10

OPT midterm 5.4.2023 | Příjmení: KISLINGER | Jméno: JAKUB | 126

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. Nechť $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4);\ x_1 = x_4\}$, $\mathbf{z} = (4, 3, 2, 1)$. Najděte kolmou projekci vektoru $\mathbf{z}$

3

   a) (2 body) na X,
   b) (1 bod) na $X^\perp$

a) $X = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\underbrace{XX^T}_{\text{ortog. projektor}}\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 3 \\ 2 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}$

b) projekce na $X^\perp$ ~ rejekce X

$(I - XX^T)\vec{z} = \vec{z} - \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 3 \\ 2 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{bmatrix}$

2. (2 body) Pro afinní podprostor $X = (1, 2, 3, 4) + \text{span}\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ najděte matici a vektor pravých stran soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jejíž řešení je X.

platí $A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}] \ \wedge\ A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \vec{b}$

2

možné řešení: $\underset{A}{[0\ 1\ 0\ -1]} \cdot \vec{x} = \underset{\vec{b}}{[-2]}$

3. Závislost proměnné z na proměnných x, y modelujeme regresní funkcí $z \approx f(x, y) = a(x - y)^2 + be^{x+y} + cxy + d$. Odhadujeme parametry $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ funkce z naměřených bodů (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, 100$, ve smyslu nejmenších čtverců.

   a) (2 body) Formulujte úlohu v maticové podobě.
   b) (1 bod) Za jakých předpokladů bude mít úloha jediné řešení? Takové řešení napište.

3

a) $\min\{\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2, \vec{x} \in \mathbb{R}^4\}$: $\underbrace{\begin{bmatrix} (x_1-y_1)^2 & e^{x_1+y_1} & x_1y_1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mathbb{1} \\ (x_{100}-y_{100})^2 & e^{x_{100}+y_{100}} & x_{100}y_{100} & \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{100} \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$

řádek i matice A: $((x_i - y_i)^2, e^{x_i+y_i}, x_iy_i, 1)$

b) Jediné řešení bude ~~[illegible]~~, když A má lin. nezáv. sloupce $\Leftrightarrow A^TA$ je regulární

Poté řešení vypadá $\vec{x} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b} = A^+\vec{b}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

4. Matice $\mathbf{A}$ typu $10^4 \times 50$ má prvky 0 nebo 1. Každý řádek i odpovídá jedné osobě a každý sloupec j streamovací službě (Netflix, Spotify atd.), přičemž $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když si osoba i předplácí službu j.

2

   a) (1 bod) Co vyjadřují prvky matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$? Interpretujte jejich numerické hodnoty.
   b) (1 bod) Matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má jen 15 nenulových singulárních čísel $s_1, \ldots, s_{15}$. Napište teoretickou chybu aproximace matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ maticí hodnosti nejvýše 10.

a) A^TA ~~[illegible]~~ typu 50×50
num. hodnota v poli i,j je počet předplatitelů, kteří předplácí službu s indexem i a j zároveň (pro $i=j \rightsquigarrow$ počet předpl. služby i)

b) chyba aproximace by byla $s_{11}^2 + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{14}^2 + s_{15}^2$

Vase odpovedi na kvizove otazky: c, a, e, c, c

spatne:

dobre: 5, 6, 7, 8, 9

chybi:

Celkem bodu za kviz: 5

Zadani vaseho kvizu naleznete na nasledujici strane.

OPT midterm 5.4.2023 Příjmení: KISLINGER Jméno: JAKUB 126

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

126

	5	6	7	8	9
a		X			
b					
c	X			X	X
d					
e			X		

5. Máme zadánu symetrickou matici $\mathbf{A}$ řádu n.
   (a) Její největší vlastní číslo λ je vždy kladné a platí $\lambda = \max \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ pro vektory $\mathbf{x}$ splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
   (b) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ nabývá vždy maxima pro nějaký vektor $\mathbf{x}$ splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
   (c) Její nejmenší vlastní číslo splňuje $\lambda \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ pro libovolný vektor $\mathbf{x}$ takový, že $\|\mathbf{x}\| = 1$.
   (d) Optimální řešení úlohy $\max \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ vždy existuje.
   (e) Každý vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$ je řešením úlohy $\max \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

6. Rozhodněte, co platí pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
   (a) Neplatí žádná z uvedených možností.
   (b) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ má minimum v bodě 0.
   (c) $\mathbf{A}$ má vlastní číslo 0.
   (d) $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní.
   (e) Optimální hodnota úlohy $\min \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{x}\| = 1\}$ je kladná.

7. Pro která $a \in \mathbb{R}$ je matice $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonální projektor?
   (a) pro $a \geq 0$
   (b) pro $a = 0$
   (c) pro $a \in \{0, 1\}$
   (d) pro $a \in [0, 1]$
   (e) žádná z uvedených možností

8. Máme matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takové, že každá matice $\mathbf{A}_i$ má ortonormální sloupce. Označme $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k$ součin těchto matic.
   (a) Matice $\mathbf{B}$ je ortogonální jen tehdy, když $k \leq 2$.
   (b) Matice $\mathbf{B}$ je identická.
   (c) Matice $\mathbf{B}$ je ortogonální.
   (d) Matice $\mathbf{B}$ má ortonormální sloupce, ale nemusí být ortogonální.
   (e) Neplatí žádné výše uvedené tvrzení.

9. Hledáme afinní podprostor X dimenze 5 minimalizující součet čtverců kolmých vzdáleností od vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{1000} \in \mathbb{R}^{50}$.
   (a) Neplatí žádná z uvedených možností.
   (b) X je afinním podprostorem prostoru $\mathbb{R}^5$.
   (c) X je afinním podprostorem prostoru $\mathbb{R}^{50}$.
   (d) Hledaný afinní podprostor X nemusí existovat.
   (e) X je vždy lineárním obalem 5 lineárně nezávislých vektorů.