Dinamika kompleksnih funkcij

Uroš Kosmač

April 23, 2025

V tem poglavju bomo obravnavali dinamiko holomorfnih funkcij $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ponovimo nekaj osnovnih pojmov.

Definicija 1. *Množica $D \subseteq \mathbb{C}$ je **območje**, če je odprta in povezana.*

Opomba 1. *Območja so lahko neomejena ali omejena, ter enostavno povezana (brez lukenj) ali m-povezana (m lukenj).*

Definicija 2. *Množica*

$$\mathbb{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

je disk in $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$ enotski disk.

Definicija 3. *Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfna v $z \in D$ oz. na D, če obstaja limita*

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}. \tag{1}$$

Množico holomorfnih funkcij na D označimo z $\mathcal{O}(D)$.

Če kompleskno funkcijo zapišemo kot

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{za} \quad u, v \in C^1(D)$$

je $f \in \mathcal{O}(D)$ natanko tedaj, ko velja Cauchy-Riemannov sistem enačb:

$$u_x = v_y \quad \text{in} \quad u_y = -v_x. \tag{2}$$

Praksi so to običajno tiste, ki ne vsebujejo $\bar{z}$. Družina holomorfnih funkcij je precej "toga" oz. zanje veljajo razmeroma stroge omejitve in lastnosti

- Cauchyjeva integracijska formula: za $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ imamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w. \tag{3}$$

  To pomeni, da so vrednosti funkcije v notranjosti, določene z vrednostmi na robu.

- Holomorfne funkcije so $\mathbb{C}$-analitične t.j.

$$\forall a \in D . \exists r > 0 : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ na } \mathbb{D}(a,r).$$

  Posledično so neskočnokrat odvedljive in so odvodi znova holomorfni.

- Njihova množica ničel je diskretna, tj. za ničlo obstaja okolica, da na njej ni druge ničle. Če je D omejena, je ničel končno mnogo.

- Princip indentičnosti: če sta $f \in \mathcal{O}(D_f)$ in $g \in \mathcal{O}(D_g)$ ter je $f = g$ na množici s stekališčem. Potem je $f \equiv g$ na $D_f \cap D_g$.

- Holomorfne funkcije so odprte.

Primer 1. *Osrednja primera*

i) Polinomi:

$$p(z) = C_d z^d + C_{d-1} z^{d-1} + \cdots + C_0,\ c_j \in \mathbb{C},\ d = deg(p).$$

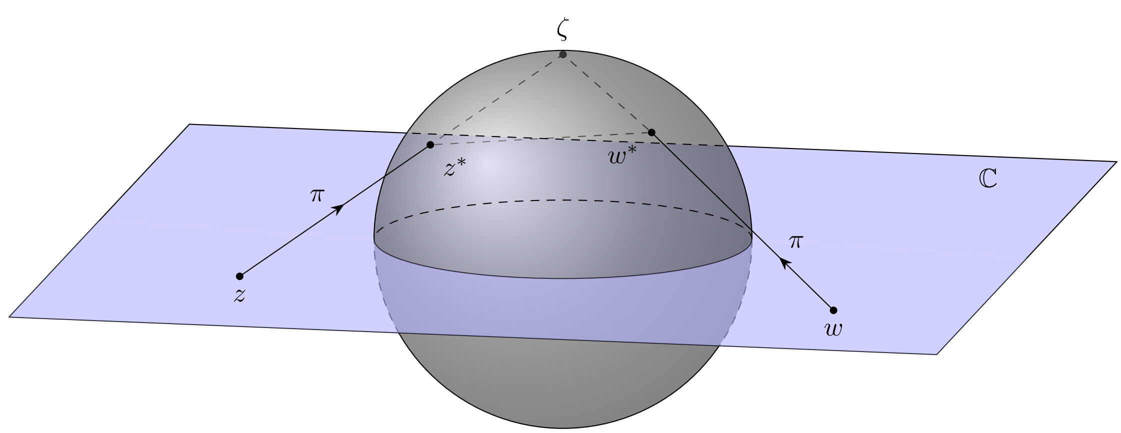
Imajo natanko d ničel štetih z večkratnostjo.

ii) Racionalne funkcije:

$$f = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{C_d z^d + C_{d-1} z^{d-1} + \cdots + C_0}{B_d z^d + B_{d-1} z^{d-1} + \cdots + B_0},$$

kjer sta p, q polinoma. Imajo $deg(p)$ ničel in $deg(q)$ polov., stopnjo pa definiramo kot $deg(f) = \max\{def(p), def(q)\}$.

Kompleksno ravnino lahko kompaktificiramo z eno točko, kar nam da **Riemannovo sfero** $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.



Obnašanje f v okolici $z = \infty$ analiziramo tako, da uporabimo konjugacijo s preslikavo $z \mapsto \frac{1}{z}$ na $\mathbb{C}/\{0\}$. Ta nam vrednost $z = \infty$ prevede na izhodišče. Pravimo, da je f holomorfna na okolici $z = \infty$, če je taka $f\left(\frac{1}{z}\right)$ na okolici $z = 0$.

Primer 2.

i) $f(z) = \frac{1}{z-1}$

$$f(1) = \infty \Longrightarrow \quad \textit{pogledamo} \ \ \frac{1}{f(z)} = z - 1 \Longrightarrow \ z = 1 \ \textit{je pol} \ 1. \ \textit{stopnje}$$

$$f(\infty) = 0 \Longrightarrow \quad \textit{pogledamo} \ \ f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + \cdots \Longrightarrow \ z = \infty \ \textit{je ničla} \ 1.\textit{stopnje}$$

ii) $f(z) = z^2 + 1$

$$f(\infty) = \infty \Longrightarrow \quad \textit{pogledamo} \ \ \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{z^2} + 1} = \frac{z^2}{1+z^2} = z^2 + z^4 + \cdots \Longrightarrow \ z = \infty \ \textit{je pol} \ 2.\textit{stopnje}$$

iii) $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. *Vrednosti* $f(\infty)$ *nemoremo smiselno definirati, sa velja*

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x+iy} = 0$$
$$\lim_{x \to \infty} |e^{x+iy}| = \lim_{x \to \infty} e^x = \infty.$$

Izrek 1. *Funkcija* $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ *je holomorfna natanko tedaj, ko je razširitev racionalne funkcije ali* $f \equiv \infty$*.*

Dokaz:
($\Longleftarrow$): sledi iz primerov.
($\Longrightarrow$): Za funkcijo, ki jo lahko holomorfno razširimo na $\hat{\mathbb{C}}$, velja:

i) če $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nima polov in $f(\infty) \neq \infty$ je po Liouvillovem izreku konstantna, saj je omejena.

ii) če ima f na $\mathbb{C}$ neskončno mnogo polov, potem zaradi diskretnosti, obstaja zaporedje le teh, ki gre proti ∞. Posledično bo tudi $f(\infty) = \infty$ in zaradi zveznosti in $f \equiv \infty$ zaradi principa identičnosti.

iii) Če ima f le končno mnogo polov, ima po podobnem argumentu, kot pri *ii)* tudi končno mnogo ničel. Potem definiramo R, racionalno funkcijo z istimi ničlami in poli. Po *i)* je $\frac{f}{R}$ konstantna.

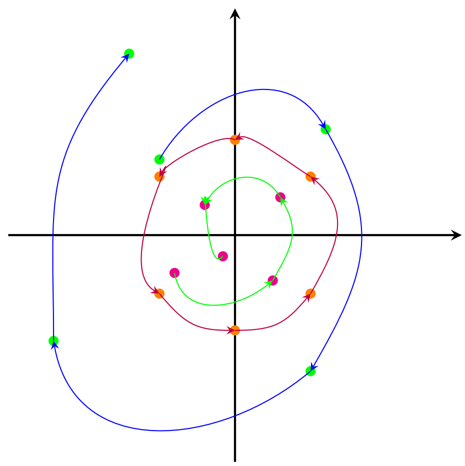
Povzetek: takoj ko ima f neskočno ničel ali polov oz. kako bistveno singularnost, je nemoremo obravnavati na $\hat{C}$ oz. ni holomorfna na $\hat{\mathbb{C}}$. $\square$

1 Fatoujeva in Juliajeva množica

Oglejmo si dinamiko funkcije $f(z) = z^2$ oz. v polarnih koordinatah $re^{i\phi} \mapsto r^2 e^{i2\phi}$.

