Zkouška OPT 10.2.2021

Každý příklad pište na samostatnou stránku a ofoťte do samostatného souboru, jehož jméno (bez přípony) je číslo příkladu.
Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu se nepočítá.

1. **(5b)** Stroj na lisování plastů umí vyrábět dva druhy výrobků (v jeden okamžik ovšem umí vyrábět jen jeden druh), hadičky a gumičky. Hadičky vyrábí rychlostí 200 kg/hod, gumičky rychlostí 140 kg/hod. Je nasmlouváno, že hadiček se nesmí vyrobit více než 6000 kg a gumiček se nesmí vyrobit více než 4000 kg. Z prodeje hadiček je zisk 25 Kč/kg, z prodeje gumiček 30 Kč/kg. Kolik kg máme vyrobit hadiček a gumiček, chceme-li největší zisk a máme-li k dispozici 40 hodin práce stroje? Cenu surovin a cenu za běh stroje nepočítáme. Napište jako lineární program.

   $\max 25h + 30g$ z.p. $h/200 + g/140 \le 40$, $h \le 6000$, $g \le 4000$, $h, g \ge 0$ (prvni omezeni se da psat taky jako $7h + 10g \le 56000$)

2. **(4b)** V geometrii počítačového vidění se vyskytuje rovnice $\mathbf{x}^T\mathbf{F}\mathbf{y} = 0$, kde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ jsou známé vektory a $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ je neznámá matice. Tato rovnice se dá zapsat ve tvaru $\mathbf{a}^T\mathbf{f} = 0$, kde $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^9$ je sloupcový vektor vytvořený ze sloupečků matice $\mathbf{F}$ zapsaných pod sebou a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^9$ je sloupcový vektor, jehož složky jsou výrazy obsahující složky vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Najděte vektor $\mathbf{a}$.

   $\mathbf{a} = \mathbf{y}^T \otimes \mathbf{x}^T = (x_1y_1, x_2y_1, x_3y_1, x_1y_2, x_2y_2, x_3y_2, x_1y_3, x_2y_3, x_3y_3)$ (viz resene cviceni 2.6a ve skriptech).

3. Máme podprostor $U = \operatorname{span}\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$.

   (a) **(2b)** Najděte libovolnou bázi podprostoru $U^\perp$.

   Lib. násobek $(-2, 1, 1)$, najdeme např. pomocí vektorového součinu.

   (b) **(4b)** Najděte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{x} = (-1, 1, 0)$ na podprostor U. Z možných postupů výpočtu zvolte takový, který vykoná co nejméně aritmetických operací (plus, mínus, krát, děleno) za předpokladu, že už máte bázi podprostoru $U^\perp$. Tento postup jednoznačně popište.

   Když báze je $\mathbf{u} = (-2, 1, 1)$, tak projekce bodu $\mathbf{x}$ na U je

   $$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \frac{1}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

   kde součin tří matic se musí počítat odzadu (viz zavorka), jinak to zabere víc operací.

4. Hledáme extrémy funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + 2y$ na množině $X = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 = 0 \,\}$.

   (a) **(3b)** Úlohu vyřešte algebraicky. U každého extrému napište, zda je lokální nebo globální. Pro každý stacionární bod odůvodněte, proč je to minimum, maximum nebo nic z toho. K tomu nemusíte použít podmínky druhého řádu, ale můžete uvést jiný argument (vycházející např. z náčrtku).

   $L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 - 4x + y^2)$, stacionarni body (x, y, λ) funkce L jsou $(2 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{4}{\sqrt{5}}, \mp\frac{\sqrt{5}}{4})$.

   (b) **(3b)** Ověřte výsledek úvahou pomocí náčrtku. Na náčrtku musí být množina X, všechny extrémy, a vrstevnice funkce f procházející každým extrémem.

   $x^2 - 4x + y^2 = (x - 2)^2 + y^2 - 4$, takze X je kruznice se stredem v bode $(2, 0)$ a polomerem 2.

5. Jsou dány body $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$. Hledáme čísla $a, b \in \mathbb{R}$ taková, aby součet druhých mocnin (kolmých) vzdáleností bodů od roviny $P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by \,\}$ byl minimální.

   (a) **(3b)** Má tato úloha vždy optimální řešení? Vysvětlete.

   Ma reseni prave tehdy kdyz optimalni rovina neni svisla (tj. rovnobezna s osou z).

   (b) **(3b)** Napište algoritmus, který spočítá čísla a, b.

   Nejdriv najdeme optimalni rovinu $ax + by + cz = 0$ pomoci eig nebo SVD. Pak prevedeme na kyzeny tvar $z = -(ax + by)/c$ (coz muzeme, protoze rovina neni svisla, tedy $c \neq 0$).

6. **(4b)** Máme dvě rovinné křivky popsané rovnicemi $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = a$ a $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = b$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Hledáme průsečík těchto křivek Newtonovou metodou. Napište iteraci metody.

   $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - a\\ \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} - b\end{bmatrix}$, $\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}\mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\\ \mathbf{x}^T(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T)\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$.

7. Jsou dány spojitě diferencovatelná funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nenulový vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a číslo $b \in \mathbb{R}$. Hledáme vzdálenost množiny $X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = 0 \,\}$ od nadroviny $H = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b \,\}$.

