

ВЕЖБЕ ИЗ ОСНОВА РАЧУНАРСКЕ ТЕХНИКЕ 1

ВЕРЗИЈА 2017 1.0

БУЛОВА АЛГЕБРА И ПРЕКИДАЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

Булова алгебра је део математичке логике - алгебарска структура која сажима основу операција И, ИЛИ и НЕ, као и скуп теоријских операција као што су унија, пресек и комплемент.

Булова алгебра је добила назив по творцу, Џорџу Булу, енглеском математичару из 19. века.

Булова алгебра је, осим као део апстрактне алгебре, изузетно утицајна као математички темељ рачунарске науке.

Прекидачка алгебра је Булова алгебра на скупу од два елемента.

Прекидачким (или логичким) функцијама називају се пресликавања типа $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, тј. n -арне операције на скупу $\{0,1\}$.

Елементи скупа $\{0,1\}^n$ су уређене n -торке $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ у којима $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ узимају вредности из скупа $\{0,1\}$. Ове n -торке се називају **векторима**. При томе су $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ **координате** или **компоненте** вектора.

Ако се вектори из скупа $\{0,1\}^n$ пишу: $x_1x_2x_3\dots x_n$ и ако се тако написани вектори интерпретирају као бинарни бројеви, добија се **природна нумерација елемената скупа $\{0,1\}^n$** . Бинарни број i , придружен на описани начин вектору из $\{0,1\}^n$ назива се **индексом вектора**. Његова вредност у децималном систему рачуна се по формули:

$$i = \sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j} \quad \text{Број вектора у скупу } \{0,1\}^n \text{ је } 2^n.$$

Пошто прекидачке функције имају коначну област дефинисаности могу се представљати таблицама. Ове таблице се називају **комбинационим** или **таблицама истинитости**.

Пример:

Прекидачка функција $f(x_1, x_2, x_3)$ задата је скуповима индекса $f(1)=\{0,4,6\}$ и $f(b)=\{2,7\}$. Конструисати комбинациону таблицу те функције.

Решење:

$f(1)=\{0, 4, 6\}$ - су индекси вектора на којима функција f има вредност 1;

$f(b)=\{2, 7\}$ - су индекси вектора на којима функција f није дефинисана.

$$f(1) \cup f(0) \cup f(b) = \{0,1\}^n$$

i	x ₁	x ₂	x ₃	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	b
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	b

2^n улаза у таблицу ($n=3$)

Питање:

Колики је број потпуно дефинисаних прекидачких функција од n променљивих?

Одговор:

2^n улаза у комбинациону таблицу за n променљивих. Функција f узима вредност из $\{0,1\} \Rightarrow 2$ вредности.

Број варијација са понављањем 2 елемента, класе 2^n је: 2^{2^n} .

ПРОИЗВОДИ, СУМЕ И НОРМАЛНЕ ФОРМЕ

Свака прекидачка функција се може представити Буловим изразом. Означимо са \tilde{x} (и назовемо словом) променљиву x или \bar{x} .

Потпуни производ. Претпоставимо да је $f=1$ само на једном вектору (a_1, a_2, \dots, a_n) из скупа $\{0,1\}^n$, а на осталима $f=0$. Може се написати:

$$f = \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 \cdot \dots \cdot \tilde{x}_n \quad \text{где} \quad \text{је} \begin{cases} \tilde{x}_j = x_j & \text{ако је } a_j = 1 \\ \tilde{x}_j = \bar{x}_j & \text{ако је } a_j = 0 \end{cases}$$

Укупни број различитих потпуних производа је 2^n .

Потпуна сума. Претпоставимо да је $f=0$ само на једном вектору (a_1, a_2, \dots, a_n) из скупа $\{0,1\}^n$, а на осталима $f=1$. Може се написати:

$$f = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{x}_n \quad \text{где} \quad \text{је} \begin{cases} \tilde{x}_j = x_j & \text{ако је } a_j = 0 \\ \tilde{x}_j = \bar{x}_j & \text{ако је } a_j = 1 \end{cases}$$

Укупни број различитих потпуних сума је 2^n .

Сваком вектору одговара један и само један потпуни производ/сума.

Савршене нормалне форме

Теорема: Свака прекидачка f -ја $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ изузев константе 0 може се на јединствен начин написати у облику (СДНФ): $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = P_{i1} + P_{i2} + \dots + P_{im}$, где су P_{ij} потпуни производи који одговарају векторима на којима је $f=1$.