- $|z| > 1 : \lim_{n\to\infty} |f^n(z)| = \lim_{n\to\infty} r^{2n} = \infty$

- $|z| < 1 : \lim_{n\to\infty} |f^n(z)| = \lim_{n\to\infty} r^{2n} = 0$
- $|z| = 1 : f$ "deluje kot" doubling map D in je kaotična. Poleg tega pa ima vsaka točka v okolici tudi točki, ki gresta proti 0 oz. ∞



Sklep: kompleksna ravnina oz. Riemannova sfera razpade na dve disjunktni množici. **Fatoujeva**, kjer je obnašanje f^n "predvidljivo" in **Juliajevo**, kjer je obnašanje f^n kaotično

$$\mathcal{F}_f = \hat{\mathbb{C}}/\partial\mathbb{D}$$
$$\mathcal{J}_f = \partial\mathbb{D}.$$

Za formalno definicijo teh dve množic rabimo koncept normalnih družin.

Definicija 4. *Zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(D)$ za $D \subseteq \mathbb{C}$, konvergira k $f \in \mathcal{O}(D)$* ***enakomerno po kompaktih*** *na D, če $\forall\epsilon > 0$ in $\forall K^{komp.} \subset D$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ in $z \in K$, velja $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.*

Primer 3. *$f_n(z) = z^n$ na $\mathbb{D}$ konvergira enakomerno na kompaktih.*

Dokaz: Limita po točkah je enaka $f(z) = 0$. Izberemo poljuben kompakt $K \subset \mathbb{D}$. Zanj obstaja $r = r(K) \in [0, 1)$, da je $K \subseteq \mathbb{D}(0, r)$. Ker je $r < 1$, lahko naredimo oceno $\forall z \in K$:

$$|f_n(z) - f(z)| = |z^n| \leq r^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

tj. $\forall\epsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je za $n \geq n_0$: $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$. Seveda pa enakomerna konvergenca na celem $\mathbb{D}$ v tem primeru ne obstaja. Podobno lahko pokažemo, da gre $f_n \to \infty$ enakomerno po kompaktih na $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$. $\square$

Izrek 2. *Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(D)$ zaporedje ki konvergira $f_n \to f$ enakomerno po kompaktih in $D \subseteq \mathbb{C}$ območje. Potem je tudi $f \in \mathcal{O}(D)$ holomorfna.*

Dokaz: Naj bo $\overline{\mathbb{D}(a,r)} \subset D$. Ker je $\overline{\mathbb{D}(a,r)}$ kompakt, gre $f_n \to f$ enakomerno na njem. Vsak element f_n zadošča Cauchyjevi integracijski formuli

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(a,r)} \frac{f_n(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w, \quad \forall z \in \mathbb{D}(a,r).$$

Ker je konvergenca enakomerna, lahko zamenjamo vrstni red limite in integrala:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(a,r)} \frac{f_n(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Funkcijo na desni lahko razvijemo v vrsto okoli $z = a$, zato je holomorfna na $\mathbb{D}(a,r)$. Torej je taka tudi f. □

Definicija 5. *Družina $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{C}$ je **normalna na** D, če za vsako zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ obstaja podzaporedje $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ki konvergira enakomerno po kompaktih k neki $f \in \mathcal{O}(D)$ ali k $f \equiv \infty$.*

Opomba 2.

- *Normalne družine so analog kompaktnih množic v $\mathcal{O}(D) \cup \{f \equiv \infty\}$. Funkcijo $f \equiv \infty$ smo dodali, ker bomo obravnavali predvsem racionalne funkcije oz. holomorfne funkcije na $\hat{\mathbb{C}}$.*

- *Normalnost se študira tudi v drugih razredih funkcij, v katerih pa se običajno ne dodaja $f \equiv \infty$.*

- *Zadostnim oz. ekvivaletnim pogojem se reče Arzela - Ascolijevi izreki. Npr. za družino $\mathcal{F} \subset C([a,b])$ velja, da je normalna, če je:*

  i) *enakomerno omejena tj. $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \ \forall x \in [a,b]$ in $\forall f \in \mathcal{F}$.*

  ii) *je enakomerno enakozvezna tj. $\forall \epsilon > 0.\ \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \ \forall x,y \in [a,b]$ in $\forall f \in \mathcal{F}$.*

  iii) *Pri holomorfnih funkcijah ii) sledi iz i) zaradi Cauchyjeve integracijske formule. Zaradi kompaktnosti $\hat{\mathbb{C}}$ je dovolj celo lokalna omejenost. Zato se Arzela-Ascolijev izrek navadn prenese na Montelova izreka:*

  Izrek 3 (Prvi Montelov izrek)**.** *$\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{C}$ je normalna, če je lokalno enakomerno omejena tj. $\forall z \in D.\ \exists z \in U \subset D$ in $M > 0$, da je $|f(w)| \leq M \ \forall w \in U$ in $\forall f \in \mathcal{F}$.*

Definicija 6. *Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$, $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Njena **Fatoujeva množica** $\mathcal{F}_f$ je definirana kot množica točk $z \in D$, za katere obstaja okolica $U \subset D$, da je družica $\{f^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ normalna na U. Njena **Juliajeva množica** pa je definirana kot komplement $\mathcal{J}_f = D \backslash \mathcal{F}_f$.*

Primer 4. $f(z) = z^2 \implies f^n(z) = z^{2^n}$

- $|z| < 1$*: konvergira enakomerno po kompaktih na*

- $|z| = 1$*: normalnost nimamo v nobeni okolici, saj so blizu točkam, ki gredo v* ∞ *in takim, ki gredo k* 0*, zato tudi, če bi obstajala limita podzaporedja, ne bi bila zvezna.*

- $|z| > 1$*: konvergira enakomerno po kompaktih na* $\hat{C}/\mathbb{D} \Longrightarrow \mathbb{D} \subset \mathcal{F}_f$ *k* ∞*.*

  Dokaz: Za $K \subset \hat{C}/\overline{\mathbb{D}}$ obstaja $r > 1$, da je $\mathbb{D}(0, r) \cap K = \emptyset$, oz. $|z| \geq r$ za $z \in K$.
  Posledično:
  $$|f^n(z)| = |z^{2^n}| \geq r^{2^n} \to \infty.$$
  tj. $\forall M > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|f^n(z)| > M$ za $n \geq n_0$ in $z \in K$. Alternativno bi lahko oravnavali $\frac{1}{f^n(z)} \to 0$ enakomerno po kompaktnih. □

Opomba 3.

- *Po konstrukciji je* $\mathcal{F}_f$ *odprta,* $\mathcal{J}_f$ *pa zaprta, lahko pa sta obe prazni. Primera za to sta:*
  - $f(z) = z + 1 \Longrightarrow f^n(z) = z + n \longrightarrow \infty$ *enakomerno na kompaktih na* $\hat{\mathbb{C}}$*. Torej je* $\mathcal{J}_f = \emptyset$*.*
  - *Lattesova funkcija:* $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$ *ima* $\mathcal{J}_f = \hat{\mathbb{C}}$ *in* $\mathcal{F}_f = \emptyset$*.*
- *Za polinome se definiciji* $\mathcal{J}_f$ *in* $\mathcal{F}_f$ *poenostavita, kar bomo spoznali kasneje.*

Izrek 4. *Množici* $\mathcal{J}_f$ *in* $\mathcal{F}_f$ *sta naprej in nazaj invariantni tj.* $f(\mathcal{J}_f) = f^{-1}(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f$ *in* $f(\mathcal{F}_f) = f^{-1}(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f$*.*

Dokaz: Dovolj je dokazati zvezo le za $\mathcal{F}_f$. Naj bo $z \in U$, kjer je $U \subset D$, na kateri so iterati normalni. Ker je f zvezna in odprta sta tudi množici $f^{-1}(U)$ in $f(U)$ odprti, seveda pa je družina $\{f^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ normalna tudi na njih. Od tod sledi:
$$f^{-1}(\mathcal{F}_f) \subseteq \mathcal{F}_f \quad \text{in} \quad f(\mathcal{F}_f) \subseteq \mathcal{F}_f.$$
Na prvo relacijo dodamo f in dobimo:
$$\mathcal{F}_f \subseteq f(\mathcal{F}_f) \Longrightarrow \mathcal{F}_f = f(\mathcal{F}_f).$$
Posledično pa je tudi $\mathcal{F}_f \subseteq f^{-1}(\mathcal{F}_f)$, kar nam da $\mathcal{F}_f = f^{-1}(\mathcal{F}_f)$. □

Povezanim komponentam $\mathcal{F}_f$ pravimo Fatoujeve komponente in se slikajo ena v drugo zaradi zveznosti in odprtosti f.

