1 Uvod

Kaj so dinamični sistemi? Najbolj enostavno jih lahko opišemo kot:

Drugače povedano, obravnavamo delec v množici možnih stanj, pravilo, pa nam pove, kaj se z njim zgodi v naslednjem trenutku.
Deterministično, v našem kontekstu pomeni, da je naslednji korak odvisen le od trenutnega stanja delca.
V grobem jih glede na tip koraka, ločimo na **diskretne** in **zvezne** sisteme. V splošnem jih lahko obravnavamo na npr. metričnih ali topoloških prostorih, mi pa se bomo omejili na $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}$. Obravnavali bomo

i) Diferenčne oz.rekurzivna enačbe $x_{n+1} = F(x_n)$, za $F : S \to S$ in pri različnih začetnih pogojih $x_0 \in S$, kjer je S množica stanj v $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{C}$. Temu rečemo diskretna dinamika funkcije oz. preslikave F

ii) Nelinearni sistemi navadnih diferencilnih enačb, $F : S \subseteq \mathbb{R}^n \to S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = F(x)$, $x \in S$. To bo model za zvezne dinamične sisteme v $\mathbb{R}^n$.

Opomba 1. *V obeh primer govorimo o **autonomnih sistemih** tj. pravilo ni odvisno od časa. Pokažimo, da lahko poljuben sistem prevedemo na avtonomen sistem, zato je dovolj obravnavati le te.*

$$\dot{x} = F(x,t) \iff \begin{matrix} \dot{x} = F(x,t) \\ \dot{t} = 1 \end{matrix} \iff \dot{\tilde{x}} = \tilde{F}(\tilde{x}) \text{ za } \tilde{x} = (x,t) \text{ in } \tilde{F} = (F,1)$$

$$x_{n+1} = F(x_n, n) \iff \begin{matrix} x_{n+1} = F(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + 1 \end{matrix} \iff \tilde{x}_{n+1} = \tilde{F}(x_n) \text{ za } \tilde{x} = (x,y)$$

tj. če nimamo dimenzijskih omejitev, so avtonomni sistemi najsplošnejši možni, saj lahko čas premaknemo v množico stanj tj. $\tilde{S} = S \times \mathbb{R}$ *oz.* $\tilde{S} = S \times \mathbb{Z}$.

Primer 1. *Zgodil se je umor in imamo naslednje podatke:*

- *Temperatur T trupla ob prihodu:* $T(0) = 9°C$
- *Temperatura T po $1h$:* $T(1) = 7°C$
- *Temperatura jezera T_j:* $T_j = 5°C$

Kdaj se je zgodil umor?
Fizikalni zakon: telesna temperatura pada sorazmerno z razliko do temperature jezera.
Diskretni model:

$$T_{n+1} = T_n - k(T_n - T_j),$$

kjer sta:

- $k > 0$ *konstanta odvisna le od lasnosti trupla*
- $T_n - T_j$ *temperaturna razlika*

Vstavimo meritve: čas ob prihodu

$$7C = 9C - k(9C - 5C)$$
$$\Longrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Sistem, ki opisuje telesno temperaturo, je podano z

$$T_{n+1} = T_n - \frac{1}{2}(T_n - T_j) = \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}T_j.$$

V tem primeru lahko poiščemo ekplicitno rešitev:
Homogeni del:

$$T_{n+1} = \frac{1}{2}T_n \Longrightarrow T_n = C\Big(\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Partikularna rešitev:

$$T_n^p = T_j = 5C$$

Splošna rešitev:

$$T_n = C\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + T_j$$
$$T_0 = C + T_j \Longrightarrow C = T_0 - T_j$$
$$T_n = (T_0 - T_j) \cdot \Big(\frac{1}{2}\Big)^n + T_j$$

Odgovor:
vemo, da je $T_0 = 37C$ *torej imamo*

$$T_n = (37 - 5)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + 5 = 9$$
$$\Longrightarrow n = 3.$$