Теорема: Свака прекидачка f -ја $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ изузев константе 1 може се на јединствен начин написати у облику (СКНФ): $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = S_{i1} S_{i2} \dots S_{im}$, где су S_{ij} потпуне суме које одговарају векторима на којима је $f=0$.

$$\text{Константе: } 0 = x_j \cdot \bar{x}_j, \quad 1 = x_j + \bar{x}_j$$

Изрази $\tilde{x}_{j1} \cdot \tilde{x}_{j2} \cdot \dots \cdot \tilde{x}_{jk}$ и $\tilde{x}_{j1} + \tilde{x}_{j2} + \dots + \tilde{x}_{jk}$ где су $j1, j2, \dots, jk$ по паровима различити бројеви из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ називају се **елементарни производ**, односно **елементарна сума**, респективно. Константа 1 је елементарни производ, а константа 0 елементарна сума.

Ранг елементарног производа (суме): $r=n-k$, број променљивих које се не појављују у посматраном производу (суми). Потпуни производ је елементарни производ ранга $r=0$.

Свака прекидачка f -ја се може представити у облику СКНФ и СДНФ.

Елементарни производ $p = \tilde{x}_{j1} \cdot \tilde{x}_{j2} \cdot \dots \cdot \tilde{x}_{jk}$, односно сума $s = \tilde{x}_{j1} + \tilde{x}_{j2} + \dots + \tilde{x}_{jk}$, може се трансформисати на следећи начин:

$$p = p(x_i + \bar{x}_i) = px_i + p\bar{x}_i, \quad s = s + x_i \bar{x}_i = (s + x_i)(s + \bar{x}_i), \quad \text{где је } x_i \neq x_j.$$

Пример:

Ако се елементарни производ $\bar{x}_2 x_4$ посматра као f-ја 4 променљиве, онда се може представити помоћу потпуних производа на следећи начин:

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 x_4 (x_1 + \bar{x}_1)(x_3 + \bar{x}_3) &= \bar{x}_2 x_4 (x_1 x_3 + x_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_3) = \\ &= x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4\end{aligned}$$

Сума елементарних производа $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ назива се **ДНФ**.

Производ елементарних сума $s_1 s_2 \dots s_n$ назива се **КНФ**.

Једнакост функција:

За функције f и g кажемо да су једнаке и пишемо $f = g$ ако имају исти домен D (област дефинисаности), и ако $\forall x \in D, f(x) = g(x)$.

Потпуно дефинисану прекидачку функцију $f(x_1, x_2, x_3)$, дефинисану на свим векторима и задату скупом индекса $f(1)=\{1,5,6,7\}$, написати у облику СДНФ и СКНФ.

Решење

Прекидачка функција која зависи од три променљиве x_1 , x_2 и x_3 има $2^3 = 8$ различитих вектора на којима је дефинисана. Како је у задатку речено да је функција дефинисана на свим векторима, то значи да на векторима на којима нема вредност 1, има вредност 0. На основу тога можемо представити ову функцију таблицом са свим векторима на којима је дефинисана и вредностима функције на одговарајућим векторима.

i	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

На основу вектора на којима функција има вредност један $f(1)=\{1,5,6,7\}$ формирамо СДНФ, тако што за сваки вектор на коме функција има вредност један, пишемо потпуни производ који одговара том вектору, а затим правимо суму тако формираних потпуних производа.

$$\text{СДНФ: } f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

На основу вектора на којима функција има вредност нула $f(0)=\{0,2,3,4\}$ формирамо СКНФ, тако што за сваки вектор на коме функција има вредност нула, пишемо потпуну суму која одговара том вектору, а затим правимо производ тако формираних потпуних сума.

$$\text{СКНФ: } f = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)$$

Задатак 2.

Испитати да ли је вредност функције $f(x_1, x_2)$ дефинисане изразом $(x_1 + x_2)(\bar{x}_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$ једнака нули.

Решење

Овај проблем решавамо, тако што ћемо израз којим је дефинисана функција претворити у облик ДНФ и видети да ли смо добили вредност нула или не. У првом кораку množимо прве две заграде једну са другом и друге две заграде једну са другом.

$$(x_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2 x_2)(x_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \bar{x}_2)$$

Применом правила Булове алгебре $x_i \bar{x}_i = 0$, добијени израз трансформишемо у следећи.

$$(\bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2)(\bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2)$$

Множењем преостале две заграде добијамо коначан резултат.

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 x_1 \bar{x}_2 + x_2 x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_2 + x_1 x_2 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_2$$

Применом правила Булове алгебре $x_i \bar{x}_i = 0$ добијамо да је вредност израза једнака нули.

Други начин за решавање задатка био би да смо нацртали таблицу са свим векторима на којима је функција дефинисана и одредили вредности функције на сваком вектору. Уколико утврдимо да функција има вредност 0 на свим векторима на којима је дефинисана, онда је и вредност израза којим је функција дефинисана једнака нули.

i	x_1	x_2	f
---	-------	-------	---

0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	0

Задатак 3.

