Dinamika kompleksnih funkcij

Uroš Kosmač

April 8, 2025

V tem poglavju bomo obravnavali dinamiko holomorfnih funkcij $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ponovimo nekaj osnovnih pojmov.

Definicija 1. *Množica $D \subseteq \mathbb{C}$ je* ***območje****, če je odprta in povezana.*

Opomba 1. *Območja so lahko neomejena ali omejena, ter enostavno povezana (brez lukenj) ali m-povezana (m lukenj).*

Definicija 2. *Množica*

$$\mathbb{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a| < r\}$$

je disk in $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$ enotski disk.

Definicija 3. *Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfna v $z \in D$ oz. na D, če obstaja limita*

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}. \tag{1}$$

Množico holomorfnih funkcij na D označimo z $\mathcal{O}(D)$.

Če kompleskno funkcijo zapišemo kot

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{za} \quad u, v \in C^1(D)$$

je $f \in \mathcal{O}(D)$ natanko tedaj, ko velja Cauchy-Riemannov sistem enačb:

$$u_x = v_y \quad \text{in} \quad u_y = -v_x. \tag{2}$$

Praksi so to običajno tiste, ki ne vsebujejo $\bar{z}$. Družina holomorfnih funkcij je precej "toga" oz. zanje veljajo razmeroma stroge omejitve in lastnosti

- Cauchyjeva integracijska formula: za $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ imamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w. \tag{3}$$

  To pomeni, da so vrednosti funkcije v notranjosti, določene z vrednostmi na robu.

- Holomorfne funkcije so $\mathbb{C}$-analitične t.j.

$$\forall a \in D. \exists r > 0 : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{na} \quad \mathbb{D}(a,r).$$

  Posledično so neskončnokrat odvedljive in so odvodi znova holomorfni.

- Njihova množica ničel je diskretna, tj. za ničlo obstaja okolica, da na njej ni druge ničle. Če je D omejena, je ničel končno mnogo.

- Princip indentičnosti: če sta $f \in \mathcal{O}(D_f)$ in $g \in \mathcal{O}(D_g)$ ter je $f = g$ na množici s stekališčem. Potem je $f \equiv g$ na $D_f \cap D_g$.

- Holomorfne funkcije so odprte.

Primer 1. *Osrednja primera*

i) Polinomi:

$$p(z) = C_d z^d + C_{d-1} z^{d-1} + \cdots + C_0, \; c_j \in \mathbb{C}, \; d = deg(p).$$

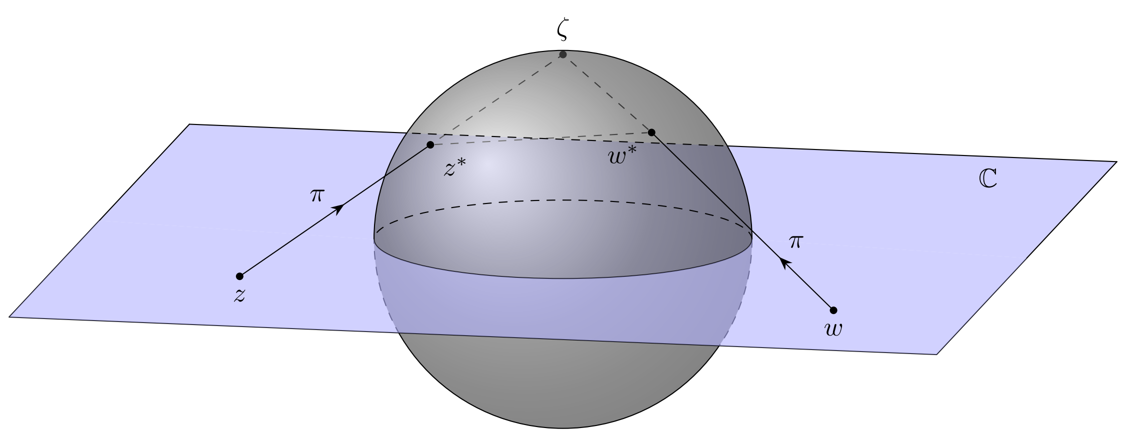
Imajo natanko d ničel štetih z večkratnostjo.

ii) Racionalne funkcije:

$$f = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{C_d z^d + C_{d-1} z^{d-1} + \cdots + C_0}{B_d z^d + B_{d-1} z^{d-1} + \cdots + B_0},$$

kjer sta p, q polinoma. Imajo $deg(p)$ ničel in $deg(q)$ polov., stopnjo pa definiramo kot $deg(f) = \max\{def(p), def(q)\}$.

Kompleksno ravnino lahko kompaktificiramo z eno točko, kar nam da **Riemannovo sfero** $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.



Obnašanje f v okolici $z = \infty$ analiziramo tako, da uporabimo konjugacijo s preslikavo $z \mapsto \frac{1}{z}$ na $\mathbb{C}/\{0\}$. Ta nam vrednost $z = \infty$ prevede na izhodišče. Pravimo, da je f holomorfna na okolici $z = \infty$, če je taka $f\left(\frac{1}{z}\right)$ na okolici $z = 0$.