Umor se je zgodil $3h$ *pred prihodom.*
Zvezni model: model je dan z

$$\dot{T} = -k(T - T_j).$$

Rešimo z metodo ločljivih spremenljiv

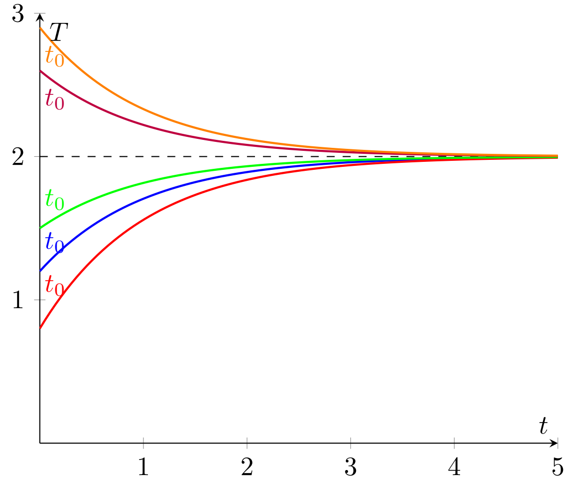
$$T = De^{-kt} + T_j$$

Začetni pogoj: $T(0) = T_0 \implies D = T_0 - T_j$ *in je rešitev*

$$T(t) = (T_0 - T_j)e^{-kt} + T_j$$

Čas prihoda: $T(n) = 9C$,
Čas po eni uri: $T(n+1) = 7C$.
Rešimo sistem enačb in dobimo $n = 3$. *Dobimo enak sklep kot prej, dinamični sistem, ki opisuje temperaturo, pa je*

$$\dot{T} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)(T - T_j) = -\ln 2(T - T_j)$$



V tem primeru, je $T \equiv 5C$ *neka fiksna točka oz. ravnovesje, "pritegne" ostale rešitve. Tekom predmeta bomo spoznali bolj zapletene primere.*

Dinamika realnih funkcij

Uroš Kosmač

March 27, 2025

2 Osnovni pojmi

Za začetek se bomo omejili na funkcije $f : I \subseteq \mathbb{R} \to I$, kjer je I interval. Obravnavali bomo zaporedje $x_{n+1} = f(x_n)$ pri različnih pogojih $x_0 \in I$. Za začetek uvedemo oznako:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n \text{ kompozitumov}}$$

Definicija 1. ***Orbita točke*** *x_0 pri funkciji f je podana s členi zaporedja:*

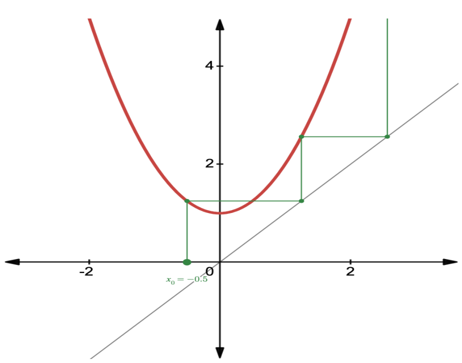
$$O_f(x_0) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{f^n(x_0) \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Orbita predstavlja dinamični razvoj točke x_0 pri komponiranju z f. Množici vseh orbit za $x_0 \in I$ pa rečemo ***dinamika funkcije*** *f.*

Primer 2. $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ *oz.* $f(x) = x^2 + 1$

$$O_f(1) = \{1, 2, 5, 26, \dots\}$$
$$O_f(0) = \{0, 1, 2, 5, 26, \dots\}$$
$$O_f(-2) = \{-2, 5, 26, \dots\}$$

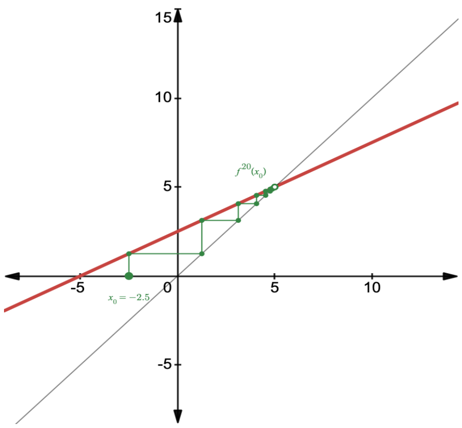
orbite lahko pri funkcijah ene spremenljivke vizualiziramo z ***pajčevinastim diagramom****.*



Postopek:

- *izbereš* x_0 *na osi* x,
- *greš navpično na* $f(x)$,
- *greš vodoravno do* $y = x$,
- *ponavljaš zadnja dva koraka.*

Primer 3. *Sherlock:* $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{5}{2}$ *oz.* $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.



$O_f(5) = \{5, 5, \dots\}$. *Za ostale orbite velja:* $x_n \to 5$.

Definicija 2. *Točka* $x_0 \in \mathbb{R}$ ***je periodična s periodo*** $n \in \mathbb{N}$ *za* f, *če zanjo velja* $f^n(x_0) = x_0$ *in je* n *najmanjše naravno število s to lastnostjo. Če je* $n = 1$, *taki točki pravimo* ***fiksna točka***.

