

1 Uvod

Kaj so dinamični sistemi? Najbolj enostavno jih lahko opišemo kot: $DS =$ množica možnih stanj + deterministično evlucijsko pravilo. Oziroma drugače povedano, obravnavamo delec v množici možnih stanj, pravilo, pa nam pove, kaj se z njim zgodi v naslednjem trenutku.

Deterministično, v našem kontekstu pomeni, da je naslednji korak odvisen le od trenutnega stanja delca.

V grobem jih glede na tip koraka, ločimo na **diskretne** in **zvezne** sisteme. V splošnem jih lahko obravnavamo na npr. metričnih ali topoloških prostorih, mi pa se bomo omejili na \mathbb{R}^n in \mathbb{C} . Obravnavali bomo

- i) Diferenčne enačbe oz. rekurzivna zaporedja $F : S \rightarrow S$, $x_{n+1} = F(x_n)$, pri različnih začetnih pogojih $x_0 \in S$, kjer je S množica stanja v \mathbb{R}^n ali \mathbb{C} . Temu rečemo diskretna dinamika funkcije oz. preslikave F
- ii) Nelinearni sistemi navadnih diferencialnih enačb, $F : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = F(x)$, $x \in S$. To bo model za zvezne dinamične sisteme v \mathbb{R}^n .

Opomba 1. V obeh primerih govorimo o **avtonomnih sistemih** tj. pravilo ni odvisno od časa. Izkazuje se, da lahko poljuben sistem prevedemo na avtonomen sistem, zato je dovolj obravnavati le te.

$$\dot{x} = F(x, t) \iff \dot{x} = F(x, t) \iff \dot{\tilde{x}} = \tilde{F}(\tilde{x}) \text{ za } \tilde{x} = (x, t), \tilde{F} = (F, 1) \\ \dot{t} = 1$$

tj. če nimamo dimenzijskih omejitev, so avtonomni sistemi najsplošnejši možni, saj lahko čas premaknemo v množico stanj tj. $\tilde{S} = S \times \mathbb{R}$ oz. $\tilde{S} = S \times \mathbb{Z}$.

Primer 1. Imamo podatke:

T ob prihodu: $9C$

T po 1h: $7C$

T jezera: $5C$

Kdaj se je zgodil umor? Fizikalni zakon: telesna temperatura pada sorazmerno z razliko do temperature jezera. Diskretni model:

$$T_{n+1} = T_n - k(T_n - T_j),$$

kjer so:

- $k > 0$ konstanta odvisna le od lasnosti trupla
- T_j temperatura jezera
- $T_n - T_j$ temperaturna razlika

Vstavimo meritve: čas ob prihodu

$$7C = 9C - k(9C - 5C) \\ \implies k = \frac{1}{2}.$$

Sistem, ki opisuje telesno temperaturo, je podano z

$$T_{n+1} = T_n - \frac{1}{2}(T_n - T_j) = \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}T_j.$$

V tem primeru lahko poiščemo eksplicitno rešitev:
Homogeni del:

$$T_{n+1} = \frac{1}{2}T_n \implies T_n = C\left(\frac{1}{2}\right).$$

Partikularna rešitev:

$$T_n^p = T_j = 5C$$

Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} T_n &= C\left(\frac{1}{2}\right)^n + T_j \\ T_0 &= C + T_j \implies C = T_0 - T_j \\ T_n &= (T_0 - T_j) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + T_j \end{aligned}$$

Odgovor:

vemo, da je $T_0 = 37C$ torej imamo

$$\begin{aligned} T_n &= (37 - 5)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 5 = 9 \\ &\implies n = 3. \end{aligned}$$

Umor se je zgodil 3h pred prihodom.

