



DCGI

KATEDRA POČÍTAČOVÉ GRAFIKY A INTERAKCE

Úvod do 3D geometrie

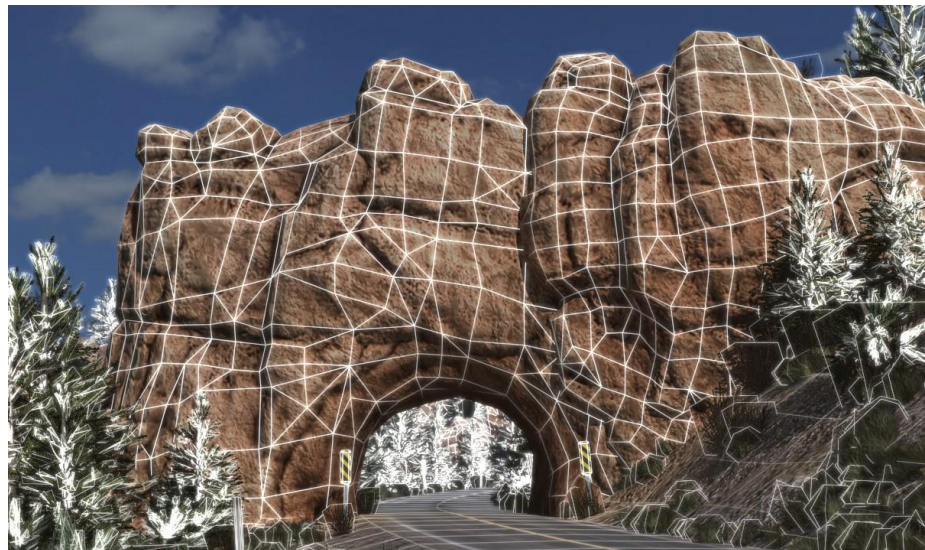
Jiří Bittner

Obsah přednášky

- Úvod do 3D geometrie *GAE 4.1-4.3*
 - Vektory a transformace
 - Sčítání a násobení vektorů
 - Rotace, translace a jiné transformace
 - Transformace v homogenních souřadnicích
 - Skládání transformací
- Reprezentace 3D objektů a scény *GAE 10.1.1*
- Kamera a promítání *GAE 10.1.4*
 - Pohledové a projekční transformace

Úvod do 3D geometrie

- Matematický model “světa” v počítači
 - Zobrazení scény
 - Animace
 - Výpočet kolizí
 - Simulace
 - Plánování akcí
 - ...
- Pozice vrcholů, ploch, těles, ...
 - atributy (normály, barva, hustota, ...)
 - transformace vrcholů
- Fyzikální veličiny: síla, rychlost, zrychlení, ...

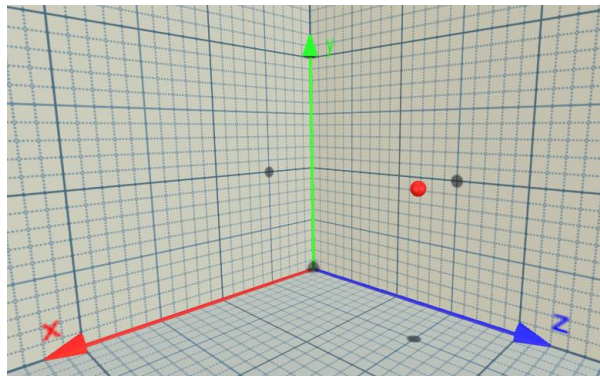


Bod v 3D prostoru

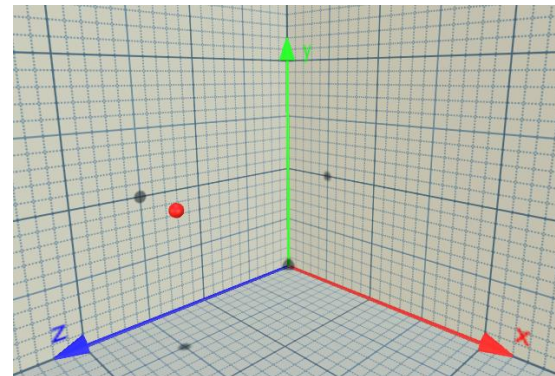
- Kartézská soustava souřadnic
- Osy vzájemně kolmé přímky
 - Protínají se v počátku
 - Uniformní krok
 - Ortonormální báze

$$A=[5, 10, 15]$$

$$A=\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$



Levotočivá soustava (LHS)
Unity, Direct3D



Pravotočivá soustava (RHS)
OpenGL

Vektory

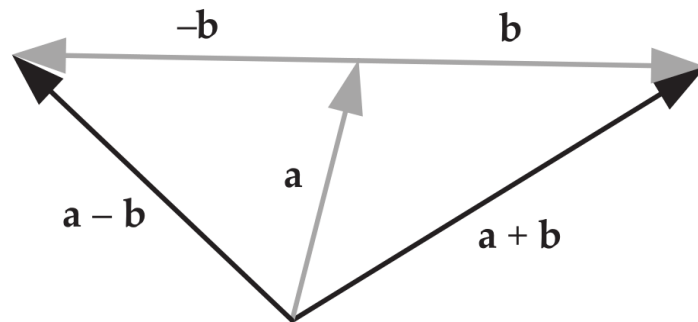
- Vektor: uspořádaná n-tice
 - Prvek vektorového prostoru
- Vektorový prostor \mathbb{R}^2 \mathbb{R}^3 \mathbb{R}^4
 - prostor uspořádaných dvojic/trojic/čtveřic reálných čísel
 - axiomy vektorového prostoru – viz. Lineární algebra (LAG)
- Značení \vec{a} , \mathbf{a}

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{R}^4$$

Sčítání vektorů

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix}$$



- Komutativní

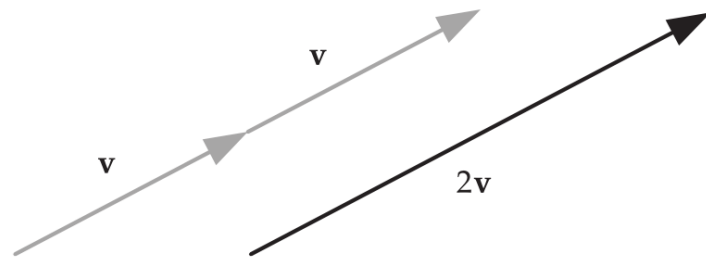
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

- Asociativní

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

Násobení vektoru skalárem

$$\mathbf{c} = k\mathbf{a} = \begin{bmatrix} k a_x \\ k a_y \\ k a_z \end{bmatrix}$$



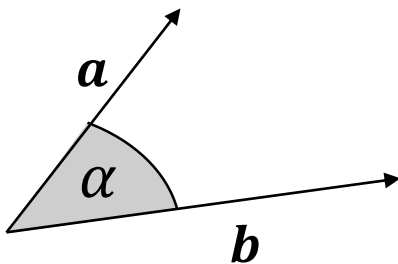
- Distributivní $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$