Primer 2.

i) $f(z) = \frac{1}{z-1}$

$$f(1) = \infty \Longrightarrow \quad \textit{pogledamo} \ \ \frac{1}{f(z)} = z - 1 \Longrightarrow \ \ z = 1 \textit{ je pol } 1. \textit{ stopnje}$$

$$f(\infty) = 0 \Longrightarrow \quad \textit{pogledamo} \ \ f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + \cdots \Longrightarrow \ \ z = \infty \textit{ je ničla } 1.\textit{stopnje}$$

ii) $f(z) = z^2 + 1$

$$f(\infty) = \infty \Longrightarrow \quad \textit{pogledamo} \ \ \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{z^2} + 1} = \frac{z^2}{1+z^2} = z^2 + z^4 + \cdots \Longrightarrow \ \ z = \infty \textit{ je pol } 2.\textit{stopnje}$$

iii) $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. *Vrednosti* $f(\infty)$ *nemoremo smiselno definirati, sa velja*

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x+iy} = 0$$
$$\lim_{x \to \infty} |e^{x+iy}| = \lim_{x \to \infty} e^x = \infty.$$

Izrek 1. *Funkcija* $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ *je holomorfna natanko tedaj, ko je razširitev racionalne funkcije ali* $f \equiv \infty$.

Dokaz:
($\Longleftarrow$): sledi iz primerov.
($\Longrightarrow$): Za funkcijo, ki jo lahko holomorfno razširimo na $\hat{\mathbb{C}}$, velja:

i) če $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nima polov in $f(\infty) \neq \infty$ je po Liouvillovem izreku konstantna, saj je omejena.

ii) če ima f na $\mathbb{C}$ neskončno mnogo polov, potem zaradi diskretnosti, obstaja zaporedje le teh, ki gre proti ∞. Posledično bo tudi $f(\infty) = \infty$ in zaradi zveznosti in $f \equiv \infty$ zaradi principa identičnosti.

iii) Če ima f le končno mnogo polov, ima po podobnem argumentu, kot pri *ii)* tudi končno mnogo ničel. Potem definiramo R, racionalno funkcijo z istimi ničlami in poli. Po *i)* je $\frac{f}{R}$ konstantna.

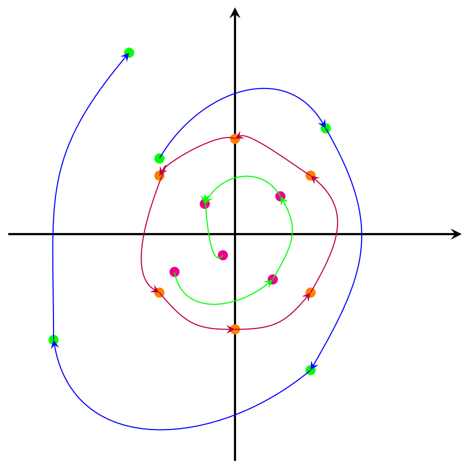
Povzetek: takoj ko ima f neskočno ničel ali polov oz. kako bistveno singularnost, je nemoremo obravnavati na $\hat{C}$ oz. ni holomorfna na $\hat{\mathbb{C}}$. □

1 Fatoujeva in Juliajeva množica

Oglejmo si dinamiko funkcije $f(z) = z^2$ oz. v polarnih koordinatah $re^{i\phi} \mapsto r^2 e^{i2\phi}$.

- $|z| > 1 : \lim_{n\to\infty} |f^n(z)| = \lim_{n\to\infty} r^{2n} = \infty$

- $|z| < 1 : \lim_{n\to\infty} |f^n(z)| = \lim_{n\to\infty} r^{2n} = 0$
- $|z| = 1 : f$ "deluje kot" doubling map D in je kaotična. Poleg tega pa ima vsaka točka v okolici tudi točki, ki gresta proti 0 oz. ∞



Sklep: kompleksna ravnina oz. Riemannova sfera razpade na dve disjunktni množici. **Fatoujeva**, kjer je obnašanje f^n "predvidljivo" in **Juliajevo**, kjer je obnašanje f^n kaotično

$$\mathcal{F}_f = \hat{\mathbb{C}}/\partial\mathbb{D}$$
$$\mathcal{J}_f = \partial\mathbb{D}.$$

Za formalno definicijo teh dve množic rabimo koncept normalnih družin.

Definicija 4. *Zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(D)$ za $D \subseteq \mathbb{C}$, konvergira k $f \in \mathcal{O}(D)$* ***enakomerno po kompaktih*** *na D, če $\forall\epsilon > 0$ in $\forall K^{komp.} \subset D$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ in $z \in K$, velja $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.*

Primer 3. *$f_n(z) = z^n$ na $\mathbb{D}$ konvergira enakomerno na kompaktih.*

Dokaz: Limita po točkah je enaka $f(z) = 0$. Izberemo poljuben kompakt $K \subset \mathbb{D}$. Zanj obstaja $r = r(K) \in [0, 1)$, da je $K \subseteq \mathbb{D}(0, r)$. Ker je $r < 1$, lahko naredimo oceno $\forall z \in K$:

$$|f_n(z) - f(z)| = |z^n| \leq r^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

tj. $\forall\epsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je za $n \geq n_0$: $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$. Seveda pa enakomerna konvergenca na celem $\mathbb{D}$ v tem primeru ne obstaja. Podobno lahko pokažemo, da gre $f_n \to \infty$ enakomerno po kompaktih na $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$. $\square$