Primer 5. *Naj bo* $f(z) = \frac{1}{z^2}$*. Potem za iterate* f *velja*

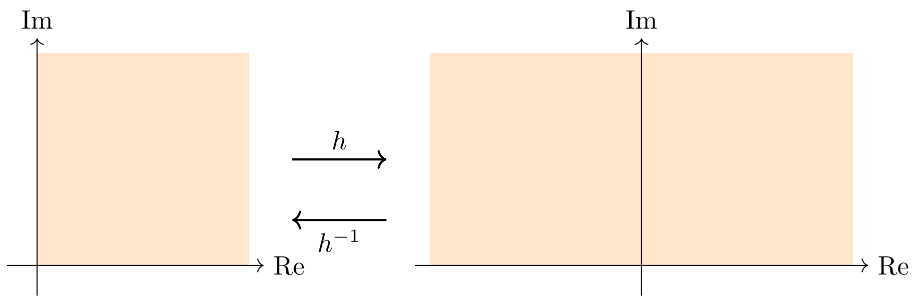
$$\lim_{n\to\infty} f^{2n}(z) = \lim_{n\to\infty} z^{2^n} = \begin{cases} \infty; |z| > 1 \\ 0\ ; |z| < 1 \end{cases}$$
$$\lim_{n\to\infty} f^{2n+1}(z) = \lim_{n\to\infty} z^{2^n} = \begin{cases} 0\ ; |z| > 1 \\ \infty; |z| < 1 \end{cases}$$

Vse točke $\partial\mathbb{D}$ *so v* $\mathcal{J}_f$*.*

2 Konjugacije in periodične točke

Če je holomorfna funkcija $h : D \to \Omega$ obrljiva, je njen inverz avtomatsko holomorfen. Pravimo, da je tak h biholomorfna. Vemo, da za $z_0 \in D$, kjer je $h'(z_0) \neq 0$ obstaja okolica U, da je h zožena na U biholomorfna.

Primer 6. *Opazujemo preslikavo $h(z) = z^2$*



Za $z \neq 0$ definiramo inverz

$$h^{-1}(z) = \sqrt{|z|} \cdot e^{\frac{1}{2}\arg(z)}.$$

Za $z = 0$ izraz ni dobro definiran, saj okolica vsebuje argumenta 0 in 2π.

Definicija 7. *Naj bo $h \in \mathcal{O}(D)$ za območje $D \subset \mathbb{C}$. Vrednosti z_0 pravimo* ***kritična točka****, če je $h'(z_0) = 0$, sliki $h(z_0)$ pa pravimo* ***kritična vrednost****.*

Definicija 8. *Naj bosta $D, \Omega \subseteq \mathbb{C}$ območji. Preslikavi $f : D \to D$ in $g : \Omega \to \Omega$ sta* ***konjugirani****, če obstaja biholomorfna preslikava $h : D \to \Omega$ z lastnostjo $h \circ f = g \circ h$.*

Ker je f^n normalna na $U \subset D$ natanko tedaj, ko je $g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}$ normalna na $h(U) \subset \Omega$, velja izrek:

Izrek 5. *Če sta f in g konjugirani preko $h : D \to \Omega$, je $\mathcal{F}_g = h(\mathcal{F}_f)$ in $\mathcal{J}_g = h(\mathcal{J}_f)$.*

To pomeni, da konjugacija ohranja karakteristični množici.

Opomba 4. *V resnici zadošča že surjektivnost h (brez omejitve na število preslik), saj je taka preslikava lokalno biholomorfna povsod razen v disktretni množici. Da se pokazati, da je za nelinearno g množica $\mathcal{J}_g$ brez izoliranih točk. Zato za kritično točko od h, ki leži v $z_0 \in \mathcal{F}_f$, velja tudi $h(z_0) \in \mathcal{F}_g$.*

Primer 7. *Obravnavajmo preslikavo $f(z) = 3x + 2$. Fiksna točka zanjo je $z = -1$. Poskusimo poskrbeti, da se ta točka premakne v izhodišče.*

$$h(-1) = 0 \Longrightarrow h(z) = z + 1 \Longrightarrow h^{-1}(z) = z - 1$$
$$g(z) = h \circ f \circ h^{-1}(z) = 3z.$$

Potem za Fatoujevo in Juliajevo množico dobimo

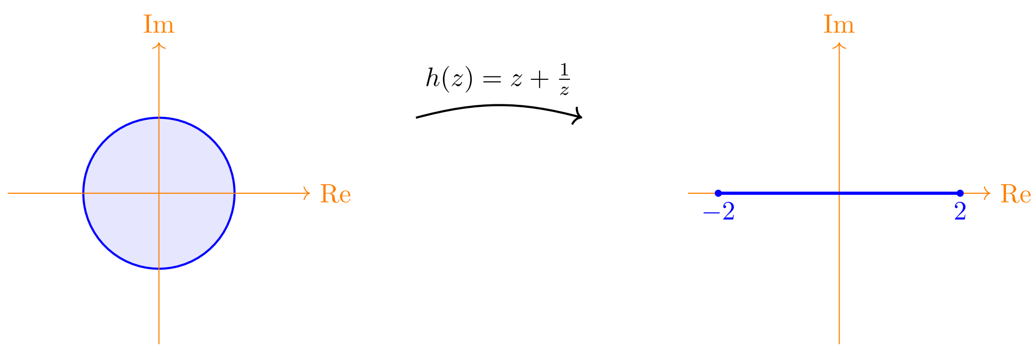
$$\mathcal{F}_g = \hat{\mathbb{C}}\backslash\{0\},\ \mathcal{J}_g = \{0\} \Longrightarrow \mathcal{F}_f = \hat{\mathbb{C}}\backslash\{-1\},\ \mathcal{J}_f = \{-1\}.$$

$$\begin{tikzcd}
-1 \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "h"'] & -1 \arrow[d, mapsto, "h"'] \\
0 \arrow[r, mapsto, "g"] & 0
\end{tikzcd}$$

V splošnem lahko vse linearne funkcije, ki niso oblike $z \mapsto z + a$ *transliraš v* $z \mapsto az$ *za* $a \in \mathbb{C}$.

Primer 8. *Poglejmo si dinamo preslikave* $q_{-2} = z^2 - 2$. *Vzamemo konjugacijo* $h(z) = z + \frac{1}{z}$.

- $h(z) = w \iff z^2 - wz + 1 = 0$ *ima največ* 2 *rešitvi.*
- *Očitno velja* $h(z) = h(\frac{1}{z})$ *t.j.* $\mathbb{D}$ *in* $\mathbb{C}\backslash$ *se zlepita skupaj.*
- $|z| = 1 \Longrightarrow z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\Re(z)$. *Preslikava* $h : \partial\mathbb{D} \to [-2, 2]$ *je surjektivna, kjer je moč praslike* 2, *razen v točkah* $z = \pm 1$.



Pokažimo, da h *podaja semi-konjugacijo med* $f(z) = z^2$ *in* q_{-2}

$$\begin{aligned} h \circ f(z) &= z^2 + \frac{1}{z^2} \\ g \circ h(z) &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

Sklep: $\mathcal{F}_{q_{-2}} = \hat{\mathbb{C}}\backslash[-2, 2]$ *in* $\mathcal{J}_{q_{-2}} = [-2, 2]$.

Ker so holomorfne funkcije avtomatsko odveljive, je klasifikacija fiksnih točk enostavna:
naj bo $f(z_0) = z_0$ in $f'(z_0) = \lambda$. Število $\lambda \in \mathbb{C}$ imenujemo **multiplikator**. Pravimo, da je z_0:

- Privlačan, če je $0 < \lambda < 1$
- Superprivlačna, če je $\lambda = 0$
- Odbojna, če je $|\lambda| > 1$
- Nevtralna, če je $|\lambda| = 1$.

Trditev 1. *V okolici privlačne/odbojne točke je funkcija konjugirana preslikavi $g(z) = \lambda z$.*

Proof. BŠS vzamemo $z_0 = 0$. Postopamo podobno kot pri Hartman-Grobman izreku in zapišemo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \lambda z + r(z) \\ \varphi(z) &= z + h(z), \end{aligned}$$

kjer sta r in h ostanka 2. reda. Dobimo

$$\begin{aligned} &\varphi(g(z)) = \lambda z + h(\lambda z) = f(\varphi(z)) = f(z + h(z)) = \lambda z + \lambda h(z) + r(z + h(z)) \\ \Longrightarrow\ & h(\lambda z) = \lambda h(z) + r(z + h(z)) \ \text{ oz. } h(z) = \lambda h(\lambda^{-1} z) + r(\lambda^{-1} z + h(\lambda^{-1} z)). \end{aligned}$$

Izraz za h je skrčitev za $0 < |\lambda| < 1$. Za $|\lambda| > 1$ dokaz priredimo oz. obravnavamo lokalni inverz $f^{-1}(z)$, ki ima v $z = 0$ odbojno točko. $\square$

Opomba 5.

