1 Kompleksna dinamika

Kompleksno ravnino lahko kompaktificiramo z eno točko, kar nam da **Riemannovo sfero** $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Slika Riemann
Holomorfne razširitve f na $\hat{C}$ (če obstaja) v okolici $z = \infty$ obravnavamo s pomočjo konjugacije s preslikavo $z \mapsto \frac{1}{z}$. Pravimo, da je $f(z)$ holomorfna v $z = \infty$, tedaj, ko je $f(\frac{1}{z})$ holomorfna v okolici $z = 0$.

Primer 1. *i)* $f(z) = \frac{1}{z-1} \implies$

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$$

$z = 0$ je ničla prve stopnje za $f(\frac{1}{z})$, zato je $z = \infty$ ničla prve stopnje za f.
$f(1) = \infty \implies$

$$\frac{1}{f(z)} = z - 1$$

tj. $z = 1$ je ničla prve stopnje za $\frac{1}{f(z)}$, zato je tudi pol prve stopnje za f.

ii) $f(z) = z^2 + 1$

$$f(\infty) = \infty \implies \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\frac{1}{z^2} + 1} = \frac{z^2}{1 + z^2} = z^2 + z^4 + \dots$$

$z = \infty$ je pol 2 stopnje.

iii) $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. *Razširitev ni možna, saj za $x \to -\infty$ velja $|f(z)| \to 0$, ter za $x \to \infty$ velja $|f(z)| \to \infty$.*

Izrek 1. *Funkcija $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ je holomorfna natanko tedaj, ko je razširitev racionalne funkcije ali $f \equiv \infty$.*

Dokaz: ($\impliedby$): sledi iz primerov, dodaj.
($\implies$):

i) če $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nima polov in $f(\infty) \neq \infty$ je po Liouvillovem izreku konstantna.

ii) če ima f na $\mathbb{C}$ neskončno mnogo polov, potem zaradi diskretnosti, obstaja zaporedje le teh, ki gre proti ∞.
wop wop
Posledično bo tudi $f(\infty) = \infty$ zaradi zveznosti in $f \equiv \infty$ zaradi principa identičnosti.

iii) Če ima f le končno mnogo polov, ima po podobnem argumentu, kot pri *ii)* tudi kočno ničel. Potem vzamemo R, iracionalno funkcijo z istimi ničlami in poli. Po *i)* je $\frac{f}{R}$ konstantna.

Povzetek: takoj, ko ima f neskočno ničel ali polov oz. kako bistveno singularnost, je nemoreš obravnavati $\hat{C}$ oz. ni holomorfna. $\square$

1.1 Fatoujeva in Juliajeva množica

$f(z) = z^2$ oz. v polarnih koordinatah $re^{i\phi} \mapsto r^2 e^{i2\phi}$.

$|z| > 1$: $\lim_{n\to\infty} |f^n(z)| = \lim_{n\to\infty} r^{2n} = \infty$

$|z| < 1$: $\lim_{n\to\infty} |f^n(z)| = \lim_{n\to\infty} r^{2n} = 0$

$|z| = 1$: f "deluje kot" doubling map D in je kaotična. Poleg tega pa ima vsaka točka v okolici tudi točki, ki gresta proti 0 oz. ∞

Sklep: kompleksna ravnina oz. Riemannova sfera razpade na dve disjunktni množici. **Fatoujeva**, kjer je obnašanje f^n "predvidljivo" in **Juliajevo**, kjer je obnašanje f^n kaotično

$$\mathcal{F}_f = \hat{\mathbb{C}}/\partial\mathbb{D}$$
$$\mathcal{J}_f = \partial\mathbb{D}.$$

Za formalno definicijo teh dve množic rabimo koncept normalnih družin.

Definicija 1. *Zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(D)$ za $D \subseteq \mathbb{C}$, konvergira k $f \in \mathcal{O}(D)$* ***enakomerno po kompaktih*** *na D, če $\forall\epsilon > 0$ in $\forall K^{komp.} \subset D$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ in $z \in K$, velja $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.*

Primer 2. *$f_n(z) = z^n$ na $\mathbb{D}$.*
Limita po točkah je enaka $f(z) = 0$. Izberemo poljuben kompakt $K \subset \mathbb{D}$ Zanj obstaja $r = r(K) \in [0, 1)$, da je $K \subseteq \mathbb{D}(0, r)$ Ker je $r < 1$, lahko naredimo oceno $\forall z \in K$:

$$|f_n(z) - f(z)| = |z^n| \leq r^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

tj. $\forall\epsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je za $n \geq n_0$: $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$. Seveda pa enakomerna konvergenca na celem $\mathbb{D}$ v tem primeru ne obstaja.