(a) **(3b)** Formulujte tuto optimalizační úlohu. Ve vaší formulaci musí být jednoznačně vidět, co jsou proměnné, co účelová funkce a co omezující podmínky.

Jedna mozna formulace: $\min \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ za podmínek $f(\mathbf{x})=0$ a $\mathbf{a}^T\mathbf{y}=b$ pres $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$.
Jina formulace: $\min |\mathbf{a}^T\mathbf{x}-b|$ za podminky $f(\mathbf{x})=0$ pres $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. To plyne z toho, ze vzdalenost bodu $\mathbf{x}$ od nadroviny H je (az na nasobek $\|\mathbf{a}\|$) rovna $|\mathbf{a}^T\mathbf{x}-b|$, viz skripta.
Jeste jina formulace: $\min (\mathbf{a}^T\mathbf{x}-b)^2$ (coz je diferencovatelne) za podminky $f(\mathbf{x})=0$.

(b) **(4b)** Dokažte toto tvrzení: Nechť $\mathbf{x}$ je bod množiny X, který je nejblíže nadrovině H. Jestliže $X\cap H=\emptyset$ a $\nabla f(\mathbf{x})\neq\mathbf{0}$, pak tečný prostor k množině X v bodě $\mathbf{x}$ je rovnoběžný s H. (Nápověda: můžete použít podmínky prvního řádu na extrémy vázané rovnostmi.)

Je $L(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2+\alpha f(\mathbf{x})+\beta(b-\mathbf{a}^T\mathbf{y})$. Derivace: $L_x=\mathbf{x}-\mathbf{y}+\alpha\nabla f(\mathbf{x})=\mathbf{0}$, $L_{\mathbf{y}}=\mathbf{y}-\mathbf{x}-\beta\mathbf{a}=\mathbf{0}$. Sečtení těchto dvou rovnic dá $\alpha\nabla f(\mathbf{x})=\beta\mathbf{a}$. To může platit buď pro $\alpha=\beta=0$ nebo pro $\alpha,\beta\neq 0$. První případ by implikoval $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, což je nemožné protože $X\cap H=\emptyset$. Tedy $\nabla f(\mathbf{x})$ je násobkem $\mathbf{a}$, což je dokazované tvrzení.

(c) **(4b)** Najděte vzdálenost dvou křivek v rovině: přímky $y=2x-3$ a paraboly $y=x^2$.

Z dokazaneho tvrzeni: hledame bod (x,y) na krivce $f(x,y)=x^2-y$ ktery ma gradient $\nabla f(x,y)=(2,-1)$ kde $2x-y=3$ je nase primka (nadrovina). To je bod $(1,1)$. Nejblizsi bod na přímce je pak $(\frac{9}{5},\frac{3}{5})$, vzdálenost $\sqrt{(\frac{9}{5}-1)^2+(\frac{3}{5}-1)^2}=2/\sqrt{5}\approx 0.8944$.

8. Máme lineární program $\min\{\,\mathbf{b}^T\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ \mathbf{0}\leq\mathbf{A}\mathbf{x}\leq\mathbf{1}\,\}$, kde $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ jsou dány.

(a) **(5b)** Napište duální úlohu a upravte ji do co možná jednoduchého tvaru (jednoduchost se hodnotí).

Prepiseme primarni omezeni jako $\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\-\mathbf{A}\end{bmatrix}\mathbf{x}\geq\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\-\mathbf{1}\end{bmatrix}$ a pouzijeme kucharku ze skript na konstrukci duálu, pricemz dualni promenne rozdelime na dve casti $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\\mathbf{v}\end{bmatrix}$. Dual maximalizuje $\max\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\-\mathbf{1}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\\mathbf{v}\end{bmatrix}$ z.p. $\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\-\mathbf{A}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\\mathbf{v}\end{bmatrix}=\mathbf{b}$ a $\mathbf{u},\mathbf{v}\geq\mathbf{0}$. To se slusi upravit na $-\min\{\,\mathbf{1}^T\mathbf{v}\mid\mathbf{A}^T(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\mathbf{b},\ \mathbf{u},\mathbf{v}\geq\mathbf{0}\,\}$.

(b) **(3b)** Jaké musí být $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}$, aby primární úloha měla optimální řešení? Odpověď napište co možná výstižně a jednoduše. Odpověď odůvodněte. (Nápověda: můžete využít výsledek minulého podúkolu.)

Z vety o silne dualite: primar ma opt. reseni iff duál má opt. řešení. Dual ma opt. reseni iff je pripustny (nemuze byt neomezeny, protoze je tam $\mathbf{1}^T\mathbf{u}$ a $\mathbf{u}\geq\mathbf{0}$). To plati iff soustava $\mathbf{A}^T\mathbf{y}=\mathbf{b}$ ma reseni (protoze kazdy vektor $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$ jde napsat jako $\mathbf{y}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$ pro $\mathbf{u},\mathbf{v}\geq\mathbf{0}$). Tj. $\mathbf{b}\in\operatorname{rng}\mathbf{A}^T$.

Bodů celkem: 50