Написати СКНФ прекидачке функције дефинисане изразом:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3$$

Решење

На основу израза којим је функција дефинисана, а који је дат у облику СДНФ, можемо утврдити на којим векторима функција има вредност један.

$$f(1) = \{000, 011, 100, 110\} = \{0, 3, 4, 6\}$$

Како функција зависи од 3 променљиве, знамо да она има укупно 8 различитих вектора на којима је дефинисана, па сада можемо одредити и векторе на којима функција има вредност нула.

$$f(0) = \{1, 2, 5, 7\} = \{001, 010, 101, 111\}$$

На основу скупа вектора на којима функција има вредност нула, можемо формирати СКНФ ове функције, тако што ћемо за сваки вектор на коме функција има вредност нула направити одговарајућу потпуну суму, а затим направити производ свих потпуних сума.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

Задатак 4.

ДНФ прекидачке функције $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_1 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ трансформисати у СДНФ, а КНФ прекидачке функције $g(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)$ трансформисати у СКНФ.

Решење

Када желимо да од израза којим је дефинисана функција у ДНФ облику, добијемо израз у СДНФ облику, потребно је да сваки од елементарних производа проширимо са свим променљивама, које недостају том елементарном производу, а од којих функција зависи. То радимо тако што елементарни производ помножимо са $1 = (x_i + \bar{x}_i)$, где је x_i променљива која недостаје.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2(x_1 + \bar{x}_1)(x_3 + \bar{x}_3) + x_1 x_3(x_2 + \bar{x}_2) + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

Када смо проширили све елементарне производе са свим променљивама које су им недостајале, извршимо множење израза и доводимо га у одговарајући облик за СДНФ.

$$= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

На крају, применимо правила Булове алгебре $x_i x_i = x_i$, како бисмо елиминисали сувишне потпуне производе и добили смо израз у СДНФ облику.

$$= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

Када желимо да од израза којим је дефинисана функција у КНФ облику, добијемо израз у СКНФ облику, потребно је да сваку од елементарних сума проширимо са свим променљивама, које недостају тој елементарној суми, а од којих функција зависи. То радимо тако што елементарној суми додајемо $0 = x_i \bar{x}_i$, где је x_i променљива која недостаје.

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3)(x_2 + x_3 + x_1 \bar{x}_1)(x_1 + x_2 + x_3) =$$

Када смо проширили све елементарне суме са свим променљивама које су им недостајале, извршимо

сређивање израза према правилу Булове алгебре $x_i + x_j x_k = (x_i + x_j)(x_i + x_k)$ и доводимо га у одговарајући облик за СКНФ.

$$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3) =$$

На крају, применимо правила Булове алгебре $x_i x_i = x_i$, како бисмо елиминисали сувишне потпуне суме и добили смо израз у СКНФ облику.

$$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)$$

Задатак 5.

Наћи неке једноставније облике ДНФ прекидачке функције дефинисане изразом:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3$$

Решење

Применом правила Булове алгебре $x_i x_j + x_i x_k = x_i (x_j + x_k)$ на први и други производ, односно трећи и четврти производ, а затим правила Булове алгебре $(x_i + \bar{x}_i) = 1$ добија се једноставнији облик:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 (\bar{x}_1 + x_1) + x_1 x_3 (\bar{x}_2 + x_2) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_3$$

Треба приметити да је могло да се дође до решења које је једноставније од оригиналног израза, али сложеније од претходног решења да смо претходно правило Булове алгебре применили на други и трећи производ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_3 + x_3) + x_1 x_2 x_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 x_3$$

Задатак 6.

Наћи неке једноставније облике КНФ прекидачке функције дефинисане изразом:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$$

Решење

Применом правила Булове алгебре $(x_i + x_j)(x_i + x_k) = x_i + x_j x_k$ на прву и другу суму, односно трећу и четврту суму, а затим правила Булове алгебре $x_i \bar{x}_i = 0$ добија се једноставнији облик:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \bar{x}_3) = (\bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)$$

Треба приметити да је могло да се дође до решења које је једноставније од оригиналног израза, али сложеније од претходног решења да смо претходно правило Булове алгебре применили на другу и трећу суму.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) = (x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$$

Задатак 7.

Булов израз $(x_1 + \bar{x}_2)(x_3 + \bar{x}_3 x_4 \overline{(x_1 + x_2 \bar{x}_4)})$ који представља прекидачку f-ју $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ трансформисати у облик ДНФ и облик КНФ.

