$. *Pak* $(1-\alpha) \cdot 100$ % *intervalový odhad parametru* λ *je*

$$(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}, \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}).$$

Důkaz

Důkaz plyne z předešlé věty a faktu, že pro alternativní rozdělení je $\mathbb{E}X = p$, $varX = p(1-p)$ a pro Poisoonovo rozdělení je $\mathbb{E}X = varX = \lambda$.

- Nechť $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ je náhodný výběr z rozdělení, které závisí na parametru $\theta \in \Theta$.
- Tvrzení, že θ patří do nějaké množiny Θ_0, se nazývá nulová hypotéza (značíme $H_0 : \theta \in \Theta_0$).
- Na základě náhodného výběru $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ testujeme nulovou hypotézu vůči alternativní hypotéze $H_A : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$. K tomu stanovíme množinu W (tzv. kritický obor) tak, že H_0 zamítáme ve prospěch H_A, jestliže $\mathbb{X} \in W$, v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

Poznámka

Většinou testujeme $H_0 : \theta = \theta_0$, kde θ_0 je konkrétní hodnota, takže přirozenou alternativou je $H_A : \theta \neq \theta_0$. Občas však dává větší smysl testovat H_0 vůči $H_A : \theta > \theta_0$ nebo $H_A : \theta < \theta_0$, jelikož opačná situace nedává v tu chvíli praktický smysl.

Při testování mohou nastat následující situace:

- H_0 platí a test ji nezamítá $\surd$
- H_0 neplatí a test ji zamítá $\surd$
- H_0 platí a test ji zamítá $\rightarrow$ chyba prvního druhu
- H_0 neplatí a test ji nezamítá $\rightarrow$ chyba druhého druhu

Testovací hladina:
Zvolíme hodnotu α (obvykle 0.05, někdy 0.01 nebo 0.1) a kritický obor W konstruujeme tak, aby chyba prvního druhu nebyla větší než (obvykle byla rovna) α. Takové α se nazývá testovací hladina.

- Nechť $(X_1, X_2 \ldots, X_n)^T$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$ a ani jeden parametr není známý. Víme, že náhodná veličina

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n} \sim t_{n-1}.$$

- Testování $H_0 : \mu = \mu_0$ vůči $H_A : \mu \neq \mu_0$ tedy probíhá následovně:
  1. Spočítáme tzv. testovou statistiku (hodnotu) $T_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}\sqrt{n}$.
  2. Jestliže $|T_0| \geq t_{1-\alpha/2,n-1}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A, v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

- Testování $H_0 : \mu = \mu_0$ vůči $H_A : \mu > \mu_0$ je analogické:
  1. Spočítáme hodnotu $T_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}\sqrt{n}$.
  2. Je-li $T_0 \geq t_{1-\alpha,n-1}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A, v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

- Nulová hypotéza $H_0 : \mu = \mu_0$ vůči $H_A : \mu < \mu_0$ je pak zamítnutá v případě, že $T_0 \leq t_{\alpha,n-1} = -t_{1-\alpha,n-1}$.

Párový t-test

- Používá se tehdy, když pozorujeme párový znak na jednom objektu (např. dioptrie na levém a pravém oku, dobu zpracování stejných dat jednou a druhou metodou atd.).

- Máme náhodný výběr $(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2), \ldots, (Y_n, Z_n)^T$ a testujeme $H_0 : \mathbb{E}Y_i - \mathbb{E}Z_i = \mu_0$ (většinou $\mu_0 = 0$, tj. shodu středních hodnot) vůči některé z alternativních hypotéz zmíněných výše.

- Položíme
$$X_1 = Y_1 - Z_1, \ldots, X_n = Y_n - Z_n$$
a jestliže $X_1, \ldots, X_n$ pochází z normálního rozělení, použijeme jednovýběrový t-test popsaný výše.