Izrek 2. *Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(D)$ zaporedje ki konvergira $f_n \to f$ enakomerno po kompaktih in $D \subseteq \mathbb{C}$ območje. Potem je tudi $f \in \mathcal{O}(D)$ holomorfna.*

Dokaz: Naj bo $\overline{\mathbb{D}(a,r)} \subset D$. Ker je $\overline{\mathbb{D}(a,r)}$ kompakt, gre $f_n \to f$ enakomerno na njem. Vsak element f_n zadošča Cauchyjevi integracijski formuli

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(a,r)} \frac{f_n(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w, \quad \forall z \in \mathbb{D}(a,r).$$

Ker je konvergenca enakomerna, lahko zamenjamo vrstni red limite in integrala:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(a,r)} \frac{f_n(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w$$

Funkcijo na desni lahko razvijemo v vrsto okoli $z = a$, zato je holomorfna na $\mathbb{D}(a,r)$. Torej je taka tudi f. □

Definicija 5. *Družina $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{C}$ je **normalna na** D, če za vsako zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ obstaja podzaporedje $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ki konvergira enakomerno po kompaktih k neki $f \in \mathcal{O}(D)$ ali k $f \equiv \infty$.*

Opomba 2.

- *Normalne družine so analog kompaktnih množic v $\mathcal{O}(D) \cup \{f \equiv \infty\}$. Funkcijo $f \equiv \infty$ smo dodali, ker bomo obravnavali predvsem racionalne funkcije oz. holomorfne funkcije na $\hat{\mathbb{C}}$.*

- *Normalnost se študira tudi v drugih razredih funkcij, v katerih pa se običajno ne dodaja $f \equiv \infty$.*

- *Zadostnim oz. ekvivaletnim pogojem se reče Arzela - Ascolijevi izreki. Npr. za družino $\mathcal{F} \subset C([a,b])$ velja, da je normalna, če je:*

  i) *enakomerno omejena tj. $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \; \forall x \in [a,b]$ in $\forall f \in \mathcal{F}$.*

  ii) *je enakomerno enakozvezna tj. $\forall \epsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \; \forall x, y \in [a,b]$ in $\forall f \in \mathcal{F}$.*

  iii) *Pri holomorfnih funkcijah ii) sledi iz i) zaradi Cauchyjeve integracijske formule. Zaradi kompaktnosti $\hat{\mathbb{C}}$ je dovolj celo lokalna omejenost. Zato se Arzela-Ascolijev izrek navadn prenese na Montelova izreka:*

  Izrek 3 (Prvi Montelov izrek)**.** *$\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{C}$ je normalna, če je lokalno enakomerno omejena tj. $\forall z \in D$. $\exists z \in U \subset D$ in $M > 0$, da je $|f(w)| \leq M \; \forall w \in U$ in $\forall f \in \mathcal{F}$.*

Definicija 6. *Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Njena **Fatoujeva množica** $\mathcal{F}_f$ je definirana kot množica točk $z \in D$, za katere obstaja okolica $U \subset D$, da je družica $\{f^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ normalna na U. Njena **Juliajeva množica** pa je definirana kot komplement $\mathcal{J}_f = D \backslash \mathcal{F}_f$.*

Primer 4. $f(z) = z^2 \implies f^n(z) = z^{2^n}$

- $|z| < 1$*: konvergira enakomerno po kompaktih na*

- $|z| = 1$*: normalnost nimamo v nobeni okolici, saj so blizu točkam, ki gredo v* ∞ *in takim, ki gredo k* 0*, zato tudi, če bi obstajala limita podzaporedja, ne bi bila zvezna.*

- $|z| > 1$*: konvergira enakomerno po kompaktih na* $\hat{C}/\mathbb{D} \Longrightarrow \mathbb{D} \subset \mathcal{F}_f$ *k* ∞*.*

  Dokaz: Za $K \subset \hat{C}/\overline{\mathbb{D}}$ obstaja $r > 1$, da je $\mathbb{D}(0, r) \cap K = \emptyset$, oz. $|z| \geq r$ za $z \in K$.
  Posledično:
  $$|f^n(z)| = |z^{2^n}| \geq r^{2^n} \to \infty.$$
  tj. $\forall M > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|f^n(z)| > M$ za $n \geq n_0$ in $z \in K$. Alternativno bi lahko oravnavali $\frac{1}{f^n(z)} \to 0$ enakomerno po kompaktnih. $\square$

Opomba 3.