- *če je $\lambda = 0$ in je z_0 superprivlačna, se podobno pokaže, da je za $f(z) = z_0 + c_k(z - z_0)^k + \dots$ konjugirana $g(z) = z^k$.*
- *za $|\lambda| = 1$ konjugacija z $g(z) = \lambda z$ obstaja, če je $\lambda^m = 1$ in so izpolnjeni neki dodatni pogoji.*

Primer 9. *Ponovno poglejmo $f(z) = 3z + 2$. Fiksna točka $z = -1$ je odbojna, saj je $f'(-1) = 3$ in je konjugirana preslikavi $g(z) = 3z$, kar smo že dokazali. Fiksna točka $z = \infty$:*

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{z}{3 + 2z}$$

in $\hat{f}(0) = \frac{1}{3}$ t.j. $z = \infty$ je privlačna. Poskusimo najti konjugacijo med $\hat{f}(z)$ in $g(z) = \frac{1}{3}z$:

$$h \circ f(z) = h\left(\frac{z}{3 + 2z}\right) = g \circ h(z) = \frac{1}{3} h(z).$$

Vemo, da je $h(0) = 0$, oglejmo si prvi odvod:

$$h'\left(\frac{z}{3 + 2z}\right) \cdot \left(\frac{3 + z}{(3 + 2z)^2}\right) = \frac{1}{3} h'(z).$$

Vstavimo $z = 0$:

$$h'(0) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} h'(0),$$

torej je $h'(0)$ lahko poljubna vrednost, BŠS nastavimo $h'(0) = 1$. Odvajamo še enkrat:

$$h''\left(\frac{z}{3+2z}\right)\left(\frac{3}{(3+2z)^2}\right)^2 + h'\left(\frac{z}{3+2z}\right) \cdot \left(\frac{-4z-12}{(3+2z)^3}\right) = \frac{1}{3} h''(z)$$

ter vstavimo $z = 0$:

$$h''(0)\frac{1}{9} - \frac{4}{9} h'(0) = \frac{1}{3} h''(0)$$

$$\implies h''(0) = -2.$$

Sklep: $h(z) = z - z^2 + o(z^3)$. En primer funkcije, ki ima tak razvoj v potenčno vrsto je $h(z) = \frac{z}{1+z}$. Preizkus:

$$h\left(\frac{z}{3+2z}\right) = \frac{\frac{z}{3+2z}}{1 + \frac{z}{3+2z}} = \frac{z}{3+3z} = \frac{1}{3} h(z)$$

V splošnem lahko iščemo h kot vrsto, izrek pa zagotovi lokalno konvergenco. Če fiksiramo $h'(z_0) = 1$, je h enolična. V tem, linearnem primeru, bi lahko postopali bolj elementarno z Möbiousovo preslikavo, ki ohrani fiksno točko $z = 0$, fiksno točko $z = -1$ pa premakne v ∞. Posledica lokalne linearizacije:

i) (super)privlačne točke so v $\mathcal{F}_f$:
ugotovili smo, da so privlačne točke tudi šibko privlačne. Naj bo $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ okolica z_0, kjer je f konjugirana $z \mapsto \lambda z$, $|\lambda| < 1$. Potem je njeno območje privlaka podano z:

$$A_f(z_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U).$$

Na njem gre $f^n(z) \to z_0$ enakomerno po komponentah t.j. $A_f(z_0) \subset \mathcal{F}_f$. Vemo pa tudi $\partial A_f(z_0) \subset \mathcal{J}_f$, saj v teh točkah pride do nezveznosti limite.

Opomba 6. *Množica $A_f(z_0)$ ni nujno povezana, zato z $A_f^*(z_0) \subset A_f(z_0)$ označimo komponento, ki vsebuje z_0 (direktno območje privlaka).*

ii) Odbojne točke so v $\mathcal{J}_f$:
BŠS nastavimo $z_0 = 0$. Denimo, da obstaja konvergentno podzaporedje f^{n_k} na okolici neki okolici. Ker je $f^{n_k}(0) = 0$, ne more iti k ∞. Torej gre $f^{n_k} \to g$ enakomerno po kompaktnih za $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(0, \epsilon))$. Vendar pa za odvode velja:

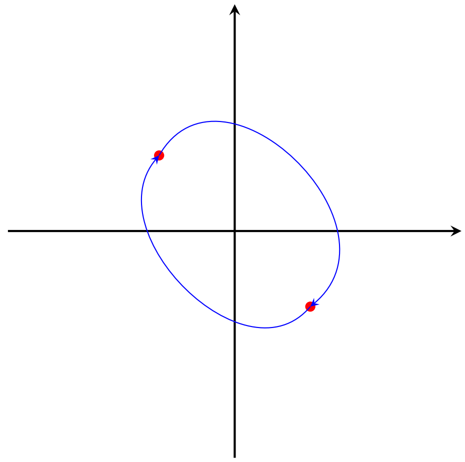
$$f(z) = \lambda z + o(z^2) \implies f^{n_k}(z) = \lambda^{n_k} z + o(z^2) \implies (f^{n_k})'(0) = \lambda^{n_k} \to \infty.$$

To pa je v protislovju s Cauchyjevo formulo:

$$\infty \neq g'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(0,\epsilon)} \frac{g(w)}{w^2} \,\mathrm{d}w = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(0,\epsilon)} \frac{f^{n_k}(w)}{w^2} \,\mathrm{d}w = \lim_{k\to\infty} \lambda^{n_k}.$$

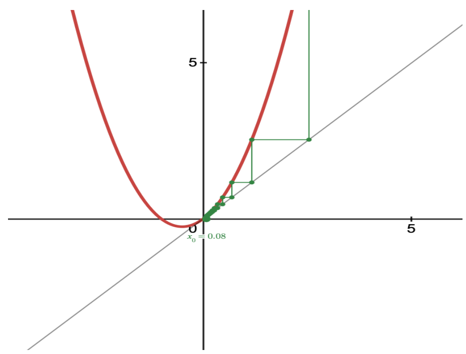
iii) Za nevtralne točke ni enoličnega odgovoro:

Primer 10. *$f(z) = e^{2\pi i\theta}z$ za $\theta \in \mathbb{R}$.*

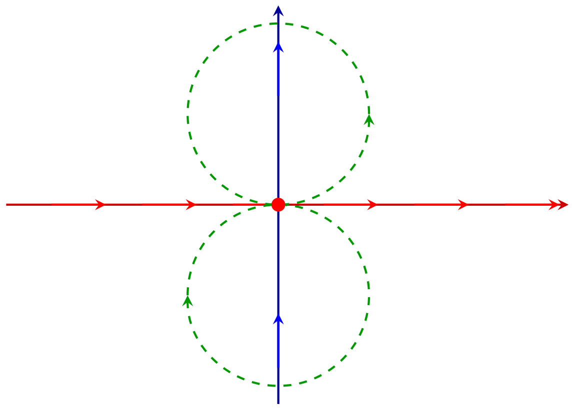


Ne glede na to, ali je θ racionalen ali ne, je $z = 0 \in \mathcal{F}_f$.

Primer 11. $f(z) = z + z^2 = re^{i\phi} + r^2e^{2i\phi}$



$x < 0$ je privlači, med tem ko $x > 0$ odbija.



$z = 0$ je v $\mathcal{J}_f$.

Na enak način kot v realni dinamiki, definiramo m-periodične točke kot točke, pri katerih je $f^m(z_0) = z_0$ in je $m \in \mathbb{N}$ najmanjši tak. Nadalje so te točke privlačne/odbojne /nevtralne, če so take kot fiksne točke f^m. Velja tudi, da so vse točke cikla istega tipa. Da zanje velja, analogna razvrstitev v $\mathcal{F}_f$ in $\mathcal{J}_f$ potrdi naslednji izrek

Izrek 6. *Za vsak $m \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{F}_f = \mathcal{F}_{f^m}$ in $\mathcal{J}_f = \mathcal{J}_{f^m}$.*

Dokaz: Dovolj je dokazati: $\{f^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ normalna na $U \iff \{f^{n \cdot m} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ normalna na U.