Skalární součin

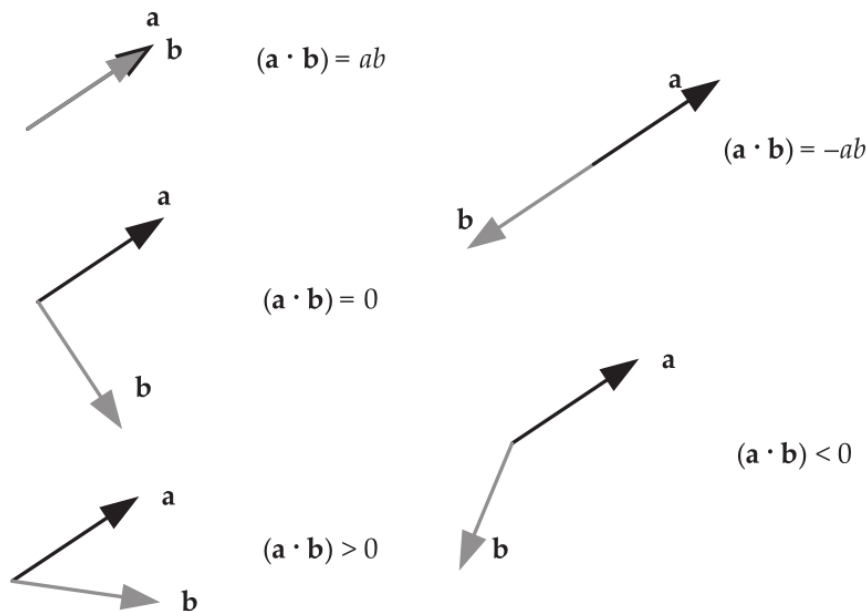
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Úhel mezi vektory

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \alpha$$



Skalární součin



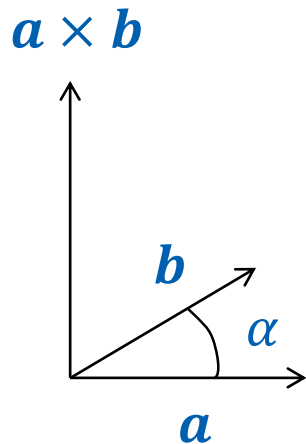
- Ortogonální vektory $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
- Ortonormální vektory $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$

Vektorový součin (cross product)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Vektor *kolmý* na \mathbf{a} i \mathbf{b}

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \alpha$$



Transformace

- Proč transformace (ve 3D)?
- Použití transformací
 - Modelování, zobrazování, animace, fyzika
- Druhy transformací
 - Posunutí (translace)
 - Rotace
 - Změna měřítka
 - Zkosení (shear)
 - Perspektiva

Vyjádření transformace

- Body, směry, normály reprezentovány vektory
- Obecná transformace

$$\mathbf{a}' = f(\mathbf{a})$$

- Lineární transformace

$$a'_i = \sum c_{ij} a_j$$

$$\mathbf{a}' = M\mathbf{a}$$

Homogenní souřadnice

- Přejchod z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^4
 - Nutné pro *posunutí a projekci* !
- Zavedeme čtvrtou souřadnici w
 - $w = 1$ (*bod ve 3D*), $w = 0$ (*směr ve 3D*)

$$\mathbf{a} = (x, y, z, w)$$

- Přejchod z homogenních souřadnic:

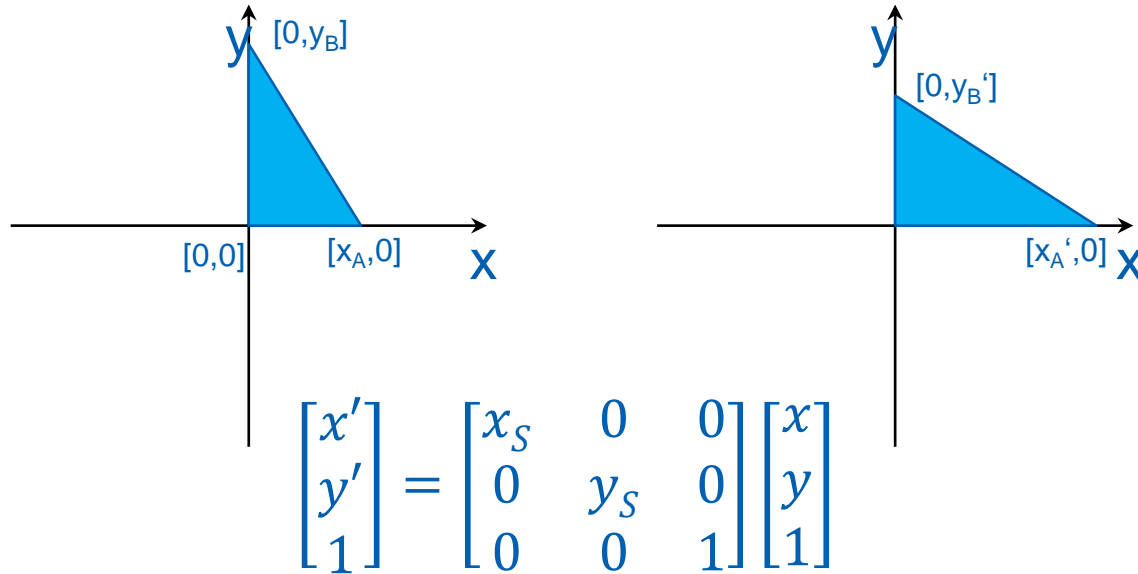
$$\mathbf{a} = \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, 1 \right)$$

Transformace – maticové vyjádření

$$2D \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{transformační} \\ \textit{matice} \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

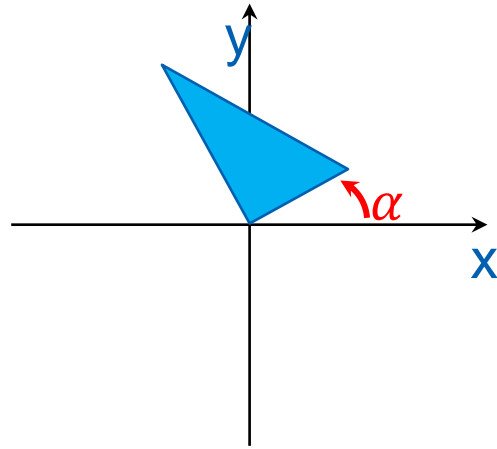
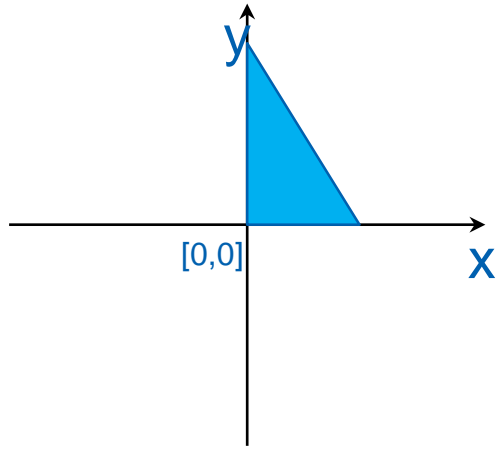
$$3D \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{transformační} \\ \textit{matice} \\ 4 \times 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Změna měřítka (scaling)



- Uniformní ($x_s = y_s$) vs neuniformní ($x_s \neq y_s$)

