2 Maticová algebra

Maticový součin $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ je $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

Čtvercová matice je
- symetrická $\Leftrightarrow A^T = A$
- antisym. $\Leftrightarrow A^T = -A$ (z toho plyne $a_{ii} = 0$)

Inverze $\underset{n \times m}{A}\underset{m \times n}{B} = I_m$ (zn. A^{-1}) — if ex. p. i l. inv. $\Rightarrow$ rovnají se a jsou jediné

levá inv. B, pravá inv. A

ex. iff B má LN sloupce (A^TA reg.); ex. iff A má LN řádky (AA^T reg.)

čtv. mat. $<$ má A^{-1}: regulární (det $A \neq 0$); nemá A^{-1}: singulární (det $A = 0$)

vl.: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Determinant (čtv. mat. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

vl.: $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, $\det A^T = \det A$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Stopa (čtv. mat. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + \dots + a_{nn}$$

vl.: $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr}(\underset{m \times n}{A}\underset{n \times m}{B}) = \operatorname{tr}(BA)$, $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr} A$

$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^TB)$, $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$

prostor obrazů: $\operatorname{rng} A = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$
- mn. vš. hodnot zobr. $f(\vec{x}) = A\vec{x}$
- mn. vš. $\vec{y}$, pro kt. má $A\vec{x} = \vec{y}$ řeš.
- lin. obal sloupců A

nulový prostor: $\operatorname{null} A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = o\}$
- mn. vš. vektorů, kt. se zobrazí do $\vec{o}$
- mn. vš. vektorů $\perp$ na každý řádek A
- mn. řeš. $Ax = o$

- $(\operatorname{rng} A)^{\perp} = \operatorname{null}(A^T)$, $(\operatorname{null} A)^{\perp} = \operatorname{rng}(A^T)$
- $\operatorname{rng}(AB) \subseteq \operatorname{rng} A$; rovnost, pokud řádky B jsou LN
- $\operatorname{null}(AB) \supseteq \operatorname{null} B$; rovnost, pokud sloupce A jsou LN
- $\operatorname{rng}(A^TA) = \operatorname{rng}(A^T)$, $\operatorname{null}(A^TA) = \operatorname{null} A$

hodnost: $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{rng} A$ · $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A^T)$
- $\operatorname{rank} A \le \min\{m, n\}$; rovnost $\Leftrightarrow$ mat. A má plnou hodnost
- $\operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$

$\dim \operatorname{rng} A + \dim \operatorname{null} A = n$ $(A \in \mathbb{R}^{m \times n})$

Afinní podprostor a zobrazení
- af. komb.: $\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k$, kde $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$
- mn. A je af. podpr. iff je mn. řeš. něj. soustavy $Ax = b$
- af. nezáv.: $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$, $\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{o} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

4 Ortogonalita

$\cos\varphi = \frac{x^Ty}{\|x\| \cdot \|y\|}$ $\quad X \perp Y \Rightarrow X \cap Y = \{\vec{o}\}$

- $y \perp \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\} \Leftrightarrow y \perp x_1, \dots, y \perp x_k$

Matice s ortonormálními sloupci $(A \in \mathbb{R}^{m \times n})$
- (nutně $m \ge n$), $\boxed{A^TA = I}$
- isometrie (zachovává skal. součin, vzdálenosti, úhly)

Pro každou čtv. U: $U^TU = I \Leftrightarrow U^T = U^{-1} \Leftrightarrow UU^T = I$ (ortog. matice)
- $\det U \in \{1, -1\}$ — $\det U = 1$ rotace, $\det U = -1$ složením otočení a ortog. reflexe

Gram-Schmidtova ortonormalizace

$q_1' = a_1$, $\quad q_1 = q_1' / \|q_1'\|$

$q_2' = a_2 - (q_1^Ta_2)q_1$, $\quad q_2 = q_2' / \|q_2'\|$

$q_3' = a_3 - (q_1^Ta_3)q_1 - (q_2^Ta_3)q_2$, $\quad q_3 = q_3' / \|q_3'\|$

$\underset{m \times n}{A} = \underset{m \times m}{Q}\underset{m \times n}{R}$, Q ortog., R $\boxed{\nabla}$; řešení $Ax = b$: $Rx = Q^Tb$ (čtv. úpravá pro plný QR rozklad)