Решење

ДНФ

Сређивање почињемо применом Де Морганове теореме на израз $\overline{(x_1 + x_2 \bar{x}_4)} = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4)$ и добијамо следећи израз.

$$f = (x_1 + \bar{x}_2)(x_3 + \bar{x}_3 x_4 (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4)) =$$

Затим примењујемо Де Морганову теорему на израз $\overline{x_2 \bar{x}_4} = (\bar{x}_2 + x_4)$ и добијамо следећи израз.

$$= (x_1 + \bar{x}_2)(x_3 + \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_1 (\bar{x}_2 + x_4)) =$$

Затим се ослобађамо заграде.

$$= (x_1 + \bar{x}_2)(x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4) =$$

Затим примењујемо правило $x_i x_j + x_i x_k = x_i (x_j + x_k)$ и добијамо следећи израз.

$$= (x_1 + \bar{x}_2)(x_3 + (\bar{x}_2 + 1) \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4) =$$

Након тога примењујемо правило $x_i + 1 = 1$ и множимо заграде.

$$= x_1 x_3 + \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 =$$

Затим примењујемо правило $x_i \bar{x}_i = 0$ и добијамо коначно решење.

$$= x_1 x_3 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$$

КНФ

Сређивање почињемо применом Де Морганове теореме на израз $\overline{(x_1 + x_2 \bar{x}_4)} = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4)$ и добијамо следећи израз.

$$f = (x_1 + \bar{x}_2)(x_3 + \bar{x}_3 x_4 (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4)) =$$

Затим примењујемо Де Морганову теорему на израз $\overline{x_2 \bar{x}_4} = (\bar{x}_2 + x_4)$ и добијамо следећи израз.

$$= (x_1 + \bar{x}_2)(x_3 + \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_1 (\bar{x}_2 + x_4)) =$$

Затим примењујемо правило $x_i + x_j x_k = (x_i + x_j)(x_i + x_k)$ и добијамо следећи израз.

$$= (x_1 + \bar{x}_2)(x_3 + \bar{x}_3 x_4)(x_3 + \bar{x}_1 (\bar{x}_2 + x_4)) =$$

Затим поново примењујемо претходно правило и добијамо следећи израз.

$$= (x_1 + \bar{x}_2)(x_3 + \bar{x}_3)(x_3 + x_4)(x_3 + \bar{x}_1)(x_3 + \bar{x}_2 + x_4)$$

Након тога примењујемо правило $(x_i + \bar{x}_i) = 1$ и добијамо коначно решење.

$$= (x_1 + \bar{x}_2)(x_3 + x_4)(\bar{x}_1 + x_3)(\bar{x}_2 + x_3 + x_4)$$

ПРЕДСТАВЉАЊЕ НОРМАЛНИХ ФОРМИ ПОМОЋУ КУБОВА

Уређена n-торка: $a_1 a_2 \dots a_n, a_j \in \{0, 1, X\}$ назива се **куб**.

- a_1, a_2, \dots, a_n - **координате** куба.
- X - произвољна вредност из $\{0, 1\}$.
- **ранг куба** - број координата са вредношћу X .
- куб ранга r представља скуп од 2^r вектора који имају $k=n-r$ једнаких координата. За те векторе се каже да припадају кубу.

Пример:

Куб: 01XX0 $\Rightarrow r=2$

Вектори: $\left. \begin{array}{l} 01000 \\ 01010 \\ 01100 \\ 01110 \end{array} \right\} 2^r = 4$

Пресликавање елементарних производа и сума у кубове:

$$p = \tilde{x}_{j_1} \cdot \tilde{x}_{j_2} \cdot \dots \cdot \tilde{x}_{j_k} \rightarrow a_1 a_2 \dots a_n, n \geq k \begin{cases} a_j = 1, \text{ за } x_j \\ a_j = 0, \text{ за } \bar{x}_j \\ a_j = X, \text{ ако се } x_j \text{ не јавља} \end{cases}$$

$$s = \tilde{x}_{j_1} + \tilde{x}_{j_2} + \dots + \tilde{x}_{j_k} \rightarrow a_1 a_2 \dots a_n, n \geq k \begin{cases} a_j = 0, \text{ за } x_j \\ a_j = 1, \text{ за } \bar{x}_j \\ a_j = X, \text{ ако се } x_j \text{ не јавља} \end{cases}$$

Пример:

Производима који се сматрају функцијама 4 променљиве

	$x_1,$	$\bar{x}_1 x_3,$	$x_1 \bar{x}_2 x_4,$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$
одговарају кубови:	1XXX,	0X1X,	10X1,	1101

а сумама:

	$x_1,$	$\bar{x}_1 + x_3,$	$x_1 + \bar{x}_2 + x_4,$	$x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4$
кубови:	0XXX,	1X0X,	01X0,	0010

Покривачи функција

За елементарне производе p_1, p_2, \dots, p_m чија сума представља неку ДНФ прикадачке функције f каже се да образују **1-покривач** (дисјунктивни покривач) те функције. Ознака: $f(1)$.

