1.

$$Ax + y + c = \lambda 1 \qquad y^T B = 0$$

žlutě zvýrazněné neznámé, růžovou známé

$Pn = q$

q známé konstanty

n neznámé

P matice

$$Ax + y - \lambda 1 = -c \qquad B^T y = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & I & -1 \\ 0 & B^T & 0 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix}}_{n} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix}}_{q}$$

(2) $y=1 \quad x=2+y \quad x=0$

MNČ

$$x=0$$
$$z=1$$
$$x-z=2$$

$$b = Ax$$

neznámé $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$\boxed{\text{MATLAB} \quad x = A\backslash b}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad A\vec{x} = \vec{b} - b_\perp$$

$$A^TA\vec{x} = A^T\vec{b} \qquad A^TAx = A^T\vec{b} - \underbrace{\cancel{A^Tb_\perp}}_{0} = 0$$

$$\boxed{\vec{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

kalkulačka

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^TA$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$ kalkulačka :)

$$x = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 - 1/3 \\ 2/3 - 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

(5)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$x^T A x$ nezáporné pro každé $x \in \mathbb{R}^2$

Je pravdivé? Důkaz

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \boxed{(a \ b) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} =$$

$$= (a\ b) \cdot \begin{pmatrix} -a & +3b \\ -2a & +4b \end{pmatrix} = a(-a+3b) + b(-2a+4b)$$

$$\begin{matrix} & -a^2 + 3ab \\ + & -2ab + 4b^2 \end{matrix} = \boxed{4b^2 + ab\ (-a^2)} =$$

a	+	+	−	−
b	+	−	+	−

pokud $a^2 > 4b^2 + ab$ záporný

$a^2 > 4 + a$

protipříklad $a = 3$

$b = 1$

pro vektor $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

je $x^T A x$ záporné.

Tvrzení je nepravdivé.

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

(4)

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 10^{x} + a_4 10^{-x}$$

n dvojic $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

x_i napájecí proud

y_i kroutící moment

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 10^{x_1} & 10^{-x_1} \\ 1 & x_2 & 10^{x_2} & 10^{-x_2} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & 10^{x_n} & 10^{-x_n} \end{pmatrix} = A$$

matlabovská funkce
podobně jako úkol
fit_temps

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{x = A \setminus b}$$

(5)

$a, b \in \mathbb{R}^n$ mají stejnou délku

$a+b \perp a-b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

$$\vec{u} = \begin{matrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{matrix}$$

$$\vec{v} = \begin{matrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{matrix}$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$

$$(a_1 + b_1) \cdot (a_1 - b_1)$$

$$+ \quad \vdots$$

$$(a_n + b_n) \cdot (a_n - b_n)$$

$$a_1^2 \underline{- a_1 b_1 + a_1 b_1} - b_1^2$$

$$\vdots$$

$$a_i^2 - b_i^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=0}^{n} (a_i^2 - b_i^2) = \sum^{n} (a_i^2) - \sum^{n} (b_i^2) = 0$$

$$\boxed{\sum^{n} a_i^2 = \sum^{n} b_i^2}$$

kolmost $\vec{u}$ a $\vec{v}$

b, a je vektor

$$= a^T a = b^T b$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a^T a$$

$$b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = b^T b$$

2.

Nepodařilo se mi příklad dokončit. Nevím, jak postupovat dál.

(b)

$$(-1 \quad 1 \quad 0) \in \operatorname{span}\{(2, -1, 2\}\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^T B = (2 \quad -1 \quad 2) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 9 & -3 \end{array}\right)$$

$9x = -3$

$$x = \frac{-1}{3}$$

$$n = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

7

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 2 LN vektory

$\Rightarrow$ LN sloupce

2 LN vektory

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$ ← BÁZE Img

BÁZE kernel

nebylo to v zadání,
počítám to navíc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$x_1 - x_2 = 0$

$x_2 + x_3 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= -x_3 \end{aligned}} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Báze ker

8

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(-1, 1, 0) = 0$

$f(1, 0, 1) = 2$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

červeně zakroužkované jsou jen různé formy zápisu

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$-a_1 + a_2 = 0$

$a_1 + a_3 = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 2 \\ a_2 + a_3 &= 2 \end{aligned}}$$

$a_1 = 2 - a_3$

$a_2 = 2 - a_3$

$a_3 = 2 - 5 = -3$

$a_1 = a_2$

$5, 5, -3$

v rámečku je podmínka, kterou musí f splňovat. Pro získání řešení stačí dosadit čísla aby to sedělo.

$$A = [5 \quad 5 \quad -3]$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f: 5a_1 + 5a_2 - 3a_3 \qquad a \in \mathbb{R}^3$