Primer 4. $f(x) = -x^3$.
Fiksne točke:

$$f(x) = x \iff -x^3 = x \iff x = 0.$$

Točke periode 2:

$$f^2(x) = x \text{ in } f(x) \neq x \iff x^9 = x \text{ in } -x^3 \neq x \iff x = \pm 1.$$

Definicija 3. *Orbiti* n*- periodične točke rečemo* n*-cikel.*

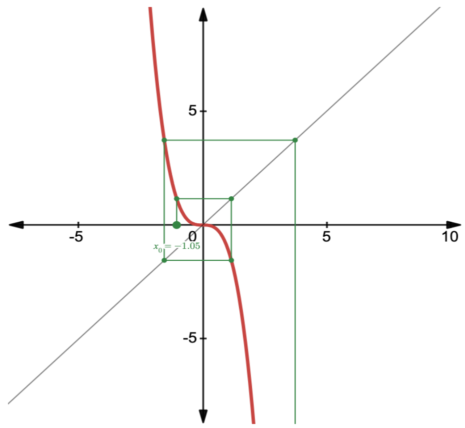


Figure 1: pajčevinast diagram iz Primera 3.

Definicija 4. *Naj bo $x_0 \in I$ fiksna točka za $f : I \to I$.*

- *x_0 je* ***šibko privlačna****, če obstaja njena okolica $U \subseteq I$, da za vsak $y_0 \in U$ velja $y_n = f^n(y_0) \to x_0$.*
- *x_0 je* ***šibko odbojna****, če obstaja njena okolica $U \subseteq I$, da za vsak $y_0 \in U \backslash \{x_0\}$ obstaja $m \in \mathbb{N}$, da $f^m(x_0) \notin U$.*

Okolici iz prve točke pravimo ***območje privlaka za*** *x_0, največjemu intervalu znotraj U, ki vsebuje x_0 pa rečemo* ***neposredno območje privlaka za*** *x_0.*

Opomba 2. *Če je $f \in C^0(I)$ in $f^n(x) \to x_0$ je x_0 nujno fiksna točka:*

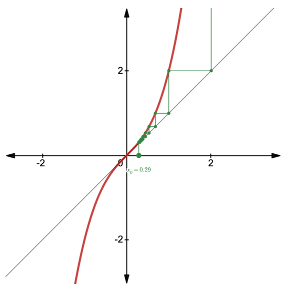
$$f^n(x) \to x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = f(x_0) = x_0 = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$$

Definicija 5. *Če je $f \in C^1(I)$, dodamo pojme:*

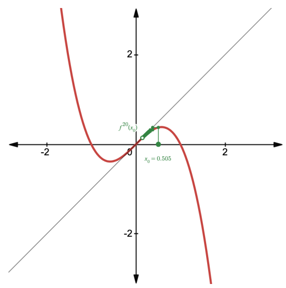
- *x_0 je* ***privlačna****, če $|f'(x_0)| < 1$.*
- *x_0 je* ***odbojna****, če $|f'(x_0)| > 1$.*
- *x_0 je* ***nevtralna****, če $|f'(x_0)| = 1$.*

Primer 5. *Sherlock: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. $f'(5) = \frac{1}{2}$ je privlačna in šibko privlačna.*

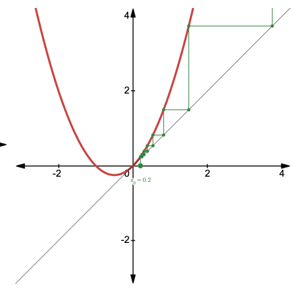
Primer 6. *Dane imamo tri funkcije* $f_1(x) = x + x^3$*,* $f_2(x) = x - x^3$ *in* $f_3(x) = x + x^2$ *V vseh treh primerih pa je* $|f'(0)| = 1$ *tj. gre za nevtralne točke.*



(a)
$U = \mathbb{R}$
$x = 0$ šibko odbojna



(b)
$U = [-1, 1]$
$x = 0$ šibko privlačna



(c)
$x = 0$ ni šibko odbojna
ne privlačna

Izrek 1. *Naj bo* $f \in C^1(I)$ *in* $x_0 \in I$ *fiksna točka. Potem velja:*

i) Če je $|f'(x_0)| < 1$*, je* x_0 *šibko privlačna.*

ii) Če je $|f'(x_0)| > 1$*, je* x_0 *šibko odbojna.*

iii) Če je $|f'(x_0)| = 1$*, je* x_0 *nevtralna, pogledamo višje odvode za več informacij.*

Dokaz:

i): Recimo, da je $|f'(x_0)| < \lambda < 1$. Potem obstaja $\delta > 0$, da je $|f'(x_0)| < \lambda$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zaradi zveznosti odvoda. Uporabimo Lagrangeov izrek