- Uvažujme dva nezávislé výběry, a to $(X_1, X_2 \ldots, X_m)^T$ z rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $(Y_1, Y_2 \ldots, Y_n)^T$ z $N(\mu_2, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$.
- Označme $\bar{X}$ výběrový průměr náhodného výběru $(X_1, X_2 \ldots, X_m)^T$, $\bar{Y}$ výběrový průměr $(Y_1, Y_2 \ldots, Y_n)^T$, S_X^2 výběrový rozptyl $(X_1, X_2 \ldots, X_m)^T$ a S_Y^2 výběrový rozptyl $(Y_1, Y_2 \ldots, Y_n)^T$.
- Náhodná veličina

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \sim t_{m+n-2}.$$

- Testování $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ vůči $H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ tedy probíhá následovně:
  1. Spočteme $T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{\sqrt{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}$.
  2. Je-li $|T_0| \geq t_{1-\alpha/2, m+n-2}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A, v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

- Uvažujme dva nezávislé výběry, a to $(X_1, X_2 \ldots, X_m)^T$ z rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $(Y_1, Y_2 \ldots, Y_n)^T$ z $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, kde $\sigma_1^2 > 0$ a $\sigma_2^2 > 0$.
- Označme S_X^2 výběrový rozptyl $(X_1, X_2 \ldots, X_m)^T$ a S_Y^2 výběrový rozptyl $(Y_1, Y_2 \ldots, Y_n)^T$.
- Náhodná veličina
$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F_{m-1,n-1}.$$
- Testování $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vůči $H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ tedy probíhá následovně:
  1. Spočteme $F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$.
  2. Je-li $F_0 \leq F_{\alpha/2,m-1,n-1}$ nebo $F_0 \geq F_{1-\alpha/2,m-1,n-1}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A, v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

Multinomické rozdělení

- Je zobecněním rozdělení binomického ve smyslu, že uvažujeme n-krát opakovaný náhodný pokus, který může pokaždé skončit nějakým z výsledků $A_1, A_2 \dots, A_k$ (nikoliv pouze jedním ze dvou výsledků "úspěch" nebo "neúspěch").
- Pro $i = 1, \dots, k$ označme $p_i = P(A_i)$ (kde zřejmě $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$) a X_i počet výsledků A_i ve výše zmíněných n pokusech. Pak

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}, \quad \text{kde } \sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

- Rozdělení náhodného vektoru $(X_1, X_2 \dots, X_k)^T$ se nazývá multinomickým.

- Testujeme nulovou hypotézu

  H_0 : "marginální pravděpodobnosti jsou rovny hodnotám $p_1, \ldots, p_k$"

  proti alternativní hypotéze

  H_A : "alespoň jedno p_i je jiné".

- Test probíhá následovně:
  1. Spočteme hodnotu $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$.
  2. Jestliže $\chi_0^2 > \chi^2_{1-\alpha,k-1}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A, v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

- Mějme náhodný výběr $(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2) \ldots, (Y_n, Z_n)$, kde pro $k = 1, \ldots, n$ nabývají Y_k a Z_k hodnot $1, \ldots, r$, resp. $1, \ldots, c$.
- Testujeme nulovou hypotézu H_0: "Y a Z jsou vzájemně nezávislé" vůči alternativní hypotéze H_A: "Y a Z nejsou nezávislé".
- Označme n_{ij} počet dvojic $(Y_k = i, Z_k = j)$. Pak matici o rozměrech $r \times c$ s prvky n_{ij} nazýváme kontingenční tabulkou a prvkům n_{ij} říkáme sdružené četnosti.
- Marginalní četnosti jsou

$$n_{i.} = \sum_j n_{ij}, \quad n_{.j} = \sum_i n_{ij}.$$

- Test nezávislosti probíhá následovně:
  1. Spočteme hodnotu
  $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i.} n_{.j}}{n})^2}{\frac{n_{i.} n_{.j}}{n}}.$$
  2. Jestliže $\chi_0^2 \geq \chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A, v opačném případě H_0 ve prospěch H_A nezamítáme.

Definice

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor a* $T \subset \mathbb{R}$. *Rodina reálných náhodných veličin* $\{X_t, t \in T\}$ *definovaných na* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *se nazývá náhodný (nebo také stochastický) proces.*

Definice

Je-li $T = \mathbb{Z}$ *nebo* $T = \mathbb{N}$, *mluvíme o náhodném procesu s diskrétním časem. Je-li* $T = [a, b]$, *kde* $-\infty \leq a < b \leq \infty$, *mluvíme o náhodném procesu se spojitým časem.*

Definice

Dvojice $(S, \mathcal{E})$, *kde* S *je množina hodnot náhodných veličin* X_t *a* $\mathcal{E}$ *je* $\sigma-$*algebra na množině* S, *se nazývá stavový prostor.*

Definice

Pokud náhodné veličiny X_t *nabývají pouze diskrétních hodnot, mluvíme o náhodném procesu s diskrétními stavy. Pokud náhodné veličiny* X_t *nabývají spojitých hodnot, mluvíme o náhodném procesu se spojitými stavy.*

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ můžeme chápat jako funkci dvou proměnných ω a t. Pro pevné t je tato funkce náhodnou veličinou, pro pevné ω se jedná o funkci jedné reálné proměnné t.