- *Po konstrukciji je* $\mathcal{F}_f$ *odprta,* $\mathcal{J}_f$ *pa zaprta, lahko pa sta obe prazni. Primera za to sta:*
  - $f(z) = z + 1 \Longrightarrow f^n(z) = z + n \longrightarrow \infty$ *enakomerno na kompaktih na* $\hat{\mathbb{C}}$*. Torej je* $\mathcal{J}_f = \emptyset$*.*
  - *Lattesova funkcija:* $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$ *ima* $\mathcal{J}_f = \hat{\mathbb{C}}$ *in* $\mathcal{F}_f = \emptyset$*.*
- *Za polinome se definiciji* $\mathcal{J}_f$ *in* $\mathcal{F}_f$ *poenostavita, kar bomo spoznali kasneje.*

Izrek 4. *Množici* $\mathcal{J}_f$ *in* $\mathcal{F}_f$ *sta naprej in nazaj invariantni tj.* $f(\mathcal{J}_f) = f^{-1}(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f$ *in* $f(\mathcal{F}_f) = f^{-1}(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f$*.*

Dokaz: Dovolj je dokazati zvezo le za $\mathcal{F}_f$. Naj bo $z \in U$, kjer je $U \subset D$, na kateri so iterati normalni. Ker je f zvezna in odprta sta tudi množici $f^{-1}(U)$ in $f(U)$ odprti, seveda pa je družina $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ normalna tudi na njih. Od tod sledi:
$$f^{-1}(\mathcal{F}_f) \subseteq \mathcal{F}_f \quad \text{in} \quad f(\mathcal{F}_f) \subseteq \mathcal{F}_f.$$
Na prvo relacijo dodamo f in dobimo:
$$\mathcal{F}_f \subseteq f(\mathcal{F}_f) \Longrightarrow \mathcal{F}_f = f(\mathcal{F}_f).$$
Posledično pa je tudi $\mathcal{F}_f \subseteq f^{-1}(\mathcal{F}_f)$, kar nam da $\mathcal{F}_f = f^{-1}(\mathcal{F}_f)$. $\square$

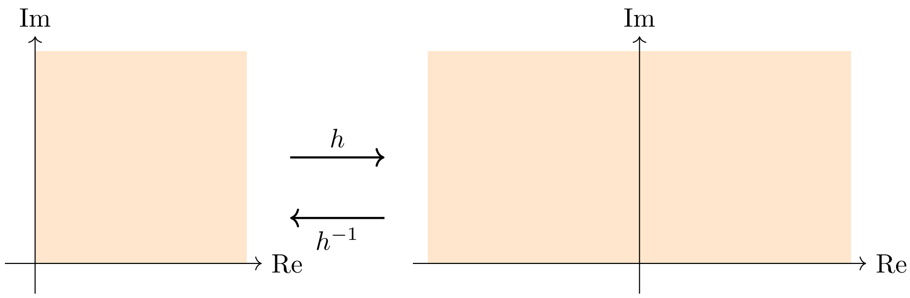
Povezanim komponentam $\mathcal{F}_f$ pravimo Fatoujeve komponente in se slikajo ena v drugo zaradi zveznosti in odprtosti f.

Primer 5. *Naj bo* $f(z) = \frac{1}{z^2}$*. Potem za iterate* f *velja*
$$\lim_{n\to\infty} f^{2n}(z) = \lim_{n\to\infty} z^{2^n} = \begin{cases} \infty; |z| > 1 \\ 0\ ; |z| < 1 \end{cases}$$
$$\lim_{n\to\infty} f^{2n+1}(z) = \lim_{n\to\infty} z^{2^n} = \begin{cases} 0\ ; |z| > 1 \\ \infty; |z| < 1 \end{cases}$$
Vse točke $\partial\mathbb{D}$ *so v* $\mathcal{J}_f$*.*

2 Konjugacije in periodične točke

Če je holomorfna funkcija $h : D \to \Omega$ obrljiva, je njen inverz avtomatsko holomorfen. Pravimo, da je tak h biholomorfna. Vemo, da za $z_0 \in D$, kjer je $h'(z_0) \neq 0$ obstaja okolica U, da je h zožena na U biholomorfna.

Primer 6. *Opazujemo preslikavo* $h(z) = z^2$



Za $z \neq 0$ *definiramo inverz*

$$h^{-1}(z) = \sqrt{|z|} \cdot e^{\frac{1}{2}\arg(z)}.$$

Za $z = 0$ *izraz ni dobro definiran, saj okolica vsebuje argumenta* 0 *in* 2π*.*

Definicija 7. *Naj bo* $h \in \mathcal{O}(D)$ *za območje* $D \subset \mathbb{C}$*. Vrednosti* z_0 *pravimo* ***kritična točka****, če je* $h'(z_0) = 0$*, sliki* $h(z_0)$ *pa pravimo* ***kritična vrednost****.*

Definicija 8. *Naj bosta* $D, \Omega \subseteq \mathbb{C}$ *območji. Preslikavi* $f : D \to D$ *in* $g : \Omega \to \Omega$ *sta* ***konjugirani****, če obstaja biholomorfna preslikava* $h : D \to \Omega$ *z lastnostjo* $h \circ f = g \circ h$*.*

Ker je f^n normalna na $U \subset D$ natanko tedaj, ko je $g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}$ normalna na $h(U) \subset \Omega$, velja izrek:

Izrek 5. *Če sta* f *in* g *konjugirani preko* $h : D \to \Omega$*, je* $\mathcal{F}_g = h(\mathcal{F}_f)$ *in* $\mathcal{J}_g = h(\mathcal{J}_f)$*.*

To pomeni, da konjugacija ohranja karakteristični množici.