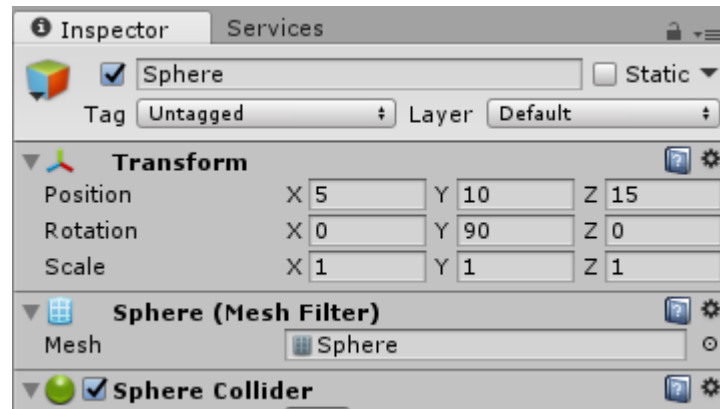
Rotace



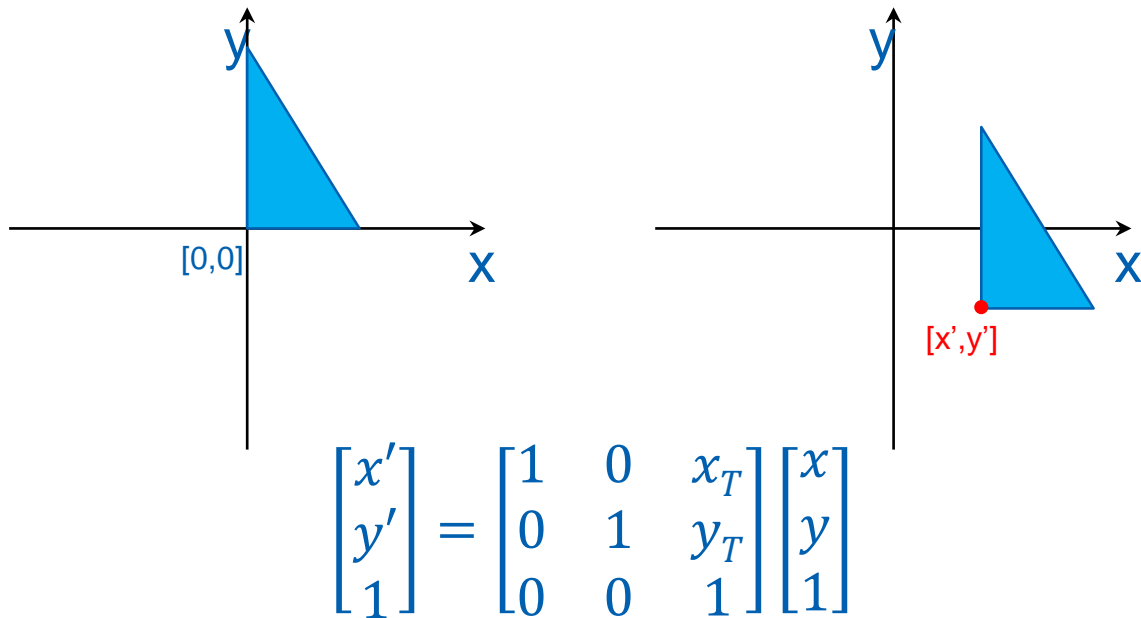
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotace – Eulerovy úhly

- Obecná rotace pomocí složení R_x, R_y, R_z
 - Intuitivní
 - Záleží na pořadí rotací
- Použito v Unity
 - Pořadí: R_z, R_x, R_y
 - Interně konverze na kvaterniony (viz příští přednáška)



Posunutí (translace)



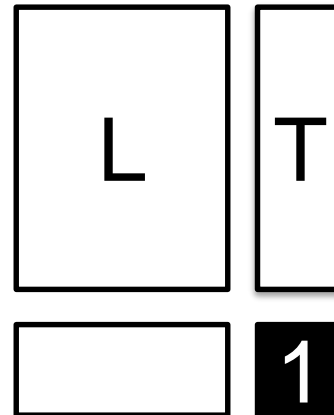
- Pozn. posunutí není lineární transformace
- Nelze ji vyjádřit maticí 2x2 (ve 2D) nebo 3x3 (ve 3D)

Translance ve 3D

$$\mathbf{a}' = M\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x + t_x \\ a_y + t_y \\ a_z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformace v homogenních souřadnicích

- Transformační matice:
 - L: lineární transformace (rotace, měřítko)
 - T: translace
 - 0, 1: pro afinní transf. je tento řádek vždy (0, 0, 0, 1)



Skládání transformací

- Násobení matic! $x' = A \cdot B \cdot C \cdot x = M \cdot x$

$$M = A \cdot B \cdot C$$

- Transformace aplikovány v pořadí C, B, A !

- Je asociativní

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

- Není komutativní

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

- záleží na pořadí transformací

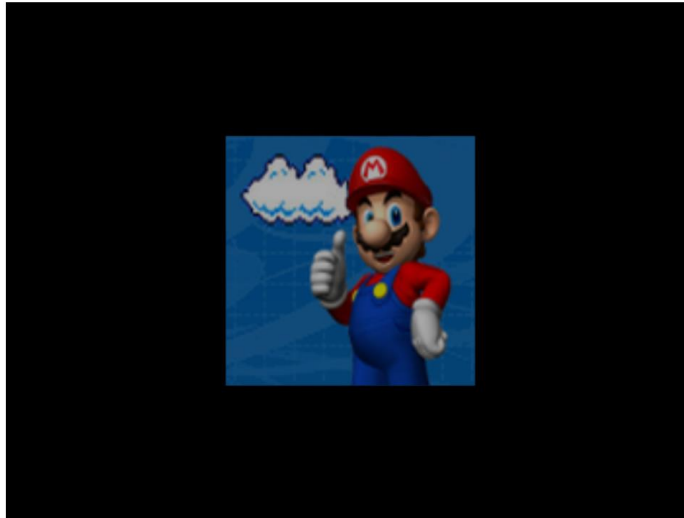
Skládání transformací

- Popis transformací
 - SRT – scale, rotation, translation (Unity)
 - Matice
- Pro animace lepší SRT
 - Interpolace transformací
- Při zobrazování konverze do maticové reprezentace
 - Složená transformační matice

DEMO

<https://cent.felk.cvut.cz/predmety/39PHA/demos/transformations.html>

Transformation example



Model matrix

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

Reset

View matrix (read only)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

Reset

Souřadné systémy

- Object / Modeling coordinates
 - Relativně vůči počátku objektu
- World coordinates
 - Translace a rotace objektu vůči počátku světa
- Camera / Eye coordinates
 - Kamera je vždy v počátku
- Screen / Window coordinates
 - Perspektivní transformace
 - x, y souřadnice + z-buffer

Více v PGR!

Obsah přednášky

- Úvod do 3D geometrie *GAE 4.1-4.3*
 - Vektory a transformace
 - Sčítání a násobení vektorů
 - Rotace, translace a jiné transformace
 - Transformace v homogenních souřadnicích
 - Skládání transformací
- Reprezentace 3D objektů a scény *GAE 10.1.1*
- Kamera a promítání *GAE 10.1.4*
 - Pohledové a projekční transformace

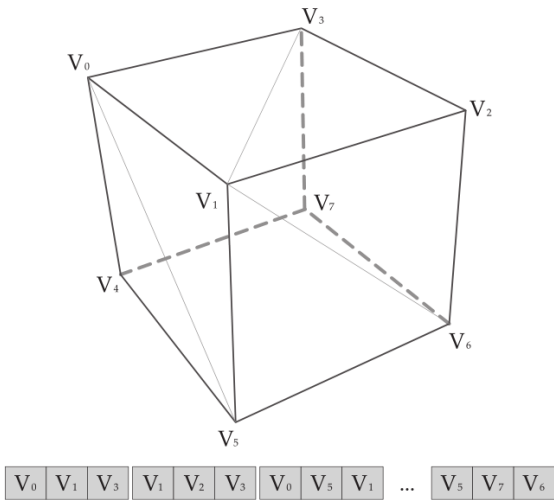
Reprezentace 3D objektů

- Hraniční reprezentace (b-rep)
- Objemová reprezentace (volumetric)
- Ve hrách
 - Polygonální / trojúhelníkové síť
 - Sprites