5 Nehomogenní lineární soustavy $(\underset{m \times n}{A}\underset{n}{x} = \underset{m}{b})$

nemá řeš. $\Leftrightarrow b \notin \operatorname{rng} A$ … přeurčená

jediné řeš. $\Leftrightarrow b \in \operatorname{rng} A$ & A má LN sloupce

nek. mn. řeš. $\Leftrightarrow b \in \operatorname{rng} A$ & A má LZ sloupce … nedourčená

Přibližné řešení ve smyslu nejmenších čtverců

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 = \min \|y - b\|^2, \; y \in \operatorname{rng} A$$

$A^TAx = A^Tb \longrightarrow x = \underbrace{(A^TA)^{-1}A^T}_{A^+ \text{… levá pseudoinv. k } A} b$ — reg. $\Leftrightarrow$ A má LN sloupce; má vždy řeš.

Ortogonální projekce na podprostor
- ortog. projekce b na X: vektor $y \in X$ splň. $(b - y) \perp X$
- ortog. projektor: $P = AA^+ = A(A^TA)^{-1}A^T$ na $X = \operatorname{rng} A$
  - nut. a postač. podm.: $P^2 = P$, & $P^T = P$

P ort. projektor na $X \Leftrightarrow (I - P)$ ort. projektor na $X^{\perp}$

6 Spektrální rozklad a kvadr. funkce

$\underset{n \times n}{A}\underset{\text{vl.v.}}{v} = \underset{\text{vl.č.}}{\lambda} v$, $v \neq o \rightarrow (A - \lambda I)v = o, v \neq o$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n)$ $\quad V = [v_1 \dots v_n]$

$AV = V\Lambda$ $\quad$ A jde diagonalisovat $\Leftrightarrow$ V reg.

$A = V\Lambda V^{-1} = \lambda_1v_1v_1^T + \dots + \lambda_nv_nv_n^T$ … spektrální rozklad

- A sym. $\Rightarrow$ vš. vl.č. jsou reálná a ex. ort. mn. n vektorů; lze rozložit spektr. rozkladem

Kvadratická forma (homog. polynom $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ druhého st.)

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T\underset{n \times n}{A}\vec{x} = \vec{x}^T\left(\tfrac{1}{2}(A + A^T)\right)\vec{x}$$

- A posit. semidef. $\Leftrightarrow x^TAx \ge 0$ pro vš. $x \in \mathbb{R}^n$
  - vl.č. A jsou ≥ 0
  - ex. $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že $A = B^TB$ } pro sym. A
  - vš. hl. minory jsou ≥ 0
- A posit. def. $\Leftrightarrow x^TAx > 0$ pro vš. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$
  - vl.č. A jsou > 0
  - ex. reg. $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že $A = B^TB$ } pro sym. A
  - vš. vůdčí hl. minory jsou > 0
- A indef. $\Leftrightarrow$ ex. x a y tak, že $x^TAx > 0$ a $y^TAy < 0$
  - má alespoň jedno vl.č. > 0 a jedno < 0 } pro sym. A
  - není poz. ani neg. semidef.
- A neg. [semi]def. $\Leftrightarrow -A$ poz. [semi]def.

Diagonalizace kvadr. formy (A sym.)

$$f(x) = x^TAx = (x^TV)\Lambda\underbrace{(V^Tx)}_{y :=} = y^T\Lambda y$$

Kvadratická funkce

$f(x) = x^T\underset{\text{sym.}}{A}x + b^Tx + c$

↓ doplnění na čtverec

$= (x - x_0)^TA(x - x_0) + y_0$

$b = -2Ax_0 \rightsquigarrow$ vyj. x_0

$c = x_0^TAx_0 + y_0 \rightsquigarrow$ dos.

(pokud $b = -2Ax_0$ nemá řeš., pak nelze doplnit na čtverec)

7 PCA pro $A = \underbrace{[\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]}_{\in \mathbb{R}^m}$: $\min \sum_{i=1}^{m} \|X^T\vec{a}_i\|^2$ za podm. $X \in \mathbb{R}^{m \times (m-k)}$, $X^TX = I$ $\quad (\operatorname{rng} X = (\operatorname{rng} Y)^{\perp})$

hledáme $\operatorname{rng} Y$ dim. $k \le m$ minimalizující součet kolmých vzdáleností

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \|X^T\vec{a}_i\|^2}_{\|X^TA\|^2} = \sum_{j=1}^{m-k} \vec{x}_j^TAA^T\vec{x}_j = \operatorname{tr}(X^TAA^TX)$$

$\vec{x}_j$ … sloupce X

$\vec{b}_i = YY^T\vec{a}_i = (I - XX^T)\vec{a}_i$

$\|\vec{a}_i - \vec{b}_i\| = \|XX^T\vec{a}_i\| = \|X^T\vec{a}_i\|$ (X … isometrie)

Úloha na nejmenší stopu

$B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sym., $B = V\Lambda V^T$, vl.č. $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_m$, $\ell \le m$:

$$\min\{\operatorname{tr}(X^TBX) \mid X \in \mathbb{R}^{m \times \ell}, X^TX = I\} = \lambda_1 + \dots + \lambda_\ell$$

a minimum se nabývá pro $X = [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_\ell]$.