За елементарне суме s_1, s_2, \dots, s_m чији производ представља неку КНФ прекидачке функције f каже се да

образују **0-покривач (коњунктивни покривач)** те функције. Ознака: $f(0)$.

Оба покривача се често представљају помоћу скупова кубова.

Операције над кубовима

Развијање куба $A=a_1a_2\dots a_n$ ранга r по координати $a_i=X$ даје два куба $B=b_1b_2\dots b_n$ и $C=c_1c_2\dots c_n$ ранга $r-1$. При томе је $b_i=1$, $c_i=0$ или обрнуто, и $a_j=b_j=c_j$ за $j \neq i$

Пример:

$A = X10X$ по координати a_1

$B = 010X$, по $a_4 \left\{ \begin{array}{l} 0100 \\ 0101 \end{array} \right\}$ потпуним развијањем добијају се
 $C = 110X$, по $a_4 \left\{ \begin{array}{l} 1100 \\ 1101 \end{array} \right\}$ сви вектори који припадају кубу

Сажимање кубова $A=a_1a_2\dots a_n$ и $B=b_1b_2\dots b_n$ је дефинисано за кубове *истог* ранга r ако се разликују само по једној координати (i -тој) и то тако да је $a_i=1$ и $b_i=0$, или обрнуто. Добија се куб ранга $r+1$:
 $C=c_1c_2\dots c_n$, $c_i=X$, $c_j=a_j=b_j$ за $j \neq i$

Пример:

Сажимају се кубови: $\begin{array}{l} 0X10 \\ 0X11 \end{array} \rangle 0X1X$

Генералисано сажимање кубова A и B је дефинисано ако постоји једна и само једна координата (i -та) за коју важи $a_i=1$, $b_i=0$ или обрнуто. Добија се куб

$C=c_1c_2\dots c_n$, $c_i=X$;
 $c_j=a_j=b_j$, ако је $a_j=b_j$;
 $c_j=1$, ако је $a_j=1$, $b_j=X$ или обрнуто;
 $c_j=0$, ако је $a_j=0$, $b_j=X$ или обрнуто;

Тада је: $\{A,B,C\} = \{A,B\}$

Примери:

$A = 0X11$ $A = 0X11$
 а) $B = 0101$ б) $B = 0001$
 $C = 01X1$ $C = 00X1$

Апсорпција. Куб $A=a_1a_2\dots a_n$ апсорбује куб $B=b_1b_2\dots b_n$ ако за свако $a_j \neq X$ важи $a_j=b_j$.

Пример:

$X10X$ апсорбује $010X$ (или $110X$)

Пример:

Елементарне производе и елементарне суме задате доле представити помоћу кубова. Производе и суме сматрати f -јама 4 променљиве.

Према објашњеним правилима:

\bar{x}_2	X0XX	$x_1 + x_2$	00XX
x_1	1XXX	x_1	0XXX
$x_1 x_2 x_3$	111X	$x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$	011X
$x_2 \bar{x}_4$	X1X0	$\bar{x}_1 + x_3$	1X0X
$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	0111	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$	1111

Пример:

Одредити све векторе који припадају доле задатим кубовима. Користити потпуно развијање.

Према објашњеним правилима:

<u>X0X1</u>		<u>1XXX</u>	
0001	<u>01X</u>	1000	<u>0X001</u>
0011	010	1001	00001
1001	011	1010	01001
1011		...	
		1111	

Задатак 8.

Одредити дисјунктивни покривач функције $f(x_1, x_2, x_3)$ дате са $f = x_1 x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$

Решење

Најпре се од израза којим је представљена функција направи скуп кубова на којима функција има вредност један $f(1)$. У овом случају како је израз којим је дефинисана функција у облику ДНФ, пратећи објашњена правила добијамо скуп.

$$f(1) = \{11X, XX0, 001\}$$

Уколико желимо да добијемо све векторе на којима функција има вредност један, то можемо урадити потпуним развијањем кубова према описаним правилима.

$$f(1) = \{110, 111, 000, 010, 100, 110, 001\} = \{110, 111, 000, 010, 100, 001\} = \{6, 7, 0, 2, 4, 1\}$$

$$f(1) = \{0, 1, 2, 4, 6, 7\}$$

Задатак 9.

