Příjmení: LINHA

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

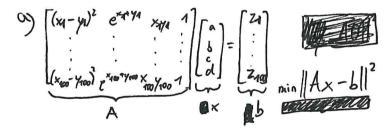
- 1. Nechť $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = x_4\}, z = (4, 3, 2, 1)$. Najděte kolmou projekci vektoru z
- \circ . \circ a) (2 body) na X, b) (1 bod) na X^{\perp}

(5)
$$P = (z^{T}a_{1})a_{1} + (z^{T}a_{2})a_{2} + (z^{T}a_{3})a_{2} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A = 2 \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad P = AA^{T}$$
ortogenální

2. (2 body) Pro afinní podprostor $X = (1, 2, 3, 4) + \text{span}\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ najděte matici a vektor pravých stran soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jejíž řešení je X.

- 0
 - 3. Závislost proměnné z na proměnných x, y modelujeme regresní funkcí $z \approx f(x,y) = a(x-y)^2 + be^{x+y} + cxy + d$. Odhadujeme parametry $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ funkce z naměřených bodů $(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, 100$, ve smyslu nejmenších čtverců.
- a) (2 body) Formulujte úlohu v maticové podobě.
 - b) (1 bod) Za jakých předpokladů bude mít úloha jediné řešení? Takové řešení napište.



- 4. Matice **A** typu $10^4 \times 50$ má prvky 0 nebo 1. Každý řádek i odpovídá jedné osobě a každý sloupec j streamovací službě (Netflix, Spotify atd.), přičemž $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když si osoba i předplácí službu j.
 - a) (1 bod) Co vyjadřují prvky matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$? Interpretujte jejich numerické hodnoty.
 - b) (1 bod) Matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ má jen 15 nenulových singulárních čísel s_1, \ldots, s_{15} . Napište teoretickou chybu aproximace matice A^TA maticí hodnosti nejvýše 10.
 - b) S11 = ... = S15 () Prinih počtu osob platici službu Na diagonde je počet posob plat. clanon slažba

 Počet osob platiči jedn- platformu součusně s druhou
 (slagpec) Potet hyboryih sing. aise je 5

Vase odpovedi na kvizove otazky: b, a, d, d, a

spatne: 5, 6, 8

dobre: 7, 9

chybi:

Celkem bodu za kviz: 2

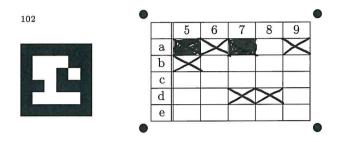
Zadani vaseho kvizu naleznete na nasledujici strane.

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

Příjmení: ZINHA

ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)



- 5. Nechť $n \geq 2$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je nenulový vektor. Ortogonální projektor promítající na podprostor span $\{\mathbf{a}\}$ je
 - (a) je matice plné hodnosti
 - b je symetrická regulární matice
 - (c) je singulární matice
 - (d) je široká matice, která není čtvercová
 - (e) žádná z uvedených možností
- 6. Hledáme afinní podprostor X dimenze 5 minimalizující součet čtverců kolmých vzdáleností od vektorů $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{1000}\in\mathbb{R}^{50}$.
 - A Hledaný afinní podprostor X nemusí existovat.
 - (b) X je vždy lineárním obalem 5 lineárně nezávislých vektorů.
 - (c) Neplatí žádná z uvedených možností.
 - (d) X je afinním podprostorem prostoru \mathbb{R}^5 .
 - (e) X je afinním podprostorem prostoru \mathbb{R}^{50} .
- 7. Máme zadánu symetrickou matici ${\sf A}$ řádu n.
 - (a) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ nabývá vždy maxima pro nějaký vektor \mathbf{x} splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
 - (b) Její největší vlastní číslo λ je vždy kladné a platí $\lambda = \max \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ pro vektory \mathbf{x} splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
 - (c) Každý vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice \mathbf{A} je řešením úlohy max $\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}|\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\}$.
 - (d) Její nejmenší vlastní číslo splňuje $\lambda \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ pro libovolný vektor \mathbf{x} takový, že $\|\mathbf{x}\| = 1$.
 - (e) Optimální řešení úlohy max $\{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ vždy existuje.
- 8. Nechť $\bf A$ je matice s lineárně nezávislými řádky. Matice ortogonálního projektoru na podprostor null $\bf A^T$ je
 - (a) $I A(A^TA)^{-1}A^T$
 - (b) $I A^T (AA^T)^{-1}A$
 - (c) $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
 - $(\mathbf{a}) \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$
 - (e) neplatí žádné výše uvedené tvrzení
- 9. Množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$,
 - (a) je afinní podprostor dimenze n-1
 - (b) je konečná
 - (c) je vždy lineární podprostor
 - (d) je vždy přímka, která nemusí procházet počátkem
 - (e) nesplňuje žádnou z uvedených možností