PCA - řešení
1. Pro $AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ spočítáme $V\Lambda V^T$ a seř. vl.č. vzestupně: $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_m$
2. Označíme $V = [\underbrace{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_{m-k}}_{X} \underbrace{\vec{v}_{m-k+1} \dots \vec{v}_m}_{Y}]$
3. Sloupce $Y \in \mathbb{R}^{m \times k}$ jsou orton. bází hledaného podpr. dim k
4. Optimální hodnota úlohy $\lambda_1 + \dots + \lambda_{m-k}$ je chyba proložení

Nejbližší matice nižší hodnosti (low rank approximation)

pro $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$: $\min\{\|A - B\|^2 \mid B \in \mathbb{R}^{m \times n}, \operatorname{rank} B \le k\}$

$\rightarrow$ optimální řeš. je $B = YY^TA = (I - XX^T)A$

probl. af. podpr.: od $\vec{a}_i$ odečteme $\bar{x} = \frac{1}{n}(\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_n)$ (těžiště) a řeš. je $Y + \bar{x}$

SVD: lib. $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow A = \underbrace{\underset{m \times p}{U}\underset{p \times p}{S}\underset{n \times p}{V^T}}_{\text{redukované SVD}} = s_1\vec{u}_1\vec{v}_1^T + \dots + s_p\vec{u}_p\vec{v}_p^T$

$s_1 \ge \dots \ge s_p \ge 0$ $\quad p = \min\{m, n\}$

- $AA^T = US^2U^T$ }
- $A^TA = VS^2V^T$ } AA^T a A^TA mají stejná nenulová vl.č. $\lambda_i = s_i^2$

U, V … orton. sloupce

S … diagonální (ne nutně čtvercová)

low rank approx.: pro $k \le p$ je řeš. $B^* = US_kV^T$, $S_k = \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_k, 0) \in \mathbb{R}^{p \times p}$

PCA: $U_k = [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_k] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ (Y), opt. h. je $s_{k+1}^2 + \dots + s_p^2$

$X = \{x \mid A^Tx = b\}$

vzd. z od X $= \sqrt{(A^Tz - b)^T(A^TA)^{-1}(A^Tz - b)}$

$\rightarrow$ pro $X = \{x \mid a^Tx = b\}$: $\frac{|a^Tz - b|}{\|a\|}$

1) levé sing. vektory $\vec{u}_i$ jsou vl. vektory AA^T, pravé sing. vektory $\vec{v}_i$ jsou vl.v. A^TA

2) diag. prvky $S^2 = \begin{bmatrix} s_1^2 & 0 & \\ 0 & s_2^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$ jsou druhé mocniny diag. prvků S, tedy nenul. sing. č. A jsou druhé odmocniny vl.č. A^TA a AA^T

3) $\vec{u}_i = \frac{A\vec{v}_i}{s_i}$, $i = 1, \dots, p$ $(U = AVS^{-1}$ pro rank-min SVD …$)$

8 Derivace

- f je diferencovatelná v bodě $\vec{x}$ $\Leftarrow$ ex. vš. parc. der. $\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j}$ a jsou spoj.
- $f'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ … Jacobiho matice
- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \rightsquigarrow f': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- gradient fce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ … $\nabla f(\vec{x}) = f'(\vec{x})^T$ … sloupc. vektor
- směr. der. $f_{\vec{v}}(\vec{x}) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(\vec{x}+\alpha\vec{v}) - f(\vec{x})}{\alpha}$ — sestupný směr $\vec{v}$: $f'(\vec{x})\vec{v} < 0$
  - $\to$ pokud je f dif. v $\vec{x}$: $f_{\vec{v}}(\vec{x}) = f'(\vec{x})\vec{v}$
  - $\to$ největší: ve směru $\vec{v} = \frac{1}{\|\nabla f(\vec{x})\|} \cdot \nabla f(\vec{x})$
  - $\to$ nulová pro $\vec{v} \perp \nabla f(\vec{x})$ } pro $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- der. slož. zobr. $h = g \circ f$: $h'(\vec{x}) = g'(f(\vec{x})) \cdot f'(\vec{x})$
- $f''(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $\frac{\partial}{\partial x_1} f'(\vec{x})$ … Hessova matice $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Taylorův polynom $T^2_{\vec{x}}(\vec{y}) = f(\vec{x}) + f'(\vec{x})(\vec{y}-\vec{x}) + \frac{1}{2}(\vec{y}-\vec{x})^T f''(\vec{x})(\vec{y}-\vec{x})$