Izrek 2. *Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \mathbb{C}$, zaporedje ki konvergira $f_n \to f$ enakomerno po kompaktih. Potem je tudi $f \in \mathcal{O}(D)$ holomorfna.*

Dokaz: TBA. □

Definicija 2. *Družina $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{C}$ je* ***normalna na*** *D, če za vsako zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ obstaja podzaporedje, ki konvergira enakomerno po kompaktih k neki $f \in \mathcal{O}(D)$ ali k $f \equiv \infty$.*

Opomba 1.
- *Normalne družine so analog kompaktnih množic v $\mathcal{O}(D) \cup \{f \equiv \infty\}$.*
- *Normalnost se študira tudi v drugih razredih funkcij, v katerih pa se običajno ne dodaja $f \equiv \infty$.*
- *Zadostnim oz. ekvivaletnim pogojem se reče Arzela - Ascolijevi izreki. Npr. za družino $\mathcal{F} \subset C([a, b])$ velja, da je normalna, če je:*
    - *i) enakomerno omejena tj. $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a, b]$ in $\forall f \in \mathcal{F}$.*

ii) je enakomerno enakozvezna tj. $\forall \epsilon > 0.\ \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \epsilon\ \forall x, y \in [a,b]$ *in* $\forall f \in \mathcal{F}$.

iii) Pri holomorfnih funkcijah ii) sledi iz i) zaradi Cauchyjeve integracijske formule. Zaradi kompaktnosti $\hat{\mathbb{C}}$ *je dovolj celo lokalna omejenost. Zato se Arzela-Ascolijev izrek navadn prenese na Montelova izreka:*

Izrek 3 (Prvi Montelov izrek)**.** $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{C}$ *je normalna, če je lokalno enakomerno omejena tj.* $\forall z \in D.\ \exists z \in U \subset D$ *in* $M > 0$, *da je* $|f(w)| \leq M\ \forall w \in U$ *in* $\forall f \in \mathcal{F}$.

Definicija 3. *Naj bo* $f \in \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. *Njena* ***Fatoujeva množica*** $\mathcal{F}_f$ *je definirana kot množica točk* $z \in D$, *za katere obstaja okolica* $U \subset D$, *da je družica* $\{f^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ *normalna na* U. *Njena* ***Juliajeva množica*** *pa je definirana kot komplement* $\mathcal{J}_f = D / \mathcal{F}_f$.

Primer 3. $f(z) = z^2 \implies f^n(z) = z^{2^n}$.
Za $|z| < 1$ *konvergira enakomerno po kompaktih na* $\mathbb{D} \implies \mathbb{D} \subset \mathcal{F}_f$.
Za $|z| > 1$ *konvergira enakomerno po kompaktih na* $\hat{C}/\mathbb{D} \implies \mathbb{D} \subset \mathcal{F}_f$ *k* ∞.
Dokaz: za $K \subset \hat{C}/\overline{\mathbb{D}}$ *obstaja* $r > 1$, *da je* $\mathbb{D}(0,r) \cap K = \emptyset$, *oz.* $|z| \geq r$ *za* $z \in K$.
Posledično:

$$|f^n(z)| = |z^{2^n}| \geq r^{2^n} \to \infty.$$

tj. $\forall M > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, *da je* $|f^n(z)| > M$ *za* $n \geq n_0$ *in* $z \in K$. *Alternativno bi lahko oravnavali* $\frac{1}{f^n(z)} \to 0$ *enakomerno po kompaktnih.*
Za $|z| = 1$ *normalnost nimamo v nobeni okolici, saj so blizu točke, ki gredo k* ∞ *in take, ki gredo k* 0, *zato tudi, če bi obstajala limita, ne bi bila zvezna.*
Sklep: ponovno smo ugotovili, da sta $\mathcal{F}_f = \hat{C}/\partial\mathbb{D}$ *in* $\mathcal{J}_f = \partial\mathbb{D}$.

Opomba 2.

- *Po konstrukciji je* $\mathcal{F}_f$ *odprta,* $\mathcal{J}_f$ *pa zaprta, lahko pa sta obe prazni. Primera za to sta:*
  - $f(z) = z+1 \implies f^n(z) = z+n \longrightarrow \infty$ *enakomerno na kompaktih na* $\hat{\mathbb{C}}$. *Torej je* $\mathcal{J}_f = \emptyset$.
  - *Lattesova funkcija* $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$ *ima* $\mathcal{J}_f = \hat{C}$ *in* $\mathcal{F}_f = \emptyset$.
- *Za polinome se definiciji* $\mathcal{J}_f$ *in* $\mathcal{F}_f$ *poenostavita, kar bomo spoznali kasneje.*

Izrek 4. *Množici* $\mathcal{J}_f$ *in* $\mathcal{F}_f$ *sta naprej in nazaj invariantni tj.* $f(\mathcal{J}_f) = f^{-1}(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f$ *in* $f(\mathcal{F}_f) = f^{-1}(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f$.