Zvezni model: model je dan z

$$\dot{T} = -k(T - T_j).$$

Rešimo z metodo ločljivih spremenljiv (doma)

$$T = De^{-kt} + T_j$$

Začetni pogoj: $T(0) = T_0 \implies D = T_0 - T_j$ in je rešitev

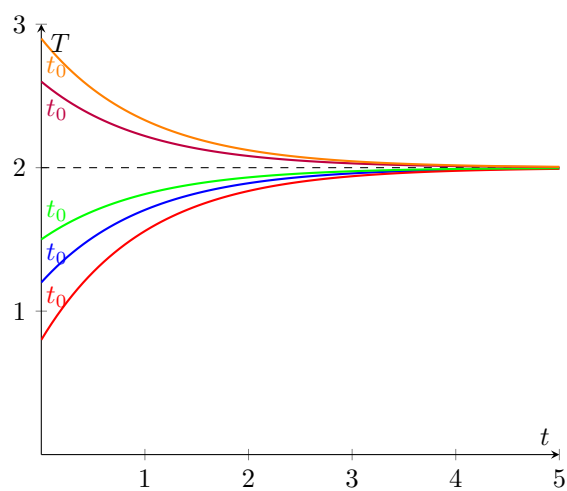
$$T(t) = (T_0 - T_j)e^{-kt} + T_j$$

Čas prihoda: $T(n) = 9C$,

Čas po eni uri: $T(n+1) = 7C$.

Rešimo sistem enačb in dobimo $n = 3$. Dobimo enak sklep kot prej, dinamični sistem, ki opisuje temperaturo, pa je

$$\dot{T} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(T - T_j) = -\ln 2(T - T_j)$$



V tem primeru, je $T \equiv 5C$ neka fiksna točka oz. ravnovesje, "pritegne" ostale rešitve. Tekom predmeta bomo spoznali bolj zapletene primere.

Dinamika realnih funkcij

Jest

March 6, 2025

2 Osnovni pojmi

Za začetek se bomo omejili na funkcije $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I$, kjer je I interval. Obravnavali bomo zaporedje $x_{n+1} = f(x_n)$ pri različnih pogojih $x_0 \in I$. Za začetek uvedemo oznako:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n \text{ kompizutmov}}$$

Definicija 1. *Orbita točke* x_0 pri funkciji f je podana s členi zaporedja:

$$O_f(x_0) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{f^n(x_0) \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Orbita predstavlja dinamični razvoj x_0 pod f , množici vseh orbit za $x_0 \in I$ pa rečemo **dinamika funkcije** f .

Primer 2. $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ oz. $f(x) = x^2 + 1$

$$O_f(1) = \{1, 2, 5, 26, \dots\}$$

$$O_f(-2) = \{-2, 5, 26, \dots\}$$

orbite lahko pri funkcijah ene spremenljivke vizualiziramo z **pajčevinastim diagramom**. slika

Postopek:

- izbereš x_0 na osi x ,
- greš navpično na $f(x)$,
- greš vodoravno do $y = x$,
- ponavljaš zadnja dva koraka.

Primer 3. *Sherlock:* $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{5}{2}$ oz. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Slika

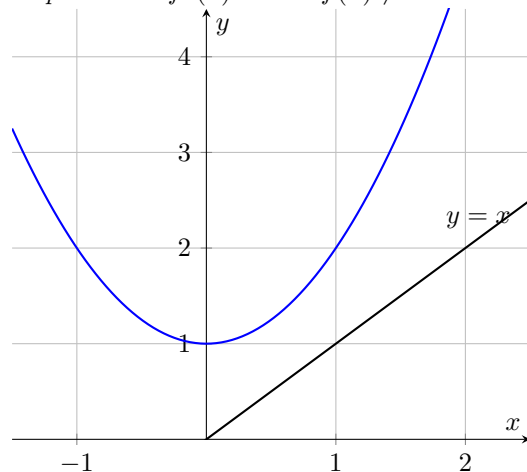
$O_f(5) = \{5, 5, \dots\}$. Za ostale orbite velja: $x_n \rightarrow 5$.

Definicija 2. Točka $x_0 \in \mathbb{R}$ je **periodična s periodo** $n \in \mathbb{N}$ za f , če zanjo velja $f^n(x_0) = x_0$ in je n najmanjše naravno število s to lastnostjo. Če je $n = 1$, taki točki pravimo **fiksna točka**.

Primer 4. $f(x) = -x^3$.

Fiksne točke: $f(x) = x \iff -x^3 = x \iff x = 0$.

Točke periode 2: $f^2(x) = x$ in $f(x) \neq x \iff x^9 = x$ in $-x^3 \neq x \iff x = \pm 1$.



Definicija 3. Orbits n -periodične točke rečemo n -cikel.

Definicija 4. Naj bo $x_0 \in I$ fiksna točka za $f : I \rightarrow I$.