Definice

Mějme pevné $\omega \in \Omega$. Pak funkce $t \to X_t$ se nazývá trajektorie procesu $\{X_t, t \in T\}$.

Definice

Proces se nazývá spojitý, jsou-li všechny jeho trajektorie spojité.

Definice

Nechť $\{X_t, t \in T\}$ *je náhodný proces takový, že pro každé* $t \in T$ *existuje střední hodnota* $\mathbb{E}X_t$*. Potom funkce* $\mu_t = \mathbb{E}X_t$ *definovaná na* T *se nazývá střední hodnota procesu* $\{X_t\}$*. Jestliže platí* $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$ *pro všechna* $t \in T$*, potom funkce dvou proměnných definovaná na* $T \times T$ *předpisem* $R(s,t) = \mathbb{E}(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)$ *se nazývá autokovarianční funkce procesu* $\{X_t\}$*. Hodnota* $R(t,t)$ *se nazývá rozptyl procesu* $\{X_t\}$ *v čase* t*.*

Definice

Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ *je slabě stacionární, jestliže* $R(s,t)$ *je funkcí pouze rozdílu* $s - t$*, tj.*

$$R(s,t) = \tilde{R}(s-t)$$

Důsledek:

$$R(s,t) = R(s+h, t+h)$$

pro každé $h \in \mathbb{R}$ takové, že $s + h \in T$ a $t + h \in T$.

Označme

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X_{t_1} \le x_1,\dots,X_{t_n} \le x_n).$$

Definice

Řekneme, že náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je striktně stacionární, jestliže pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, pro libovolná reálná $x_1,\dots,x_n$ a pro libovolná reálná $t_1,\dots,t_n$ a h taková, že $t_k \in T$, $t_k + h \in T$, $1 \le k \le n$, platí

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{t_1+h,\dots,t_n+h}(x_1,\dots,x_n). \tag{2}$$

Poznámka

Pro procesy s diskrétními stavy je vztah (2) je ekvivalentní vztahu

$$P(X_{t_1} = x_1,\dots,X_{t_n} = x_n) = P(X_{t_1+h} = x_1,\dots,X_{t_n+h} = x_n).$$

Definice

Nechť náhodné procesy $\{X_t, t \in T\}$ a $\{Y_t, t \in T\}$ jsou definované na stejném pravděpodobnostním prostoru s hodnotami ve stejném stavovém prostoru. Pak

1. $\{X_t\}$ *a* $\{Y_t\}$ *jsou stochasticky ekvivalentní, jestliže*

   $$P(X_t = Y_t) = P(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1, \quad \forall t \in T.$$

   Říkáme také, že proces $\{X_t\}$ *je stochastickou verzí, popř. modifikací, procesu* $\{Y_t\}$.

2. $\{X_t\}$ *a* $\{Y_t\}$ *jsou nerozlišitelné, jestliže*

   $$P(X_t = Y_t, \forall t \in T) = P(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in T) = 1.$$

Mějme

- pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,
- na něm posloupnost náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$,
- stavový prostor $(S, \mathcal{E})$, kde množina S je konečná nebo spočetná, bez újmy na obecnosti předpokládejme $S = \{0, 1, \ldots, N\}$, resp. $S = \{0, 1, \ldots\}$.

Definice

Posloupnost náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ nazveme Markovský řetězec s diskrétním časem, jestliže

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

pro všechna $n = 0, 1, \ldots$ a všechna $i, j, i_{n-1}, \ldots, i_0 \in S$ taková, že $P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) > 0$.

Nechť $Y_1, Y_2, \dots$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny nabývající hodnot ± 1 s pravděpodobnostmi $1/2$.

Definujme

$$X_0 = 0$$
$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Pak posloupnost (proces, řetězec) $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá *náhodná procházka*.