($\Longrightarrow$) Po definiciji normalnosti ima podzaporedje $(f^{n \cdot m})_{n \in \mathbb{N}} \subset \{f^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ konvergentno podzaporedje.

($\Longleftarrow$) Naj bo $(f^{n_j})_j \subset \{f^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ podzaporedje. Potem za nek $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ obstaja podzaporedje oblike $(f^{k_j \cdot m + r})_{j \in \mathbb{N}}$, saj se eden izmed ostankov pri deljenju n_j z m ponovi neskočno mnogokrat. Po predpostavki ima $(f^{k_j \cdot m})_{j \in \mathbb{N}}$ konvergentno podzaporedje, torej ga ima tudi $(f^{k_j \cdot m + r})_{j \in \mathbb{N}}$.

$\square$

Definicija 9. *Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$ za območje $D \subseteq \mathbb{C}$. Označimo množice privlačnih/odbojnih /nevtralnih periodičnih točk z Att(f), Rep(f) in Neu(f).*

Posledica 1. *Velja Att$(f) \subseteq \mathcal{F}_f$ in Rep$(f) \subseteq \mathcal{J}_f$.*

Definicija 10. *Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$ za območje $D \subseteq \mathbb{C}$. Za privlačen m-cikel $\{z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}\}$ definiramo unijo privlakov*

$$A_f(z_0) = \bigcup_{k=0}^{m-1} A_{f^m}(z_k),$$

ter $A^*(z_0)$ kot unijo komponent $A_f(z_0)$, ki vsebujejo z_j.

Posledica 2. *Velja* $A_f(z_0) \subseteq \mathcal{F}_f$ *in* $\partial A_f(z_0) \subseteq \mathcal{J}_f$.

Primer 12. *Naj bo* $f(z) = \frac{1}{z^2}$. *Fiksne točke so koreni enote* $z^3 = 1 \Longrightarrow z = 1, e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{\frac{4\pi}{3}i}$. *Vse so odbojne, ker je* $|f'(z)| = \left|-\frac{2}{z^2}\right| = 2$.
$f^2(z) = z^4 = z \Longrightarrow$ *2-cikel* $0, \infty$ *je superprivlačen, ker je* $|(f^2)'(0)| = 0$.
Vsi ostali m*-cikli bodo na enotski krožnici, sa rešujemo* $z^{2^m+1} = 1$ *ali* $z^{2^m} = z$. *Še več, vse te točke so odbojne, unija pa gosta v* $\partial\mathbb{D}$.
Sklep: $\mathit{Att}(f) = \{0, \infty\}$,

$$A_f(0) = A_f(\infty) = A_{f^2}(\infty) \cup A_{f^2}(0) = \mathbb{D} \cup \mathbb{C}\backslash\mathbb{D} = \mathbb{C} = \mathcal{F}_f,$$

$\partial A_f(0) = \partial\mathbb{D} = \mathcal{J}_f = \overline{\mathit{Rep}(f)}$.

Opomba 7. *Zveza* $\overline{\mathit{Rep}(f)} = \mathcal{J}_f$ *velja v splošnem in se pogosto uporabi kot alternativna definicija Juliajeve množice.*

Za razliko od odbojnih ciklov, ki jih je veliko (razen, kadar je f linearna), je število privlačnih ciklov omejeno s številom kritičnih točk.

Izrek 7. *Naj bo* z_0 *privlačna ali superprivlačna* m*-periodična točka. Potem* $A_f^*(z_0)$ *vsebuje kritično točko.*

Dokaz:

- $m = 1$: če je z_0 superprivlačna, je tudi kritična, zato predpostavimo, da je zgolj kritična. BŠS predpostavimo $\infty \notin A_f^*(z_0)$ (sicer jo premaknemo v končno točko z Möbiousovo preslikavo). Obstaja okolica $z_0 \in U_0 \subset A_f^*(z_0)$, na kateri je konjugirana $g(z) = \lambda z$, $0 < |\lambda| < 1$, f pa ima na U_0 tudi lokalni holomorfni inverz h. Ker se U_0 krči proti z_0, je

  $$U_1 \coloneqq h^{-1}(U_0) \subsetneqq U_0.$$

  Če na U_1 ni kritične točke, lahko postopek ponovimo

  $$U_2 \coloneqq h^{-1}(U_1) \subsetneqq U_1$$

  in $U_2 \subseteq A^*(z_0)$. V nekem trenutku se mora pojaviti kritična točka, sicer bi bila družina $\{h^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ enakomerno omejena in normalna na na U_0. To pa je protislovje , saj je z_0 odbojna točka za h in $z_0 \in \mathcal{J}_R$.

- $m \geq 2$: po prejšnji točki, obstaja $c \in A_{f^m}^*(z_0)$ za katero je

  $$(f^m)'(c) = f'(f^{m-1}(c)) \cdot f'(f^{m-2}(c)) \cdot \dots \cdot f'(c) = 0.$$

  Drugače povedano, vsaj en faktor je ničeln.

□

Posledica 3. *Polinom stopnje* $d \geq 2$ *ima največ* $d - 1$ *privlačnih ciklov in superprivlačno fiksno točko v* $z = \infty$. *Racionalna funkcija stopnje* $d \geq 2$ *pa ima največ* $2d - 2$ *privlačnih ciklov.*

Dokaz: Maj bo p polinom stopnje d. Enačba $p'(z) = 0$ je stopnje $d-1$ in $p(\infty) = \infty$ ter $\left(\frac{1}{p(\frac{1}{z})}\right)'\Big|_{z=0} = 0$. Pri racionalni funkciji BŠS predpostaimo, da kritične točke in kritične vrednosti ne zavzamejo vrednosti ∞. Nato imamo za polinoma p in q stpnje d:

$$\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q^2(z)} = 0.$$

Vodilni člen z^{2d-1} se pokrajša, zato je $2d-2$ ničel. $\square$

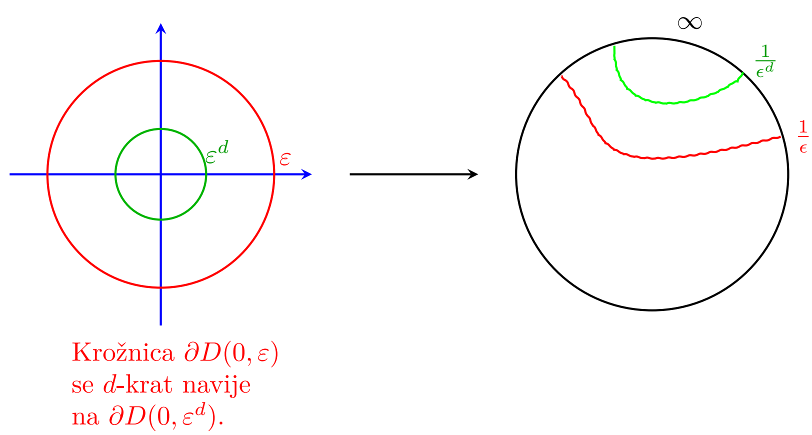
Opomba 8. *Z bolj podrobno analizo se lahko omeji tudi število nevtralnih ciklov, tako da jih je skupaj s privlačnimi največ* $6d-6$.

3 Napolnjena Juliajeva množica

V tem razdelku se omejimo na nelinearne polinome

$$p(z) = a_d z^d + \cdots + a_0, \quad d \geq 2.$$

Vsi taki polinomi imajo v $z = \infty$ superprivlačno točko, njena dinamika pa je konjugirana dinamiki preslikave $z \mapsto z^d$ okoli točke $z = 0$.



Posledica 4. *Okolica* $z = \infty$ *je v* $\mathcal{F}_f$, *Juliajeva množica* $\mathcal{J}_p$ *pa je neprazna in omejena.*

Nepraznost sledi, ker imamo za $d \geq 2$ še vsaj eno fiksno točko in je $\partial A_p(\infty) \neq \emptyset$. Zaradi zgornje lastnosti lahko Juliajevo in Fatoujevo množico definiramo na alternativen način:

- **Napolnjena Juliajeva množica** je

$$\mathcal{K}_p \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \,|\, (p^n(z))_{n\in\mathbb{N}} \text{ je omejena}\}$$

- Juliajeva množica je
$$\mathcal{J}_p = \partial\mathcal{K}_p$$
- Fatoujeva množica je
$$\mathcal{F}_p = \hat{C}/\mathcal{J}_p.$$

Ker je $\infty \in \mathcal{F}_p$ in $A_p(\infty) \subset \mathcal{F}_p$, se ta definiciji ujemata s standardnima.

