DC4

úterý 14. března 2023 10:03

5.1. Máme soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Jsou tyto výroky pravdivé? Odpovědi dokažte.

a) Pokud $m < n$, pak soustava má vždy řešení.
b) Pokud $m > n$, pak soustava nemá nikdy řešení.
c) Pokud $m < n$ a $\mathbf{A}$ má plnou hodnost, pak soustava má vždy nekonečně mnoho řešení.

a) Neplatí $A=0 \Rightarrow b=0 \to$ nelze

b) Neplatí $m\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}[x]=\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$

c) Platí $[\diagdown] \to \operatorname{rng} A = \mathbb{R}^m \to$ vždy má parametry $\to$ nekonečně mn. řešení

5.3. Formulujte jako přibližné řešení soustavy $\mathbf{Pu} = \mathbf{q}$ ve smyslu nejmenších čtverců, tedy jako úlohu $\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{Pu} - \mathbf{q}\|^2$. Jako výsledek napište matice $\mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{u}$. Pokud existuje jednoduchý vzorec pro řešení (jak pro optimální hodnotu tak optimální argument), napište je.

a)

Příklad 1.12. Jsou dány body $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ a hledáme vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, který minimalizuje (bez omezujících podmínek) funkci

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|^2. \quad (1.20)$$

$\sum \|x - a_i\|^2 \to x = a_i \to \begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

$q = \begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}$ $\quad u = x$

b) Hledá se vzdálenost bodu $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ od přímky $\{ \mathbf{a} + t\mathbf{s} \mid t \in \mathbb{R} \}$ kde $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$.

$$a + ts = y$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

5.8. Máme vektory $\mathbf{u} = (2, 1, -3)$ a $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$. Najděte ortogonální projekci vektoru $(2, 0, 1)$ na podprostor ~~(a) span~~$\{\mathbf{u}\}$, ~~(b) (span$\{\mathbf{u}\})^\perp$~~, (c) span$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, (d) (span$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^\perp$.

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{span}\{u, v\}$$

Najdeme bázi $\operatorname{span}\{u, v\}^\perp$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} \end{bmatrix}$$

$x =$
$y = \frac{5}{3}z$
$z = \frac{3}{5}y$

$x = \frac{2}{3}$
$y = \frac{5}{3}$
$z = 1$

$$b = \begin{bmatrix} 2/3 & 5/3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

d)

$$d = \frac{b^T z}{\|b\|^2} b = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{4 + 25 + 9}^{\,2}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\frac{7}{38} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

c) Projekce na $\operatorname{span}\{u, v\} \to$

$$z - d = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{7}{38} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{38} \begin{bmatrix} 62 \\ -35 \\ 17 \end{bmatrix}}$$

5.17. Pro vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ukažte, že $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \right\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$.

$\|x\| = \sqrt{x^T x}$ $\quad \|x\|^2 = x^T x$

$\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|^2 = \begin{bmatrix} a^T & b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^T a + b^T b = \|a\|^2 + \|b\|^2$