- x_0 je **šibko privlačna**, če obstaja njena okolica $U \subseteq I$, da za vsak $y_0 \in U$ velja $y_n = f^n(y_0) \rightarrow x_0$.
- x_0 je **šibko odbojna**, če obstaja njena okolica $U \subseteq I$, da za vsak $y_0 \in U / \{x_0\}$ obstaja $m \in \mathbb{N}$, da je $f^m(x_0) \notin U$.

Okolici iz prve točke pravimo **območje privlaka** za x_0 , največjemu intervalu znotraj U , ki vsebuje x_0 pa rečemo **neposredno območje privlaka** za x_0 .

Če je $f \in C^1(I)$, dodamo pojme:

- x_0 je **privlačna**, če $|f'(x_0)| < 1$.
- x_0 je **odbojna**, če $|f'(x_0)| > 1$.
- x_0 je **nevtralna**, če $|f'(x_0)| = 1$.

Primer 5. Sherlock: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

$x_0 = 5$ je šibko privlačna točka za $U = \mathbb{R}$.

$f'(5) = \frac{1}{2}$ je tudi privlačna.

Primer 6. Slikce 3

V vseh treh primerih pa je $|f'(0)| = 1$ tj. gre za nevtralne točke.

Izrek 1. Naj bo $f \in C^1(I)$ in $x_0 \in I$ fiksna. Potem velja:

- Če je $|f'(x_0)| < 1$, je x_0 šibko privlačna.
- Če je $|f'(x_0)| > 1$, je x_0 šibko odbojna.

iii) Če je $|f'(x_0)| = 1$, je x_0 nevtralna, pogledamo višje odvode za več informacij.

Dokaz: i): Recimo, da je $|f'(x_0)| < \lambda < 1$. Potem obstaja $\delta > 0$, da je $|f'(x)| < \lambda$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zaradi zveznosti odvoda. Uporabimo Lagrangeov izrek

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{za } c \in (x, x_0).$$

Ker je x_0 fiksna točka

$$f'(c) = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}.$$

Naredimo oceno

$$|f(x) - x_0| = |f'(c)| \cdot |x - x_0| < \lambda |x - x_0|.$$

Zato za $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, velja da je tudi $f(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Induktivno sklepamo

$$|f(f(x)) - f(x_0)| = |f^2(x) - x_0| < \lambda^2 |x - x_0|$$

oz.

$$|f^n(x) - x_0| < \lambda^n |x - x_0|.$$

Ker je $\lambda \in (0, 1)$, gre $\lambda^n \rightarrow 0$ za $n \rightarrow \infty$ torej $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$.

ii): Dokaz je podoben, le da $\lambda > 1$ tj. za nek velik $m \in \mathbb{N}$, bo $\lambda^m |x - x_0|$ šel iz okolice.

□

Definicija 5. Fiksna točka $x_0 \in I$ je **stabilna** za $f : I \rightarrow I$, če za vsako njeno okolico $U \subset I$ obstaja manjša okolica $U' \subset U$, da za vsak $x \in U'$ velja $O_f(x) \subset U$.

Primer 7. Take so vse privlačne fiksne točke. Pa tudi take, katerih bližnje orbite ne konvergirajo nujno k x_0 , a se tudi ne oddaljujejo od nje npr.

slikca

Ta funkcija ima fiksno točko v $\frac{1}{2}$ in 2-cikle v vseh ostalih točkah. Ta točka ni privlačna, saj je $f'(\frac{1}{2}) = -1$, je nevtralna in ni šibko privlačna, je pa stabilna. Za poljubno U izberemo simetrični interval okoli x_0 z lastnostjo $U' = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset U$. Za $x \in U'$ velja $O_f(x) \subset U' \subset U$.

Opomba 2.

- V nekaterih virih se stabilne točke, ki so tudi šibko privlačne imenuje **asimptotično stabilna**. tj. imamo pogoj $|f^n(x)| \rightarrow x_0$.
- Niso nujno vse šibko privlačne točke tudi stabilne.

- Če je f zvezna in gre $|f^n(x)| \rightarrow x_0$, je x_0 nujno fiksna točka. Res, velja tudi $f^{n+1}(x) \rightarrow f(x_0)$ in zaradi enoličnosti limite

$$x_0 = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x)$$

Definicija 6. Sedaj lahko to klasifikacijo razširimo na n -periodične točke, če nanje pogledamo kot na fiksne točke funkcije f^n . Pripadajoči n -cikel je:

- Šibko privlačen/odbojen, če je vsak njegov element tak za vsak f^n .
- Privlačno/odbojen/nevtralen, če je vsak njegov element tak za f^n .

