Zvezna dinamični sistemi - lokalni del

Uroš Kosmač

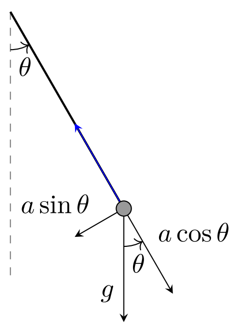
April 18, 2025

Obravnavali bomo nelinearne avtonomne sisteme navadnih diferencilnih enačb (NDE) t.j.

$$\dot{X} = F(X), \tag{1}$$

kjer so $U \subset \mathbb{R}^n$ odprta, $F : U \to R^n$ in $X : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vektorska funckija.

Primer 1. *Matematično nihalo*



2. *Newtonov zakon*

$$\begin{aligned} ma &= -F \\ m\ddot{\varphi} &= -mg \\ \ddot{\varphi}+g \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Začetni pogoj:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_0 \quad \textit{začetni odmik} \\ \dot{\varphi}(0) &= v_0 \quad \textit{začetna hitrost} \end{aligned}$$

Začetni problem je NDE oz. sistem NDE skupaj z začetnim pogojem. To želimo obravnavati kot sistem prvega reda, zato bomo enačbo drugega reda prevedli nanj. Zaradi enostavnosti nastavimo $g = 1$.

$$\begin{aligned} x &= \varphi \\ y &= \dot{\varphi} ... \end{aligned}$$

Začetni pogoj je

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Za začetek si oglejmo linearizacijo tega sistema t.j. uporabimo oceno $\sin x \approx x$ *za majhen* x*:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ni težko preveriti, da je splošna rešitev enaka:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cos t + D\sin t \\ -C\sin t + D\cos t \end{pmatrix}$$

Pri danem začetnem pogoju dobimo $x(0) = C = x_0$ *in* $y(0) = D = y_0$. *Opazimo tudi, da za vse začetne pogoje* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ *ter* $t \in \mathbb{R}$ *velja:*

$$x^2 + y^2 = ... = x_0^2 + y_0^2.$$

To pomeni, da vsaka rešitev sistema leži znotraj glavne krožnice s polmerom $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. *To ne pomeni nujno, da opišemo celotno krožnico, vendar pa je v našem primeru to jasno iz parametrizacije.*
Tokovnice

- *Tovrstnim upodobitvam rešitev za razžične začetne pogoje pravimo* ***fazni portret****.*
- *Krivuljam v portretu pravimo* ***orbite****,* ***tokovnice*** *ali* ***trajektorije****.*
- *Zvezi* $G(X) \equiv C \in \mathbb{R}$*, ki velja "za vse smiselne čase" in vse rešitve, pravimo* ***prvi integral sistema****.*

Lineariziran sistem ima dva tipa rešitev:

- ***Ravnovesno oz. stacionarno točko*** *v izhodišču t.j. točko* x_0*, v kateri je* $F(X_0) = 0$. *Tam sistem miruje.*
- ***Periodične rešitve*** *pri katerih obstaja* $T > 0$*, da je* $X(t+T) = x(t)$ *za vse smiselne čase in je* T *najmanjši s to lastnostjo. V našem primeru* $T = 2\pi$.

Poglejmo si sedaj nelinearn sistem.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x \end{pmatrix} = F(x, y).$$

Sistema neznamo rešiti eksplicitno, znamo pa poiskati prvi integral. Če nismo ravno v "slabi točki", lahko vsaj na okolici izrazimo $y = y(x)$. *Za odvod pa velja*

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

V našem primeru:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\sin x}{y}.$$

Dobili smo NDE z ločjivimi spremenljivkami

$$\int y \,\mathrm{d}y = -\int \sin x \,\mathrm{d}x$$
$$\frac{y^2}{2} = \cos x + \tilde{C}$$
$$y = \pm\sqrt{2\cos x + C}$$

Ta zveza podaja obliko unije tokovnic, ne pa nujno tudi tokovnic samih.
vfasv<f
Smer toka določa enačba $\dot{x} = y$. Ugotovimo, da lahko analizaramo obnašanje sistema čeprav ne poznamo eksplicitno rešitev sistema. To bo cilj tega in naslednjega poglavja. Poleg ravnovesnih in periodičnih rešitev smo v tem primeru dobili tudi neperiodično za $C > 2$. Dodatno opazimo, da so ravnovesne točke v $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$, vendar pa so dbeh tipov:

-> za k sod stabilne

-> za k lih nestabilne

Definicija 1. *Ravnovesna točka X_0 je* ***stabilna****, če za vsako njeno okolico $U \subset \mathbb{R}^n$ obstaja manjša okolica $V \subset U$, da za rešitev z lastnostjo $X(0) \in V$ velja $X(t) \in U$ za vse $t > 0$. Če dodatno velja tudi*

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = X_0,$$

je točka tudi ***asimptotsko stabilna****.*

V našem primeru imamo le stabilnost.
domenice
Opazimo, da je lineariziran portret "zelo podobne" originarini okokici $(0, k\pi)$ za sode $k \in \mathbb{Z}$. To bo stabilno tudi za zvezne verzije Hartman-Grobmanovega izreka, ki je cilj tega poglavja.

1 Eksistenčni izrek in tok sistema

V tem razdelku bomo razširili že poznan eksistenčnio izrek za NDE. Spomnimo se: iskali smo rešitev začetnega problema

$$\dot{x} = f(t, x)$$
$$x(t_0) = x_0$$

vsaj na okolici začetne točke t.j. za $t \in (t_0 - a, t_0 + a)$. Izkazalo se je , da je za obstoj rešitve dovolj zveznost funckije f za enoličnost pa so potrebni dodatni pogoji.