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{za } c \in (x, x_0).$$

Ker je x_0 fiksna točka

$$f'(x) = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}.$$

Naredimo oceno

$$|f(x) - x_0| = |f'(c)| \cdot |x - x_0| < \lambda |x - x_0|.$$

Zato za $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, velja da je tudi $f(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Indultivno sklepamo

$$|f(f(x)) - f(x_0)| = |f^2(x) - x_0| < \lambda^2 |x - x_0|$$

oz.

$$|f^n(x) - x_0| < \lambda^n |x - x_0|.$$

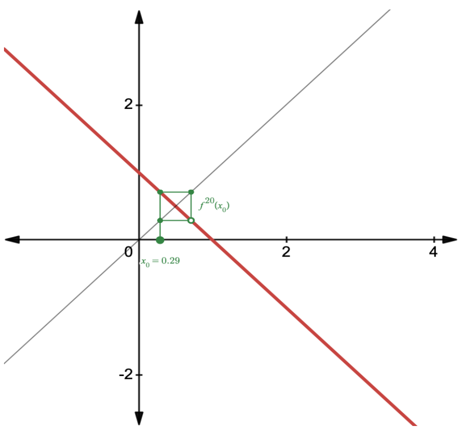
Ker je $\lambda \in (0, 1)$, gre $\lambda^n \to 0$ za $n \to \infty$ torej $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

ii): Dokaz je podoben, le da $\lambda > 1$ tj. za nek velik $m \in \mathbb{N}$, bo $\lambda^m |x - x_0|$ šel iz okolice.

$\square$

Definicija 6. *Fiksna točka $x_0 \in I$ je* ***stabilna*** *za $f : I \to I$, če za vsako njeno okolico $U \subset I$ obstaja manjša okolica $U' \subset U$, da za vsak $x \in U'$ velja $O_f(x) \subset U$.*

Opomba 3. *Iz dokaza izreka sledi, da privlačnost porodi enakomerno konvergenco $f^n(x) \to x_0$ za vse $x \in (x_0 - \delta, x + \delta)$. Sledi, da so vse privlačne fiksne točke stabilne. Pa tudi take, katerih bližnje orbite ne konvergirajo nujno k x_0 tj. obstajajo nevtralne točke, ki niso šibko privlačne, a so vseeno stabilne npr. $f(x) = 1 - x$. Imamo $f^2(x) = x$ in $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ in $f'(\frac{1}{2}) = -1$. Torej je $\frac{1}{2}$ nevtralna fiksna točka, ostale točke so 2-periodične. $x = \frac{1}{2}$ je stabilna.*



Definicija 7. *Fiksne točke, ki so stabilne in šibko privlačne pravimo* ***asimptotsko stabilne****.*

Opomba 4. *Ni vsaka šibko privlačna točka (asimptotsko) stabilna. Orbita lahko "uide" iz okolice in se nato vrne. So pa vse privlačne točke tudi asimptotsko stabilne.*

Sedaj lahko to klasifikacijo razširimo na n-periodične točke, če nanje pogledamo kot na fiksne točke funkcije f^n.

Definicija 8. *Periodična točka $x_0 \in I$ oz. pripadajoči n-cikel je:*

- *Šibko privlačna/odbojna, če je šibko privlačna/odbojna kot fiksna točka funkcije f^n.*
- *Privlačna/odbojna/nevtralna, če je privlačna/odbojna/nevtralna kot fiksna točka funkcije f^n.*

Da bosta ti definiciji dobri, v prvi točki potrebujemo zveznost, v drugi pa zvezno odvedljivost funkcije f. To združi nasledji izrek.

Izrek 2. *Če je $f \in C^1(I)$, so vse periodične točke n-cikla "istega tipa".*

Dokaz: Naj bo $\{x_1, \ldots, x_n\}$ n-cikel za f. Recimo, da je x_n šibko privlačna za f^n. Torej obstaja njena okolica $U_n \subset I$, da za $x \in U_n$ velja $f^{nk}(x) \to x_n$ za $k \to \infty$. Radi bi videli, da analogne okolice obstajajo za točke $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Sedaj definiramo U_{n-j} za $1 \leq j \leq n-1$, kot povezano komponento praslike $f^{-j}(U_n)$, ki vsenuje x_{n-j}. Vemo, da za vsak $x \in U_{n-j}$ po konstrukciji velja:

$$f^{nk+j}(x) \xrightarrow{k\to\infty} x_n.$$

Sedaj na to zvezo dodamo zvezno funkcijo f^{n-j}

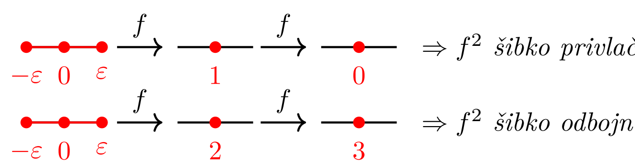
$$\begin{aligned} f^{n-j}(f^{nk+j}(x)) &\to f^{n-j}(x_n) \\ f^{n(k+1)}(x) &\xrightarrow{k\to\infty} x_{n-j} \end{aligned}$$

vse točke so šibko privlačne, kar smo želeli dokazati. Dokaz za šibko odbojnost izpustimo.

