1 Uvod

Kaj so dinamični sistemi? Najbolj enostavno jih lahko opišemo kot:

Drugače povedano, obravnavamo delec v množici možnih stanj, pravilo, pa nam pove, kaj se z njim zgodi v naslednjem trenutku.
Deterministično, v našem kontekstu pomeni, da je naslednji korak odvisen le od trenutnega stanja delca.
V grobem jih glede na tip koraka, ločimo na **diskretne** in **zvezne** sisteme. V splošnem jih lahko obravnavamo na npr. metričnih ali topoloških prostorih, mi pa se bomo omejili na $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}$. Obravnavali bomo

i) Diferenčne oz.rekurzivna enačbe $x_{n+1} = F(x_n)$, za $F : S \to S$ in pri različnih začetnih pogojih $x_0 \in S$, kjer je S množica stanja v $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{C}$. Temu rečemo diskretna dinamika funkcije oz. preslikave F

ii) Nelinearni sistemi navadnih diferencilnih enačb, $F : S \subseteq \mathbb{R}^n \to S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = F(x)$, $x \in S$. To bo model za zvezne dinamične sisteme v $\mathbb{R}^n$.

Opomba 1. *V obeh primer govorimo o* ***autonomnih sistemih*** *tj. pravilo ni odvisno od časa. Pokažimo, da lahko poljuben sistem prevedemo na avtonomen sistem, zato je dovolj obravnavati le te.*

$$\dot{x} = F(x,t) \iff \begin{array}{l} \dot{x} = F(x,t) \\ \dot{t} = 1 \end{array} \iff \dot{\tilde{x}} = \tilde{F}(\tilde{x}) \text{ za } \tilde{x} = (x,t) \text{ in } \tilde{F} = (F,1)$$

$$x_{n+1} = F(x_n, n) \iff \begin{array}{l} x_{n+1} = F(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + 1 \end{array} \iff \tilde{x}_{n+1} = \tilde{F}(x_n) \text{ za } \tilde{x} = (x,y)$$

tj. če nimamo dimenzijskih omejitev, so avtonomni sistemi najsplošnejši možni, saj lahko čas premaknemo v množico stanj tj. $\tilde{S} = S \times \mathbb{R}$ *oz.* $\tilde{S} = S \times \mathbb{Z}$.

Primer 1. *Zgodil se je umor in imamo naslednje podatke:*

- *Temperatur T trupla ob prihodu:* $T(0) = 9°C$
- *Temperatura T po $1h$:* $T(1) = 7°C$
- *Temperatura jezera T_j:* $T_j = 5°C$

Kdaj se je zgodil umor?
Fizikalni zakon: telesna temperatura pada sorazmerno z razliko do temperature jezera.
Diskretni model:

$$T_{n+1} = T_n - k(T_n - T_j),$$

kjer sta:

- $k > 0$ *konstanta odvisna le od lasnosti trupla*
- $T_n - T_j$ *temperaturna razlika*

Vstavimo meritve: čas ob prihodu

$$7C = 9C - k(9C - 5C)$$
$$\Longrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Sistem, ki opisuje telesno temperaturo, je podano z

$$T_{n+1} = T_n - \frac{1}{2}(T_n - T_j) = \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}T_j.$$

V tem primeru lahko poiščemo ekplicitno rešitev:
Homogeni del:

$$T_{n+1} = \frac{1}{2}T_n \Longrightarrow T_n = C\Big(\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Partikularna rešitev:

$$T_n^p = T_j = 5C$$

Splošna rešitev:

$$T_n = C\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + T_j$$
$$T_0 = C + T_j \Longrightarrow C = T_0 - T_j$$
$$T_n = (T_0 - T_j) \cdot \Big(\frac{1}{2}\Big)^n + T_j$$

Odgovor:
vemo, da je $T_0 = 37C$ *torej imamo*

$$T_n = (37 - 5)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + 5 = 9$$
$$\Longrightarrow n = 3.$$

Umor se je zgodil $3h$ *pred prihodom.*
Zvezni model: model je dan z

$$\dot{T} = -k(T - T_j).$$

Rešimo z metodo ločljivih spremenljiv

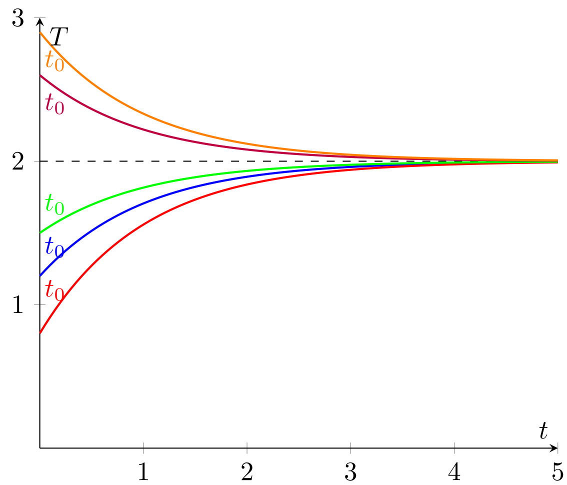
$$T = De^{-kt} + T_j$$

Začetni pogoj: $T(0) = T_0 \implies D = T_0 - T_j$ *in je rešitev*

$$T(t) = (T_0 - T_j)e^{-kt} + T_j$$

Čas prihoda: $T(n) = 9C$,
Čas po eni uri: $T(n+1) = 7C$.
Rešimo sistem enačb in dobimo $n = 3$. *Dobimo enak sklep kot prej, dinamični sistem, ki opisuje temperaturo, pa je*

$$\dot{T} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(T - T_j) = -\ln 2(T - T_j)$$



