1 Kompleksna dinamika

Kompleksno ravnino lahko kompaktificiramo z eno točko, kar nam da **Riemannovo sfero** $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Slika Riemann
Holomorfne razširitve f na $\hat{C}$ (če obstaja) v okolici $z = \infty$ obravnavamo s pomočjo konjugacije s preslikavo $z \mapsto \frac{1}{z}$. Pravimo, da je $f(z)$ holomorfna v $z = \infty$, tedaj, ko je $f(\frac{1}{z})$ holomorfna v okolici $z = 0$.

Primer 1. *i)* $f(z) = \frac{1}{z-1} \implies$

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$$

$z = 0$ je ničla prve stopnje za $f(\frac{1}{z})$, zato je $z = \infty$ ničla prve stopnje za f.
$f(1) = \infty \implies$

$$\frac{1}{f(z)} = z - 1$$

tj. $z = 1$ je ničla prve stopnje za $\frac{1}{f(z)}$, zato je tudi pol prve stopnje za f.

ii) $f(z) = z^2 + 1$

$$f(\infty) = \infty \implies \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\frac{1}{z^2} + 1} = \frac{z^2}{1 + z^2} = z^2 + z^4 + \dots$$

$z = \infty$ je pol 2 stopnje.

iii) $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. *Razširitev ni možna, saj za $x \to -\infty$ velja $|f(z)| \to 0$, ter za $x \to \infty$ velja $|f(z)| \to \infty$.*

Izrek 1. *Funkcija $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ je holomorfna natanko tedaj, ko je razširitev racionalne funkcije ali $f \equiv \infty$.*

Dokaz: ($\impliedby$): sledi iz primerov, dodaj.
($\implies$):

i) če $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nima polov in $f(\infty) \neq \infty$ je po Liouvillovem izreku konstantna.

ii) če ima f na $\mathbb{C}$ neskončno mnogo polov, potem zaradi diskretnosti, obstaja zaporedje le teh, ki gre proti ∞.
wop wop
Posledično bo tudi $f(\infty) = \infty$ zaradi zveznosti in $f \equiv \infty$ zaradi principa identičnosti.

iii) Če ima f le končno mnogo polov, ima po podobnem argumentu, kot pri *ii)* tudi kočno ničel. Potem vzamemo R, iracionalno funkcijo z istimi ničlami in poli. Po *i)* je $\frac{f}{R}$ konstantna.

Povzetek: takoj, ko ima f neskočno ničel ali polov oz. kako bistveno singularnost, je nemoreš obravnavati $\hat{C}$ oz. ni holomorfna. $\square$

1.1 Fatoujeva in Juliajeva množica

$f(z) = z^2$ oz. v polarnih koordinatah $re^{i\phi} \mapsto r^2 e^{i2\phi}$.

$|z| > 1:$ $\lim_{n\to\infty} |f^n(z)| = \lim_{n\to\infty} r^{2n} = \infty$

$|z| < 1:$ $\lim_{n\to\infty} |f^n(z)| = \lim_{n\to\infty} r^{2n} = 0$

$|z| = 1:$ f "deluje kot" doubling map D in je kaotična. Poleg tega pa ima vsaka točka v okolici tudi točki, ki gresta proti 0 oz. ∞

Sklep: kompleksna ravnina oz. Riemannova sfera razpade na dve disjunktni množici. **Fatoujeva**, kjer je obnašanje f^n "predvidljivo" in **Juliajevo**, kjer je obnašanje f^n kaotično

$$\mathcal{F}_f = \hat{\mathbb{C}}/\partial\mathbb{D}$$
$$\mathcal{J}_f = \partial\mathbb{D}.$$

Za formalno definicijo teh dve množic rabimo koncept normalnih družin.

Definicija 1. *Zaporedje* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(D)$ *za* $D \subseteq \mathbb{C}$, *konvergira k* $f \in \mathcal{O}(D)$ ***enakomerno po kompaktih*** *na* D, *če* $\forall\epsilon > 0$ *in* $\forall K^{komp.} \subset D$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ *in* $z \in K$, *velja* $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.

Primer 2. $f_n(z) = z^n$ *na* $\mathbb{D}$.
Limita po točkah je enaka $f(z) = 0$. *Izberemo poljuben kompakt* $K \subset \mathbb{D}$ *Zanj obstaja* $r = r(K) \in [0, 1)$, *da je* $K \subseteq \mathbb{D}(0, r)$ *Ker je* $r < 1$, *lahko naredimo oceno* $\forall z \in K$:

$$|f_n(z) - f(z)| = |z^n| \leq r^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

tj. $\forall\epsilon > 0$ *obstaja* $n_0 \in \mathbb{N}$, *da je za* $n \geq n_0$: $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$. *Seveda pa enakomerna konvergenca na celem* $\mathbb{D}$ *v tem primeru ne obstaja.*

Izrek 2. *Naj bo* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \mathbb{C}$, *zaporedje ki konvergira* $f_n \to f$ *enakomerno po kompaktih. Potem je tudi* $f \in \mathcal{O}(D)$ *holomorfna.*

Dokaz: TBA. □

Definicija 2. *Družina* $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{C}$ *je* ***normalna na*** D, *če za vsako zaporedje* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ *obstaja podzaporedje, ki konvergira enakomerno po kompaktih k neki* $f \in \mathcal{O}(D)$ *ali k* $f \equiv \infty$.