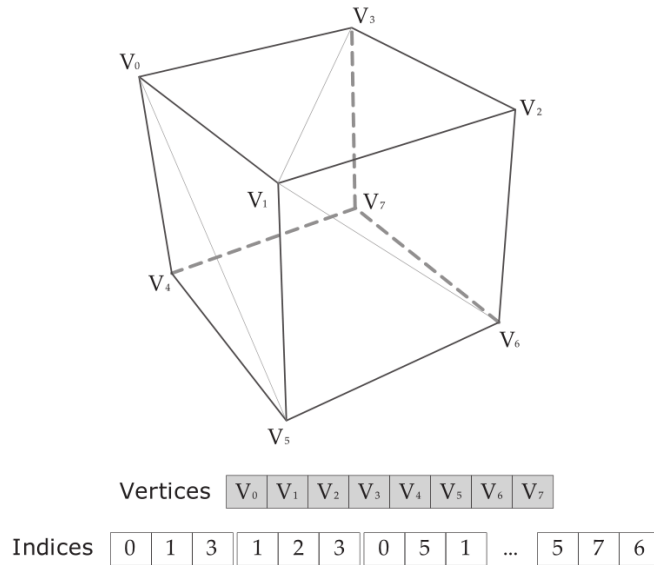
Polygonální síť (mesh)

- Seznam polygonů definujících **hranici (povrch) objektu**
 - Lépe konvexní polygony
 - Nejlépe trojúhelníky (triangulace)
- Různé reprezentace
 - Posloupnost vrcholů (počet vrcholů na polygon nebo oddělovač)
 - Seznam vrcholů + posloupnost indexů (16bit)

Trojúhelníková síť



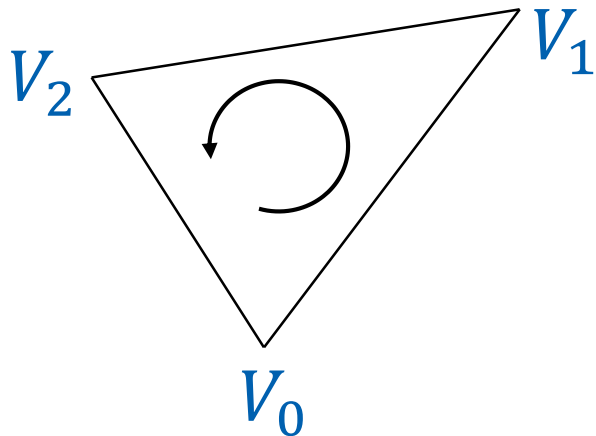
triangle list



indexed triangle list

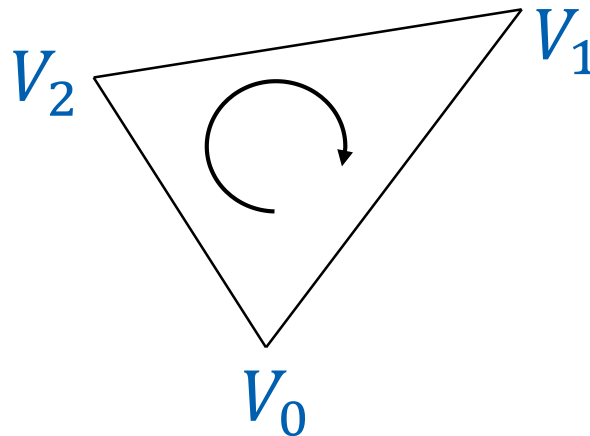
Trojúhelníková síť – orientace plošek

- Interpretace přední / zadní strany trojúhelníků



$V_0V_1V_2$

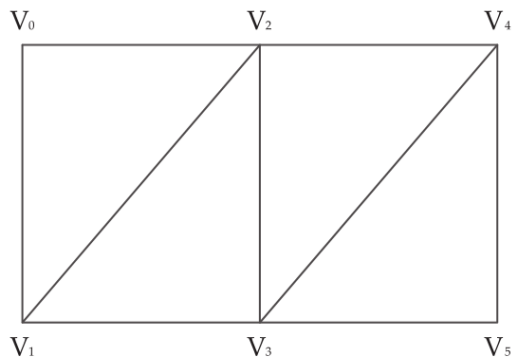
CCW (counter clock wise)



$V_0V_2V_1$

CW (clock wise)

Trojúhelníková síť – kompaktní reprezentace



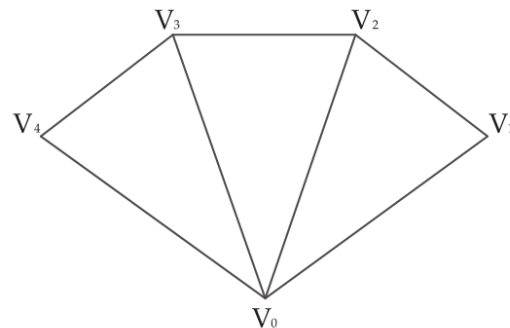
Vertices

| | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| V ₀ | V ₁ | V ₂ | V ₃ | V ₄ | V ₅ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|

Interpreted
as triangles:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

triangle strip



Vertices

| | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| V ₀ | V ₁ | V ₂ | V ₃ | V ₄ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|

Interpreted
as triangles:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 3 | 0 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

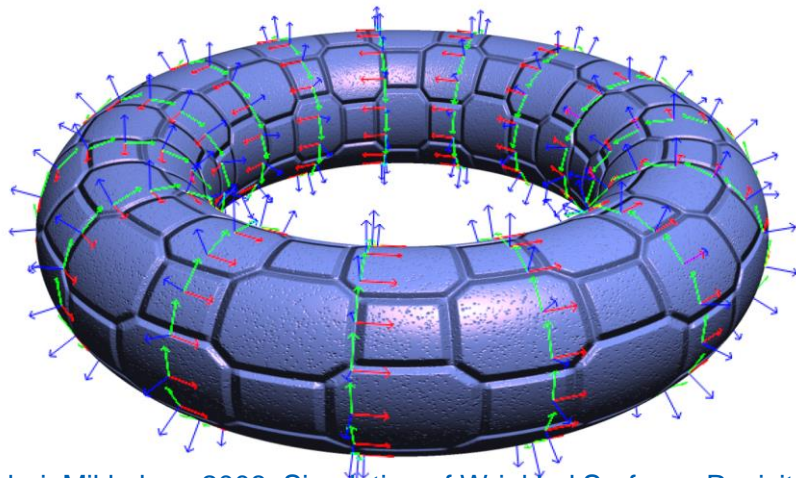
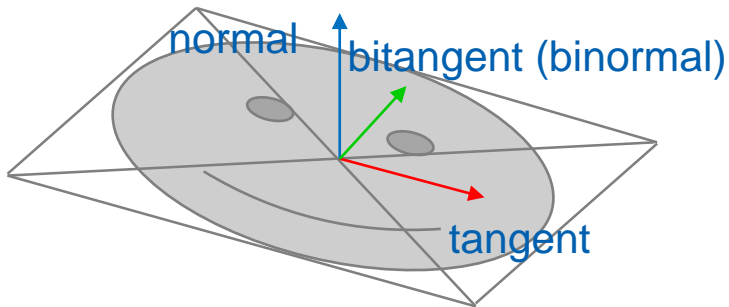
triangle fan

implicitní indexace – nezabírá paměť!