$f(\vec{x})$	$f'(\vec{x})$	$f(\vec{x})$	$f'(\vec{x})$
$\vec{x}$	I	$\vec{x}^T A \vec{x}$	$\vec{x}^T(A+A^T) \overset{\text{if A sym.}}{=} 2\vec{x}^T A$ $\to f''(\vec{x}) = A + A^T \overset{\text{if A sym.}}{=} 2A$
$A\vec{x} + \vec{b}$	A	$\|g(\vec{x})\|$	$(g^T g')/\|g\|$
$g(A\vec{x}+\vec{b})$	$g'(A\vec{x}+\vec{b})A$	$g(\vec{x})^T h(\vec{x})$	$g^T h' + h^T g'$ — $g, h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$		$f''(\vec{x}) = A^T g''(A\vec{x}+\vec{b})A$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	

10 Volné lokální extrémy

- podm. 1. řádu: $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x}$ je vn. bod X a $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dif. v $\vec{x}$
  - $\vec{x}$ je lok. extrém f na X $\Rightarrow f'(\vec{x}) = 0$ ($\vec{x}$ je SB f)
- podm. 2. řádu: ——— je 2krát dif. v $\vec{x}$
  - $\vec{x}$ je SB:
    - $f''(\vec{x})$ poz. semidef. $\Leftarrow \vec{x}$ lok. min.
    - $f''(\vec{x})$ poz. def. $\Rightarrow \vec{x}$ je ostré lok. min.
    - $f''(\vec{x})$ indef. $\Rightarrow \vec{x}$ není lok. extrém ($\vec{x}$ je sedlový bod)

Metoda	co počítá	iterační vzorec
Gradientní	min f	$x = a - \nabla f(a)$ — směr $\vec{v} = -\nabla f(a)$ je vždy sestupný
Newtonova	$g(\vec{x}) = \vec{o}$	$x = a - (g'(a))^{-1} g(a)$ → selže, když je $f''(a)$ singulární
Newtonova	min f	$x = a - (f''(a))^{-1}(f'(a))^T$ — $\vec{v}$ sest., když $f''(a)$ je poz. def. (a $f'(a) \neq 0$)
Gauss-Newton	$\min \|g(\vec{x})\|^2$	$x = a - (g'(a)^T g'(a))^{-1} g'(a)^T g(a)$ — $\vec{v}$ je vždy sest.
Levenb.-Marq.	$\min \|g(\vec{x})\|^2$	$x = a - (g'(a)^T g'(a) + \mu_k I)^{-1} g'(a)^T g(a)$, $\mu_k > 0$

$f(x)$ vs $g(y)$, $g = A\vec{x}$: $\vec{v}_k = -(A^T A)^{-1} \nabla f(a)$

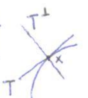
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\to$ heuristika pro volbu μ_k:
- $f(x_{k+1}) < f(x_k)$: it. přijmeme, μ_k zmenšíme (2krát)
- $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$: it. odmítneme, μ_k zvětšíme (2krát)

$\mu_k \approx 0$: → Gauss-Newton, $\mu_k \gg 0$: → grad. metoda s prodlouženou délkou μ_k^{-1}

11 Lokální extrémy vázané rovnostmi

- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je regulární bod zobr. $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, pokud řádky $g'(\vec{x})$ jsou LN
- hledáme lok. extrémy fce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na mn. $X = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\vec{x}) = \vec{o}\}$
- v reg. bodě $\vec{x} \in X$ zobr. g je tečný prostor k X $\underbrace{\text{null } g'(\vec{x})}_{T}$, ortog. prostor $\underbrace{(\text{null } g'(\vec{x}))^\perp}_{T^\perp}$