Da bosta ti definiciji dobri, v prvi točki potrebujemo zveznost, v drugi pa zvezno odvedljivost funkcije f . To združi naslednji izrek.

Izrek 2. Če je $f \in C^1(I)$, so vse periodične točke n -cikla "istega tipa".

Dokaz: Naj bo $\{x_1, \dots, x_n\}$ n -cikel za f . Recimo, da je x_n šibko privlačna za f^n . Torej obstaja njena okolica $U_n \subset I$, da za $x \in U_n$ velja $f^{nk}(x) \rightarrow x_n$ za $k \rightarrow \infty$. Radi bi videli, da analogne okolice obstajajo za točke x_1, \dots, x_{n-1} . Sedaj definiramo U_{n-j} za $1 \leq j \leq n-1$, kot povezano komponento praslike $f^{-j}(U)$, ki vsenuje x_{n-j} . Vemo, da za vsak $x \in U_{n-j}$ po konstrukciji velja:

$$f^{nk+j}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_n.$$

Sedaj na to zvezo dodamo zvezno funkcijo f^{n-j}

$$\begin{aligned} f^n - j(f^{nk+j}(x)) &\rightarrow f^{n-j}(x_n) \\ f^{n(k+1)}(x) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_{n-j} \end{aligned}$$

vse točke so šibko privlačne, kar smo želeli dokazati. Dokaz za šibko odbojnost izpustimo.

Poglejmo si še privlačnosti/odbojnost /nevtralnost

$$\begin{aligned} |(f^n)'(x_n)| &= |(f \circ f \circ \dots \circ f)'(x_n)| = \\ &= |f'(f^{n-1}(x_n)) \cdot f'(f^{n-2}(x_n)) \cdot \dots \cdot f'(x_n)| = \\ &= |f'(x_{n-1})| \cdot |f'(x_{n-2})| \cdot \dots \cdot |f'(x_1)| \cdot |f'(x_0)| = |(f^n)'(x_j)|. \end{aligned}$$

za vsak x_j dobimo isti rezultat. □

Opomba 3. Brez zveznosti f del, ki govori o šibki privlačnosti/odbojnosti ne drži. slikcača.

Primer 8. Dano imamo $f(x) = x^2 - 1$. Opazimo $f(0) = -1$ in $f(-1) = 0$ tj. imamo 2-cikel. Poglejmo, katerega tipa je:

$$(f^2)'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0) = f'(-1) \cdot f'(0) = 0.$$

Torej gre za privlačen 2-cikel. Oglejmo si danimo okoli te točke.

Slika te mika

Vidimo, da bližnje točke nimajo orbit, ki bi bile "skoraj periodične". Torej privlačnost cikla ne pomeni, da privlači orbite. Pomeni, le, da je privlačen za f^2 . Res imamo

Slik slak

-1 in 0 sta privlačni točki f^2 .

Opomba 4. Zanimiva je tudi točka $x = 1$, za katere velja $f(x) = 0$ tj. po prvi iteraciji postane ciklična. Takim točkam pravimo **predperiodična** (preperiodic /eventually periodic).

Definicija 7. $\exists k \in \mathbb{N}$: $f^{n+k}(x) = f^k(x)$ za najmanjši tak $n \in \mathbb{N}$.

2.1 Kaos

Do sedaj smo spoznali le dinamične sisteme z razmeroma predvidljivim dogajanjem. Konkretno, razen v kakšni posebni točki, so imele orbite bližnjih točk "enak dinamičen razvoj". Sedaj bomo spoznali sisteme, ki so nasprotje tega in jim pravimo kaotični.

Definicija 8. Dinamični sistem podan z $f : I \rightarrow I$ je **kaotičen**, če zanj veljajo

(c1) Množica periodičnih točk je gosta v I .

(c2) Tranzitivnost: za poljubna odprta intervala $U_1, U_2 \subset I$, obstajata $x_0 \in U_1$ in $n \in \mathbb{N}$, da je $f^n(x_0) \in U_2$.