V tem primeru, je $T \equiv 5C$ *neka fiksna točka oz. ravnovesje, "pritegne" ostale rešitve. Tekom predmeta bomo spoznali bolj zapletene primere.*

Dinamika realnih funkcij

Jest

March 23, 2025

2 Osnovni pojmi

Za začetek se bomo omejili na funkcije $f : I \subseteq \mathbb{R} \to I$, kjer je I interval. Obravnavali bomo zaporedje $x_{n+1} = f(x_n)$ pri različnih pogojih $x_0 \in I$. Za začetek uvedemo oznako:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n \text{ kompozitumov}}$$

Definicija 1. ***Orbita točke*** *x_0 pri funkciji f je podana s členi zaporedja:*

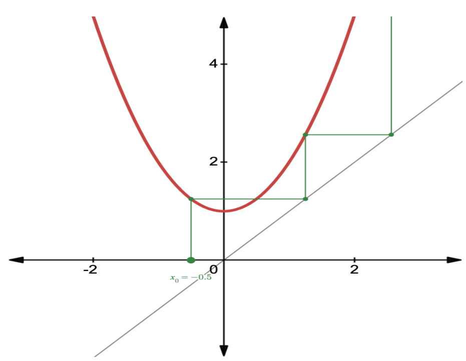
$$O_f(x_0) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{f^n(x_0) \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

*Orbita predstavlja dinamični razvoj točke x_0 pri komponiranju z f. Množici vseh orbit za $x_0 \in I$ pa rečemo **dinamika funkcije** f.*

Primer 2. $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ *oz.* $f(x) = x^2 + 1$

$$\begin{aligned} O_f(1) &= \{1, 2, 5, 26, \dots\} \\ O_f(0) &= \{0, 1, 2, 5, 26, \dots\} \\ O_f(-2) &= \{-2, 5, 26, \dots\} \end{aligned}$$

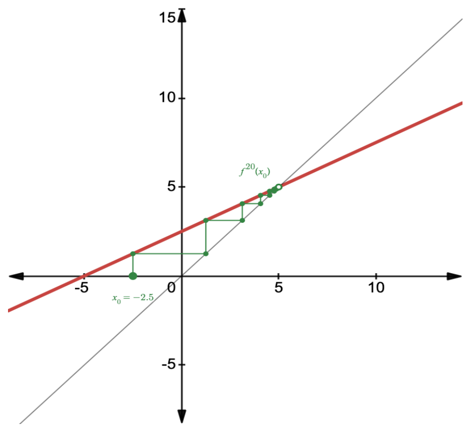
*orbite lahko pri funkcijah ene spremenljivke vizualiziramo z **pajčevinastim diagramom**.*



Postopek:

- *izbereš x_0 na osi x,*
- *greš navpično na $f(x)$,*
- *greš vodoravno do $y = x$,*
- *ponavljaš zadnja dva koraka.*

Primer 3. *Sherlock:* $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{5}{2}$ *oz.* $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.



$O_f(5) = \{5, 5, \dots\}$. *Za ostale orbite velja:* $x_n \to 5$.

Definicija 2. *Točka $x_0 \in \mathbb{R}$* ***je periodična s periodo*** *$n \in \mathbb{N}$ za f, če zanjo velja $f^n(x_0) = x_0$ in je n najmanjše naravno število s to lastnostjo. Če je $n = 1$, taki točki pravimo* ***fiksna točka****.*

Primer 4. $f(x) = -x^3$.
Fiksne točke:

$$f(x) = x \iff -x^3 = x \iff x = 0.$$

Točke periode 2:

$$f^2(x) = x \text{ in } f(x) \neq x \iff x^9 = x \text{ in } -x^3 \neq x \iff x = \pm 1.$$

Definicija 3. *Orbiti n- periodične točke rečemo n-cikel.*

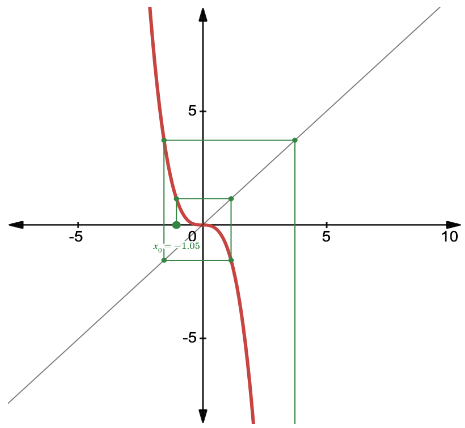


Figure 1: pajčevinast diagram iz Primera 3.