Posledica 5. *Za polinome stopnje $d \geq 2$ je $\mathcal{J}_p$ vedno neprazna in omejena.*

Dokaz: Neprazna je, ker obstaja vsaj še ena fiksna točka, ki ni $z = \infty$ torej je $\partial A_p(\infty) \neq \emptyset$. Ostalo sledi iz dejstva, da je $A_p \subset \mathcal{F}_p$. □

Ugotovili smo, da za dovolj velike $z \in \mathbb{C}$ orbita pobegne proti ∞. Številom, ki opredeljujejo zadostno velikost pravimo **radij pobega**.

Izrek 8 (Radij pobega)**.** *Naj bo P polinom stopnje $d \geq 2$ naj bo*

$$R \coloneqq \max\left\{\frac{3}{a_d}, \frac{2}{a_d}(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{d-1}|), 1\right\}. \tag{4}$$

Če je $|z| \geq R$, velja
$$\lim_{n\to\infty} |p^n(z)| = \infty. \tag{5}$$

Dokaz: Naj bo $|z| \geq R$. Naredimo oceno:

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0| \\ &= |a_d z^d| \cdot \Bigg|1 + \underbrace{\frac{a_{d-1}}{a_d z} + \cdots + \frac{a_1}{a_d z^{d-1}} + \frac{a_0}{a_d z^d}}_{=:S}\Bigg| \end{aligned}$$

$$|S| \leq \frac{|a_{d-1}|}{|a_d| \cdot |z|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|a_d| \cdot |z|^d} \overset{|z|\geq 1}{\leq} \frac{|a_{d-1}| + \cdots + |a_0|}{|a_d| \cdot |z|} \leq \frac{1}{2}.$$

Na zadnji neenakosti smo uporabili neenakost $|z| \geq \frac{2}{|a_d|}(|a_{d-1}|+\cdots+|a_0|)$ Torej velja:

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |a_d| \cdot |z|^d \cdot |1 + s| \geq |a_d| \cdot |z|^d \cdot (1 - |s|) \geq \\ &\overset{|z|\geq \frac{3}{a_d}}{\geq} |z|^{d-1} \cdot \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}|z| \geq \frac{3}{2}R. \end{aligned}$$

Induktivno ugotovimo:

$$|P^n(z)| \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot R \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

□

Opomba 9. *Ta radij ni optimalen, lahko bi še prilagajali konstanti* 2 *in* 3. *Alternativna verzija pravi npr. da je dober tudi*

$$R = \max\left\{1, \frac{2}{a_d}(|a_0| + |a_{d-1}|), \left(\frac{2\lambda}{|a_d|}\right)^{\frac{1}{d-1}}\right\}$$

za vsak $\lambda > 1$.

Posledica tega izreka je algoritem za približno risanje $\mathcal{K}_p$, ki ima naslednje korake:

- Določi R pri danem p in izberi $N >> 1$.
- Naključno izbiraj točke $z_0 \in \mathbb{D}(0, R)$, če za vse $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ velja, da je $|P^n(z_0)| < R$, jih obarvaj.
- Kar ostane obarvano, je približek za $\mathcal{K}_p$

Dodatno lahko razmišljamo na sledeč način. Točka $z = \infty$ je edina fiksna točka v komponenti $A_p(\infty)$. Torej je poleg $\partial A_p(\infty)$ edina možna limita zaporedja v $A_p(\infty)$. Izberemo $z_0 \in A_p(\infty)/\{\infty\}$ in tvorimo zaporedje $z_n \in P^{-n}(z_0)$ (jemljemo praslike). To zaporedje ne more konvergirati k ∞, saj gre tja zaporedje $P^n(z_0)$. Torej konvergira k $\mathcal{J}_p = \partial A_p(\infty)$. To pa nam da še en možen algoritem za približno risanje $\mathcal{J}_p$, ki mu pravimo **vzvratna iteracija**:

- Določi R šri danem p in izberi $N >> 1$.
- Naključno izbiraj $z_0 \in \partial\mathbb{D}(0, R)$. Nariši množico $P^{-N}(z_0)$.

Primer 13. *Naš modelni primer* $p(z) = z^2$ *in* $R = \max\left\{\frac{1}{|1|}, \frac{2}{|1|} \cdot 0, 1\right\} = 3$.

- *Algoritem* 1*: če* $|z_0| < 3$ *bo za vse* $|z_0| \leq 1$ *tudi* $|p^N(z_0)| \leq 3$. *Zato bodo te točke obarvane. Za* $|z_0| > 1$ *pa bodo "pobegnile" (razen mord tiste, ki so "zelo blizu" kroga in je zanje* N *premajhen)*
- *Algoritem* 2*: obratna situacija. Če začnemo z* $|z_0| = 4$*, dobimo* 2^N *praslik, ki gredo k* $\partial\mathbb{D}$*.*

(dodaj računalniški primer).

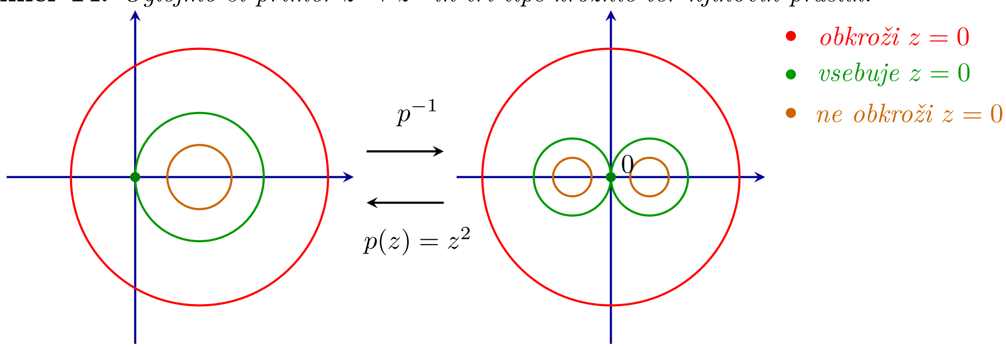
Izrek 9 (Izrek o dihotomiji)**.** *Juliajeva množica nelinearnega polinoma je povezanan natanko tedaj, ko so vse kritične točke v* $\mathcal{K}_p$*.*

Opomba 10. $c \in \mathbb{C}$ *je kritična točka za* p*, če je* $p'(c) = 0$. *To pomeni, da je razvoj okoli* c *enak:*

$$p(z) = a_0 + a_k(z - c)^k + a_{k+1}z^{k+1} + z^d a_d, \quad k \geq 1.$$

To pomeni, da lokalno oz. za vrednosti blizu $z = c$ *funkcija* p *"deluje kot"* $z \mapsto z^k$ *v posebnem, na okolici take točke* p *ni injektivna.*

Primer 14. *Oglejmo si primer $z \mapsto z^2$ in tri tipe krožnic ter njihovih praslik:*

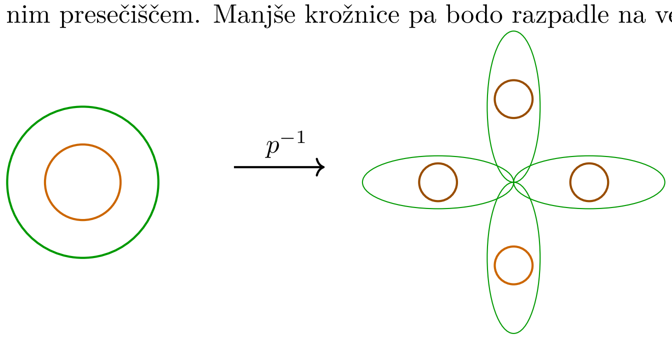


Morala: če krožnica trči v kritično vrednost, je njena praslika topološko ekvivalentna osmici, krožnice v njej pa imajo dve nepovezani komponenti v prasliki.

Dokaz(ideja): Ločimo dva primera:

1. v $A_p(\infty)$ ni kritičnih točk in posledično tudi kritičnih vrednosti ne. Za poljuben $r \geq R$, kjer je R radij pobega, je množica $P^{-n}(\partial\mathbb{D}(0,r))$, $n \in \mathbb{N}$, sklenjena krivulja brez samopresečišč (krožnica v topološkem smislu). V limiti pa dobimo $\mathcal{J}_p$, ki je povezana.