(c3) Občutljivostna konstanta: obstaja $\beta > 0$, da v poljubni okolici U poljubne točke x_0 najdemo tudi točko $y_0 \in U$ za katero je $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$ za nek $n \in \mathbb{N}$.

Opomba 5.

- Točka (c3) je zanimiva pri izbiri majhnih okolici U , saj pomeni, da lahko poljubno blizu najdeš točko s čisto drugačno dinamiko. Temu se reče učinek metulja (butterfly effect) oz. da je zaporedje oz. orbita občutljivo na začetne podatke.
- Izkazuje se, da je (c2) ekvivalentna obstoju goste orbite, če je f zvezna.
- Za kompaktni $I \subset \mathbb{R}$ se izkaže, da (c1) in (c2) implicirata (c3).
- Če je f zvezna iz (c1) in (c2) vedno sledi (c3).

Opis kaosa: kaotični sistem je tak, v katerem s približnim začetkom niti približno nemoreš napovedati konca.

Primer 9. Podvojitvena preslikava (doubling map).

$$D : [0, 1) \rightarrow [0, 1) \quad (1)$$

$$D(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor \quad (2)$$

Grafek funkcija (cobweb v $\frac{2}{3}$)

Veljajo:

$D(0) = 0$ je fiksna točka

$D(\frac{1}{2}) = 0$ predperiodična

$D(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$

$D(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ (vijugst oklepaj za zadna dva) 2-cikel.

Za dokaz kaotičnosti uporabimo dvojiški decimalni zapis.

$$x \in [0, 1) : x = 0.x_1x_2\dots_{(2)}, \quad x_j \in \{0, 1\} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{2^j}.$$

Če prepovemo neskočen niz enic, je zapis enoličen. Kaj naredi naša preslikava?

$$D(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor = x_1.x_2x_3\dots_{(2)} - x_1_{(2)} = 0.x_2x_3\dots_{(2)}.$$

Temu rečemo tudi operator zamika (shift map), ki "pozabi" prvo decimalko.

(c1) Pokažimo, da ima poljubno blizu točke $x \in [0, 1)$ tudi periodično točko \tilde{x} .

$$x = 0.x_1x_2\dots x_Nx_{N+1}\dots_{(2)} \quad X \gg 1$$

$$x = 0.x_1x_2\dots x_Nx_Nx_1x_2\dots x_n\dots_{(2)} = 0.x_1x_2\dots x_{N(2)} -$$

Očitno je \tilde{x} periodičen, saj je $f^N(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Po drugo strani pa je $|x - \tilde{x}| < \frac{1}{2^N}$ tj. poljubno majhna.

ii) Pokažimo, da obstaja gosta orbita. Naj bo $x \in [0, 1]$ število z razvojem

$$x = 0.0100011011000001010\dots$$

tj. število vsebuje vse končne zapise v dvojiškem sistemu. Posledično je njegova orbita gosta. Res, za poljuben $\tilde{x} \in [0, 1]$,

$$\tilde{x} = 0.\underbrace{\tilde{x}_1\tilde{x}_2\dots\tilde{x}_N}_{x_{\tilde{N}+1}}x_{\tilde{N}+1}$$

obstaja $m \in \mathbb{N} : f^m(x) = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\dots\tilde{x}_N\dots$ tj. $|f^m(x) - \tilde{x}| < \frac{1}{2^N}$.

iii) Želimo videti, da poljubno blizu $x \in [0, 1]$ obstaja $\tilde{x} \in [0, 1]$, da je za nek $m \in \mathbb{N} : |f^m(x) - f^m(\tilde{x})| \geq \frac{1}{2}$. Za

$$x = 0.x_1x_2\dots x_Nx_{N+1}\dots_{(2)}$$

vzamemo

$$\tilde{x} = 0.\tilde{x}_1\tilde{x}_2\dots x_Nx_{\tilde{N}+1}\dots_{(2)}$$

tj. velja $x_{N+1} + x_{\tilde{N}+1} = 1$ Potem je

$$|f^N(x) - f^N(\tilde{x})| = \frac{1}{2}.$$

Dobimo števili, ki sta $\frac{1}{2^N}$ blizu in po n -iteracijah $\frac{1}{2}$ narazen.