Dokaz: Dovolj je dokazati zvezo le za $\mathcal{F}_f$. Naj bo $z \in U$, kjer je $U \subset D$, na kateri so iterati normalni. Potem sta tudi množici $f^{-1}(U)$ in $f(U)$ odprti, seveda pa je družina $\{f^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ normalna tudi na njih. Od tod sledi:

$$f^{-1}(\mathcal{F}_f) \subseteq \mathcal{F}_f \text{ in } f(\mathcal{F}_f) \subseteq \mathcal{F}_f.$$

Na prvo relacijo dodamo f in dobimo:

$$\mathcal{F} \subseteq f(\mathcal{F}_f) \text{ oz. } \mathcal{F} = f(\mathcal{F}).$$

Posledično pa je tudi $\mathcal{F}_f \subseteq f^{-1}(\mathcal{F}_f)$ oz. $\mathcal{F}_f = f^{-1}(\mathcal{F}_f)$. □

Povezanim komponentam $\mathcal{F}_f$ pravimo Fatoujeve komponente in se slikajo ena v drugo.
Nek primerček.

2 Napolnjena Juliajeva množica

V tem razdelku se omejimo na ne linearne polinome

$$p(z) = a_d z^d + \cdots + a_0, \quad d \geq 2.$$

Vsi taki polinomi imajo v $z = \infty$ superprivlačno točko. Zato lahko Juliajevo in Fatoujevo množico definiramo na alternativen način:

- $$\mathcal{K}_p \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |R^n(z)| \text{ omejena} \forall n \in \mathbb{N}\}$$
  napolnjena Juliajeva množica.
- $$\mathcal{J}_p = \partial \mathcal{K}_p \text{ in } \mathcal{F}_p = \hat{\mathbb{C}} / \mathcal{J}_p$$
  naši karakteristični množici.

Ker je $\infty \in \mathcal{F}$ in $A_p(\infty) \subset \mathcal{F}_p$, se ta definicija ujema s standardnima. To pomenim, da je dinami blizu $z = \infty$ konjugirana dinamiki $z \mapsto z^d$ blizu $z = 0$.
Slikača klopotača

Posledica 1. *Za polinome stopnje $d \geq 2$ je $\mathcal{J}_p$ vedno neprazna in omejena.*

Dokaz: Neprazna je, ker obstaja vsaj še ena fiksna točka, ki ni $z = \infty$ torej je $\partial A_p(\infty) \neq \emptyset$. Ostalo sledi iz dejstva, da je $A_p \subset \mathcal{F}_p$. □

Ugotovili smo, da za dovolj velike $z \in \mathbb{C}$ orbita pobegne proti ∞. Številom, ki opredeljujejo zadostno velikost pravimo **radij pobega**.

Izrek 5 (Radij pobega)**.** *Naj bo P polinom stopnje $d \geq 2$. Naj bo*

$$R \coloneqq \max\left\{\frac{3}{a_d}, \frac{2}{a_d}(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{d-1}|), 1\right\}. \tag{1}$$

Če je $|z| \geq R$, velja

$$\lim_{n \to \infty} |p^n(z)| = \infty. \tag{2}$$

Dokaz: Naj bo $|z| \geq R$. Naredimo oceno:

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_d z^d + \cdots + a_z + a_0| = \\
&= |a_d z^d| \cdot \left|1 + \frac{a_{d-1}}{a_d z} + \cdots + \frac{a_1}{a_d z^{d-1} + \frac{a_0}{a_d z^d}}\right| \\
&\leq \frac{|a_{d1}|}{|a_d| \cdot |z|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|a_d| \cdot |z|^d} \leq \\
&\leq \frac{|a_{d-1}| + \cdots + |a_0|}{|a_d| \cdot |z|} \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_d| \cdot |z|^d \cdot |1+s| \geq |a_d| \cdot |z|^d \cdot (1-|s|) \\
&\geq |a_d| \cdot |z|^d \frac{1}{2} \geq \frac{3}{|z|} \cdot |z|^d \frac{1}{2} \geq \qquad\qquad\qquad \geq \frac{3}{2}|z| \geq \frac{3}{2}R.
\end{aligned}
$$

Induktivno ugotovimo:

$$
|P^n(z)| \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot R \xrightarrow{n\to\infty} \infty
$$

$\square$

Opomba 3. *Ta radij ni optimalen, lahko bi še prilagajali konstanti* 3 *in* 2*. Alternativna verzija pravi npr. da je dober tudi*

$$
R = \left\{ ... \right\}
$$

Posledica tega izreka je algoritem za približno risanje $\mathcal{K}_p$, ki ima naslednje korake:

- Določi R iz izberi $N >> 1$.
- Naključno izbiraj točke $z_0 \in \mathbb{D}(0, R)$, če za vse $n \in \{1, 2, \ldots, n\}$ velja, da je $|P^n(z_0)| < R$, jih obarvaj.