Opomba 4. *V resnici zadošča že surjektivnost* h *(brez omejitve na število preslik), saj je taka preslikava lokalno biholomorfna povsod razen v disktretni množici. Da se pokazati, da je za nelinearno* g *množica* $\mathcal{J}_g$ *brez izoliranih točk. Zato za kritično točko od* h*, ki leži v* $z_0 \in \mathcal{F}_f$*, velja tudi* $h(z_0) \in \mathcal{F}_g$*.*

Primer 7. *Obravnavajmo preslikavo* $f(z) = 3x + 2$*. Fiksna točka zanjo je* $z = -1$*. Poskusimo poskrbeti, da se ta točka premakne v izhodišče.*

$$h(-1) = 0 \Longrightarrow h(z) = z + 1 \Longrightarrow h^{-1}(z) = z - 1$$
$$g(z) = h \circ f \circ h^{-1}(z) = 3z.$$

Potem za Fatoujevo in Juliajevo množico dobimo

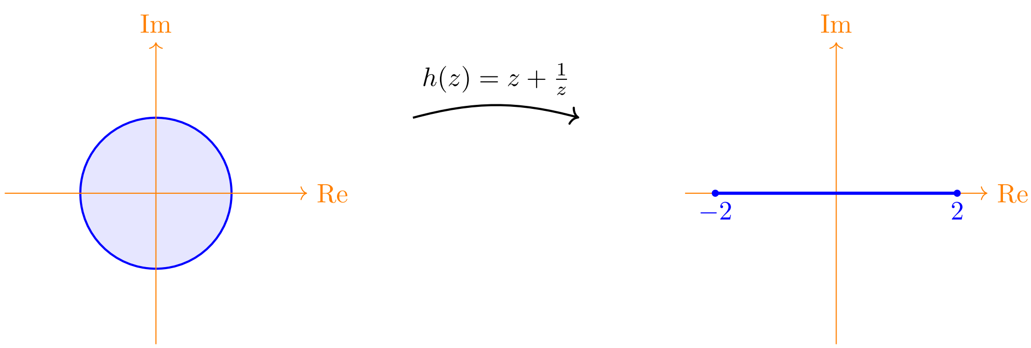
$$\mathcal{F}_g = \hat{\mathbb{C}}\backslash\{0\},\ \mathcal{J}_g = \{0\} \Longrightarrow \mathcal{F}_f = \hat{\mathbb{C}}\backslash\{-1\},\ \mathcal{J}_f = \{-1\}.$$

$$\begin{tikzcd}
-1 \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "h"'] & -1 \arrow[d, mapsto, "h"'] \\
0 \arrow[r, mapsto, "g"] & 0
\end{tikzcd}$$

V splošnem lahko vse linearne funkcije, ki niso oblike $z \mapsto z + a$ *transliraš v* $z \mapsto az$ *za* $a \in \mathbb{C}$.

Primer 8. *Poglejmo si dinamo preslikave* $q_{-2} = z^2 - 2$. *Vzamemo konjugacijo* $h(z) = z + \frac{1}{z}$.

- $h(z) = w \iff z^2 - wz + 1 = 0$ *ima največ* 2 *rešitvi.*
- *Očitno velja* $h(z) = h(\frac{1}{z})$ *t.j.* $\mathbb{D}$ *in* $\mathbb{C}\backslash$ *se zlepita skupaj.*
- $|z| = 1 \Longrightarrow z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\Re(z)$. *Preslikava* $h : \partial\mathbb{D} \to [-2, 2]$ *je surjektivna, kjer je moč praslike* 2, *razen v točkah* $z = \pm 1$.



Pokažimo, da h *podaja semi-konjugacijo med* $f(z) = z^2$ *in* q_{-2}

$$\begin{aligned}
h \circ f(z) &= z^2 + \frac{1}{z^2} \\
g \circ h(z) &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}.
\end{aligned}$$

Sklep: $\mathcal{F}_{q_{-2}} = \hat{\mathbb{C}}\backslash[-2, 2]$ *in* $\mathcal{J}_{q_{-2}} = [-2, 2]$.

Ker so holomorfne funkcije avtomatsko odveljive, je klasifikacija fiksnih točk enostavna:
naj bo $f(z_0) = z_0$ in $f'(z_0) = \lambda$. Število $\lambda \in \mathbb{C}$ imenujemo **multiplikator**. Pravimo, da je z_0:

- Privlačan, če je $0 < \lambda < 1$
- Superprivlačna, če je $\lambda = 0$
- Odbojna, če je $|\lambda| > 1$
- Nevtralna, če je $|\lambda| = 1$.

Trditev 1. *V okolici privlačne/odbojne točke je funkcija konjugirana preslikavi $g(z) = \lambda z$.*

3 Napolnjena Juliajeva množica

V tem razdelku se omejimo na ne linearne polinome

$$p(z) = a_d z^d + \cdots + a_0, \quad d \geq 2.$$

Vsi taki polinomi imajo v $z = \infty$ superprivlačno točko. Zato lahko Juliajevo in Fatoujevo množico definiramo na alternativen način:

- $$\mathcal{K}_p \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \,|\, |R^n(z)| \text{ omejena} \forall n \in \mathbb{N}\}$$
  napolnjena Juliajeva množica.
- $$\mathcal{J}_p = \partial \mathcal{K}_p \text{ in } \mathcal{F}_p = \hat{\mathbb{C}} / \mathcal{J}_p$$
  naši karakteristični množici.

