SEREDANN

Na nasledujicich radcich naleznete hodnoceni jednotlivych prikladu, kontakt na opravujiciho a jeho pripadny komentar.

1. 4b (spetlrad@fel.cvut.cz)
2. 6b (voracva1@fel.cvut.cz)

   U a se argument zaklada na tom, ze P != I, ale neni receno proc to nemusi platit.

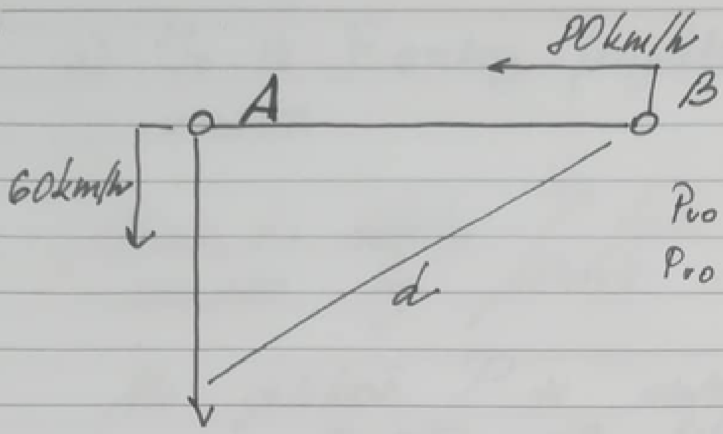
3. 7b (petr@olsak.net)
4. 6b (voracva1@fel.cvut.cz)

   super

5. 9b (petr@olsak.net)
6. 5b (werner@fel.cvut.cz)
7. 2b (werner@fel.cvut.cz)
8. 0b - neodevzdal

celkem 39b

Příklad 1. - Sereda Anna



Pro B: $30-80t$
Pro A: $60t$.

$$\min\left\{ \sqrt{(30-80t)^2+(60t)^2} \;/\; t \geq 0 \right\}$$

$$\min\left\{ (30-80t)^2+(60t)^2 \;/\; t \geq 0 \right\}$$

$$f = (30-80t)^2+(60t)^2 = 900-4800t+6400t^2+3600t^2 =$$
$$= 10\,000\,t^2-4800\,t+90$$

$$f' = 20\,000t-4800=0$$
$$200t-48=0 \Rightarrow t = 48/200 = 0{,}24\ h$$

A urazí $60\cdot 0{,}24 = 14{,}4$ km
B urazí $80\cdot 0{,}24 = 19{,}2$ km.

$$d = \sqrt{(30-80\cdot 0{,}24)^2+(60\cdot 0{,}24)^2} = \sqrt{324} = \underline{18\ km}$$

Příklad 2 – Sereda Anna

a) Je-li P ortog. projektor, pak P je ortog. matice

Víme, že kdyby P byla ortogonální matice musela by platit $PP^T = I$.

Ale jelikož P je ortog. projektor platí, že
$P \cdot P^T = P^2 = P$.
tedy toto tvrzení neplatí

b) —"—, není ortog. matice.
může být ortogonální. např. $P = I$

c) —"—, pos. semidefinitní

$$P\bar{v} = \lambda \bar{v}$$
$$P^2\bar{v} = P\lambda\bar{v} = \lambda^2\bar{v} \qquad \lambda\bar{v} = \lambda\bar{v}$$
$$P^2\bar{v} = P\bar{v} = \lambda v$$

Vlastní čísla $\lambda_i \geq 0$. Tedy musí platit že P je positivně definitní matice

Příklad 3

7b

Tereda Anna

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = 2\sin(x+y)$

$(x_0 y_0) = (0,0)$

$T_0 = f(x_0, y_0)$

$T_1 = T_0 + f'(x_0\ y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

$T_2 = T_1(x,y) + \frac{1}{2}(x-x_0\ y-y_0) f''(x_0 y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(00)} = \sin(x+y) + x\cos(x+y)\Big|_{(00)} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(00)} = x\cos(x+y)\Big|_{(00)} = 0$

$T_1 = 0 + (0\ 0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cancel{00}) = 2\cos(x+y) + x\sin(x+y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\sin(x+y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(x+y) - 2\sin(x+y)$

$f''(00) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$T_2 = \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(2x^2 + 2xy) = x^2 + xy.$

$\begin{Vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{Vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) - 1 = -2\lambda + \lambda^2 - 1 =$
$= \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

$D = 8 \qquad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

druhá derivace v (00):

indefinitní, nejde o lok. extrém.