Trojúhelníková síť

■ Informace ve vrcholu

- Geometrie: poloha, normála, *tangenta*, *bitangenta* (*tangent space*)



Zdroj: Mikkelsen 2008, Simulation of Wrinkled Surfaces Revisited

- Materiál: texturovací (uv) souřadnice, barva
- Animace: váhy a indexy kostí
- ...

Trojúhelníková síť - Modelování

■ Nástroje

- Maya, 3DS Max, Blender, Cinema

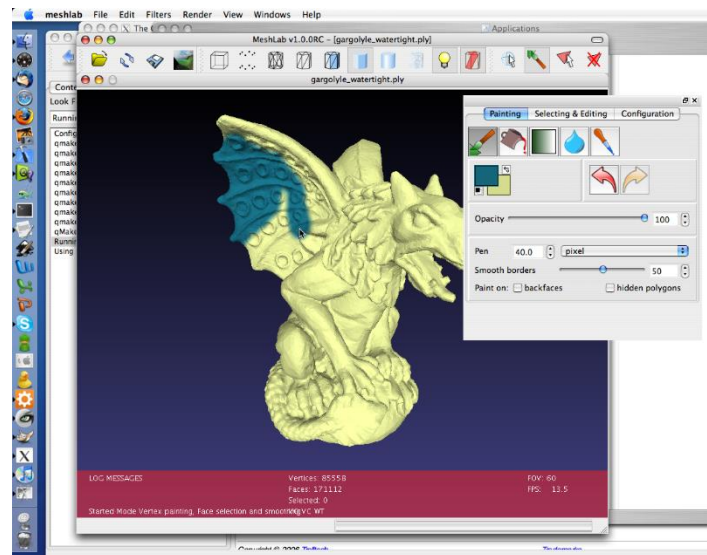
(předmět VGO)

■ Editace / Optimalizace

- MeshLab, ...

■ Import modelů

- Import nebo dopočítání normál, tangent, uv souřadnic
- Optimalizace sdílení vrcholů (welding)
- Optimalizace pořadí vrcholů
- Ztrátové kódování pozic, normál, uv
 - Unity - high: 20/8/16 bits, low: 10/6/8

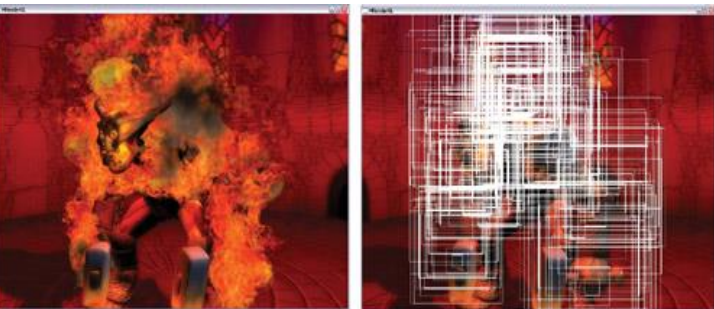


Obsah přednášky

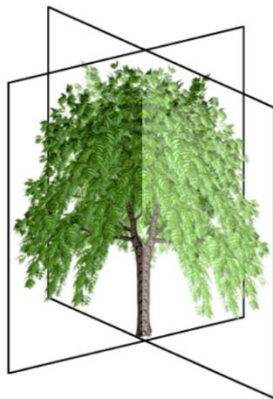
- Úvod do 3D geometrie *GAE 4.1-4.3*
 - Vektory a transformace
 - Sčítání a násobení vektorů
 - Rotace, translace a jiné transformace
 - Transformace v homogenních souřadnicích
 - Skládání transformací
- Reprezentace 3D objektů a scény *GAE 10.1.1*
- Kamera a promítání *GAE 10.1.4*
 - Pohledové a projekční transformace

Sprites, Billboards

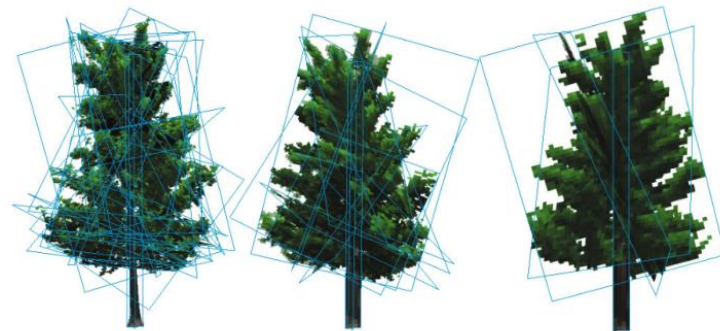
- Nahrazení geometrie obrázky – sprite
- Billboard = sprite vždy natočený ke kameře
- Částicové systémy (billboards), vegetace (sprites + LOD)



[Nguyen 2004] Fire in the Vulcan Demo. NVIDIA.



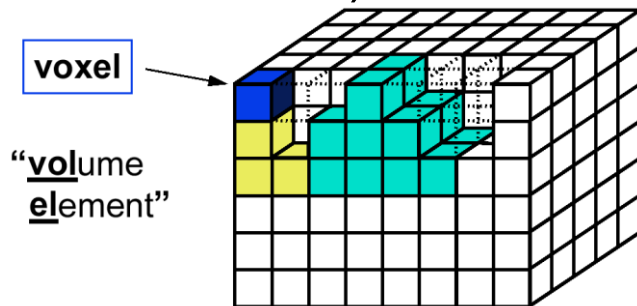
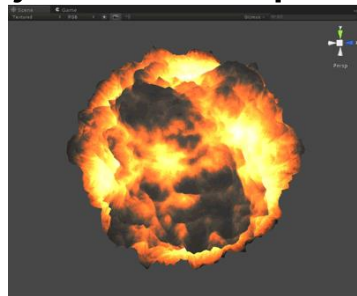
[Umlauf 2004] Image-Based Rendering of Forests.



[Fuhmann 2005] Extreme Model Simplification for Forest Rendering

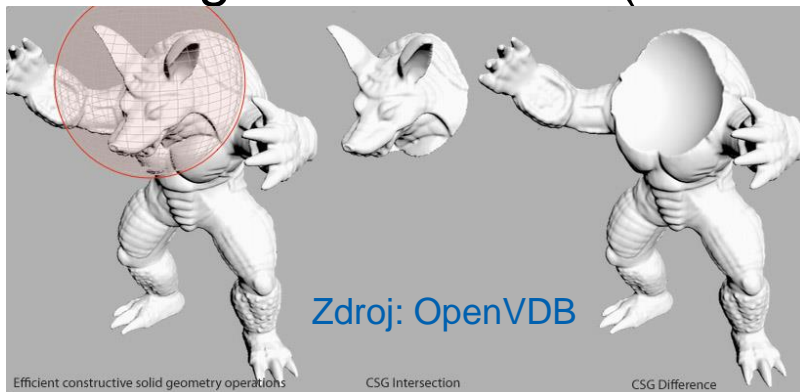
Jiné reprezentace

- Objemová reprezentace (3D textura + speciální shader)

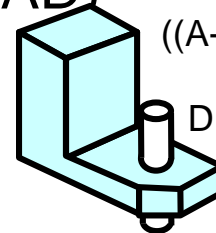


Zdroj: Ikits et al. GPU Gems 2 / S. Craeynest

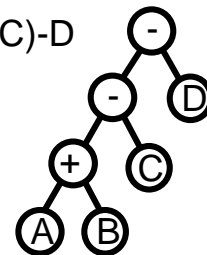
- Konstruktivní geometrie těles (3D tisk, OpenSCAD)