Ker je $\infty \in \mathcal{F}$ in $A_p(\infty) \subset \mathcal{F}_p$, se ta definicija ujema s standardnima. To pomenim, da je dinami blizu $z = \infty$ konjugirana dinamiki $z \mapsto z^d$ blizu $z = 0$. Slikača klopotača

Posledica 1. *Za polinome stopnje $d \geq 2$ je $\mathcal{J}_p$ vedno neprazna in omejena.*

Dokaz: Neprazna je, ker obstaja vsaj še ena fiksna točka, ki ni $z = \infty$ torej je $\partial A_p(\infty) \neq \emptyset$. Ostalo sledi iz dejstva, da je $A_p \subset \mathcal{F}_p$. □

Ugotovili smo, da za dovolj velike $z \in \mathbb{C}$ orbita pobegne proti ∞. Številom, ki opredeljujejo zadostno velikost pravimo **radij pobega**.

Izrek 6 (Radij pobega)**.** *Naj bo P polinom stopnje $d \geq 2$. Naj bo*

$$R \coloneqq \max\left\{\frac{3}{a_d}, \frac{2}{a_d}(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{d-1}|), 1\right\}. \tag{4}$$

Če je $|z| \geq R$, velja

$$\lim_{n\to\infty} |p^n(z)| = \infty. \tag{5}$$

Dokaz: Naj bo $|z| \geq R$. Naredimo oceno:

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_d z^d + \cdots + a_z + a_0| \\
&= |a_d z^d| \cdot \left| 1 + \frac{a_{d-1}}{a_d z} + \cdots + \frac{a_1}{a_d z^{d-1}} + \frac{a_0}{a_d z^d} \right| \\
&\leq \frac{|a_{d-1}|}{|a_d| \cdot |z|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|a_d| \cdot |z|^d} \\
&\leq \frac{|a_{d-1}| + \cdots + |a_0|}{|a_d| \cdot |z|} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_d| \cdot |z|^d \cdot |1 + s| \geq |a_d| \cdot |z|^d \cdot (1 - |s|) \\
&\geq |a_d| \cdot |z|^d \frac{1}{2} \geq \frac{3}{|z|} \cdot |z|^d \frac{1}{2} \geq \qquad \geq \frac{3}{2}|z| \geq \frac{3}{2} R.
\end{aligned}$$

Induktivno ugotovimo:

$$|P^n(z)| \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot R \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

□

Opomba 5. *Ta radij ni optimalen, lahko bi še prilagajali konstanti* 3 *in* 2*. Alternativna verzija pravi npr. da je dober tudi*

$$R = \left\{ ... \right\}$$

Posledica tega izreka je algoritem za približno risanje $\mathcal{K}_p$, ki ima naslednje korake:

- Določi R iz izberi $N >> 1$.
- Naključno izbiraj točke $z_0 \in \mathbb{D}(0, R)$, če za vse $n \in \{1, 2, \ldots, n\}$ velja, da je $|P^n(z_0)| < R$, jih obarvaj.

Dodatno lahko razmišljamo na sledeč način. Točka $z = \infty$ je edina fiksna točka v komponenti $A_p(\infty)$. Torej je poleg $\partial A_p(\infty)$ edina možna limita zaporedja v $A_p(\infty)$. Izberemo $z_0 \in A_p(\infty)/\{\infty\}$ in tvorimo zaporedje $z_n \in P^{-n}(z_0)$ (jemljemo praslike). To zaporedje ne more konvergirati k ∞, saj gre tja zaporedje $P^n(z_0)$. Torej konvergira k $\mathcal{J}_P = \partial A_p(\infty)$. To pa nam da še en možen algoritem za približno risanje $\mathcal{J}_p$, ki mu pravimo **vzvratna iteracija**:

- Določi R in izberi $N >> 1$.
- Naključno izbiraj $z_0 \in \partial\mathbb{D}(0, R)$. Nariši množico $P^{-N}(z_0)$ (kar vse praslike).

Naš modelni primer $p(z) = z^2$ in $R = \max\left\{\frac{1}{|1|}, \frac{2}{|1|} \cdot 0, 1\right\} = 3$. Primerčiča:

Izrek 7 (Izrek o dihotomiji). *Juliajeva množica nelinearnega polinoma je povezanan natanko tedaj, ko so vse kritične točke v $\mathcal{K}_p$.*

Opomba 6. *$c \in \mathbb{C}$ je kritična točka za p, če je $p'(c) = 0$. To pomeni, da je razvoj okoli c enak:*

$$p(z) = a_0 + a_k(z-c)^k + a_{k+1}z^{k+1} + z^d a_d, \quad k \geq 1.$$

To pomeni, da lokalno oz. za vrednosti blizu $z = c$ funkcija p "deluje kot" $z \mapsto z^k$ v posebnem, na okolici take točke p ni injektivna.

Primer 9. *Oglejmo si primer $z \mapsto z^2$ in tri tipe krožnic ter njihovih praslik: kul slikice*
Morala: če krožnica trči v kritično vrednost, je njena praslika topološko ekvivalentna osmici, krožnice v njej pa imajo dve nepovezani komponenti v prasliki.

