DC13

úterý 23. května 2023 15:06

16.1. Pro každou funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dokažte z podmínky (16.1), které z těchto čtyř tvrzení platí (a pro jaké n): funkce je konvexní, konkávní, konvexní i konkávní, ani konvexní ani konkávní.

a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} + b$ nerovnost platí s rovností => konvexní i konkávní

b) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$ konvexní, ne konkávní

d) $f(\mathbf{x}) = \operatorname{median}_{i=1}^n x_i$ (medián čísel $x_1, \ldots, x_n$) pro $n \le 2$ konvexní i konkávní; $n > 2$ není —||— ani —||—

e) $f(\mathbf{x}) = \min_{i=1}^n |x_i|$
$n=1$ konvexní
$n=2$ není konvexní -> není splněna podmínka
$n>2$ —||—— -> podle $x=2$

16.3. Pro každou funkci dokažte, které z těchto čtyřech tvrzení platí: funkce je konvexní, konkávní, konvexní i konkávní, ani konvexní ani konkávní. Můžete použít podmínku (16.1) a věty z §16.2 a §16.3.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ konvexní

b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ konkávní

c) $f(x, y) = |x - y|$ není ani konkávní ani konvexní

e) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ konvexní

16.7. Každý z obrázků zobrazuje některé vrstevnice funkce dvou proměnných a jejich výšky. Je možné, aby funkce, která má tyto vrstevnice, byla konvexní? Dokažte z podmínky (16.1).

16.8. Co je subkontura výšky 2 funkce jedné proměnné $f(x) = x^2 - x$?

interval $\langle -1, 2 \rangle$

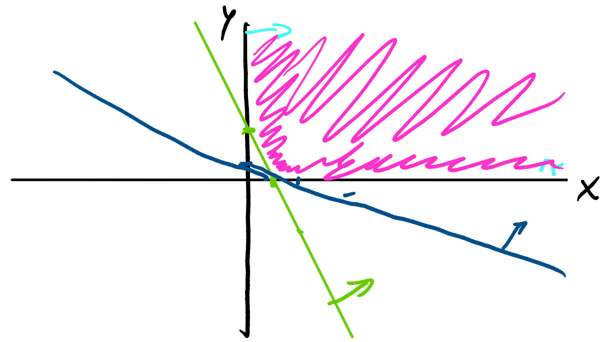
17.1. Mějme úlohu

$$\min\{\, f(x,y) \mid x,y \geq 0,\ 2x+y \geq 1,\ x+3y \geq 1 \,\}.$$

Nakreslete množinu přípustných řešení. Pro každou z následujících účelových funkcí najděte úvahou množinu optimálních řešení a optimální hodnotu:

c) $f(x,y) = \min\{x,y\}$

d) $f(x,y) = \max\{x,y\}$



17.5. Chceme rozestavit n lidí v místnosti čtvercového půdorysu tak, aby ‘každý byl od každého co nejdále’. Navrhněte možné formulace této úlohy a u každé určete, zda je konvexní.

1. $\max \min_{i \neq j} \|p_i - p_j\|$, p_i je pozice i-tého člověka

2. $\min \sum_{i \neq j} \|p_i - p_j\|$