Definicija 4. *Naj bo $x_0 \in I$ fiksna točka za $f : I \to I$.*

- x_0 *je* ***šibko privlačna****, če obstaja njena okolica $U \subseteq I$, da za vsak $y_0 \in U$ velja $y_n = f^n(y_0) \to x_0$.*
- x_0 *je* ***šibko odbojna****, če obstaja njena okolica $U \subseteq I$, da za vsak $y_0 \in U \backslash \{x_0\}$ obstaja $m \in \mathbb{N}$, da $f^m(x_0) \notin U$.*

Okolici iz prve točke pravimo ***območje privlaka za*** x_0*, največjemu intervalu znotraj U, ki vsebuje x_0 pa rečemo* ***neposredno območje privlaka za*** x_0*.*

Opomba 2. *Če je $f \in C^0(I)$ in $f^n(x) \to x_0$ je x_0 nujno fiksna točka:*

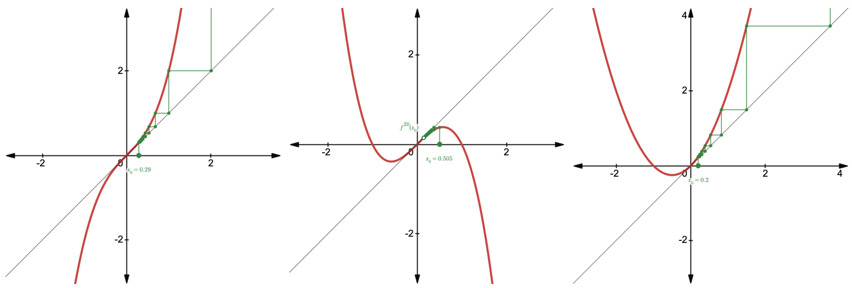
$$f^n(x) \to x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = f(x_0) = x_0 = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$$

Definicija 5. *Če je $f \in C^1(I)$, dodamo pojme:*

- x_0 *je* ***privlačna****, če $|f'(x_0)| < 1$.*
- x_0 *je* ***odbojna****, če $|f'(x_0)| > 1$.*
- x_0 *je* ***nevtralna****, če $|f'(x_0)| = 1$.*

Primer 5. *Sherlock: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. $f'(5) = \frac{1}{2}$ je privlačna in šibko privlačna.*

Primer 6. *Dane imamo tri funkcije $f_1(x) = x + x^3$, $f_2(x) = x - x^3$ in $f_3(x) = x + x^2$ V vseh treh primerih pa je $|f'(0)| = 1$ tj. gre za nevtralne točke.*



(a)
$U = \mathbb{R}$
$x = 0$ šibko odbojna

(b)
$U = [-1, 1]$
$x = 0$ šibko privlačna

(c)
$x = 0$ ni šibko odbojna
ne privlačna

Izrek 1. *Naj bo $f \in C^1(I)$ in $x_0 \in I$ fiksna točka. Potem velja:*

i) Če je $|f'(x_0)| < 1$, je x_0 šibko privlačna.

ii) Če je $|f'(x_0)| > 1$, je x_0 šibko odbojna.

iii) Če je $|f'(x_0)| = 1$, je x_0 nevtralna, pogledamo višje odvode za več informacij.

Dokaz:

i): Recimo, da je $|f'(x_0)| < \lambda < 1$. Potem obstaja $\delta > 0$, da je $|f'(x_0)| < \lambda$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zaradi zveznosti odvoda. Uporabimo Lagrangeov izrek

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{za } c \in (x, x_0).$$

Ker je x_0 fiksna točka

$$f'(x) = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}.$$

Naredimo oceno

$$|f(x) - x_0| = |f'(c)| \cdot |x - x_0| < \lambda |x - x_0|.$$

Zato za $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, velja da je tudi $f(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Indultivno sklepamo

$$|f(f(x)) - f(x_0)| = |f^2(x) - x_0| < \lambda^2 |x - x_0|$$

oz.

$$|f^n(x) - x_0| < \lambda^n |x - x_0|.$$

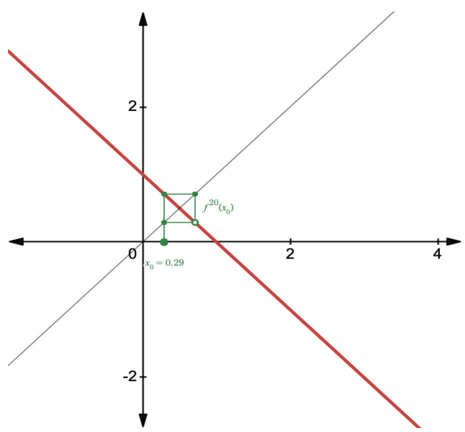
Ker je $\lambda \in (0, 1)$, gre $\lambda^n \to 0$ za $n \to \infty$ torej $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

ii): Dokaz je podoben, le da $\lambda > 1$ tj. za nek velik $m \in \mathbb{N}$, bo $\lambda^m |x - x_0|$ šel iz okolice.