Definice

Podmíněné pravděpodobnosti

1. $P(X_{n+1} = j|X_n = i) = p_{ij}(n, n+1)$ *nazveme pravděpodobnostmi přechodu ze stavu* i *v čase* n *do stavu* j *v čase* $n+1$ *nebo také pravděpodobnostmi přechodu 1.řádu;*
2. $P(X_{n+m} = j|X_n = i) = p_{ij}(n, n+m)$ *nazveme pravděpodobnostmi přechodu ze stavu* i *v čase* n *do stavu* j *v čase* $n+m$ *nebo také pravděpodobnostmi přechodu m-tého řádu.*

Definice

Jestliže pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(n, n+m)$ *nezávisí na časových okamžicích* n *a* $n+m$*, ale pouze na rozdílu* m*, nazývá se příslušný Markovský řetězec homogenní.*

- Uvažujme homogenní řetězec a označme $p_{ij} := p_{ij}(n, n+1)$.
- Tyto prvky lze seřadit do čtvercové matice $\mathrm{P} = \{p_{ij}, i, j \in S\}$, pro niž zřejmě platí

$$p_{ij} \geq 0, \forall i, j \in S \quad \text{a} \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \forall i \in S.$$

Definice

Matice $\mathrm{P} = \{p_{ij}, i, j \in S\}$ *se nazývá matice pravděpodobností přechodu.*

Označme dále

$$p_i = P(X_0 = i), \quad \forall i \in S,$$

pro které zřejmě platí

$$p_i \geq 0, \forall i \in S \quad \text{a} \quad \sum_{i \in S} p_i = 1.$$

Definice

Vektor $\mathrm{p} = \{p_i, i \in S\}$ *se nazývá počáteční rozdělení Markovského řetězce.*

Lze ukázat (Věta o násobení pravděpodobnosti), že

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Označme dále $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ a definujme pro přirozené $n \geq 1$ postupně

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}. \qquad (3)$$

Lze ukázat, že $p_{ij}^{(n)} \leq 1$ a navíc pro matice pravděpodobností přechodů platí

$$\mathrm{P}^{(2)} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{P} = \mathrm{P}^2 \text{ a obecně } \mathrm{P}^{(n+1)} = \mathrm{P}^{(n)} \cdot \mathrm{P} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{P}^{(n)} = \mathrm{P}^{n+1}.$$

Věta

Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní Markovský řetězec s maticí přechodu P. Potom pro pravděpodobnosti přechodu $n-$tého řádu platí

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i) = p_{ij}^{(n)}, \quad \forall i, j \in S$$

pro všechna přirozená m a n a pro $P(X_m = i) > 0$.

Vztah (3) lze zobecnit. Toto zobecnění se nazývá

Chapman-Kolmogorova rovnost

definována jako

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)},$$

zapsáno maticově

$$\mathrm{P}^{(m+n)} = \mathrm{P}^{(m)} \cdot \mathrm{P}^{(n)}.$$

- Vychází-li řetězec $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ ze stavu j, tj. $P(X_0 = j) = 1$, pak označíme
$$P(.|X_0 = j) = P_j(.).$$
- Definujme náhodnou veličinu
$$\tau_j = \inf\{n > 0 : X_n = j\}$$
čas prvního návratu řetězce do stavu j.
- Střední hodnotu doby prvního návratu označíme $\mu_j = \mathbb{E}[\tau_j | X_0 = j]$.
- Největší společný dělitel čísel $n \geq 1$, pro které $p_{jj}^{(n)} > 0$, označíme d_j.

Definice

Stav j Markovského řetězce se nazývá trvalý, jestliže

$$P_j(\tau_j < \infty) = 1.$$

Stav j Markovského řetězce se nazývá přechodný, jestliže

$$P_j(\tau_j = \infty) > 0.$$

Definice

Trvalý stav j Markovského řetězce se nazývá nenulový, jestliže $\mu_j < \infty$ a nulový, jestliže $\mu_j = \infty$.

Definice

Je-li $d_j > 1$, stav j Markovského řetězce se nazývá periodický s periodou d_j, je-li $d_j = 1$, stav j Markovského řetězce se nazývá neperiodický.