Primer 2.

$$\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}$$
$$x(0) = 0.$$

Rešitvi sta $x(t) = 0$ *in* $x(t) = t^3$.

Zaradi zadnjega primera se v izreku prevzame Lipshitzova lasntnost t.j.

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < L|x_1 - x_2| \text{ za } L > 0.$$

Ta lastnost mora držati na okolici točke (t_0, x_0). Zadosten pogoj je bil C^1-odvedljivost po spremenljivki x. Reševali bomo začetni problem:

$$\dot{X} = F(X), \; X(0) = x_0,$$

kjer smo se omejili na avtonomne sisteme. Rešitev bomo iskali v prostoru:

$$C([-a, a], \mathbb{R}^n).$$

Privzeli bomo, da je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ vedno odprta in $F \in C^1(U)$ t.j. $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \to \mathbb{R}^n$ vsaka koordinatna funckija F_j je zvezno odvedljiva po vseh x_k, $1 \leq k \leq n$.

Lema 1. *Naj bo* $U \subset \mathbb{R}^n$ *odprta,* $x_0 \in U$ *in* $F \in C^1(U)$*. Potem obstajata* $R > 0$ *in* $L > 0$*, da* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{B}(X_0, \mathbb{R})$ *velja*

$$|F(X_1) - F(X_2)| < L|X_1 - X_2|.$$

Dokaz: Naj bo $R > 0$ tak, da je $\overline{\mathbb{B}(x_0, R)} \subset U$ in naj bo

$$L := \max_{\overline{x \in \mathbb{B}(X_0, R)}} ||D_F(X)||$$

največja operatorska norma Jacobijeve matrike. Zaradi konveksnosti $\mathbb{B}$, je za $X_1, X_2 \in \mathbb{B}(x_0, R)$, je $X_1 \cdot s + X_2(1 - s) \in \mathbb{B}(X_0, R)$ in $s \in [0, 1]$. Definiramo preslikavo ene spremenljivke:

$$g(s) = F(X_2 + sV), \; V = X_1 - X_2, \; s \in [0, 1] g'(s) \quad = D_F(X_2 + sV) \cdot V$$

Od tod sledi:

$$|g'(s)| \leq L \cdot |V| = L \cdot |X_1 - X_2|.$$

Običajen Langrangeov izrek za vektorske funckije pove:

$$|F(X_1) - F(X_2)| = |g(0) - g(1)| = |g'(s)| \leq L|X_1 - X_2|.$$

□

Opomba 1. *Iz dokaza je razvidno, da bi lahko namesto* $\mathbb{B}(X_0, R)$ *uporabili poljubno množico, ki je kompaktno vsebovana v* U*, potrebujemo zgolj konveksnost. Vendar se izkaže, da je tudi ta predpostavka odveč, saj lahko najdemo konveksno končno pokritje.*

Sklep: za vsako kompaktno $K \subset U$ obstaja $L > 0$, da je

$$|F(x_1) - F(X_2)| < L|X_1 - X_2|$$

za $X_1, X_2 \in K$ t.j. $F \in C^1(U)$ je Lipshitzova na vsakem kompaktu v U. Izkaže se, da ke ta pogoj dovolj za konvergenco Picardove iteracije

$$\dot{X} = F(X)$$

$$\dot{X}(0) = X_0 \iff \underbrace{X(t) = X_0 + \int_0^t F(X(\tau))\,\mathrm{d}\tau}_{\text{integralska oblika začetnega pogoja}}$$

TBA

Picardova iteracija:

$$x_n = \Phi(x_{n-1}),\ X_0(x) = X_0.$$

Iteracija bo konvergirala, če bo obstajala fiksna točka $\Phi(x) = x$, saj to reši začetni problem.

Izrek 1. *Naj bodo $F \in C^1(U)$, $X_0 \in U$, $\dot{X} = F(X)$ in $X(0) = X_0$. Potem ima začetni problem enolično zvezno rešitev, ki je definirana za $t \in [-a, a]$ za nek $a > 0$.*

Dokaz: Dobolj je dokazatim, da ima Φ fiksno točko oz. da je skrčitev na ustrezno izbranem polnem prostoru.

- Naj bo F Lipshitzova na $\overline{B(0, R)} \subset U$ za konstanto $L > 0$ in naj bo $M := \max_{x \in \overline{B(0,R)}} |F(X)|$.
- Prostor $C^1([-a, a], \mathbb{R}^n)$ opremimo z metriko d_∞, ter se omejimo na $\mathcal{K} \subset C^1([-a, a], \mathbb{R}^n)$, v kateri so funkcije z lastnostjo: $|X(t) - X_0| \leq R$ za vse $t \in [-a, a]$.
- Prostor $(\mathcal{K}, d_\infty)$ je poln za vsak $a > 0$.
- Trdimo, da za dovolj majhen $a > 0$, velja $\Phi(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

$$\begin{aligned}|\Phi(X)(t) - X_0| = \| \int_0^t F(X(\tau))\,\mathrm{d}\tau \| \leq \\ \leq 2a \cdot M \leq R \Longrightarrow a \leq \frac{R}{M}.\end{aligned}$$

- Trdimo, da je za dovolj majhen $a > 0$ Φ skrčitev:

$$d_\infty(\Phi(X), \Phi(\tilde{X})) = \max_{t \in [-a,a]} \| | \|$$

$\square$