Zdroj: OpenVDB



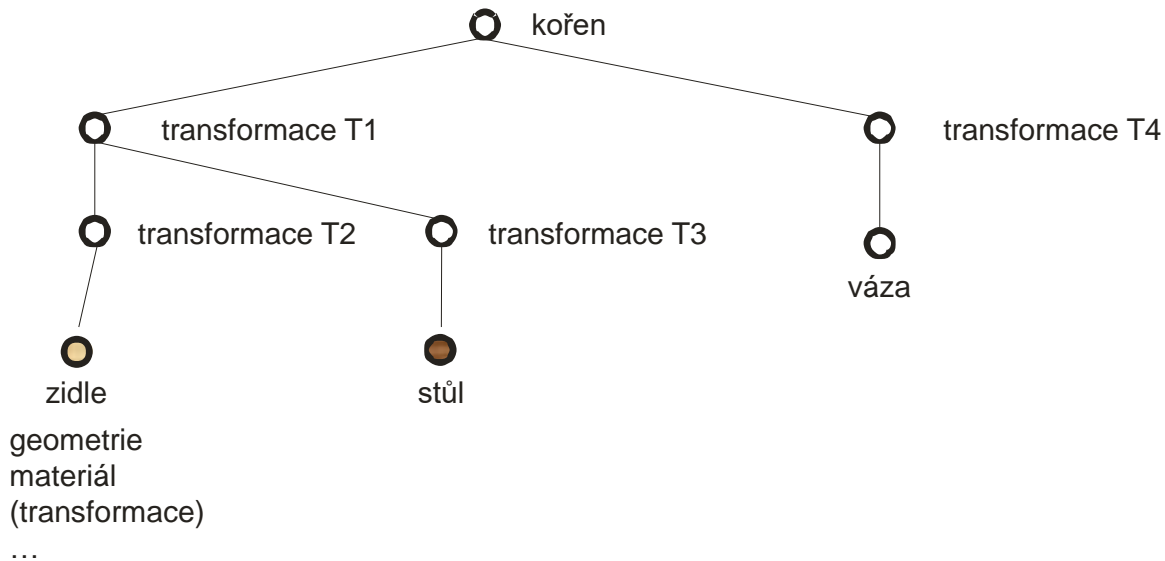
$((A+B)-C)-D$



Graf scény

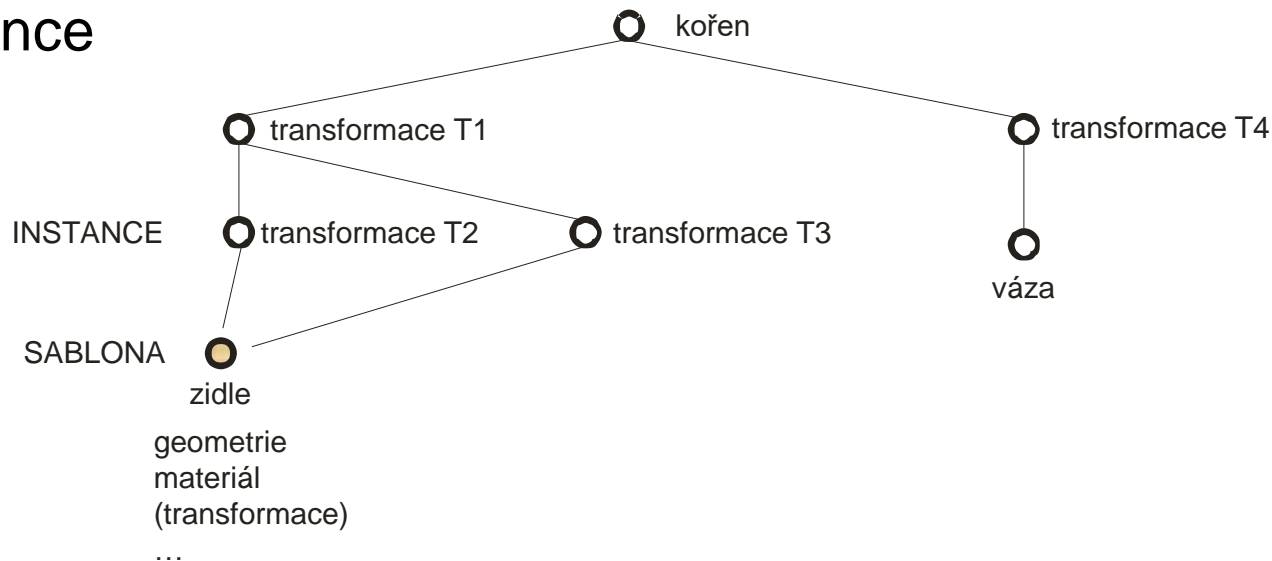
■ Logické uspořádání scény

- Pojmenování skupin
- Aktivace / deaktivace
- Aplikace transformací
- Skládání transformací
- Částečné prostorové uspořádání