2. Če $A_p(\infty)$ vsebuje kritično točko z_0 in posledično tudi kritično vrednost, potem bo praslika križnice $\partial\mathbb{D}(0,|z_0|)$ unija več topoloških krožnic s skupnim presečiščem. Manjše krožnice pa bodo razpadle na več komponent.

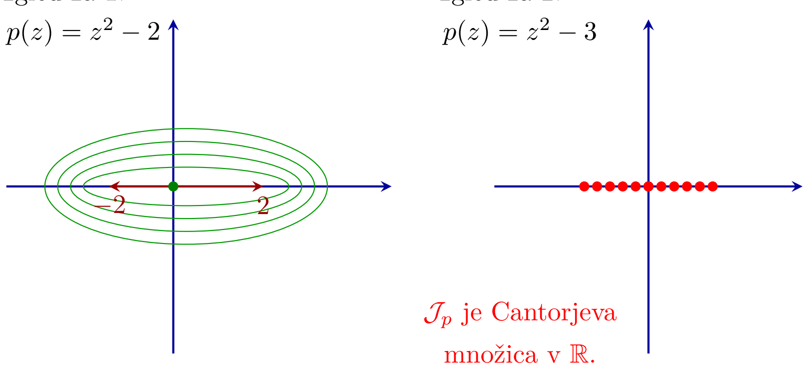


zgled za 1.

$p(z) = z^2 - 2$

zgled za 2.

$p(z) = z^2 - 3$



□

4 Drugi Montelov izrek

V tem razdelku bomo spoznali enega bolj pomembnih izrekov v kompleksni analizi, ki močno opredeli lastnosti množice $\mathcal{J}_R$. Omejili se bomo na racionalne funkcije stopnje $d \geq 2$.

Izrek 10 (Drugi Montelov izrek)**.** *Naj bodo $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ različne in $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Če za družino racionalnih funkcij $\mathcal{F} = \{R : D \subseteq \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \,|\, R \text{ racionalna}\}$ velja $\{a, b, c\} \cap R(D) = \emptyset$ za vsak $R \in \mathcal{F}$, potem je $\mathcal{F}$ normalna na D.*

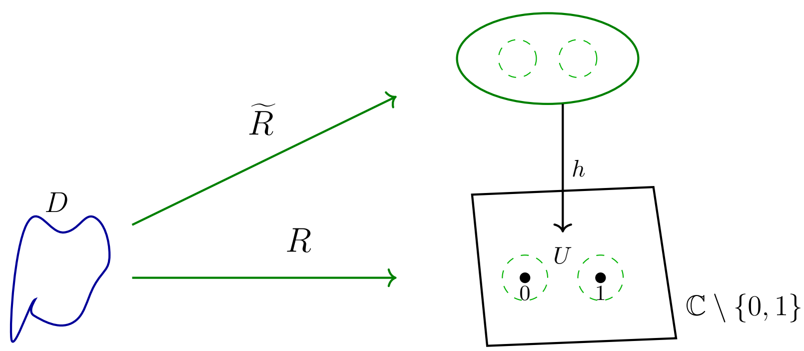
Opomba 11.

- *Izrek velja tudi za družine meromorfnih funckij na $D \subset \mathbb{C}$ tj. za funkcije brez bistvenih singularnosti.*
- *Izrek je pogosto podan za družine holomorfnih funkcij $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$, za $D \subset \mathbb{C}$, takrat je dovolj, da izpusti dve točki $a, b \in \mathbb{C}$, saj za c vzamemo ∞ (elementi $\mathcal{F}$ nimajo polov).*

Dokaz(ideja): Kjučen del dokaza je obstoj surjektivne holomorfne preslikave

$$h : \mathbb{D} \to \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0, 1, \infty\},$$

ki nima kritičnih točk oz. je krovna projekcija tj. zožitev h na vsako komponentno take praslike je biholomorfna. Od tu dalje brez škode za splošnost predpostavimo, da so $a = 0$, $b = 1$ in $c = \infty$. Če to ni res, vse $R \in \mathcal{F}$ konjugiramo z ustrezno Möbiousovo preslikavo. Sedaj je preslikave "dvignemo na krov" $\tilde{R}$. Družina $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{R} \,|\, R \in \mathcal{F}\}$ je omejena in normalna. Od tod sledi normalnost $\mathcal{F}$



□

Obravnavajmo dinamiko $f : D \subseteq \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Drugi Montelov izrek nam porodi številne posledice, še posebaj za Juliajevo množico, kjer nimamo normalnosti.

Posledica 6 (Množica izjemnih točk)**.** *Naj bo R racionalna funkcija, stopnje $d \geq 2$, ter $x \in \mathcal{J}_R$ in $U_z \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ njena okolica. Množica izjemnih točk*

$$E_R(U_z) \coloneqq \hat{\mathbb{C}} \backslash \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(U_z)$$

vsebuje največ 2 točki.

To je direktna posledica izreka. E_R torej lahko izpusti največ 2 točki, scer bi bila normalna.

Primer 15.

- *$p(z) = z^2$. V tem primeru je $E_R(U_z) = \{0, \infty\}$ za vse U_z in $z \in \mathcal{J}_p$. slikica*
- *$p(z) = z^2 - 2$. Sedaj dobimo $E_p(U_z) = \{\infty\}$ za vse U_z in $z \in \mathcal{J}_p$. slikica mikica*

Z nekaj dodatne analize se izkaže, da sta to, do konjunkcije natančno, edina primera z neprazno množico izjemnih točk. Natančneje, za $z \in \mathcal{J}_R$ definiramo

$$E_R(z) \coloneqq \bigcup_{U_z \text{ okolica}} E_R(U_z).$$

Da se pokazati:

- *če je $|E_R(z)| = 2$, je R konjugirana $z \mapsto z^d$, $d \geq 2$.*
- *Če je $|E_R(z)| = 1$, je R konjugirana polinomu stopnje $d \geq 2$, za katere je $E_R(z) = \{\infty\}$ za vse $z \in \mathcal{J}_p$.*

*V obeh primerih je $E_R(z)$ neodvisna od točke $z \in \mathcal{J}_p$, zato je to tudi res v splošnem in lahko definiramo $E_R \coloneqq E_R(z)$ za poljuben $z \in \mathcal{J}_R$. Tej množici pravimo **množica izjemnih točk** in vedno velja $E_R \subset \mathcal{F}_R$.*

Posledica 7 (Juliajeva množica z neprazno notranjostjo)**.** *Naj bo R racionalna stopnje $d \geq 2$. Če ima $\mathcal{J}_R$ neprazno notranjost, je $\mathcal{J}_R = \hat{\mathbb{C}}$.*

Dokaz: Če ima $\mathcal{J}_R$ neprazno notranjost, obstaja odprta množica $U \subset \hat{\mathbb{C}}$, ki ni prazna in je $U \subset \mathcal{J}_R$. Po prejšnji posledici ima:

$$\hat{\mathbb{C}} \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n(U)$$

največ 2 točki. Ker je $\mathcal{J}_R$ naprej in nazaj invarintna, velja $R^n(U) \subset \mathcal{J}_R$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. To pomeni, da je:

$$\hat{\mathbb{C}} \backslash E_R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n(U) \subseteq \mathcal{J}_R.$$

Torej za zaprtje velja:

$$\overline{\hat{\mathbb{C}} \backslash E_R} = \hat{\mathbb{C}} \subseteq \overline{\mathcal{J}_R} = \mathcal{J}_R,$$

kjer prva enakost sledi iz dejstva, da je zaprtje $\hat{\mathbb{C}}$ brez diskretne mnočice, ponovno $\hat{\mathbb{C}}$ in druga enakost iz zaprtosti $\mathcal{J}_R$. $\square$

Opomba 12. *V uvodu smo povedali, da take funkcije dejansko obstajajo (Lattesova preslikava).*

Posledica 8 (Goste praslike)**.** *Naj bo R racionalna stopnje $d \geq 2$. Za vsako $z \in \mathcal{J}_R$ je množica*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^{-n}(\{z\})$$

gosta v $\mathcal{J}_R$.