Primer 10 (Šotorasta preslikava (tent map)).

$$T(x) = 2 \min\{x, 1 - x\} = \dots$$

slika T

Drugi iterat: $T^2(x) = \min\{T(x), 1 - T(x)\}$ slika $\text{fon}(T^2)$

Podobno dobimo za T^3 in višje iterate

slika še za T^3 .

c1) Je očitno izpolnjen, saj ima periodično točko na vsakem intervalu oblike

$$I_{j,n} = \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right], \quad j = \{1, 2, \dots, 2^n\}.$$

Perioda teh točk je n ali manjša.

ii) Sledi, ker je $f^n(I_{j,n}) = [0, 1]$, tj. če izbereš $I_{j,n} \subset U_1$, bo $f^0(I_{j,n}) \cap U_2 \neq \emptyset$ za poljubni odprti $U_1, U_2 \subset [0, 1]$.

c3) Samo ideja: fon

2.2 Konjugacije in semi-konjugacije

Definicija 9. Pravimo, da sta $f : I \rightarrow I$ in $g : J \rightarrow J$ **konjugirani**, če obstaja homeomorfizem $h : I \rightarrow J$, da $\forall x \in I: h \circ f(x) = g \circ h(x)$

Slika komutirajočega diagrama
double slika fon

Ker pa je h tudi obrljiva in h^{-1} zvezna, se zvezno trasira tudi celotna dinamika tj.

$$\begin{aligned} f &= h^{-1} \circ g \circ h \\ f^n &= (h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ \dots \circ (h^{-1} \circ g \circ h) = \\ &= h^{-1} \circ g^n \circ h \end{aligned}$$

Primer 11.

$$g(x) = x^2 \text{ na } [0, \infty)$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \text{ na } [1, \infty)$$

$$h(x) = x - 1 \text{ kot preslikava } h : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty).$$

Preverimo pogoj iz definicije

$$\begin{aligned} h \circ f(x) &= h(x^2 - 2x + 2) = x^2 - 2x + 2 - 1 = x^2 - 2x - 1 = \\ &= (x - 1)^2 = g(x - 1) = g \circ h(x) \end{aligned}$$

Slikce pikce obeh (fon).

Opomba 6. • V splošnem velja, da je vsaka kvadratna funkcija $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$ konjugirana $p_c(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

- Vidimo, da se je v primeru ohranil tudi karakter fiksni točk. To ne preseneča oz. še več, če sta h in h^{-1} tudi odvedljivi, velja:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (h^{-1} \circ g \circ h)(x) = (h^{-1})' \cdot (g \circ h(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) = \\ &= \frac{1}{h'(h^{-1} \circ \underbrace{g \circ h}_{\text{ker je } h \text{ fiksna točka za } g})(x))} \circ g'(h(x)) \cdot h'(x) = g'(h(x)) \end{aligned}$$

torej se tip odvedljive točke ohrani

Definicija 10. Pravimo, da je $g : J \rightarrow J$ **semi-konjugirana** funkciji $f : I \rightarrow I$, če obstaja zvezna surjektivna preslikava $h : I \rightarrow J$, za katero velja:

$$i) \forall x \in I: h \circ f(x) = g \circ h(x)$$

$$ii) \exists m \in \mathbb{N}. \forall x \in J \text{ ima } h^{-1}(x) \text{ največ } m \text{ elementov.}$$

Opomba 7. Definicija semi-konjugacije lahko varira glede na literaturo.

Slikaaaa(fon):

Znova velja

$$h(O_f(x)) = O_g(h(x))$$

vendar pa ta relacija ni več bijektivna.

Primer 12.

$$\begin{aligned} h : [-1, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ h(x) &= x^2 \end{aligned}$$

(slika) 2 to 1 preslikava.

$$\begin{aligned} h : [-1, 1] &\rightarrow [-1, 1] \\ h(x) &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

$$g \circ f(x) = h(\sqrt{1 - x^2}) = (\sqrt{1 - x^2})^2 = 1 - x^2 = g(x^2) = g \circ h(x).$$

Sebi-konjugacija ne ohranja dinamike popolno. V našem primeru je sklopila predperiodične in periodične točke.

Trditev 1. Naj bo g semi-konjugirana f preko $h : I \rightarrow J$. Če je $x_0 \in I$ periodična za f , je tudi $h(x_0)$ periodična za g , a se perioda ne ohranja nujno.

