KUCERJ48

Na nasledujicich radcich naleznete hodnoceni jednotlivych prikladu, kontakt na opravujiciho a jeho pripadny komentar.

1. 2b (voracva1@fel.cvut.cz)

   Dobry, ale chtel se gradient, toto je derivace (jakobian)

2. 2b (dlaskto2@fel.cvut.cz)
3. 2b (spetlrad@fel.cvut.cz)
4. 3b (cechj@fel.cvut.cz)
5. 3b (petr@olsak.net)
6. 3b (petr@olsak.net)

celkem 15b

Jméno	Příjmení	Už. jméno
Jan	**Kučera**	**kucerj48**

Řešení testu pište perem na papír (tedy ne do počítače), dovoleno je také psát elektronickým perem na tablet. Zadání příkladů nemusíte opisovat. Každý příklad pište na zvláštní stránku. Na každou stránku napište nahoru číslo příkladu a podpříklady uvoďte příslušným písmenem v kroužku.

Do řešení pište nejen odpovědi ale i jejich odůvodnění a postupy řešení. Správná odpověď bez odůvodnění je neplatná!

Na konci testu vaše řešení oscanujte nebo ofoťte a nahrajte do Brute do úlohy Test2. Každý příklad odevzdejte ve zvláštním souboru, jehož jméno bude číslo příkladu. Dovolené formáty jsou PDF a ZIP, přičemž v ZIPu může být jakýkoliv formát (JPG, PNG, PDF). Tedy celkem odevzdáte buď šest souborů 1.pdf, 2.pdf, ..., 6.pdf, nebo jeden ZIP ve kterém budou např. 1.jpg, 2.jpg, ..., 6.jpg. Do Brute můžete nahrávat opakovaně, ovšem bere se v úvahu vždy jen poslední verze (dřívější verze se těmi pozdějšími přemažou).

Odevzdávání dokončete do 17:45. Ovšem Brute zůstane otevřené až do 18:00 pro případ, že by někdo měl technické problémy. Odevzdání (např. emailem) po tomto termínu není možné. Velmi proto doporučujeme dostatečnou dobu před koncem nahrát aspoň nějakou verzi řešení, pak ještě počítat, a na konci nahrát znovu vylepšenou verzi řešení.

Během testu můžete používat materiály k předmětu (skripta, slajdy, Vaše zápisky), nesmíte ale s nikým komunikovat. Prosíme, nezneužívejte situace a nepodvádějte. Při pochybostech můžeme studenta z příkladu ústně vyzkoušet. Při odhaleném podvodu předmět pro studenta okamžitě končí.

Otázka 1

Napište vzorec pro gradient funkce $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{x})\|_2$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k\times m}$ a $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je dané zobrazení. (Vzorec bude samozřejmě obsahovat derivaci zobrazení $\mathbf{g}$.)

Otázka 2

Hledáme lokální maximum funkce $8\sin x + x^2$ čistou Newtonovou metodou.

1. Napište iteraci algoritmu.
2. Pro počáteční odhad $x_0 = \pi/2$ vypočítejte odhad x_1 po jedné iteraci metody.

Otázka 3

Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.96 & -0.72 & -0.4 \\ 1.28 & 0.96 & -0.3 \end{bmatrix}$.

1. Najděte matici $\mathbf{B}$ hodnosti 1 takovou, že $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ je minimální (kde $\|\cdot\|$ značí Frobeniovu normu).
2. Jaká je vzdálenost (ve Frobeniově normě) matice $\mathbf{A}$ od množiny matic hodnosti 1?

V tomto příkladě doporučujeme použít Matlab.

Otázka 4

Máme funkci $f(x, y, z) = xyz$ a bod $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$.

1. Najděte první derivaci (Jacobiho matici) funkce.
2. Najděte druhou derivaci (Hessovu matici) funkce.
3. Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce v bodě (x_0, y_0, z_0). Výsledný polynom zjednodušte.
4. Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce v bodě (x_0, y_0, z_0). Výsledný polynom zjednodušte.

Otázka 5

Minimalizujeme funkci $\mathbf{a}^T\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ za podmínky $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{y} = 1$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ jsou dané vektory, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je daná symetrická regulární matice a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ jsou proměnné. Najděte všechny body $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ podezřelé z lokálního extrému (výsledkem bude vždy vzorec pro $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$). Použijte metodu Lagrangeových multiplikátorů.

Otázka 6

Máme funkci $f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$.

1. Najděte všechny stacionární body funkce.
2. Vyberte si jeden stacionární bod a určete, zda je to lokální extrém a případně jakého typu.

: 1)

$$f(x) = \|A g(x)\|_2$$

$x \in \mathbb{R}^n$

$A \in \mathbb{R}^{k \times m}$

$g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f'(x) = \frac{(A g(x))^T}{\|A g(x)\|_2} \cdot A g'(x)$$

5 2) $f(x) = 8\sin x + x^2$

2b.

