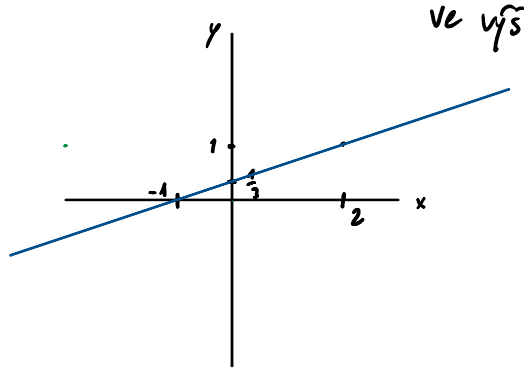
8.1. Načrtněte několik vrstevnic (připište k nim výšky) těchto funkcí dvou proměných:

b) $f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 + 1$

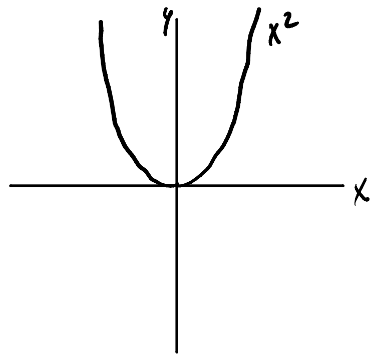


ve výšce $\underline{0}$:

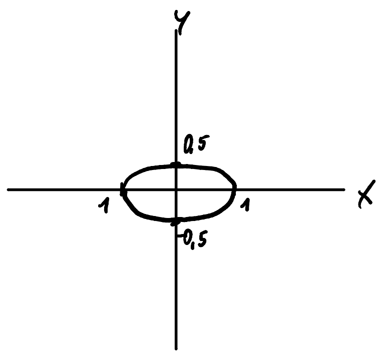
$x - 3y + 1 = 0$

$x = 3y - 1$

c) $f(x_1, x_2) = x_1^2$



d) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$



$z = 1$

$1 = x^2 + 4y^2$

$1 =$

8.3. Máme funkci $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou vzorcem $f(x, y) = \ln(1+xy)$. Máme bod $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

d) Najděte totální derivaci (Jacobiho matici) $f'(x, y)$ funkce f v bodě (x_0, y_0).

$$f'(x,y) = \left[\frac{y}{1+xy} \quad \frac{x}{1+xy}\right]\Big|_{(x_0,y_0)} = \left[\tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3}\right]$$

g) Najděte Hessovu matici funkce f v bodě (x_0, y_0).

$$f'' = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right]' = \begin{bmatrix} \frac{-y^2}{(1+xy)^2} & \frac{1}{(1+xy)^2} \\ \frac{1}{(1+xy)^2} & \frac{-x^2}{(1+xy)^2} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} 4/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

8.10. Nadmořská výška krajiny je dána vzorcem $h(d, s) = 2s^2 + 3sd - d^2 + 5$, kde d je zeměpisná délka (zvětšuje se od západu k východu) a s je zeměpisná šířka (zvětšuje se od jihu k severu). V bodě $(d, s) = (-1, 1)$ určete (a) směr nejstrmějšího stoupání terénu, (b) strmost terénu v jihovýchodním směru. V této úloze je logické uvažovat směr jako normalizovaný vektor.

$$h'(d,s) = [-2d+3s\,,\ 3d+4s] \longrightarrow h'(-1,1) = [5\,,\ 1] \longrightarrow \operatorname{grad} h(-1,1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) $$\frac{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{5^2+1^2}} = \frac{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{26}}$$

b) $$[5 \quad 1] \cdot \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

8.13. Je dána funkce $f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^3$. V bodě $(x_0, y_0) = (1, -2)$ najděte Taylorův polynom nultého, prvního a druhého stupně.

$$T_{1,f(1,-2)} = f(1,-2) + f'(1,-2)\begin{bmatrix} x-1 \\ x+2 \end{bmatrix} = 46 + \begin{bmatrix} 18 & 60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ x+2 \end{bmatrix} = 46 + 18x - 18 + 60 \pm 120 = 78x + 148x$$

$$T_{2,f(1,-2)} = f(1,-2) + f'(1,-2)\begin{bmatrix} x-1 \\ x+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x-1 & x+2 \end{bmatrix} \frac{f''(1,-2)}{2}\begin{bmatrix} x-1 \\ x+2 \end{bmatrix} = 46 + \begin{bmatrix} 18 & 60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ x+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x-1 & x+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -12 & -24 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ x+2 \end{bmatrix} = -6x^2 - 24xy + 24y^2 - 18x + 60y + 46$$

$$f'(1,-2) = \begin{bmatrix} 18 & -60 \end{bmatrix} \qquad f''(1,-2) = \begin{bmatrix} -12 & -24 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}$$