Opomba 1.

- *Normalne družine so analog kompaktnih množic v* $\mathcal{O}(D) \cup \{f \equiv \infty\}$.
- *Normalnost se študira tudi v drugih razredih funkcij, v katerih pa se običajno ne dodaja* $f \equiv \infty$.
- *Zadostnim oz. ekvivaletnim pogojem se reče Arzela - Ascolijevi izreki. Npr. za družino* $\mathcal{F} \subset C([a, b])$ *velja, da je normalna, če je:*
  - *i) enakomerno omejena tj.* $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a, b]$ *in* $\forall f \in \mathcal{F}$.

ii) *je enakomerno enakozvezna tj.* $\forall \epsilon > 0.\ \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon\ \forall x, y \in [a,b]$ *in* $\forall f \in \mathcal{F}$.

iii) *Pri holomorfnih funkcijah ii) sledi iz i) zaradi Cauchyjeve integracijske formule. Zaradi kompaktnosti* $\hat{\mathbb{C}}$ *je dovolj celo lokalna omejenost. Zato se Arzela-Ascolijev izrek navadn prenese na Montelova izreka:*

Izrek 3 (Prvi Montelov izrek)**.** *$\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{C}$ je normalna, če je lokalno enakomerno omejena tj. $\forall z \in D.\ \exists z \in U \subset D$ in $M > 0$, da je $|f(w)| \leq M\ \forall w \in U$ in $\forall f \in \mathcal{F}$.*

Definicija 3. *Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Njena **Fatoujeva množica** $\mathcal{F}_f$ je definirana kot množica točk $z \in D$, za katere obstaja okolica $U \subset D$, da je družica $\{f^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ normalna na U. Njena **Juliajeva množica** pa je definirana kot komplement $\mathcal{J}_f = D/\mathcal{F}_f$.*

Primer 3. *$f(z) = z^2 \implies f^n(z) = z^{2^n}$.*
Za $|z| < 1$ konvergira enakomerno po kompaktih na $\mathbb{D} \implies \mathbb{D} \subset \mathcal{F}_f$.
Za $|z| > 1$ konvergira enakomerno po kompaktih na $\hat{C}/\mathbb{D} \implies \mathbb{D} \subset \mathcal{F}_f$ k ∞.
Dokaz: za $K \subset \hat{C}/\overline{\mathbb{D}}$ obstaja $r > 1$, da je $\mathbb{D}(0,r) \cap K = \emptyset$, oz. $|z| \geq r$ za $z \in K$.
Posledično:

$$|f^n(z)| = |z^{2^n}| \geq r^{2^n} \to \infty.$$

tj. $\forall M > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|f^n(z)| > M$ za $n \geq n_0$ in $z \in K$. Alternativno bi lahko oravnavali $\frac{1}{f^n(z)} \to 0$ enakomerno po kompaktnih.
Za $|z| = 1$ normalnost nimamo v nobeni okolici, saj so blizu točke, ki gredo k ∞ in take, ki gredo k 0, zato tudi, če bi obstajala limita, ne bi bila zvezna.
Sklep: ponovno smo ugotovili, da sta $\mathcal{F}_f = \hat{C}/\partial\mathbb{D}$ in $\mathcal{J}_f = \partial\mathbb{D}$.

Opomba 2.

- *Po konstrukciji je $\mathcal{F}_f$ odprta, $\mathcal{J}_f$ pa zaprta, lahko pa sta obe prazni. Primera za to sta:*
  - *$f(z) = z + 1 \implies f^n(z) = z + n \longrightarrow \infty$ enakomerno na kompaktih na $\hat{\mathbb{C}}$. Torej je $\mathcal{J}_f = \emptyset$.*
  - *Lattesova funkcija $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$ ima $\mathcal{J}_f = \hat{C}$ in $\mathcal{F}_f = \emptyset$.*
- *Za polinome se definiciji $\mathcal{J}_f$ in $\mathcal{F}_f$ poenostavita, kar bomo spoznali kasneje.*

Izrek 4. *Množici $\mathcal{J}_f$ in $\mathcal{F}_f$ sta naprej in nazaj invariantni tj. $f(\mathcal{J}_f) = f^{-1}(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f$ in $f(\mathcal{F}_f) = f^{-1}(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f$.*

Dokaz: Dovolj je dokazati zvezo le za $\mathcal{F}_f$. Naj bo $z \in U$, kjer je $U \subset D$, na kateri so iterati normalni. Potem sta tudi množici $f^{-1}(U)$ in $f(U)$ odprti, seveda pa je družina $\{f^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ normalna tudi na njih. Od tod sledi:

$$f^{-1}(\mathcal{F}_f) \subseteq \mathcal{F}_f \text{ in } f(\mathcal{F}_f) \subseteq \mathcal{F}_f.$$

Na prvo relacijo dodamo f in dobimo:

$$\mathcal{F} \subseteq f(\mathcal{F}_f) \text{ oz. } \mathcal{F} = f(\mathcal{F}).$$

Posledično pa je tudi $\mathcal{F}_f \subseteq f^{-1}(\mathcal{F}_f)$ oz. $\mathcal{F}_f = f^{-1}(\mathcal{F}_f)$. $\square$

Povezanim komponentam $\mathcal{F}_f$ pravimo Fatoujeve komponente in se slikajo ena v drugo.
Nek primerček.