Одредити коњунктивни покривач функције $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дате са $g = x_1(x_2 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4)$

Решење

Најпре се од израза којим је представљена функција направи скуп кубова на којима функција има вредност нула $g(0)$. У овом случају како је израз којим је дефинисана функција у облику КНФ, пратећи објашњена правила добијамо скуп.

$$g(0) = \{0XXX, X0X1, 1110\}$$

Уколико желимо да добијемо све векторе на којима функција има вредност нула, то можемо урадити потпуним развијањем кубова према описаним правилима.

$$g(0)=\{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 0001, 0011, 1001, 1011, 1110\}$$

$$g(0)=\{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1001, 1011, 1110\}$$

$$g(0)=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 14\}$$

Задатак 10.

Одредити 1-покривач функције $f(x_1, x_2, x_3)$ дате са $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2)$.

Решење

Најпре се од израза којим је представљена функција направи скуп кубова на којима функција има вредност нула $f(0)$, јер је израз којим је дефинисана функција у облику КНФ. Пратећи објашњена правила добијамо скуп.

$$f(0)=\{X00, 001, 10X\}$$

Сада одећујемо све векторе на којима функција има вредност нула, тако што урадимо потпуно развијање кубова према описаним правилима.

$$f(0)=\{000, 100, 001, 100, 101\}=\{000, 100, 001, 101\}=\{0, 4, 1, 5\}=\{0, 1, 4, 5\}$$

Како не постоји ни један вектор који се не јавља, можемо одредити скуп вектора на којима функција има вредност један $f(1)$. То су сви вектори на којима функција нема вредност нула.

$$f(1)=\{2, 3, 6, 7\}$$

На тај начин одредили смо тражени 1-покривач функције.

Задатак 11.

Одредити скуп вектора на којима следећа функција има вредност 0:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 + x_3 + (x_2 + x_3)) \cdot (x_2 + (x_3 + (x_1 + x_4) \cdot (x_1 + x_3)))$$

Решење

Потребно је прво средити израз. Примењујемо развој Де Морганове теореме.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_2 + \bar{x}_3((x_1 + x_4) + (x_1 + x_3)))$$

Затим поново примењујемо Де Морганову теорему и даље сређујемо израз.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \bar{x}_3 (x_2 + x_3)(x_2 + \bar{x}_3(x_1 + x_3 + x_4))$$

И даље сређујемо израз.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_3 \bar{x}_3)(x_2 + x_1 \bar{x}_3 + x_3 \bar{x}_3 + \bar{x}_3 x_4)$$

Затим примењујемо правило $x_i \bar{x}_i = 0$ и након тога množимо заграде, па примењујемо правило

$x_i x_i = x_i$ и правило $x_i + x_i = x_i$, а затим правило $x_i + 1 = 1$ и добијамо сређени израз.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 (x_2 + x_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_3 x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 = x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 = x_1 x_2 \bar{x}_3 (1 + x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3$$

Сада се од израза којим је представљена функција направи скуп кубова на којима функција има вредност један $f(1)$. У овом случају како је израз који смо добили сређивањем у облику ДНФ, пратећи објашњена правила добијамо скуп.

$$f(1)=\{110X\}$$

Сада желимо да добијемо све векторе на којима функција има вредност један, а то можемо урадити потпуним развијањем кубова према описаним правилима.

$$f(1)=\{1100, 1101\}=\{12, 13\}$$

Како не постоји ни један вектор који се не јавља, можемо одредити скуп вектора на којима функција има вредност нула $f(0)$. То су сви вектори на којима функција нема вредност један.

$$f(0)=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15\}$$

На тај начин одредили смо тражени скуп вектора на којима функција има вредност 0.

Задатак 12.

Испитати да ли функције $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дефинисане изразима:

$$f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

$$g = \bar{x}_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

реализују једнако пресликавање.

Решење

У задацима овог типа потребно је проверити да ли две функције имају исте вредности на свим векторима који се могу јавити. То можемо урадити тако што ћемо за сваку функцију одредити вредности на свим векторима и затим упоредити. Како су функције дате у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивне покриваче ових функција. Према раније описаним правилима добијамо:

$$f(1)=\{010X, X111, 10X1, 1X00\}$$

$$g(1)=\{01X1, 1X11, 100X, X100\}.$$

Сада потпуним развијањем кубова, можемо одредити све векторе на којима функције имају вредност један.

$$f(1)=\{0100, 0101, 0111, 1111, 1001, 1011, 1000, 1100\}=\{4, 5, 7, 15, 9, 11, 8, 12\}$$

$$f(1)=\{4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 15\}$$

$$g(1)=\{0101, 0111, 1011, 1111, 1000, 1001, 0100, 1100\}=\{5, 7, 11, 15, 8, 9, 4, 12\}$$

$$g(1)=\{4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 15\}$$

Као што видимо $f(1) = g(1)$ и пошто не постоји ни један вектор који се не јавља, можемо закључити да мора да важи и $f(0) = g(0)$ и да ове две функције реализују једнако пресликавање.