Věta

a) *Nechť j je přechodný stav. Potom* $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall i \in S$.

b) *Nechť j je trvalý nulový stav. Potom* $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall i \in S$.

c) *Nechť j je trvalý nenulový a neperiodický stav. Potom* $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$.

d) *Nechť j je trvalý nenulový stav s periodou d_j. Potom* $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd_j)} = \frac{d_j}{\mu_j}$.

Věta

Trvalý stav j je nulový právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$.

Uvažujme nyní řetězec s množinou přechodných stavů R a definujme náhodnou veličinu

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin R\}$$

značící čas výstupu z množiny přechodných stavů.

Věta

V řetězci s konečně mnoha stavy je

$$P_j(\tau = \infty) = 0, \quad j \in R.$$

Definice

Řekneme, že stav j je dosažitelný ze stavu i, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. Jestliže $p_{ij}^{(n)} = 0$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že stav j je nedosažitelný ze stavu i.

Definice

Množina stavů C se nazývá uzavřená, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř C.

Definice

Množina stavů C se nazývá komponentou, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř C a opačně, a přitom všechny stavy uvnitř komponenty jsou vzájemně dosažitelné.

Věta

Množina stavů je uzavřená právě tehdy, je-li $p_{ij} = 0$ pro všechna $i \in C, j \notin C$.

Definice

Markovský řetězec se nazývá nerozložitelný, jestliže každý jeho stav je dosažitelný z každého jiného stavu. V opačném případě je řetězec rozložitelný.

Definice

Je-li jednobodová množina stavů $\{j\}$ uzavřená, tj. je-li $p_{jj} = 1$, pak se stav j nazývá absorpční.

Definice

Řetězec s konečně mnoha stavy, jehož všechny trvalé stavy jsou absorpční, se nazývá absorpční řetězec.

Definice

Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *je homogenní řetězec s množinou stavů* S *a maticí pravděpodobností přechodu* P. *Nechť* $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$ *je nějaké pravděpodobnostní rozdělení na množině* S, *tj.* $\pi_j \geq 0, j \in S, \sum_{j \in S} \pi_j = 1$. *Potom* π *se nazývá stacionární rozdělení daného řetězce, jestliže platí*

$$\pi^T = \pi^T \mathrm{P},$$

neboli

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, j \in S.$$

Věta

Nechť počáteční rozdělení homogenního Markovského řetězce je stacionární. Pak je tento řetězec striktně stacionární a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$p_j(n) = P(X_n = j) = \pi_j, \quad j \in S,$$

kde π_j jsou počáteční stacionární pravděpodobnosti.

Věta

Pro nerozložitelný Markovský řetězec platí

1. *Jsou-li všechny jeho stavy přechodné nebo všechny trvalé nulové, stacionární rozdělení neexistuje.*
2. *Jsou-li všechny jeho stavy trvalé nenulové, stacionární rozdělení existuje a je jednoznačné.*
   1. *Jsou-li všechny stavy neperiodické, potom pro všechna $i, j \in S$*
   $$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0 \quad a \quad \pi_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n) > 0.$$
   2. *Jsou-li všechny stavy periodické, potom pro všechna $i, j \in S$*
   $$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} > 0 \quad a \quad \pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_j(k) > 0.$$
3. *V nerozložitelném řetězci s konečně mnoha stavy stacionární rozdělení existuje.*

- Uvažujme rozložitelný Markovský řetězec s konečně mnoha stavy $j \in S$, který lze rozdělit na K komponent.
- Existuje permutace těchto stavů $\tilde{j} = perm(j)$ pro všechna $j \in S$ taková, že matice pravděpodobností přechodu pro stavy $\tilde{j}$ je tvaru

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{P}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{P}_\mathrm{K} \end{pmatrix},$$

kde všechny matice P_k, $k = 1, \dots, K$, jsou stochastické.

- Označme $\pi^{(\mathrm{k})}$ stacionární rozdělení pro řetězec s maticí pravděpodobností přechodu P_k, $k = 1, \dots, K$.
- Pak Markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodu P má stacionární rozdělení

$$\pi = (c_1 \pi^{(1)}, \dots, c_K \pi^{(\mathrm{K})}),$$

kde $0 \leq c_k \leq 1$ pro všechna $k = 1, \dots, K$ a $\sum_{k=1}^{K} = 1$.