Dokaz(ideja): Ločimo dva primera:

1. v $A_p(\infty)$ ni kritičnih točk in posledično tudi kritičnih vrednosti ne. Za poljuben $r \geq R$, kjer je R radij pobega, je množica $P^{-n}(\partial\mathbb{D}(0,r))$, $n \in \mathbb{N}$, sklenjena krivulja brez samopresečišč (krožnica v topološkem smislu). V limiti pa dobimo $\mathcal{J}_p$, ki je povezana.

2. Če $A_p(\infty)$ vsebuje kritično točko in posledično tudi kritično vrednost , potem bo praslika križnice $D(0, |p(c)|)$ unija več topoloških krožnic s skupnim presečiščem. Manjše krožnice pa bodo razpadle na več komponent. Neki lepega

□

4 Drugi Montelov izrek

V tem razdelku bomo spoznali enega bolj pomembnih izrekov v kompleksni analizi, ki močno opredeli lastnosti množice $\mathcal{J}_R$. Omejili se bomo na racionalne funkcije stopnje $d \geq 2$.

Izrek 8 (Drugi Montelov izrek). *Če obstajo vrednosti $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$, ki so različne. ter za družino $\mathcal{F}\{R : D \subseteq \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \ / \ R \ \text{ racionalna}\}$ velja $\{a, b, c\} \cap R(D) = \emptyset$ za vsak $R \in \mathcal{F}$, potem je $\mathcal{F}$ normalna.*

Opomba 7.

- *Izrek velja tudi za družine meromorfnih funckij na $D \subset \mathbb{C}$ tj. za funkcije brez bistvenih singularnosti.*

- *Izrek je pogosto podan za družine holomorfnih funkcij $\mathcal{F} \subset$ ‰(D), za $D \subset \mathbb{C}$, takrat je dovolj, da izpusti dve točki $a, b \in \mathbb{C}$, saj za c vzamemo ∞ (elementi $\mathcal{F}$ nimajo polov).*

Dokaz(ideja). Kjučen del dokaza je obstoj surjektivne holomorfne preslikave

$$h : \mathbb{D} \to \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0, 1, \infty\},$$

ki nima kritičnih točk oz. je krovna projekcija tj. zožitev h na vsako komponentno take praslike je biholomorfna. Od tu dalje brez škode za splošnost predpostavimo, da so $a = 0$, $b = 1$ in $c = \infty$. Če to ni res, vse $R \in \mathcal{F}$ konjugiramo z ustrezno Möbiousovo preslikavo.

Sedaj je preslikave "dvignemo na krov" $\square$

Obravnavajmo dinamiko $f : D \subseteq \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Drugi Montelov izrek nam porodi številne posledice, še posebaj za Juliajevo množico, kjer nimamo normalnosti.

Posledica 2 (Množica izjemnih točk)**.** *Naj bo R racionalna funkcija, stopnje $d \geq 2$, ter $x \in \mathcal{J}_R$ in $U_z \in \hat{\mathbb{C}}$ njena okolica. Množica*

$$E_R(U_z) \coloneqq \hat{\mathbb{C}} \backslash \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(U_z)$$

vsebuje največ 2 točki.

To je direktna posledica izreka.
slika frika
E_R lahko izpusti največ 2 točki, scer bi bila normalna.

Primer 10.

- $p(z) = z^2$. *V tem primeru je* $E_R(U_z) = \{0, \infty\}$ *za vse* U_z *in* $z \in \mathcal{J}_p$. *slikica*
- $p(z) = z^2 - 2$. *Sedaj dobimo* $E_p(U_z) = \{\infty\}$ *za vse* U_z *in* $z \in \mathcal{J}_p$. *slikica mikica*

Z nekaj dodatne analize se izkaže, da sta to do konjunkcije natančno primera z neprazno množico izjemnih točk. Natančneje, za $z \in \mathcal{J}_R$ definiramo

$$E_R(z) \coloneqq \bigcup_{U_z \ okolica} E_R(U_z).$$

Da se pokazati:

- *če je $|E_R(z)| = 2$, je R konjugirana $z \mapsto z^d$, $d \geq 2$.*
- *Če je $|E_R(z)| = 1$, je R konjugirana polinomu stopnje $d \geq 2$, za katere je $E_R(z) = \{\infty\}$ za vse $z \in \mathcal{J}_p$.*

V obeh primerih je $E_R(z)$ neodvisna od točke $z \in \mathcal{J}_p$, zato je to tudi res v splošnem in lahko definiramo $E_R \coloneqq E_R(z)$ za poljuben $z \in \mathcal{J}_R$. Tej množici pravimo ***množica izjemnih točk*** *in vedno velja $E_R \subset \mathcal{F}_R$.*

Posledica 3 (Juliajeva množica z neprazno notranjostjo)**.** *Naj bo R racionalna stopnje $d \geq 2$. Če ima $\mathcal{J}_R$ neprazno notranjost, je $\mathcal{J}_R = \hat{\mathbb{C}}$.*