$\square$

Definicija 6. *Fiksna točka $x_0 \in I$ je **stabilna** za $f : I \to I$, če za vsako njeno okolico $U \subset I$ obstaja manjša okolica $U' \subset U$, da za vsak $x \in U'$ velja $O_f(x) \subset U$.*

Opomba 3. *Iz dokaza izreka sledi, da privlačnost porodi enakomerno konvergenco $f^n(x) \to x_0$ za vse $x \in (x_0 - \delta, x + \delta)$. Sledi, da so vse privlačne fiksne točke stabilne. Pa tudi take, katerih bližnje orbite ne konvergirajo nujno k x_0 tj. obstajajo nevtralne točke, ki niso šibko privlačne, a so vseeno stabilne npr. $f(x) = 1 - x$. Imamo $f^2(x) = x$ in $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ in $f'(\frac{1}{2}) = -1$. Torej je $\frac{1}{2}$ nevtralna fiksna točka, ostale točke so 2-periodične. $x = \frac{1}{2}$ je stabilna.*



Definicija 7. *Fiksne točke, ki so stabilne in šibko privlačne pravimo **asimptotsko stabilne**.*

Opomba 4. *Ni vsaka šibko privlačna točka (asimptotsko) stabilna. Orbita lahko "uide" iz okolice in se nato vrne. So pa use privlačne točke tudi asimptotsko stabilne.*

Sedaj lahko to klasifikacijo razširimo na n-periodične točke, če nanje pogledamo kot na fiksne točke funkcije f^n.

Definicija 8. *Periodična točka $x_0 \in I$ oz. pripadajoči n-cikel je:*

- *Šibko privlačna/odbojna, če je šibko privlačna/odbojna kot fiksna točka funkcije f^n.*
- *Privlačna/odbojna/nevtralna, če je privlačna/odbojna/nevtralna kot fiksna točka funkcije f^n.*

Da bosta ti definiciji dobri, v prvi točki potrebujemo zveznost, v drugi pa zvezno odvedljivost funkcije f. To združi nasledji izrek.

Izrek 2. *Če je $f \in C^1(I)$, so vse periodične točke n-cikla "istega tipa".*

Dokaz: Naj bo $\{x_1, \ldots, x_n\}$ n-cikel za f. Recimo, da je x_n šibko privlačna za f^n. Torej obstaja njena okolica $U_n \subset I$, da za $x \in U_n$ velja $f^{nk}(x) \to x_n$ za $k \to \infty$. Radi bi videli, da analogne okolice obstajajo za točke $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Sedaj definiramo U_{n-j} za $1 \leq j \leq n-1$, kot povezano komponento praslike $f^{-j}(U_n)$, ki vsenuje x_{n-j}. Vemo, da za vsak $x \in U_{n-j}$ po konstrukciji velja:

$$f^{nk+j}(x) \xrightarrow{k\to\infty} x_n.$$

Sedaj na to zvezo dodamo zvezno funkcijo f^{n-j}

$$f^{n-j}(f^{nk+j}(x)) \to f^{n-j}(x_n)$$
$$f^{n(k+1)}(x) \xrightarrow{k\to\infty} x_{n-j}$$

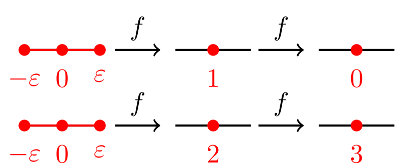
vse točke so šibko privlačne, kar smo želeli dokazati. Dokaz za šibko odbojnost izpustimo.

Poglejmo si še privlačnosti/odbojnost /nevtralnost

$$\begin{aligned} |(f^n)'(x_n)| &= |(f \circ f \circ \cdots \circ f)'(x_n)| = \\ &= |f'(f^{n-1}(x_n)) \cdot f'(f^{n-2}(x_n)) \cdot \ldots f'(x_n)| = \\ &= |f'(x_{n-1})| \cdot |f'(x_{n-2})| \cdot \ldots |f'(x_1)| \cdot |f'(x_0)| = |(f^n)'(x_j)|. \end{aligned}$$

za vsak x_j dobimo isti rezultat. $\square$

Opomba 5. *Brez zveznosti f izrek ne drži nujno, npr.*



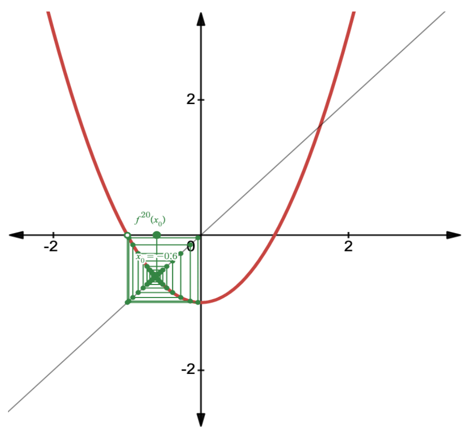
$\Rightarrow f^2$ *šibko privlačna za* $x = 0$.

$\Rightarrow f^2$ *šibko odbojna za* $x = n$.