- Uvažujme rozložitelný Markovský řetězec se stavy $j \in S$, z nichž právě m je absorpčních.
- Existuje permutace těchto stavů $\tilde{j} = perm(j)$ pro všechna $j \in S$ taková, že matice pravděpodobností přechodu pro stavy $\tilde{j}$ je tvaru

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ \mathrm{R} & \mathrm{Q} \end{pmatrix},$$

  kde $\mathbb{I}_m$ je jednotková matice typu $m \times m$.
- Pak

$$\mathrm{P}^\infty = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ \mathrm{M} & 0 \end{pmatrix},$$

  kde $\mathrm{M} = \mathrm{FR}$ a $F = (\mathbb{I}_{|S|-m} + \mathrm{Q} + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{Q}^3 + \dots) = (\mathbb{I}_{|S|-m} - \mathrm{Q})^{-1}$ je tzv. fundamentální matice.
- Prvky p_{ij}, $i = m+1, \dots, |S|$, $j = 1, \dots, m$ (tj. prvky matice M) vyjadřují pravděpodobnosti, že řetězec, který vyšel ze stavu i, skončí v absorpčním stavu j.

Definice

Systém celočíselných náhodných veličin $\{X_t, t \geq 0\}$ *definovaných na pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *nazveme Markovský řetězec se spojitým časem, jestliže*

$$P(X_t = j | X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1) = P(X_t = j | X_s = i)$$

pro všechna $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < s < t$ *a všechna* $i, j, i_n, \ldots, i_1 \in S$ *taková, že* $P(X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1) > 0$.

- $P(X_t = j | X_s = i) = p_{ij}(s, t)$ nazveme pravděpodobnostmi přechodu ze stavu i v čase s do stavu j v čase t;
- pro homogenní řetězec, kde pravděpodobnosti přechodu závisí pouze na rozdílech časů, budeme značit $p_{ij}(s, s+t)$ jako $p_{ij}(t)$;
- absolutní pravděpodobnosti budeme značit $p_j(t) = P(X_t = j), j \in S$ a $p_j(0) = P(X_0 = j), j \in S$ pak budou počáteční pravděpodobnosti.

Matice pravděpodobnosti přechodu, Chapman-Kolmogorova rovnost

- Pro každé t je $\mathrm{P}(t) = \{p_{ij}(t), i, j \in S\}$ čtvercová matice $\rightarrow$ systém matic pravděpodobností přechodu $\{\mathrm{P}(t), t \geq 0\}$.
- Zřejmě platí: $\{\mathrm{P}(0) = I\}$, kde I je jednotková matice.
- Dále dostáváme

$$p_j(t) = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(t) \quad \forall j \in S,$$

zapsáno maticově

$$\mathrm{p}(t)^T = \mathrm{p}(0)^T \cdot \mathrm{P}(t).$$

Ten lze zobecnit na

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \quad \forall i, j \in S,$$

zapsáno maticově

$$\mathrm{P}(s+t) = \mathrm{P}(s) \cdot \mathrm{P}(t),$$

což je **Chapman-Kolmogorova rovnost**.

V dalším textu budeme předpokládat, že

$$\lim_{t \to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}, \quad i, j \in S,$$

kde δ_{ij} značí Diracková funkci, tj. $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ jinak. Tento předpoklad společně se skutečností, že $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ znamená, že řetězec je zprava spojitý v 0.
Dále si označme

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} := \lambda_i \quad \text{a} \quad \lim_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h} := \lambda_{ij}. \tag{4}$$

Definice

Nezáporná čísla λ_{ij} z (4) se nazývají intenzity přechodu, číslo λ_i z (4) je pak celková intenzita. Matice $\Lambda = \{\lambda_{ij}, i, j \in S\}$, kde $\lambda_{ii} = -\lambda_i$ se nazývá matice intenzit přechodu.

Věta

Pro homogenní Markovský řetězec platí

$$P(X_t = i \text{ pro } t \in (s, s+h) | X_s = i) = e^{-\lambda_i h} \quad \forall s \geq 0, h \geq 0.$$

Věta

Je-li $\lambda_i = 0$, *pak* $p_{ii}(t) = 1$ *pro všechna* $t \geq 0$. *Je-li* $0 < \lambda_i < \infty$, *má doba, po kterou řetězec setrvává ve stavu* i, *exponenciální rozdělení s parametrem* λ_i.