Příklad 4 Sereda Anna

Vzdálenost bodu $(2,1)$ od množiny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = y\}$

a) min $f(x) = (x-2)^2 + (x^2-1)^2 = x^2 - 4x + 4 + x^4 - 2x^2 + 1 =$
$= x^4 - x^2 - 4x + 5$

b) $f'(x) = 4x^3 - 2x - 4$
$f''(x) = 12x^2 - 2$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4x_k^3 - 2x_k - 4}{12x_k^2 - 2} = x_k - \frac{2x^3 - x - 2}{6x^2 - 1}$$

$x_1 = 1$
$x_6 \approx 1{,}1654$
$y \approx 1{,}358$

Příklad 5.

Šreda Anna 9b

max $a^T x$ za podm $x^T C x = 1$ ...

$L(x,\lambda) = a^T x + \lambda(x^T C x - 1)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = a^T + 2\lambda x^T C = 0 \rightarrow \quad x^T = -\frac{1}{2\lambda} a^T C^{-1}$

$x = -\frac{1}{2\lambda} C^{-1} a$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^T C x - 1 = 0$

$\frac{1}{4\lambda^2} a^T C^{-1} C C^{-1} a = 1$

$\lambda = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^T C a} \qquad x = \mp \frac{1}{\sqrt{a^T C a}} C^{-1} a$

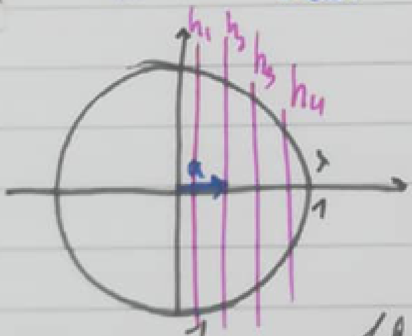
4b

Jak se změní řešení pokud nahradíme $x^T C x \leq 1$ za $x^T C x = 1$

Řešení by zůstalo stejné. Nechť existuje řešení y takové, že $f(y) > f(x)$ kde x je řešení obdržené výše a zároveň $y^T C y < 1$. Ale $a^T x$ je funkce lineární tedy její monotonie se nemění. Potom maximum musí ležet na hranice.

2b

$n = 2$. Geom. řešení



na obrázku $C = I$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{x} = -\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$h_1 < h_2 < h_3 < h_4$

Kreslila bych ~~...~~ vrstevnice $a^T x$, což jsou přímky kolmé na $\vec{a}$. Bod ve kterém je vrstevnice nejvyšší výšky sečnou se ~~kružnice~~ $x^T C x = 1$ je hledaný optimum

obecné elipsy

3b

Příklad 6

$\max\{c^T x \mid Ax = b \;\; x \geq 0\}$

$$\begin{bmatrix} c^T & d \\ A & b \end{bmatrix} := \begin{array}{cccccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

převod na ~~maximum~~ minimum:

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline (0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 6) & \end{array}$$

Pivot hledám tam kde účelová fce má $x_i < 0$

3

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline y = (0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 7) & - \end{array}$$

$c^T x = -d = 1$ ✓ de OK

$y = \{2, 5, 6\}$

2

Příklad 7

- min $f(x,y) = \max\{|x|, |x-y+1|\} + |x+y-2|$ z.p. $x,y \geq 0$

b) transf. na LP.

1

min $u+v$

z.podm.

$$
\begin{aligned}
&x - u \leq 0 \\
&\cancel{-x-u \leq 0} \\
&\cancel{x-y+1-u \leq 0} \\
&-x+y-1-u \leq 0 \\
&x+y-2-v \leq 0 \\
&-x-y+2-v \leq 0 \\
&x,y,u,v \geq 0
\end{aligned}
\quad\Bigg\}\quad
\begin{aligned}
&-x+u \geq 0 && a \\
&x+u \geq 0 && b \\
&-x+y+w \geq 1 && c \\
&x-y+u \geq -1 && d \\
&-x-y-v \geq -2 && e \\
&x+y+v \geq 2 && f \\
&x,y,u,v \geq 0.
\end{aligned}
$$

c) Duální program.

1

max $0\cdot a + 0\cdot b + c - d - 2e + 2f$

z.podm. $a,b,c,d,e,f \geq 0$

$$
\begin{aligned}
&+a \pm b - c + d + e \pm f \leq 0 && x \\
&0\cdot a + 0b + c - d - e + f \leq 0 && y \\
&-a \mp b \mp c \mp d + 0\cdot e + 0\cdot f \leq \cancel{-1}\ 1 && u \\
&0\cdot a + 0\cdot b + 0\cdot c + 0\cdot d + e + f \leq 1 && v
\end{aligned}
$$

Mnoho znamének je špatně.
(Nejde to opravit např. vynásobením nerovnice −1)