Primer 7. *Dano imamo* $f(x) = x^2 - 1$*. Opazimo* $f(0) = -1$ *in* $f(-1) = 0$ *tj. imamo 2-cikel. Poglejmo, katarega tipa je:*

$$(f^2)'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0) = f'(-1) \cdot f'(0) = 0.$$

Torej gre za privlačen 2-cikel. Fiksni točki sta $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \implies f'\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \pm \sqrt{5}$*, torej sta obe odbojni. Vidimo, da 2-cikel "privlači" bližnje orbite. To*



velja tudiv primeru šibke privlačnosti. Naj bosta U_1 *in* U_2 *okolici točke* x_1 *in* x_2*, ki pripadata 2-ciklu. Vzamemo* $\tilde{U}_1 = U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ *in* $\tilde{U}_2 = U_1 \cap f^{-1}(U_1)$*. Potem velja:*

$$x \in \tilde{U}_1 \implies f^{2n}(x) \to x_1 \ (\textit{ker } x \in U_1) \quad \textit{in} \quad f^{2n+1}(x) \to x_2 \ (\textit{ker } f(x) \in U_2)$$
$$x \in \tilde{U}_2 \implies f^{2n}(x) \to x_2 \ (\textit{ker } x \in U_2) \quad \textit{in} \quad f^{2n+1}(x) \to x_1 \ (\textit{ker } f(x) \in U_1)$$

Opomba 6. *Zanimiva je tudi točka* $x = 1$*, ki ima orbito* $O_f(1) = \{1, 0, -1, 0, -1, \dots\}$ *tj. po prvi iteraciji postane ciklična. Takim točkam pravimo* ***predperiodična*** *(preperiodic /eventually periodic) točka.*

Definicija 9. $\exists k \in \mathbb{N}$*:* $f^{n+k}(x) = f^k(x)$ *za najmanjši tak* $n \in \mathbb{N}$*.*

3 Kaos

Do sedaj smo spoznali le dinamične sisteme z razmeroma predvidljivim dogajanjem. Konkretno, razen v kakšni posebni točki, so imele orbite bližnjih točk "enak dinamičen razvoj". Sedaj bomo spoznali sisteme, ki so nasprotje tega in jim pravimo kaotični.

Definicija 10. *Dinamični sistem podan z* $f : I \to I$ *je* ***kaotičen****, če zanj veljajo*

(c1) Množica periodičnih točk je gosta v I*.*

(c2) Tranzitivnost: za poljubna odprta intervala $U_1, U_2 \subset I$*, obstajata* $x_0 \in U_1$ *in* $n \in \mathbb{N}$*, da je* $f^n(x_0) \in U_2$*.*

(c3) Občutljivostna konstanta: obstaja $\beta > 0$, da v poljubni okolici U poljubne točke x_0 najdemo tudi točko $y_0 \in U$ za katero je $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$ za nek $n \in \mathbb{N}$.

Opomba 7.

- *Točka* (c3) *je zanimiva pri izbiri majhnih okolic U, saj pomeni, da lahko poljubno blizu najdeš točko s čisto drugačno dinamiko. Temu se reče učinek metulja (butterly effect) oz. da je zaporedje oz. orbita občutljivo na začetne podatke.*
- *Izkaže se, da je* (c2) *ekvivalentna obstoju goste orbite, če je f zvezna.*
- *Za kompakt $I \subset I$ se izkaže, da* (c1) *in* (c2) *implicirata* (c3).
- *Če je f zvezna iz* (c1) *in* (c2) *vedno sledi* (c3).

Opis kaosa: kaotični sistem je tak, v katerem s približnim začetkom niti približno nemoreš napovedati konca.

Primer 8. *Podvojitvena preslikava (doubling map).*

$$D : [0,1) \to [0,1) \tag{1}$$
$$D(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor \tag{2}$$

Grafek funkcija (cobweb v $\frac{2}{3}$)
Veljajo:
$D(0) = 0$ *je fiksna točka*
$D(\frac{1}{2}) = 0$ *predperiodična*
$D(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$
$D(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ *(vijugst oklepaj za zadna dva)* 2*-cikel.*
Za dokaz kaotičnosti uporabimo dvojiški decimalni zapis.

$$x \in [0,1) : x = 0.x_1x_2\ldots_{(2)}, \quad x_j \in \{0,1\} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{2^j}.$$

Če prepovemo neskočen niz enic, je zapis enoličen. Kaj naredi naša preslikava?

$$D(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor = x_1.x_2x_3\ldots_{(2=} - x_{1(2)} = 0.x_2x_3\ldots_{(2)}.$$

Temu rečemo tudi operator zamika (shift map), ki "pozabi" prvo decimalko.