Lokální extrémy f na X splňují
$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} L = f'(\vec{x}) + \vec{\lambda}^T g'(\vec{x}) = \vec{o} \quad \rightsquigarrow \nabla f(\vec{x}) + \nabla g(\vec{x}) \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$$
$$\frac{\partial}{\partial \vec{\lambda}} L = g(\vec{x}) = \vec{o} \quad \text{pro } g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

- Lagrangeova funkce $L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \vec{\lambda}^T g(\vec{x})$
  - $L'(\vec{x}, \vec{\lambda}) = (f'(\vec{x}) + \lambda^T g'(\vec{x}),\ g(\vec{x})^T)$
  - $L''(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \begin{bmatrix} f''(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i''(\vec{x}) & g'(\vec{x})^T \\ g'(\vec{x}) & 0 \end{bmatrix}$
- nutná podm. pro vázaný extrém: $\nabla f(\vec{x}) \in T^\perp$
- Lagr. mult. umožňují testovat, zda právě když $\nabla f(\vec{x}) \in G$ ($G = \text{span}\{\nabla g_1(\vec{x}), \ldots, \nabla g_m(\vec{x})\}$)
- podm. 2. řádu pro vázané extrémy: ~~jako pro volné, ale def. f''(x) určujeme na null g'(x)~~

12 Lineární programování

- $\min\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax \geq b\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$
- $\min\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\}$ … rovnicový tvar
  - $a^T x \geq b \rightsquigarrow a^T x - u = b$, $u \geq 0$
  - $x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow x = x^+ - x^-$, $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$

Fce $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je norma, jestliže splňuje:
1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = o$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$

Cauchy-Schwarz: $|u^T v| \leq \|u\| \|v\|$

- p-normy $\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, \infty]$
  - $\|x\|_1 = 1$: $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$ … Manhattanská
  - $\|x\|_\infty = 1$: $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ … Čebyševova, max-norma
- $|x| = \max\{x, -x\}$

$\|x\|$ norma, A má LN sloupce $\Rightarrow \|Ax\|$ je norma

13 Konvexní množiny a mnohostěny

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, pokud (iff) $\forall x, y \in X, \alpha \in [0,1]$: $(1-\alpha)x + \alpha y \in X$
- vážený součet $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$ vektorů $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ je
  - lin. komb., jestliže $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.
  - af. komb., jestliže $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$.
  - nezáp. komb., jestliže $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$.
  - konv. komb., jestliže $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$.
- konv. mnohostěn $X = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ (průnik kon. mnoha uzavř. polopr.)
  (uzavř. poloprostor: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq b\}$)
- bod $x \in X$ je extremální bod konv. mn. X, pokud
  $\forall x_1, x_2 \in X$: $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- pro konv. polyedr $X \neq \emptyset$: má alespoň 1 extr. bod $\Leftrightarrow$ neobsahuje přímku

11 Lokální extrémy vázané rovnostmi (pokračování)

- podm. 2. řádu: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jsou 2krát dif. v $x \in \mathbb{R}^n$

  ex. λ tak, že $L'(x, \lambda) = 0 \wedge$
  - $L''(x, \lambda)$ poz. semidef. na $T \Leftarrow x$ lok. min
  - $L''(x, \lambda)$ poz. def na $T \Rightarrow x$ je ostré lok. min

  x reg. bod zobr. g, f váz. $g(x) = 0$

12 Lineární programování (pokračování)

- regrese polynomem nultého stupně $f(x, \theta) = \theta$: pro $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ hled. $\theta \in \mathbb{R}$
  $$\min \|y - \mathbb{1}\theta\|_p = \min \|(y_1 - \theta, \ldots, y_m - \theta)\|_p$$
  - $\to p = \infty$: min. $\max_{i=1}^m |y_i - \theta|$ … řeš.: $\theta = \frac{1}{2}(\min_{i=1}^m y_i + \max_{i=1}^m y_i)$
  - $\to p = 2$: min. $\sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - \theta)^2}$ … řeš.: arit. průměr, tj. $\theta = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m y_i$
  - $\to p = 1$: min. $\sum_{i=1}^m |y_i - \theta|$ … řeš.: medián z čísel $y_1, \ldots, y_m$
- celočíselné lin. programování (ILP)
  $$\min\{c^T x \mid x \in \{0,1\}^n, Ax \geq b\} \rightsquigarrow \min\{c^T x \mid x \in [0,1]^n, Ax \geq b\}$$
  ILP s binárními proměnnými — LP relaxace úlohy
  $$\min\{c^T x \mid x \in [0,1]^n, Ax \geq b\} \leq \min\{c^T x \mid x \in \{0,1\}^n, Ax \geq b\}$$
- $\to$ přiřazovací problém: pro $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ hled. $\pi: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ (permutace)
  $$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$
  z. p. $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, n$
  $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$, $j = 1, \ldots, n$
  $x_{ij} \in \{0, 1\}$