Задатак 13.

Помоћу кубова одредити да ли следеће две функције реализују једнако пресликавање и образложити одговор.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + \bar{x}_4) \cdot (x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4) \cdot (x_1 + x_3 + x_4) \cdot (x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 + x_2 x_3 \bar{x}_4$$

Решење

Потребно је проверити да ли две функције имају исте вредности на свим векторима који се могу јавити. То можемо урадити тако што ћемо за сваку функцију одредити вредности на свим векторима и затим упоредити. Како је функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику КНФ, лакше је одредити коњуктивни покривач ове функције, а како је функција $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције. Према раније описаним правилима добијамо:

$$f(0)=\{X0X1, X00X, X110, 0X00, 0X11\}$$

$$g(1)=\{X00X, 10X1, 0X11, 01X0, X110\}$$

Сада потпуним развијањем кубова, можемо одредити све векторе на којима функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност нула, односно све векторе на којима функција $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност један.

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \{0001, 0011, 1001, 1011, 0000, 0001, 1000, 1001, 0110, 1110, 0000, 0100, 0011, 0111\} = \\
 &= \{0001, 0011, 1001, 1011, 0000, 1000, 0110, 1110, 0100, 0111\} \\
 &= \{1, 3, 9, 11, 0, 8, 6, 14, 4, 7\} \\
 f(0) &= \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 14\} \\
 g(1) &= \{0000, 0001, 1000, 1001, 1001, 1011, 0011, 0111, 0100, 0110, 0110, 1110\} = \\
 &= \{0000, 0001, 1000, 1001, 1011, 0011, 0111, 0100, 0110, 1110\} \\
 &= \{0, 1, 8, 9, 11, 3, 7, 4, 6, 14\} \\
 g(1) &= \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 14\}
 \end{aligned}$$

Сада је потребно одредити $f(1)$ и $g(0)$. Пошто се ради о потпуно дефинисаним функцијама, значи да $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Аналогно важи и за функцију $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ која има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један.

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \{2, 5, 10, 12, 13, 15\} \\
 g(0) &= \{2, 5, 10, 12, 13, 15\}
 \end{aligned}$$

Као што видимо $f(1) \neq g(1)$ и $f(0) \neq g(0)$ што значи да ове две функције не реализују једнако пресликавање.

Задатак 14.

Дате су функције $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ које су дефинисане изразима:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_3 + x_2 \bar{x}_3 + x_2 x_3 \bar{x}_4$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_4)$$

а) Испитати да ли ове две функције реализују једнако пресликавање.

б) Уколико се на улазу никада не јављају вектори $\{5, 9, 13\}$ испитати да ли ове две функције реализују једнако пресликавање на векторима који се јављају.

Решење

а) Потребно је проверити да ли две функције имају исте вредности на свим векторима који се могу јавити. То можемо урадити тако што ћемо за сваку функцију одредити вредности на свим векторима и затим упоредити. Како је функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције, а како је функција $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику КНФ, лакше је одредити коњунктивни покривач ове функције. Према раније описаним правилима добијамо:

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \{0X1X, X10X, X110\} \\
 g(0) &= \{X00X, 10XX, 1XX1\}
 \end{aligned}$$

Сада потпуним развијањем кубова, можемо одредити све векторе на којима функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност један, односно све векторе на којима функција $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност нула.

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \{0010, 0011, 0110, 0111, 0100, 0101, 1100, 1101, 0110, 1110\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14\} \\
 g(0) &= \{0000, 0001, 1000, 1001, 1000, 1001, 1010, 1011, 1001, 1011, 1101, 1111\} = \\
 &= \{0, 1, 8, 9, 10, 11, 13, 15\}
 \end{aligned}$$

Сада је потребно одредити $f(0)$ и $g(1)$. Пошто се ради о потпуно дефинисаним функцијама, значи да функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један. Аналогно важи и за функцију $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ која има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула.

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \{0, 1, 8, 9, 10, 11, 15\} \\
 g(1) &= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 14\}
 \end{aligned}$$

Као што видимо $f(1) \neq g(1)$ и $f(0) \neq g(0)$ што значи да ове две функције не реализују једнако пресликавање.