(c1) Pokažimo, da ima poljubno blizu točke $x \in [0,1)$ tudi periodično točko $\tilde{x}$.

$$x = 0.x_1x_2\ldots x_Nx_{N+1}\ldots_{(2)} \quad X >> 1$$
$$x = 0.x_1x_2\ldots x_Nx_Nx_1x_2\ldots x_n\ldots_{(2)} = 0.x_1x_2\ldots x_{N_{(2)}} -$$

Očitno je $\tilde{x}$ periodičen, saj je $f^N(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Po drugo strani pa je $|x - \tilde{x}| < \frac{1}{2^N}$ tj. poljubno majhna.

ii) Pokažimo, da obstaja gosta orbita. Naj bo $x \in [0,1]$ število z razvojem

$$x = 0.01\,00\,01\,10\,11\,000\,001\,010\,\ldots$$

tj. število vsebuje vse končne zapise v dvojiškem sistemu. Posledično je njegova orbita gosta. Res, za poljuben $\tilde{x} \in [0,1]$,

$$\tilde{x} = 0.\underbrace{\tilde{x_1}\tilde{x_2}\ldots\tilde{x_N}}\,x_{\tilde{N+1}}$$

obstaja $m \in \mathbb{N} : f^n(x) = \tilde{x_1}\tilde{x_2}\ldots\tilde{x_N}\ldots$ tj. $|f^n(x) - \tilde{x}| < \frac{1}{2^N}$.

iii) Želimo videti, da poljubno blizu $x \in [0,1]$ obstaja $\tilde{x} \in [0,1]$, da je za nek $m \in \mathbb{N}$: $|f^m(x) - f^m(\tilde{x}) \geq \frac{1}{2}$. Za

$$x = 0.x_1x_2\ldots x_Nx_{N+1}\ldots_{(2)}$$

vzamemo

$$\tilde{x} = 0.\tilde{x_1}\tilde{x_2}\ldots x_Nx_{\tilde{N+1}}\ldots_{(2)}$$

tj. velja $X_{N+1} + x_{\tilde{N+1}} = 1$ Potem je

$$|f^N(x) - f^N(\tilde{x}) = \frac{1}{2}.$$

Dobimo števili, ki sta $\frac{1}{2^N}$ blizu in po n-iteracijah $\frac{1}{2}$ narazen.

Primer 9 (Šotorasta preslikava(tent map))**.**

$$T(x) = 2\min\{x, 1-x\} = \ldots$$

slika T
Drugi iterat: $T^2(x) = \min\{T(x), 1 - T(x)\}$ slika fon(T^2)
Podobno dobimo za T^3 in višje iterate
slika še za T^3.

c1) Je očitno izpolnjen, sa ima periodično točko na vsakem intervalu oblike

$$I_{j,n} = \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right], \quad j = \{1, 2, \ldots, 2^n\}.$$

Perioda teh točk je n ali manjša.

ii) Sledi. ker je $f^n(I_{j,n}) = [0,1]$, tj. če izbereš $I_{j,n} \subset U_1$, bo $f^0(I_{j,n}) \cap U_2 \neq \emptyset$ za poljubni odprti $U_1, U_2 \subset [0,1]$.

c3) Samo ideja: fon

4 Konjugacije in semi-konjugacije

Definicija 11. *Pravimo, da sta $f : I \to I$ in $g : J \to J$ **konjugirani**, če obstaja homeomorfizem $h : I \to J$, da $\forall x \in I$: $h \circ f(x) = g \circ h(x)$*

Slikca komutirajočega diagrama
double slikca fon

Ker pa je h tudi obrljiva in h^{-1} zvezna, se zvezno traslira tudi celotna dinamika tj.

$$\begin{aligned}
f &= h^{-1} \circ g \circ h \\
f^n &= (h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ \cdots \circ (h^{-1} \circ g \circ h) = \\
&= h^{-1} \circ g^n \circ h
\end{aligned}$$

Primer 10.

$$\begin{aligned}
&g(x) = x^2 \text{ na } [0, \infty) \\
&f(x) = x^2 - 2x + 2 \text{ na } [1, \infty) \\
&h(x) = x - 1 \text{ kot preslikava } h : [1, \infty) \to [0, \infty).
\end{aligned}$$

Preverimo pogoj iz definicije

$$\begin{aligned}
h \circ f(x) &= h(x^2 - 2x + 2) = x^2 - 2x + 2 - 1 = x^2 - 2x - 1 = \\
&= (x - 1)^2 = g(x - 1) = g \circ h(x)
\end{aligned}$$

Slikce pikce obeh (fon).

Opomba 8.
- *V splošnem velja, da je vsaka kvadratna funkcija $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$ konjugirana $p_c(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.*
- *Vidimo, da se je v primeru ohranil tudi karakter fiksnih točk. To ne preseneča oz. še več, če sta h in h^{-1} tudi odvedljivi, velja:*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (h^{-1} \circ g \circ h)(x) = (h^{-1})' \cdot (g \circ h(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) = \\
&= \frac{1}{h'(h^{-1} \circ \underbrace{g \circ h}_{\text{ker je } h \text{ fiksna točka za } g})(x)} \circ g'(h(x)) \cdot h'(x) = g'(h(x))
\end{aligned}$$

torej se tip odvedljive. točke ohrani

Definicija 12. *Pravimo, da je $g : J \to J$ **semi-konjugirana** funkciji $f : I \to I$, če obstaja zvezna surjektivna preslikava $h : I \to J$, za katero velja:*

i) $\forall x \in I$: $h \circ f(x) = g \circ h(x)$

ii) $\exists m \in \mathbb{N}. \forall x \in J$ *ima* $h^{-1}(x)$ *največ* m *elementov.*

Opomba 9. *Definicija semi-konjugacije lahko varira glede na literaturo.*

Slikaaaa(fon):
Znova velja

$$h(O_f(x)) = O_g(h(x))$$

vendar pa ta relacija ni več bijektivna.