$-f(x) = -8\sin x - x^2$

$-f'(x) = -8\cos x - 2x$ ✓ $-f''(x) = 8\sin x - 2$ ✓

1) $x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1} f'(x)^{T} = x_k - \frac{f'(x)^T}{f''(x_k)} = x_k - \left(\frac{-8\cos x - 2x}{8\sin x - 2}\right)$ ✓

2) $x_0 = \pi/2$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$x_1 = \pi/2 - \frac{-0 - \pi}{1-2} = \pi/2 - \frac{-\pi}{-1} = \pi/2 - \pi = -\frac{\pi}{2}$ ✗

zde má být $8 \cdot 1 - 2$

6) $f_{12,1} = 1{,}3$

5) 3) $A = \begin{bmatrix} -0{,}96 & -0{,}72 & -0{,}4 \\ 1{,}28 & 0{,}96 & -0{,}3 \end{bmatrix}$

25

1) $[U\ D] = \mathrm{eig}(A * A')$

$[U\ S\ V] = \mathrm{svd}(A)$

$\downarrow$

sing. čísla → matice nejmenší

sing. číslo s tím 0 → snížím rank

$\Delta = S$

$B = U \cdot \Delta \cdot V^T$

$B = \begin{bmatrix} -0{,}96 & -0{,}72 & 0 \\ 1{,}28 & 0{,}96 & 0 \end{bmatrix}$

vypočítáno matlabem

$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$

2

2) ~~$\|B - A\| = \|S - \Delta$~~

n = součet čísel, ~~na~~ které jsou na druhou

$$n = \sqrt{2^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

0

3

$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$

9/ $f(x,y,z) = xyz$

1/ $\frac{\partial f'(x,y,z)}{\partial x} = yz$

$\frac{\partial f'(x,y,z)}{\partial y} = xz$

$\frac{\partial f'(x,y,z)}{\partial z} = xy$

$J = [yz, xz, xy]$

2/ $\frac{\partial f''(x,y,z)}{\partial x^2} = 0 = \frac{\partial f''(x,y,z)}{\partial y^2} = \frac{\partial f''(x,y,z)}{\partial z^2}$

$\frac{\partial f''(x,y,z)}{\partial x y} = z = \frac{\partial f''(x,y,z)}{\partial y x}$

$\frac{\partial f''(x,y,z)}{\partial x z} = y = \frac{\partial f''(x,y,z)}{\partial z x}$

$\frac{\partial f''(x,y,z)}{\partial y z} = x = \frac{\partial f''(x,y,z)}{\partial z y}$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

3/ $T_1(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + f'(x_0,y_0,z_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = 0 + 0 \cdot \begin{bmatrix} x - 0 \\ y - 0 \\ z - 1 \end{bmatrix} = 0$

4/ $T_2(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + f'(x_0,y_0,z_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}^T \cdot f''(x_0,y_0,z_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} =$

$= 0 + 0 + \frac{1}{2}(x, y, z-1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(y, x, 0) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{bmatrix} = \frac{2xy}{2} = \underline{xy}$

3) $f(x,y) = a^T x + b^T y$ $x^T C y = 1$

$a, b \in \mathbb{R}^n$ vektory

$C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická regulární matice

$x, y \in \mathbb{R}^n$ proměnné

3b

$L = a^T x + b^T y + \lambda (x^T C y - 1)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = a^T + \lambda (C y)^T = 0$$

$$y = \frac{-C^{-1} a^T}{\lambda} \qquad y = \frac{-C^{-1} a}{\sqrt{b^T C^{-1} a}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = b^T + \lambda x^T C = 0$$

$$x^T = \frac{-b^T C^{-1}}{\lambda} \qquad x^T = \frac{-b^T C^{-1}}{\sqrt{b^T C^{-1} a}} \rightarrow x = \left[\frac{-b^T C^{-1}}{\sqrt{b^T C^{-1} a}} \right]^T$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^T C y - 1 = 0$$

$$\frac{b^T C^{-1} C C^{-1} a^T}{\lambda^2} \cdot \frac{b^T C^{-1} a}{\lambda^2} = 1$$

$$\lambda = \pm \sqrt{b^T C^{-1} a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = a_i + \lambda \sum C_{ij} y_j = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = b_i + \lambda \sum C_{ji} x_j = 0$$

$[x, y] = [0, -1]$

[illegible]

2) [illegible]

6) $f(x,y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y$

1) $\dfrac{\partial f'(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$

$\dfrac{\partial f'(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y - 4$

$3x^2 + 2xy = 0$

$x^2 - 2y - 4 = 0$

$y = \dfrac{4 - x^2}{2}$

$3x^2 + 2x\left(\dfrac{4 - x^2}{2}\right) = 0$

$3x^2 + 4x - x^3 = 0$

$\cancel{-x^3 - 2x = 0}$

$\cancel{x^2 + 2x = 0}$

$\cancel{x(x^2 + 2) = 0}$

$\cancel{x^3 - 3x^2 + 4x = 0}$

$\cancel{x(x^2 - 3x + 4) = 0}$

$-x^3 + 3x^2 - 4x = 0$

$0 \leftarrow x(x^2 + 3x - 4) = 0$

$(x + 4)(x - 1) = 0$

$-4 \quad 1$

$(x,y)_1 = (0,-2)$

$(x,y)_2 = (-4, 6)$

$(x,y)_3 = (1, -3/2)$

2) $\dfrac{\partial f''(x,y)}{\partial x^2} = 6x + 2y$

$\dfrac{\partial f''(x,y)}{\partial x \partial y} = 2x$

$\dfrac{\partial f''(x,y)}{\partial y^2} = -2$

$H = \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$

3b

$\cancel{H_{(0,-2)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$

$H(0,-2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$-H(0,-2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(x,y) = (0,-2)$ lokální maximum

$\cancel{H_{(1,-3/2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}$ ~~indefinitní~~

$\cancel{-H(1,-3/2) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$

~~$(x,y) = (1,-3/2)$ sedlový bod~~