DC5

pátek 17. března 2023 9:21

6.1. Pro každou z těchto funkcí určete, zda je to polynom. Pokud ano, určete počet proměnných a stupeň polynomu a rozhodněte, jestli je polynom homogenní.

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x^2+y^2)(x-y) + xy - x - y$

$x^3 - x^2y + y^2x + xy - x - y$ Polynom 3. stupně, 2 proměnné, není homogenní

b) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$ kde $\mathbf{a}$ je dáno

$[a_1 \dots a_n] \cdot x = a_1x + \dots + a_nx$

Polynom 1. stupně, n proměnných(x), je homogenní stupně 1

c) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$

x^Tx Není polynomem

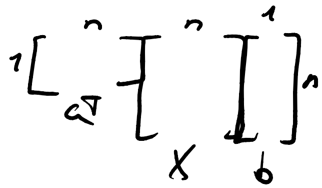
d) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}\|^2$ kde $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ jsou dány

$(Ax+b)^T(Ax+b)$ Polynom 2. stupně, n proměnných, není homogenní

e) $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},\ f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$

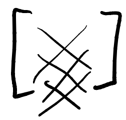
Polynom 2. stupně, 2n proměnných, je homogenní

f) $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{X}) = \mathbf{a}^T\mathbf{X}\mathbf{b}$ kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou dány



Polynom 1. stupně, n^2 proměnných, je homogenní

g) $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{X}) = \det \mathbf{X}$



Polynom n. stupně, n^2 proměnných, je homogenní

6.2. Spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory matic $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = A$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = -3-\lambda+3\lambda+\lambda^2+2 = \lambda^2+2\lambda-1$$

$D = 4 - 4\cdot 1\cdot(-1) = 8$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$\begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} v_1 = 0$

$v_1 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & -2-\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot v_2 = 0$

$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

6.8. Určete definitnost těchto symetrických matic. Pro všechny matice to udělejte pomocí znamének hlavních minorů, pro matice 2×2 také pomocí vlastních čísel.

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}\right\}$ pozitivně definitní $\quad \Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$

$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = -2 \to \ominus$ Indefinitní, $\Delta_2 = -6$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}\right\}$ pozitivně definitní $\begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 3 \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} \Delta_1 = -2 \to \ominus \\ \Delta_2 = -6 \end{matrix}$ Indefinitní

6.16. Musí mít positivně semidefinitní matice na diagonále nezáporné prvky? Odpověď dokažte.

Musí pokud by 1. prvek na diag byl záporný, 1. minor by byl záporný a další by z něj jen záporný případně udělali.

$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$