Primer 11.

$$\begin{aligned} h : [-1, 1] &\to [0, 1] \\ h(x) &= x^2 \end{aligned}$$

(slika) 2 to 1 preslikava.

$$\begin{aligned} h : [-1, 1] &\to [-1, 1] \\ h(x) &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

$$g \circ f(x) = h(\sqrt{1 - x^2}) = (\sqrt{1 - x^2})^2 = 1 - x^2 = g(x^2) = g \circ h(x).$$

Sebi-konjugacija ne ohranja dinamike popolno. V našem primeru je sklopila predperiodične in periodične točke.

Trditev 1. *Naj bo g semi-konjugirana f preko $h : I \to J$. Če je $x_0 \in I$ periodična za f, je tudi $h(x_0)$ periodična za g, a se perioda ne ohranja nujno.*

Dokaz: Naj bo $f^n(x_0) = x_0$ in $n \in \mathbb{N}$ najmanjši tak. Potem velja

$$\begin{aligned} g^n(h(x_0)) &= g \circ \cdots \circ g \circ h(x_0) = \\ &= g \circ \cdots \circ g \circ h \circ f(x_0) = \\ &= \cdots = h \circ f^n(x_0) = h(x_0) \end{aligned}$$

tj. g je periodična, nemoremo pa zagotoviti minimalnosti n. □

Primer 12. *sej veš kje*

Izrek 3. *Naj bo g semi-konjugirana f s $h : I \to J$ in naj bosta $I, J \subset \mathbb{R}$ kompaktna intervala in naj bo f kaotičen. Potem je g kaotična, če je izpolnjen eden od treh pogojev:*

i) *h je injektivna*

ii) *g je zvezna*

iii) *f je zvezna*

Dokaz: c1) Sledi iz trditve. Če vzamemo poljubno $U \subset J$ odprto, je tudi $h^{-1}(U) \subset I$ odprta in vsebuje periodično točko x_0. Torej je $h(x_0)$ periodična in v U.
Slika da te mika

c2) Na enak način dobimo tudi gosto orbito.

c3) Poglejmo si preslikavo $d : I \times I \to \mathbb{R}$, podano s predpisom $d(x, y) = |h(x) - h(y)|$. Gre za zvezno preslikavo iz kompakta v $\mathbb{R}$. Poglejmo njeno zožitev na množico

$$\Delta_\beta = \{(x, y) \in I \times I \mid |x - y| \geq \beta\}$$

super slika
Obstaja $\beta' > 0$, da iz pogoja $|f^n(x) - f^n(y)| > \beta$ sledi $|g^n(h(x)) - g^n(h(y))| > \beta'$. To je občutljivostna konstanta za g.

□

Opomba 10. *Zakaj je pomembna kompaktnost intervalov I in J? Poglejmo si preslikavi*

$$f(x) = 2x \text{ na } (0, \infty)$$
$$g(x) = x + \ln 2 \text{ na } \mathbb{R}.$$

Očitno je, da je f izpolnjuje (c3), saj sta za velik n števili $2^n x$ in $2^n y$ daleč narazen, če $x \neq y$. Po drugi strani, je tudi očitno, da g ne izpolnjuje (c3), saj je razlika

$$|g^n(x) - g^n(y)| = |x - y|$$

konstantna za vse $n \in \mathbb{N}$. Sta pa vseno f in g konjugirani preko $h(x) = \ln(x)$.

$$h \circ g \circ h^{-1} ...$$

.

Primer 13.

$$D(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$$
$$T(x) = 2 \min\{x, 1 - x\}$$

slika obeh + se kompozitum. $T(D(x)) = 2 \min\{D(x), 1 - D(x)\} = T(T(x))$.

Primer 14. *Imamo preslikavo*

$$h : [0, 1) \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$$
$$h(x) = (\cos(2\pi x, \sin(2\pi x))$$

slikica intervala v kroznico.
Zanima nas, kaj se zgodi z doubling map, če uporabimo to konjugacijo oz. trdimo, da bo konjugirana preslikava

$$h : S^1 \subset \mathbb{R}^2 \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$$
$$(\cos(t), \sin(t)) \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$$

tj. preslikava ki podvoji argument. V kompleksni notacijo bi jo zapisali z $e^{it} \mapsto e^{2it}$ ali $z \mapsto z^2$.
Spet hude slike s fona

Primer 15. *Pokažimo, da je $q_{-2}(x) = x^2 - 2$ kaotična. Gledamo interval, ki ga nese vase*
coobweb za balo
Poiščemo semi-konjugacijo med njo in f iz prejšnjega primera. Preslikava, ki jo porodi je

$$\begin{aligned} h : S^1 &\to [-2, 2] \\ (\cos t, \sin t) &\to 2\cos t \text{ oz.} \\ e^{it} &\mapsto 2\Re(e^{it}) \end{aligned}$$

spet mini slike :(
Ta preslikava ima v vsaki točki $y \in [-2, 2]$ največ 2 prasliki, je zvezna in surjektivna. Preverimo, da drži:

$$h \circ f(\cos t, \sin t) = q_{-2} \circ h(\cos t, \sin t).$$

Sklep: q_{-2} je semi-konjugirana tudi D. Direktna preslikava bi bila

$$h(x) = 2\cos(2\pi x).$$

Ker je q_{-2} zvezna, po prejšnjem izreku je tudi kaotična.