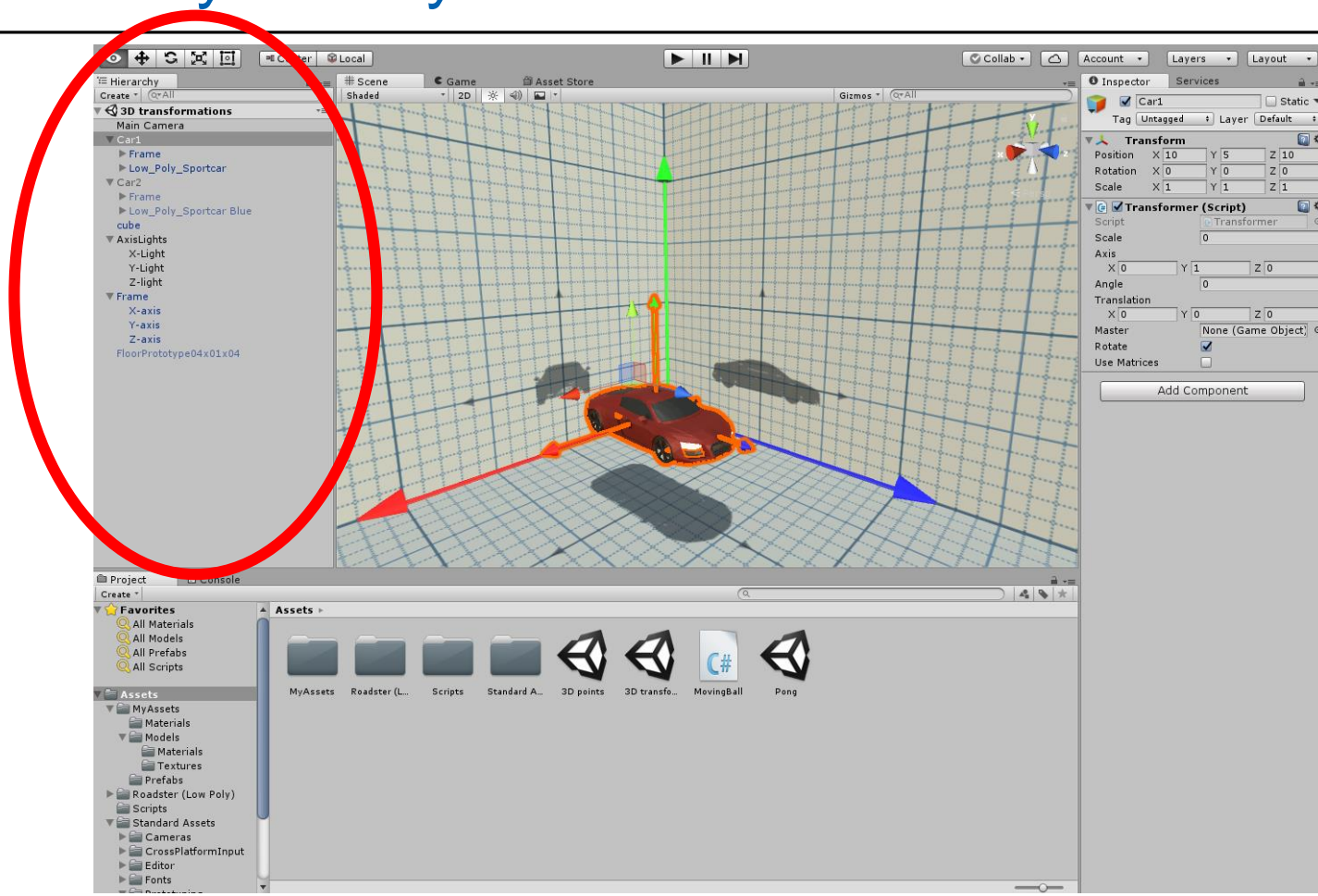
Graf scény – instancování

- Sablona / instance



- Úspora paměti, propagace změn
- Orientovaný acyklický graf (DAG) – není strom !
 - Důsledky: např. složenou transformaci není možné držet u šablony

Graf scény v Unity



Obsah přednášky

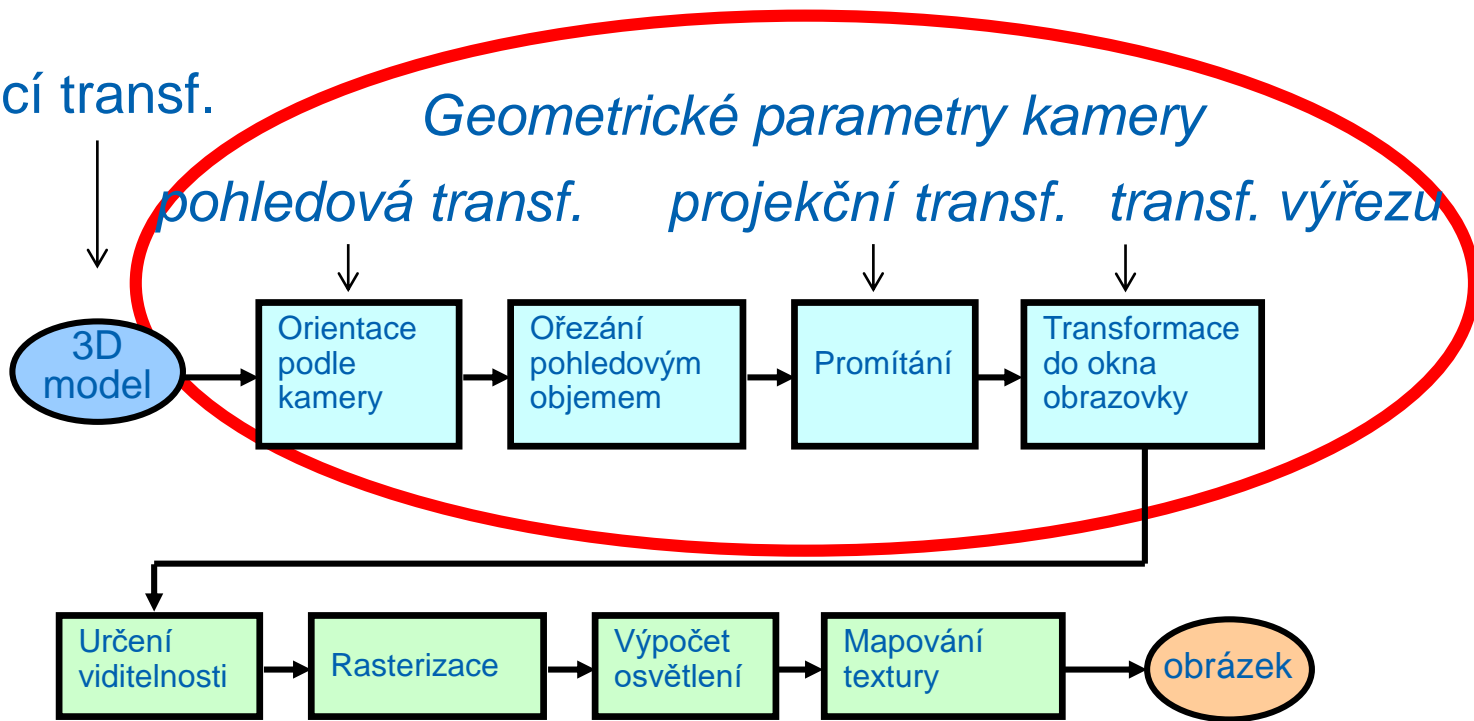
- Úvod do 3D geometrie *GAE 4.1-4.3*
 - Vektory a transformace
 - Sčítání a násobení vektorů
 - Rotace, translace a jiné transformace
 - Transformace v homogenních souřadnicích
 - Skládání transformací
- Reprezentace 3D objektů a scény *GAE 10.1.1*
- Kamera a promítání *GAE 10.1.4*
 - Pohledové a projekční transformace

Kamera

- Idealizovaná kamera (pin-hole kamera)
 - Idealizovaná geometrická optika
 - Realistické efekty jako post-process (depth of field, barrel distortion)
- Popis kamery
 - Pohledová transformace (pozice, orientace)
 - Uzel v grafu scény
 - Pozice/orientace ze (složené) transformace uzlu
 - Další parametry
 - Projekční transformace (záběr, výřez)
 - Nastavení vykreslování (culling, render target, ...)

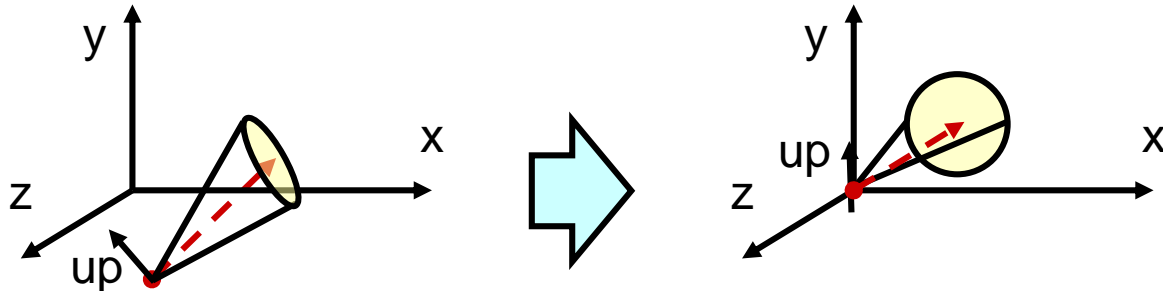
Zobrazovací řetězec – Rendering pipeline

modelovací transf.