Dokaz: Naj bo $f^n(x_0) = x_0$ in $n \in \mathbb{N}$ najmanjši tak. Potem velja

$$\begin{aligned} g^n(h(x_0)) &= g \circ \dots \circ g \circ h(x_0) = \\ &= g \circ \dots \circ g \circ h \circ f(x_0) = \\ &= \dots = h \circ f^n(x_0) = h(x_0) \end{aligned}$$

tj. g je periodična, nemoremo pa zagotoviti minimalnosti n . □

Primer 13. *sej veš kje*

Izrek 3. *Naj bo g semi-konjugirana f s $h : I \rightarrow J$ in naj bosta $I, J \subset \mathbb{R}$ kompaktna intervala in naj bo f kaotičen. Potem je g kaotična, če je izpolnjen eden od treh pogojev:*

- i) h je injektivna*
- ii) g je zvezna*
- iii) f je zvezna*

Dokaz: c1) Sledi iz trditve. Če vzamemo poljubno $U \subset J$ odprto, je tudi $h^{-1}(U) \subset I$ odprta in vsebuje periodično točko x_0 . Torej je $h(x_0)$ periodična in v U .

Slika da te mika

c2) Na enak način dobimo tudi gsto orbito.

c3) Poglejmo si preslikavo $d : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$, podano s predpisom $d(x, y) = |h(x) - h(y)|$. Gre za zvezno preslikavo iz kompakta v \mathbb{R} . Poglejmo njeno zožitev na množico

$$\Delta_\beta = \{(x, y) \in I \times I \mid |x - y| \geq \beta\}$$

super slika

Obstaja $\beta' > 0$, da iz pogoja $|f^n(x) - f^n(y)| > \beta$ sledi $|g^n(h(x)) - g^n(h(y))| > \beta'$. To je občutljivostna konstanta za g .

□

Opomba 8. *Zakaj je pomembna kompaktnost intervalov I in J ? Poglejmo si preslikavi*

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \text{ na } (0, \infty) \\ g(x) &= x + \ln 2 \text{ na } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Očitno je, da je f izpolnjuje (c3), saj sta za velik n števili $2^n x$ in $2^n y$ daleč narazen, če $x \neq y$. Po drugi strani, je tudi očitno, da g ne izpolnjuje (c3), saj je razlika

$$|g^n(x) - g^n(y)| = |x - y|$$

konstantna za vse $n \in \mathbb{N}$. Sta pa useno f in g konjugirani preko $h(x) = \ln(x)$.

$$h \circ g \circ h^{-1} \dots$$

.

Primer 14.

$$\begin{aligned} D(x) &= 2x - \lfloor 2x \rfloor \\ T(x) &= 2 \min\{x, 1 - x\} \end{aligned}$$

slika obeh + se kompozitum. $T(D(x)) = 2 \min\{D(x), 1 - D(x)\} = T(T(x))$.

Primer 15. Imamo preslikavo

$$h : [0, 1) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$$

$$h(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

slikica intervala v kroznico.

Zanima nas, kaj se zgodi z doubling map, če uporabimo to konjugacijo oz. trdimo, da bo konjugirana preslikava

$$h : S^1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$$

$$(\cos(t), \sin(t)) \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$$

tj. preslikava ki podvoji argument. V kompleksni notaciji bi jo zapisali z $e^{it} \mapsto e^{2it}$ ali $z \mapsto z^2$.

Spet hude slike s fona

Primer 16. Pokažimo, da je $q_{-2}(x) = x^2 - 2$ kaotična. Gledamo interval, ki ga nese vase

coobweb za balo

Poiščemo semi-konjugacijo med njo in f iz prejšnjega primera. Preslikava, ki jo porodi je

$$h : S^1 \rightarrow [-2, 2]$$

$$(\cos t, \sin t) \mapsto 2 \cos t \text{ oz.}$$

$$e^{it} \mapsto 2\Re(e^{it})$$

spet mini slike :(

Ta preslikava ima v vsaki točki $y \in [-2, 2]$ največ 2 prasliki, je zvezna in surjektivna. Preverimo, da drži:

$$h \circ f(\cos t, \sin t) = q_{-2} \circ h(\cos t, \sin t).$$

Sklep: q_{-2} je semi-konjugirana tudi D . Direktna preslikava bi bila

$$h(x) = 2 \cos(2\pi x).$$

Ker je q_{-2} zvezna, po prejšnjem izreku je tudi kaotična.