5 Bifurkacije

Za motivacijo si oglejmo enoparametrično družino šotorskih preslikav za $c \in [0, 2]$:

$$T_c(x) = c \cdot \min\{x, 1 - x\} = \frac{c}{2}T(x).$$

Vse te preslikave interval $[0, 1]$ slikajo vase, dinamike pa se za različne vrednosti malce razlikujejo

- če je $c < 1$:
  wooo slika(kdo bi si mislu)
  x_0 je edina periodična točka, gre pa za privlačno fiksno točko, saj je $T_c'(0) = c < 1$.
- če je $c = 1$:
  quess whos back
  imamo dve fiksni točki, obe sta odbojni, saj je odvod v njih $-c$.

Opazka: pri vrednosti $c = 1$ se je veliko fiksnih točk "pojavilo", nato pa so izginile, dobili pa smo tudi eno novo fiksno točko pri $x = \frac{1}{2}$, ki se je nato zvezno premaknila v $x = \frac{c}{1+c}$. Pri tem prihodu smo iz ene privlačne fiksne točke dobili dve odbojni.
Poglejmo si kaj se dogaja z 2-cikli

$$T_c^2(x) = c \cdot \min\{T_c(x), 1 - T_c(x)\}$$

- $c < 1$: sej veššš...
- $c = 1$: sej vešš spet

Točkam, pri katerih se zgodi "kvalitativna sprememba" dinamike, pravimo bifurkacije.

Mi bomo bifurkacije opazovali na družini zveznih funkcij $f_c : I \to I \subset I$, ki bodo gladko odvisne od parametra $c \in J \subset \mathbb{R}$. To pomeni, da za funkcijo $F(x,c) \coloneqq f_c(x)$ obstajajo parcialni odvodi $\frac{\partial^k}{\partial c^k} F(x,c)$ in so zvezni, za $k \in \mathbb{N}_0$. Na primeru $T_c(x) = \frac{c}{2} T(x)$ je taka, čeprav ni odvedljiva po x v $x = \frac{1}{2}$.

$$\frac{\partial}{\partial c} T_c(x) = \frac{1}{2} T(x)$$
$$\frac{\partial^k}{\partial c^k} T_c(x) = 0, \ k \geq 2.$$

Pri motivaciji smo opazili različne tipe bifurkacij:

- Fiksna točka se je pojavila in izginila (npr. $x = \frac{1}{4}$ pri $c = 1$.
- Fiksna točka $x = 0$ je zamenjala karakter iz privlačne v nevtralno in nato v odbojno pri $c = 1$.
- Iz fiksne točke $x = \frac{1}{2}$, ki se pojavi pri $c = 1$, smo dobili fiksno točko drugega tipa in 2-cikel za $c > 1$.

Ključna opazka je, da so se spremembe zgodile, ko je odvod v fiksni točki 1 ali pa ne obstaja.

Izrek 4. *Naj bo $f_c : I \to I$ družina zvezno odvedljivih funkcij, ki so gladko odvisne od parametra $c \in J$. Denimo, da za $x_0 \in I$ velja $f_{c_0}(x_0) = x_0$ in $f'_{c_0}(x_0) \neq 1$. Potem obstajata okolica $I' \subset I$ in $J' \subset J$, ter preslikava $p : J' \to I'$, da je $f_c(p(c)) = p(c)$, za katero je $p(c)$ edina fiksna točka na I' pri $c \in J'$.*

Dokaz: Uporabimo izrek o implicitni preslikavi za

$$F(x,c) = f_c(x) - x.$$

Po predpostavki je:

$$F(x_0, c_0) = 0 \text{ in } \frac{\partial}{\partial x} F(x_0, c_0) = f'_{c_0}(x_0) - 1 \neq 0.$$

Torej lahko na majhni okolici $c_0 \in J$ izrazimo $x = p(c)$, ter velja $F(p(c), c) = 0$ oz. $f_c(p(c)) = p(c)$. □

Opomba 11. *Izrek podaja le potreben, ne pa tudi zadosten pogoj.*

Primer 16 (Tangentna bifurkacija)**.** *Bifurkacija, v katerih iz nevtralne točke, ki zadošča $f'_{c_0}(x_0) = 1$, dobimo dve fiksni točki, ki jih prej ni bilo. Ena je privlačna, druga odbojna, zato se tudi imenuje saddle-node bifurcation.*
klasika