  kde platí:
  1) LP relaxace i pův. úloha mají stejnou opt. hodnotu
  2) mezi opt. řešeními LP relaxace ex. celočíselné
- $\to$ nejm. vrcholové pokrytí: podmn. $X \subseteq V$ vrcholů tak, že každá hrana má alespoň 1 vrchol v X, neor. gr. (V, E) (chceme to s co nejm. počtem vrcholů)
  $$\min \sum_{i \in V} x_i$$
  z. p. $x_i + x_j \geq 1$, $\{i, j\} \in E$
  $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in V$
  - x_i ($i \in V$) opt. řešení LP relaxace $\rightsquigarrow \bar{x}_i = \lfloor x_i + \frac{1}{2} \rfloor$ (je přípustné pro nerelax. úlohu)
  - opt. hodnota < pův. úlohy … y^*; relax. úlohy … $\bar{y} = \sum_{i \in V} \bar{x}_i$
  - platí $\bar{y} \leq 2y^*$ po zaokr.

13 Konvexní množiny a mnohostěny (pokračování)

- bod x je extr. bod mnohostěnu $\Leftrightarrow$ ex. $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $I \neq \emptyset$ mn. řádkových indexů tak, že $A_I x = b_I$ a A_I má LN sloupce
- opěrná nadrovina konv. mn. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$ taková, že $X \cap H \neq \emptyset$ a platí $a^T x \geq b$ pro vš. $x \in X$
- $X \cap H$ je stěna mnohostěnu (dim = 0: vrchol, dim = 1: hrana, dim = dim X − 1: faseta)

15 Dualita v lineárním programování

primární			duální		
$\min c^T x$			$\max b^T y$		
		$\geq$			$\geq$
z. p.	Ax	$\leq$ b	z. p.	y	$\leq$ o
		$=$			
		$\geq$			$\leq$
	x	$\leq$ o		$A^T y$	$\geq$ c
					$=$

- slabá dualita: x … přípust. prim. řeš., y … příp. duální řeš.: $c^T x \geq b^T y$
- komplementarita: $c^T x = b^T y$ iff:
  $\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \vee y_i = 0 \quad \forall i \in I$
  $x_j = 0 \vee \sum_{i \in I} a_{ij} y_i = c_j \quad \forall j \in J$
- silná dualita: 1) prim. úloha má opt. řeš. $\Leftrightarrow$ duální úloha má opt. řeš.
  2) je-li x prim. opt. řeš. x a duální opt. řeš. y $\Rightarrow c^T x = b^T y$

prim. / duál	má optimum	neomezená	nepřípustná
má optimum	✓	✗	✗
neomezená	✗	✗	✓
nepřípustná	✗	✓	✓

16 Konvexní funkce

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konv. na konv. mn. $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pokud pro vš. $x, y \in X$, $\alpha \in [0, 1]$:
  $$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$
- f je konk. $\Leftrightarrow$ −f je konv.
- epigraf … $\{(\vec{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(\vec{x}) \leq y\}$
- subkontura výšky y … $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) \leq y\}$
- f je konv. $\Leftrightarrow$ její epigraf je konv. mn.
- každá subkontura konv. fce je konv. mn.

Věty k určování konvexity:
- f konv., $x \in \mathbb{R}^n$: $f'(x) = o \Rightarrow x$ je glob. min. fce f

1) konv. (lin. / af.) = konv.
2) konv (konv.) = konv. (neklesající)
g_i jsou konv.:
3) $\sum \alpha_i g_i$ = konv., když $\alpha_i \geq 0$
4) $\max g_i$ = konv.
5) $(\forall x, a \in \mathbb{R}^n: f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)) \Leftrightarrow$ f konv. (pokud je f dif.)
6) $(\forall x \in \mathbb{R}^n: f''(x)$ poz. semidef.$) \Leftrightarrow$ f konv. (pokud je f 2krát dif.)

17 Konvexní optimalizační úlohy

- konv. úloha: min. konv. fce f na konv. množině X
  - $\to$ ve standardním tvaru: $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq o, h(x) = o\}$ (f konv., g konv., h af.)
- $\to$ každé lok. min. f na X je zároveň globální