Věta

Nechť $0 < \lambda_i < \infty$. *Potom pravděpodobnost, že řetězec z počátečního stavu* i *přejde nejdříve do stavu* j, *je rovna* $\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}$ *pro všechna* $j \neq i$.

Nechť $P(X_0 = j) = 1$, J je čas, kdy řetězec poprvé opustí stav j, a

$$\tau_j = \inf\{t \geq J : X_t = j\}.$$

Definice

Stav j Markovského řetězce se nazývá trvalý, jestliže buï $q_j = 0$ nebo $q_j > 0$ a zároveň

$$P_j(\tau_j < \infty) = 1.$$

Stav j Markovského řetězce se nazývá přechodný, jestliže $q_j > 0$ a zároveò

$$P_j(\tau_j = \infty) > 0.$$

Definice

Trvalý stav j Markovského řetězce se nazývá nenulový, jestliže buď $q_j = 0$ nebo $\mathbb{E}[\tau_j] < \infty$. V opačném případě se řetězec nazývá nulový.

Definice

Stav $j \in S$ se nazývá absorpční, jestliže $q_j = 0$. Jestliže $q_j > 0$, pak se stav j nazývá stabilní, pokud $q_j < \infty$, a nestabilní, pokud $q_j = \infty$.

Definice

Řekneme, že stav j je dosažitelný ze stavu i, jestliže existuje $t > 0$ takové, že $p_{ij}(t) > 0$.

Poznámka

Analogicky jako pro řetězce s diskrétním časem můžeme definovat také nerozložitelnost řetězce se spojitým časem.

Definice

Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ *je homogenní řetězec se spojitým časem, množinou stavů* S *a maticemi pravděpodobností přechodu* $\mathrm{P}(t), t \geq 0$*. Potom* π *se nazývá stacionární rozdělení daného řetězce, jestliže platí*

$$\pi^T = \pi^T \mathrm{P}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Věta

Nechť počáteční rozdělení homogenního Markovského řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ *je stacionární. Pak je tento řetězec striktně stacionární a pro všechna* $t \geq 0$ *platí*

$$p_j(t) = P(X_t = j) = \pi_j, \quad j \in S,$$

kde π_j *jsou počáteční stacionární pravděpodobnosti.*

Poissonův proces $\{N_t, t \geq 0\}$ popisuje počet událostí do času t.
Předpoklady:

- počty událostí v disjunktních časových intervalech jsou nezávislé náhodné veličiny (proces s nezávislými přírustky),
- počty událostí v časovém intervalu $(t, t+h)$ závisí pouze na h,
- pro počty událostí v časovém intervalu $(t, t+h)$ platí

$$P(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h),$$
$$P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h),$$
$$P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h),$$

kde symbol $o(h)$ značí, že $o(h)/h \to 0$ při $h \to 0+$, a λ je konstanta, která se nazývá intenzita Poissonova procesu.

- Z předpokladu nezávislosti přírustků plyne Markovská vlastnost
- Pro pravděpodobnosti přechodu platí

$$
\begin{aligned}
P(N_{t+h} = j | N_t = i) &= \lambda h + o(h) && j = i+1 \\
&= 1 - \lambda h + o(h) && j = i \\
&= o(h) && j > i+1 \\
&= 0 && j < i.
\end{aligned}
$$

- Intenzity přechodu jsou

$$
q_{i,i+1} = \lambda, \quad q_i = -qii = \lambda, \quad q_{ij} = 0 \text{ jinak.}
$$

- Navíc se dá ukázat, že pro tento proces platí

$$
P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \ldots,
$$

což je Poissonovo rozdělení.

- Není to Markovský řetězec, pouze Markovský proces (spojitá množina stavů)!
- Wienerův proces (někdy také nazýván *Brownův pohyb*) $\{W_t, t \geq 0\}$ je definován následujícími vlastnostmi:
    - $\{W_t, t \geq 0\}$ má spojité trajektorie,
    - $W_0 = 0$,
    - $\{W_t, t \geq 0\}$ má nezávislé přírustky,
    - přírustek hodnoty v časovém intervalu (s, t) má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $(t - s)$.

Poznámka

Občas se místo $(t - s)$ jako rozptyl uvádí $\sigma^2(t - s)$, kde σ^2 je kladná konstanta.