2.3 Bifurkacije

Za motivacijo si oglejmo enoparametrično družino šotorskih preslikav za $c \in [0, 2]$:

$$T_c(x) = c \cdot \min\{x, 1 - x\} = \frac{c}{2}T(x).$$

Vse te preslikave interval $[0, 1]$ slikajo vase, dinamike pa se za različne vrednosti malce razlikujejo

- če je $c < 1$:
wooo slika(kdo bi si mislu)
 x_0 je edina periodična točka, gre pa za privlačno fiksno točko, saj je $T'_c(0) = c < 1$.
- če je $c = 1$:
quess whos back
imamo dve fiksni točki, obe sta odbojni, saj je odvod v njih $-c$.

Opazka: pri vrednosti $c = 1$ se je veliko fiksni točk "pojavi", nato pa so izginile, dobili pa smo tudi eno novo fiksno točko pri $x = \frac{1}{2}$, ki se je nato zvezno premaknila v $x = \frac{c}{1+c}$. Pri tem prihodu smo iz ene privlačne fiksne točke dobili dve odbojni.

Poglejmo si kaj se dogaja z 2-cikli

$$T_c^2(x) = c \cdot \min\{T_c(x), 1 - T_c(x)\}$$

- $c < 1$: sej veššš...
- $c = 1$: sej vešš spet

Točkam, pri katerih se zgodi "kvalitativna sprememba" dinamike, pravimo bifurkacije.

Mi bomo bifurkacije opazovali na družini zveznih funkcij $f_c : I \rightarrow I \subset \mathbb{R}$, ki bodo gladko odvisne od parametra $c \in J \subset \mathbb{R}$. To pomeni, da za funkcijo $F(x, c) := f_c(x)$ obstajajo parcialni odvodi $\frac{\partial^k}{\partial c^k} F(x, c)$ in so zvezni, za $k \in \mathbb{N}_0$. Na primeru $T_c(x) = \frac{c}{2}T(x)$ je taka, čeprav ni odvedljiva po x v $x = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial c} T_c(x) &= \frac{1}{2} T(x) \\ \frac{\partial^k}{\partial c^k} T_c(x) &= 0, \quad k \geq 2.\end{aligned}$$

Pri motivaciji smo opazili različne tipe bifurkacij:

- Fiksna točka se je pojavila in izginila (npr. $x = \frac{1}{4}$ pri $c = 1$).
- Fiksna točka $x = 0$ je zamenjala karakter iz privlačne v nevtralno in nato v odbojno pri $c = 1$.
- Iz fiksne točke $x = \frac{1}{2}$, ki se pojavi pri $c = 1$, smo dobili fiksno točko drugega tipa in 2-cikel za $c > 1$.

Ključna opazka je, da so se spremembe zgodile, ko je odvod v fiksni točki 1 ali pa ne obstaja.

Izrek 4. Naj bo $f_c : I \rightarrow I$ družina zvezno odvedljivih funkcij, ki so gladko odvisne od parametra $c \in J$. Denimo, da za $x_0 \in I$ velja $f_{c_0}(x_0) = x_0$ in $f'_{c_0}(x_0) \neq 1$. Potem obstajata okolica $I' \subset I$ in $J' \subset J$, ter preslikava $p : J' \rightarrow I'$, da je $f_c(p(c)) = p(c)$, za katero je $p(c)$ edina fiksna točka na I' pri $c \in J'$.

Dokaz: Uporabimo izrek o implicitni preslikavi za

$$F(x, c) = f_c(x) - x.$$

Po predpostavki je:

$$F(x_0, c_0) = 0 \text{ in } \frac{\partial}{\partial x} F(x_0, c_0) = f'_{c_0}(x_0) - 1 \neq 0.$$

Torej lahko na majhni okolici $c_0 \in J$ izrazimo $x = p(c)$, ter velja $F(p(c), c) = 0$ oz. $f_c(p(c)) = p(c)$. \square

Opomba 9. Izrek podaja le potreben, ne pa tudi zadosten pogoj.

Primer 17 (Tangentna bifurkacija). *Bifurkacija, v katerih iz neutralne točke, ki zadošča $f'_{c_0}(x_0) = 1$, dobimo dve fiksni točki, ki jih prej ni bilo. Ena je privlačna, druga odbojna, zato se tudi imenuje saddle-node bifurcation. klasika*