б) У задацима овог типа, све се ради као на претходно описани начин, једино се из разматрања изузимају вектори за које је у тексту задатка речено да се никада не јављају. Ове векторе записујемо као скуп $f(b)$ и $g(b)$.

$$f(b) = \{5, 9, 13\}$$

$$g(b) = \{5, 9, 13\}$$

Потребно је проверити да ли две функције имају исте вредности на свим векторима који се могу јавити. То можемо урадити тако што ћемо за сваку функцију одредити вредности на свим векторима и затим упоредити. Како је функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције, а како је функција $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику КНФ, лакше је одредити коњунктивни покривач ове функције. Према раније описаним правилима добијамо:

$$f(1) = \{0X1X, X10X, X110\}$$

$$g(0) = \{X00X, 10XX, 1XX1\}$$

Сада потпуним развијањем кубова, можемо одредити све векторе на којима функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност један, односно све векторе на којима функција $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност нула.

$$f(1) = \{0010, 0011, 0110, 0111, 0100, 0101, 1100, 1101, 0110, 1110\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14\}$$

$$g(0) = \{0000, 0001, 1000, 1001, 1000, 1001, 1010, 1011, 1001, 1011, 1101, 1111\} = \{0, 1, 8, 9, 10, 11, 13, 15\}$$

Сада је потребно из разматрања искључити векторе који се никада не јављају.

$$f(1) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14\} / \{5, 9, 13\} = \{2, 3, 4, 6, 7, 12, 14\}$$

$$g(0) = \{0, 1, 8, 9, 10, 11, 13, 15\} / \{5, 9, 13\} = \{0, 1, 8, 10, 11, 15\}$$

Сада је потребно одредити или $f(0)$ или $g(1)$. Пошто се ради о непотпуно дефинисаним функцијама, треба из разматрања изузети векторе на којима функција није дефинисана (за које је речено да се никада не јављају), дакле функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један, а на којима је дефинисана. Аналогно важи и за функцију $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ која има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула, а на којима је дефинисана.

$$f(0) = \{0, 1, 8, 10, 11, 15\}$$

$$g(1) = \{2, 3, 4, 6, 7, 12, 14\}$$

Као што видимо $f(1) = g(1)$ и $f(0) = g(0)$ што значи да ове две функције реализују једнако пресликавање, када се узме у обзир чињеница да се вектори $\{5, 9, 13\}$ никада не јављају.

Задатак 15.

Дате су функције $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ које су дефинисане изразима:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_2 x_4$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_3 + x_4) \cdot (x_2 + \bar{x}_4)$$

Уколико се на улазу никада не јављају вектори $\{4, 5, 13\}$ наћи скуп вектора на којима се ове две функције разликују.

Решење

Из разматрања треба изузети векторе за које је у тексту задатка речено да се не никада не јављају. Ове векторе записујемо као скуп $f(b)$ и $g(b)$.

$$f(b) = \{4, 5, 13\}$$

$$g(b)=\{4, 5, 13\}$$

Потребно је проверити на којим векторима две функције имају различите вредности. То можемо урадити тако што ћемо за сваку функцију одредити вредности на свим векторима и затим упоредити. Како је функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције, а како је функција $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику КНФ, лакше је одредити коњуктивни покривач ове функције. Према раније описаним правилима добијамо:

$$f(1)=\{00X0, XX00, X1X1\}$$

$$g(0)=\{01XX, 1X10, X0X1\}$$

Сада потпуним развијањем кубова, можемо одредити све векторе на којима функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност један, односно све векторе на којима функција $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност нула.

$$f(1) = \{0000, 0010, 0000, 0100, 1000, 1100, 0101, 0111, 1101, 1111\} = \{0, 2, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 15\}$$

$$g(0) = \{0100, 0101, 0110, 0111, 1010, 1110, 0001, 0011, 1001, 1011\} = \\ = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14\}$$

Сада је потребно из разматрања искључити векторе који се никада не јављају.

$$f(1) = \{0, 2, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 15\} / \{4, 5, 13\} = \{0, 2, 7, 8, 12, 15\}$$

$$g(0) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14\} / \{4, 5, 13\} = \{1, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 14\}$$

Сада је потребно одредити $f(0)$ и $g(1)$. Пошто се ради о непотпуно дефинисаним функцијама, треба из разматрања изузети векторе на којима функција није дефинисана (за које је речено да се никада не јављају), дакле функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један, а на којима је дефинисана. Аналогно важи и за функцију $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ која има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула, а на којима је дефинисана.

$$f(0)=\{1, 3, 6, 9, 10, 11, 14\}$$

$$g(1)=\{0, 2, 8, 12, 15\}$$

Сада треба одредити на којим векторима важи $f(1)=g(0)$, као и на којим векторима важи $f(0)=g(1)$ $\{7\}$ и то представља решење.