Dodatno lahko razmišljamo na sledeč način. Točka $z = \infty$ je edina fiksna točka v komponenti $A_p(\infty)$. Torej je poleg $\partial A_p(\infty)$ edina možna limita zaporedja v $A_p(\infty)$. Izberemo $z_0 \in A_p(\infty)/\{\infty\}$ in tvorimo zaporedje $z_n \in P^{-n}(z_0)$ (jemljemo praslike). To zaporedje ne more konvergirati k ∞, saj gre tja zaporedje $P^n(z_0)$. Torej konvergira k $\mathcal{J}_P = \partial A_p(\infty)$. To pa nam da še en možen algoritem za približno risanje $\mathcal{J}_p$, ki mu pravimo **vzvratna iteracija**:

- Določi R in izberi $N >> 1$.
- Naključno izbiraj $z_0 \in \partial\mathbb{D}(0, R)$. Nariši množico $P^{-N}(z_0)$ (kar vse praslike).

Naš modelni primer $p(z) = z^2$ in $R = \max\left\{\frac{1}{|1|}, \frac{2}{|1|} \cdot 0, 1\right\} = 3$. Primerčiča:

Izrek 6 (Izrek o dihotomiji)**.** *Juliajeva množica nelinearnega polinoma je povezanan natanko tedaj, ko so vse kritične točke v* $\mathcal{K}_p$*.*

Opomba 4. $c \in \mathbb{C}$ *je kritična točka za* p*, če je* $p'(c) = 0$*. To pomeni, da je razvoj okoli* c *enak:*

$$
p(z) = a_0 + a_k(z-c)^k + a_{k+1}z^{k+1} + z^d a_d, \quad k \geq 1.
$$

To pomeni, da lokalno oz. za vrednosti blizu $z = c$ *funkcija* p *"deluje kot"* $z \mapsto z^k$ *v posebnem, na okolici take točke* p *ni injektivna.*

Primer 4. *Oglejmo si primer $z \mapsto z^2$ in tri tipe krožnic ter njihovih praslik: kul slikice*
Morala: če krožnica trči v kritično vrednost, je njena praslika topološko ekvivalentna osmici, krožnice v njej pa imajo dve nepovezani komponenti v prasliki.

Dokaz(ideja): Ločimo dva primera:

1. v $A_p(\infty)$ ni kritičnih točk in posledično tudi kritičnih vrednosti ne. Za poljuben $r \geq R$, kjer je R radij pobega, je množica $P^{-n}(\partial\mathbb{D}(0,r))$, $n \in \mathbb{N}$, sklenjena krivulja brez samopresečišč (krožnica v topološkem smislu). V limiti pa dobimo $\mathcal{J}_p$, ki je povezana.

2. Če $A_p(\infty)$ vsebuje kritično točko in posledično tudi kritično vrednost , potem bo praslika križnice $D(0, |p(c)|)$ unija več topoloških krožnic s skupnim presečiščem. Manjše krožnice pa bodo razpadle na več komponent. Neki lepega

$\square$

3 Drugi Montelov izrek

V tem razdelku bomo spoznali enega bolj pomembnih izrekov v kompleksni analizi, ki močno opredeli lastnosti množice $\mathcal{J}_R$. Omejili se bomo na racionalne funkcije stopnje $d \geq 2$.

Izrek 7 (Drugi Montelov izrek)**.** *Če obstajo vrednosti $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$, ki so različne. ter za družino $\mathcal{F}\{R : D \subseteq \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \ / \ R \ \text{ racionalna}\}$ velja $\{a, b, c\} \cap R(D) = \emptyset$ za vsak $R \in \mathcal{F}$, potem je $\mathcal{F}$ normalna.*

Opomba 5.

- *Izrek velja tudi za družine meromorfnih funckij na $D \subset \mathbb{C}$ tj. za funkcije brez bistvenih singularnosti.*

- *Izrek je pogosto podan za družine holomorfnih funkcij $\mathcal{F} \subset$ ‰(D), za $D \subset \mathbb{C}$, takrat je dovolj, da izpusti dve točki $a, b \in \mathbb{C}$, saj za c vzamemo ∞ (elementi $\mathcal{F}$ nimajo polov).*

Dokaz(ideja). Kjučen del dokaza je obstoj surjektivne holomorfne preslikave

$$h : \mathbb{D} \to \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0, 1, \infty\},$$

ki nima kritičnih točk oz. je krovna projekcija. $\square$