Dokaz: Za vsako $z \in \mathcal{J}_R$ vemo, da $z \notin E_R \subset \mathcal{F}_R$. Če izberemo okolico $U_z \subset \hat{\mathbb{C}}$ trdimo, da za poljubno drugo točko $z' \notin E_R$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $z' \in \mathbb{R}^n(U_z)$. Če je dodatno $z' \in \mathcal{J}_R$, ima tudi $R^n(U_z)$ neprazen presek z $\mathcal{J}_\mathcal{R}$.
Torej je: $\mathcal{J}_R \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}} R^{-n}(z')$. Če pa izberemo $z' \in \mathcal{J}_R$, pa zaradi invariantnosti velja tudi obratna inkluzija

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^{-n}(z') \subseteq \mathcal{J}_R.$$

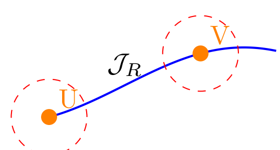
Torej to drži tudi za zaprtje. □

Posledica 9 (Kaotičnost na $\mathcal{J}_R$)**.** *Naj bo R racionalna stopnje $d \geq 2$. Potem je zožitev $R : \mathcal{J}_R \to \mathcal{J}_R$ kaotična v smislu Devaneya.*

Dokaz:

c1) Gostost periodičnih točk: sledi iz $\overline{Rep}(R) = \mathcal{J}_R$ t.j. že zgolj odbojne točke so goste.

c2) Tranzitivnost: naj bosta $u, V \subset \mathcal{J}_R$ odprti glede na relativno topologijo t.j. $\exists U', V' \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ odprti, da je $U = \mathcal{J}_R \cap U'$ in $V = \mathcal{J}_R \cap V'$. Iščemo $z \in U$ in $n \in \mathbb{N}$, da bo $R^n(z) \in V$. Najdemo ga po prejšnji posledici. Vzamemo katerikoli $w \in V$. Zaradi gostosti praslik, obstaja $R^{-n}(\{w\}) \cap U \neq \emptyset$. Torej obstaja tudi $z \in U$, da je $R^n(z) = w \in V$.



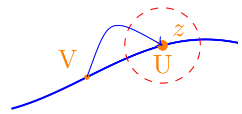
c2) sledi iz $c1$) in $c2$), ker je R zvezna.

□

Posledica 10. *Naj bo R racionalna stopnje $d \geq 2$. Potem za vsako $z \in \mathcal{J}_R$ in vsako okolico U_z obstaja $z' \in \mathcal{J}_R \backslash \{z\} \cap U_z$.*

Dokaz: Naj bo $z \in \mathcal{J}_R$ in U_z poljubna okolica. Ločimo dva primera

i) z ni periodična: izberemo poljuben $w \in R^{-1}(\{z\})$



Zaradi neperiodičnosti imamo:

$$R(w) = z \text{ in } R^n(z) \neq w \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vendar pa po posledici 3 obstaja tudi $z' \in U_z$ in $m \in \mathbb{N}$, da je $R^m(z') = w$. Po konstrukciji smo našli $U \cap \mathcal{J}_R \ni z' \neq z$.

ii) Denimo, da je z periodična in je $R^n(z) = z$ za minimalno periodo, $n \in \mathbb{N}$. Trdimo, da obstaja $w \neq z$, da je $R^n(w) = z$. Če to ne bi bilo res, bi imeli eno samo rešitev enačbe, ki je stopnje d^n t.j. z bi bila superprivlačna in v $\mathcal{F}_R$. Nadalje vemo, da je $R^j(z) \neq w$ za vse $j \in \mathbb{N}$. Res, če bi obstajal tak $0 \leq j < n$, da bi bil w del n-cikla, bi imeli

$$R^j(z) = R^j(R^n(z)) = R^n(R^j(z)) = R^n(w) = z.$$

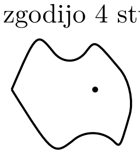
To pa je v protislovju z minimalnostjo n.

□

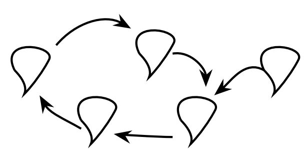
Opomba 13. *Posledica ne kontrira zgledom, kjer je $\mathcal{J}_R$ Cantorjeva množica, saj je ta brez izoliranih točk.*

5 Fatou-Sullivanov izrek

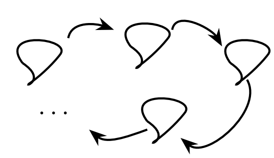
Ugotovili smo, da je $\mathcal{F}_R$ odprta ter naprej in nazaj invariantna. To pomeni, da se njene komponentne za povezanost slikajo ena v drugo. V principu se nam lahko zgodijo 4 stvari:



Fiksna komponenta



Periodična ali predperiodična komponenta



Tavajoča komponenta (wandering domain)

Tavajoče Fatoujeve komponente je leta 1976 odkril Irvine Noel Baker, leta 1985 pa je Denis Sullivan pokazal, da jih racionale funkcije nimajo. To ne bomo dokazali, bomo pa dokazali sledeči izrek

Izrek 11. *Racionalna funkcija stopnje $d \geq 2$ ima $0, 1, 2$ ali ∞ Fatoujevih komponent.*

Lema 1. *Za racionalno R stopnje $d \geq 2$ obstajata največ dve naprej in nazaj invariantni Fatoujevi komponenti.*

Dokaz: Naj bo U Fatoujeva komponenta. Rob naprej in nazaj invariantne komponente je znova invariantna na tak način. Še več, vemo tudi, da je $\partial U \subset \mathcal{J}_{R^N} = \mathcal{J}_R$, ker tam pride do nenormalnosti iteratov. Po posledici 8 pa velja:

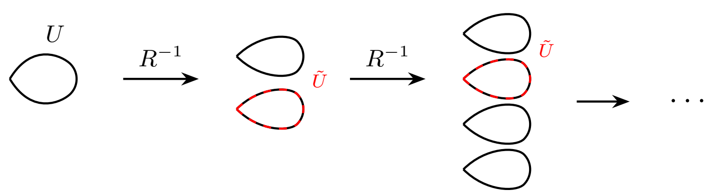
$$\mathcal{J}_{R^N} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} R^{-kN}(z)} \quad \text{za} \quad z \in \partial U.$$

Torej je

$$\mathcal{J}_R = \mathcal{J}_{R^N} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} R^{-kN}(\partial U)} = \partial U \quad \text{(zaradi invariantnosti)}.$$

Naj bo U taka komponenta. Potem ne sme imeti lukenj, saj za komponento $\tilde{U}$ "v luknji" ne velja $\partial \tilde{U} = \mathcal{J}_{R^N}$. Od tod sledi, da imamo lahko največ dve taki komponenti. $\square$

Dokaz: Predpostavimo, da je komponent končno. Trdimo, da so takrat vse periodične ali fiksne t.j. ne more se zgoditi predperiodičen primer.



oz. obstaja $\tilde{U} \subset \mathcal{F}_R$ komponenta in $k < n \in \mathbb{N}$, da je

$$U = R^n(\tilde{U}) = R^k(\tilde{U}).$$

$$R^{n-k}(U) = R^{n-k}(R^k(\tilde{U}) = R^n(\tilde{U})) = U$$

$\Longrightarrow n-k$ je kandidat za periodo (morda je manjša). Sklep je, da obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je

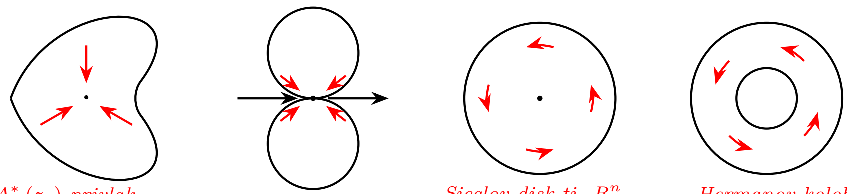
$$R^N(U) = U \quad \text{za vse komponente } U \subset \mathcal{F}_R.$$

Ker je $\mathcal{F}_R = \mathcal{F}_{R^N}$, po prejšnji lemi trditev sledi. $\square$

Opomba 14.

- *Vsi našteti primeri se res zgodijo. Za $p(z) = z^2$ imamo dve komponenti, $p(z) = z^2 - z$ eno, Lattesova preslikava pa nobene, ker je $\mathcal{J}_p = \hat{\mathbb{C}}$.*

- *Sullivan je tudi klasificiral vse možne komponente racionalnih preslikav.*



$A^*_R(z_0)$ privlak za (super)privlačno periodično točko

Privlak za nevtralno točko R^n, kjer $\lambda^m = 1$.

Sieglov disk tj. R^n konjugirana iracionalni rotaciji okoli nevtralne točke z $\lambda^m \neq 1$.

Hermanov kolobar podobno kot Sieglov disk, le da ima luknjo.