Dokaz: Če ima $\mathcal{J}_R$ neprazno notranjost, obstaja odprta množica $U \subset \hat{\mathbb{C}}$, ki ni prazna in je $U \subset \mathcal{J}_R$. Po prejšnji posledici ima:

$$\hat{\mathbb{C}} \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n(U)$$

največ 2 točki. Ker je $\mathcal{J}_R$ naprej in nazaj invarintna, velja $R^n(U) \subset \mathcal{J}_R$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. To pomeni, da je:

$$\hat{\mathbb{C}} \backslash E_R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n(U) \subseteq \mathcal{J}_R.$$

Torej za zaprtje velja:

$$\overline{\hat{\mathbb{C}} \backslash E_R} = \hat{\mathbb{C}} \subseteq \overline{\mathcal{J}}_R = \mathcal{J}_R.$$

□

Opomba 8. *V uvodu smo povedali, da teka funkcije dejansko obstajajo (Lattesova preslikava).*

Posledica 4 (Goste praslike)**.** *Naj bo R racionalna stopnje $d \geq 2$. Za vsako $z \in \mathcal{J}_R$ je množica*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^{-n}(\{z\})$$

gosta v $\mathcal{J}_R$.

Dokaz: Za vsako $z \in \mathcal{J}_R$ vemo, da $z \notin E_R \subset \mathcal{F}_R$. Če izberemo okolico $U_z \subset \hat{\mathbb{C}}$ trdimo, da za poljubno drugo točko $z' \notin E_R$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $z' \in \mathbb{R}^n(U_z)$.
neki malega
Če je dodatno $z' \in \mathcal{J}_R$, ima tudi $R^n(U_z)$ neprazen presek z $\mathcal{J}_{\mathcal{R}}$.
še nekaj malo večjega
Torej je: $\mathcal{J}_R \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} R^{-n}(z')}$. Če pa izberemo $z' \in \mathcal{J}_R$, pa zaradi invariantnosti velja tudi obratna inkluzija

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^{-n}(z') \subseteq \mathcal{J}_R.$$

Torej to drži tudi za zaprtje. □

Posledica 5 (Kaotičnost na $\mathcal{J}_R$)**.** *Naj bo R racionalna stopnje $d \geq 2$. Potem je zožitev $R : \mathcal{J}_R \to \mathcal{J}_R$ kaotična v smislu Devaneya.*

Dokaz: c1) Gostost periodičnih točk: sledi iz $\overline{Rep}(R) = \mathcal{J}_R$ t.j. že zgolj odbojne točke so goste.

c2) Tranzitivnost: naj bosta $u, V \subset \mathcal{J}_R$ odprti glede na relativno topologijo t.j. $\exists U', V' \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ odprti, da je $U = \mathcal{J}_R \cap U'$ in $V = \mathcal{J}_R \cap V'$. Iščemo $z \in U$ in $n \in \mathbb{N}$, da bo $R^n(z) \in V$. Najdemo ga po prejšnji posledici. Vzamemo katerikoli $w \in V$. Zaradi gostosti praslik, obstaja $R^{-n}(\{w\}) \cap U \neq \emptyset$. Torej obstaja tudi $z \in U$, da je $R^n(z) = w \in V$.

c2) sledi iz $c1$) in $c2$), ker je R zvezna.

□

Posledica 6. *Naj bo R racionalna stopnje $d \geq 2$. Potem za vsako $z \in \mathcal{J}_R$ in vsako okolico U_z obstaja $z' \in \mathcal{J}_R \backslash \{z\} \cap U_z$.*

Dokaz: Naj bo $z \in \mathcal{J}_R$ in U_z poljubna okolica. Ločimo dva primera

i) z ni periodična: izberemo poljuben $w \in R^{-1}(\{z\})$
spet slika
Zaradi neperiodičnosti imamo:

$$R(w) = z \ \text{ in } \ R^n(z) \neq w \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vendar pa po posledici 3 obstaja tudi $z' \in U_z$ in $m \in \mathbb{N}$, da je $R^m(z') = w$.
Po konstrukciji $z' \neq z$.

ii) zapiski.

□

5 Fatou-Sullivanov izrek

Ugotovili smo, da je $\mathcal{F}_R$ odprta ter naprej in nazaj invariantna. To pomeni, da se njene komponentne za povezanost slikajo ena v drugo. V principu se nam lahko zgodijo 4 stvari:
4 horsemen of the apocalypse

Izrek 9. *Racionalna funkcija stopnje $d \geq 2$ ima $0, 1, 2$ ali ∞ Fatoujevih komponent.*

Dokaz: Predpostavimo, da je komponent končno. Trdimo, da so takrat vse periodične ali fiksne t.j. ne more se zgoditi predperiodičen primer.
sdaCC
t.j. obstaja $\tilde{U} \subset \mathcal{F}_R$ komponenta in $k < n \in \mathbb{N}$, da je

$$U = R^n(\tilde{U}) = R^k(\tilde{U}).$$

$$R^{n-k}(U) = R^{n-k}(R^k(\tilde{U}) = R^n(\tilde{U})) = U$$

$\Longrightarrow n-k$ je kandidat za periodo (morda je manjša). Sklep je, da obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je

$$R^N(U) = U \quad \text{za vse komponente } \mathcal{F}_R.$$

To je res, ker jih je po predpostavki končno in lahko izberemo najmanjši skupni večkratnik period.

□