DC2

pátek 24. února 2023 11:25

2.1. Vyřešte tyto rovnice a soustavy rovnic pro neznámou matici $\mathbf{X}$ (předpokládejte, že každá potřebná inverze existuje):

b) $\mathbf{X} - \mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{B}$

$X - XB = A$

$X(I - B) = A$

$A = X(I - B)$

$X = A(I - B)^{-1}$

c) $2\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{X} + 2\mathbf{A} = \mathbf{0}$

$X(2I - A) + 2A = 0$

$X(2I - A) = -2A$

$X = -2A \cdot (2I - A)^{-1}$

2.3. Chceme vyřešit soustavu rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + (\mathbf{y}^T\mathbf{B})^T = \alpha\mathbf{1}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

kde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou známé matice, $\mathbf{c}$ je známý vektor, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ jsou neznámé vektory a α je neznámý skalár. Soustavu přepište do tvaru $\mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{q}$, kde matice $\mathbf{P}$ a vektor $\mathbf{q}$ obsahují známé konstanty a vektor $\mathbf{u}$ obsahuje všechny neznámé.

$A = [a_{ij}]$ $B = [b_{ij}]$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ $y^T = [y_1 \cdots y_n]$

$Ax + (y^T B)^T - \alpha 1 = 0 \rightarrow Ax + B^T y - \alpha 1 = 0$ $u^T = [x_1 \cdots x_n \; y_1 \cdots y_n \; \alpha]$

$Ay + c = 0 \rightarrow Ay = -c$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -x- & -y- & \alpha \end{array} \\ \begin{bmatrix} A & B^T & -1 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \end{bmatrix}$$

2.4. Mějme soustavu rovnic pro neznámé vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{a}$$
$$\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

a) Vyjádřete soustavu ve tvaru $\mathbf{P}\underset{\leftarrow \text{neznámé}}{\mathbf{u}} = \underset{\leftarrow \text{známé}}{\mathbf{q}}$.

b) Jestliže $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{b}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, eliminujte ze soustavy neznámý vektor $\mathbf{y}$ a najděte vzorec pro neznámý vektor $\mathbf{x}$. Předpokládejte přitom, že potřebné inverze existují.

a) $u^T = [x \quad y]$

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

b)

$Cx + Dy = b$ $\qquad\qquad$ $Ax + By = a$

$Dy = b - Cx$

$y = (b - Cx) \cdot D^{-1}$ $\;\to\;$ $Ax + B(b - Cx)D^{-1} = a$

3.1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou lineární nebo afinní podprostory $\mathbb{R}^n$ a když ano, určete jejich dimenze:

a) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = 0 \,\}$ pro dané $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

b) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b \,\}$ pro dané $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$

c) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1 \,\}$

d) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}\mathbf{x}^T = \underset{\leftarrow \text{jednotková matice}}{\mathbf{I}} \,\}$ pro dané $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

e) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \,\}$

f) $\mathbf{a} + \operatorname{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ jsou známé vektory takové, že $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně nezávislé.

a) Lineární $\to$ dimenze: pro $a = 0 \ldots n$; pro $a \neq 0 \ldots n-1$

b) Afinní $\to$ d: pro $a = 0 \ldots n \ldots b = 0$; $a \neq 0 \ldots n-1$ $\quad$ pro $b \neq 0$ je mn. prázdná

c) Není ani lin, ani af

d) Pro $n = 1 \to I = [1]$ a $a \neq 0$ je afin. podpr. $\quad$ Pro $n > 1 \to I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nemá soustava řešení

a $a = 0$ je prázdná množina

e) $\sum_{i=1}^n x_i = 0 \to x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \to$ lin. podprostor

f) a je vektor

$\operatorname{span}\{b, c\} = \{\alpha_1 b + \alpha_2 c \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$

$\hookrightarrow$ přímka procházející počátkem

} rovina procházející bodem a $\to$ afinní podpr.

3.2. Je množina $\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0 \}$ lineární podprostor? Pokud ano, najděte jeho libovolnou bázi.

↳ když $x_1 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

↳ $\{x_1 \in \mathbb{R}^4 \mid a^T x_1 = 0\}$ ↳ $\{x_3 \in \mathbb{R}^4 \mid a^T x_3 = 0\}$

↳ $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

↳ $a = (1, a_2, 1, a_4) \to a = (1,0,1,0)$

$\Big\}$ $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid a^T x = 0\}$ $\xRightarrow{\text{báze } (n-1)}$ 3 prvky, tedy například: $(1,0,-1,0)$, $(-1,0,1,0)$, $(0,0,0,0)$

$a = (1,0,1,0)$

3.7. Máme zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definované jako $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, 2x - 1, x - y)$. Je toto zobrazení lineární? Pokud ano, napište ho ve formě (3.7). Je toto zobrazení afinní? Pokud ano, napište ho ve formě (3.26). Obě odpovědi dokažte z definic.

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ už podle možnosti tohoto zápisu je patrné, že jde o afinní zobrazení

Existuje matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ a vektor $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, které z definice dokazují, že jde o zobrazení afinní

3.8. Mějme nehomogenní lineární soustavu

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

dvou rovnic o třech neznámých. Napište množinu řešení soustavy jako $X + \mathbf{x}_0$, kde $X \subseteq \mathbb{R}^3$ je lineární podprostor (napište jeho bázi) a $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] /:3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x + 2y + z = 1$

$y + z = 1 \to z = 1 - y$

$x + 2y + 1 - y = 1$

$x = -y$

$\left.\begin{aligned} x &= -y \\ y &= -x \\ z &= 1 - y \end{aligned}\right\}$ např $\left.\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} (-1, 1, 0)$

$(-1, 1, 0) + \text{span}\{(1, 1, 1)\}$