Kamera - pohledová transformace

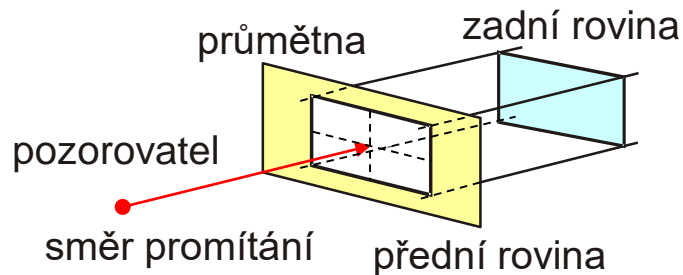
- Transformace scény do unifikované polohy



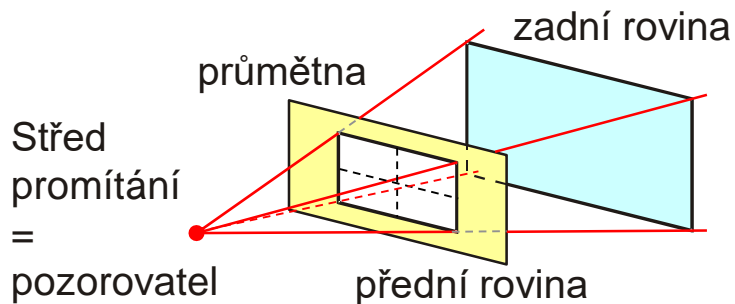
- Pozice kamery** do $[0,0,0]$... posun
- Pohledový vektor** do směru -z (v RHS) ... otočení
 - Průmětna // s rovinou xy
- Up vector** // s osou y ... otočení kolem osy z
- V Unity: inverze složené transformace pro uzel kamery*

Kamera - projekční transformace

- Transformace z prostoru do průmětny
- Záběr - pohledový objem (*viewing volume*)
 - Vymezuje část prostoru, která se promítá na průmětnu

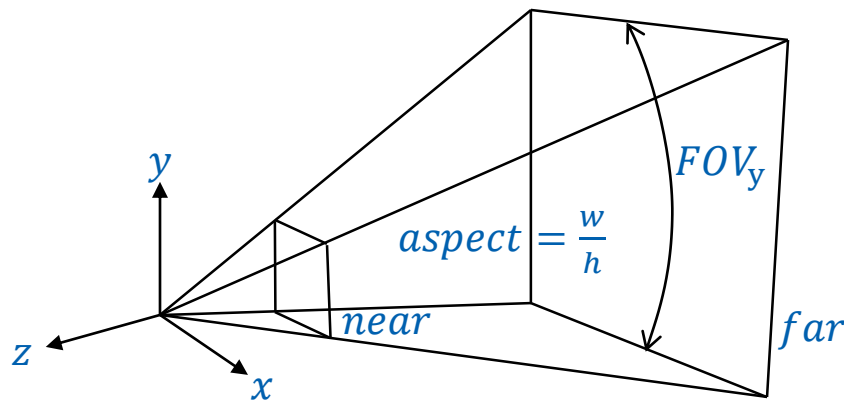


Ortografická projekce
záběr = kvádr



Perspektivní projekce
záběr = komolý jehlan

Symetrická perspektivní projekce



$$P = \begin{bmatrix} \frac{\cotg \frac{FOV_y}{2}}{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cotg \frac{FOV_y}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kamera – transformace výřezu (viewport)

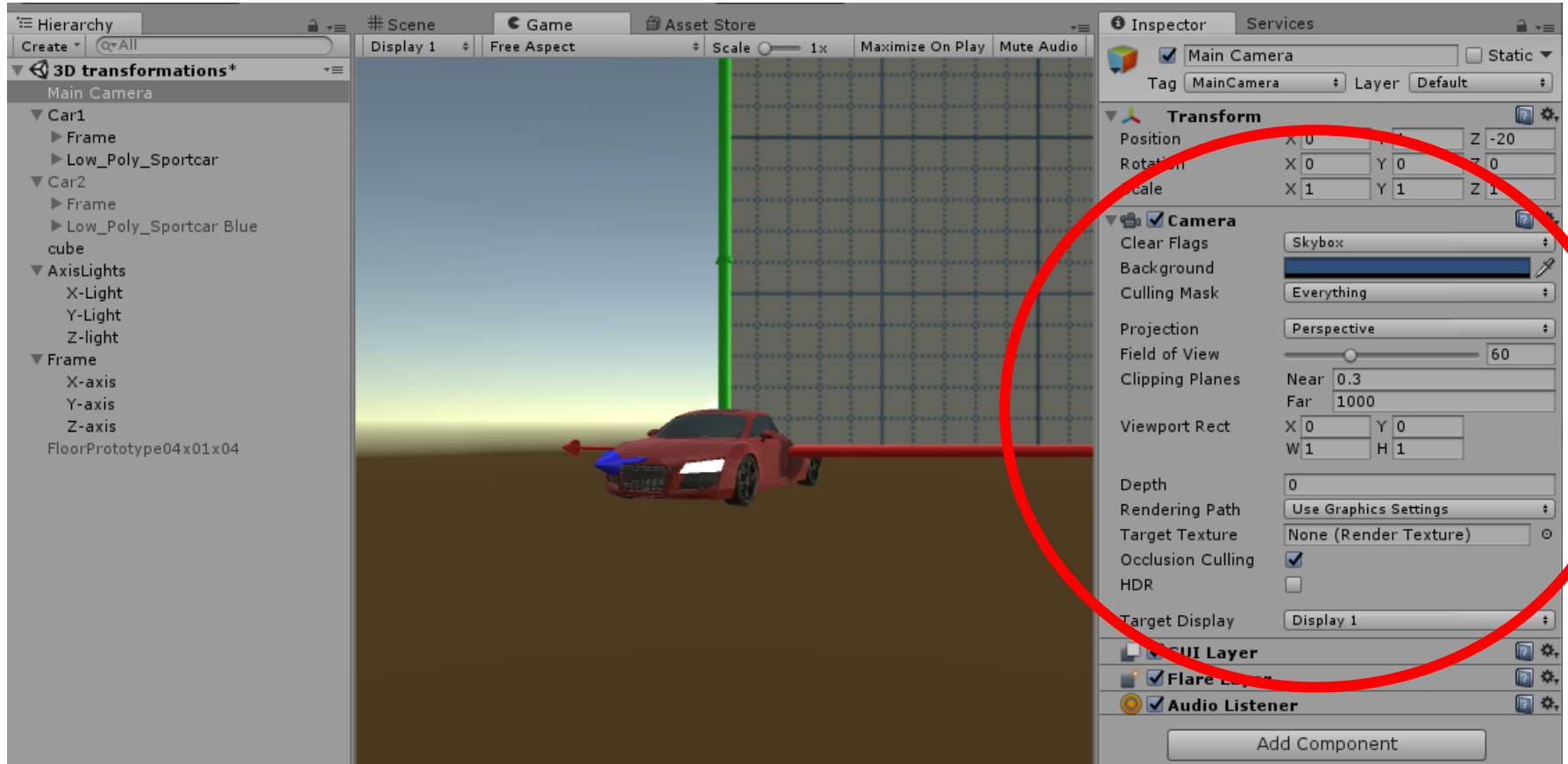
- Velikost a pozice výřezu na obrazovce
- Poslední aplikovaná transformace

$$x' = (x_{\text{NDC}} + 1) \frac{W}{2} + X$$

$$y' = (y_{\text{NDC}} + 1) \frac{H}{2} + Y$$

- x_{NDC} a y_{NDC} výstupem předchozích transformací (rozsah -1..1)

Kamera - Unity





DCGI

KATEDRA POČÍTAČOVÉ GRAFIKY A INTERAKCE

Otázky?