Poglejmo si še privlačnosti/odbojnost /nevtralnost

$$\begin{aligned} |(f^n)'(x_n)| &= |(f \circ f \circ \cdots \circ f)'(x_n)| = \\ &= |f'(f^{n-1}(x_n)) \cdot f'(f^{n-2}(x_n)) \cdot \ldots f'(x_n)| = \\ &= |f'(x_{n-1})| \cdot |f'(x_{n-2})| \cdot \ldots |f'(x_1)| \cdot |f'(x_0)| = |(f^n)'(x_j)|. \end{aligned}$$

za vsak x_j dobimo isti rezultat. □

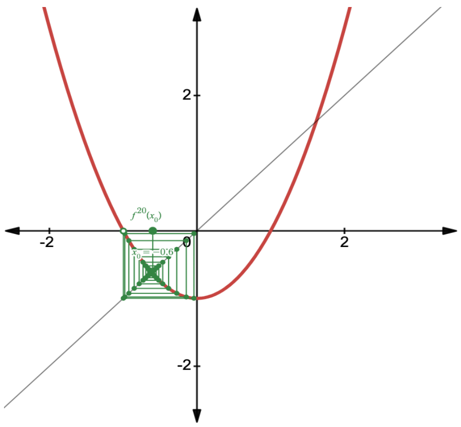


Opomba 5. *Brez zveznosti f izrek ne drži nujno, npr.*

Primer 7. *Dano imamo $f(x) = x^2 - 1$. Opazimo $f(0) = -1$ in $f(-1) = 0$ tj. imamo 2-cikel. Poglejmo, katarega tipa je:*

$$(f^2)'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0) = f'(-1) \cdot f'(0) = 0.$$

Torej gre za privlačen 2-cikel. Fiksni točki sta $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow f'\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \pm \sqrt{5}$, torej sta obe odbojni. Vidimo, da 2-cikel "privlači" bližnje orbite. To



velja tudiv primeru šibke privlačnosti. Naj bosta U_1 in U_2 okolici točke x_1 in x_2, ki pripadata 2-ciklu. Vzamemo $\tilde{U}_1 = U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ in $\tilde{U}_2 = U_1 \cap f^{-1}(U_1)$. Potem velja:

$$x \in \tilde{U}_1 \Longrightarrow f^{2n}(x) \to x_1 \ (ker\ x \in U_1) \quad in \quad f^{2n+1}(x) \to x_2 \ (ker\ f(x) \in U_2)$$
$$x \in \tilde{U}_2 \Longrightarrow f^{2n}(x) \to x_2 \ (ker\ x \in U_2) \quad in \quad f^{2n+1}(x) \to x_1 \ (ker\ f(x) \in U_1)$$

Opomba 6. *Zanimiva je tudi točka $x = 1$, ki ima orbito $O_f(1) = \{1, 0, -1, 0, -1, \dots\}$ tj. po prvi iteraciji postane ciklična. Takim točkam pravimo **predperiodična** (preperiodic /eventually periodic) točka.*

Definicija 9. *$\exists k \in \mathbb{N}$: $f^{n+k}(x) = f^k(x)$ za najmanjši tak $n \in \mathbb{N}$.*

3 Kaos

Do sedaj smo spoznali le dinamične sisteme z razmeroma predvidljivim dogajanjem. Konkretno, razen v kakšni posebni točki, so imele orbite bližnjih točk "enak dinamičen razvoj". Sedaj bomo spoznali sisteme, ki so nasprotje tega in jim pravimo kaotični.

Definicija 10 (Devaney)**.** *Dinamični sistem podan z $f : I \to I$ je **kaotičen**, če zanj veljajo*

(c1) Množica periodičnih točk je gosta v I.

(c2) *Tranzitivnost: za poljubna odprta intervala $U_1, U_2 \subset I$, obstajata $x_0 \in U_1$ in $n \in \mathbb{N}$, da je $f^n(x_0) \in U_2$.*

(c3) *Občutljivostna konstanta: obstaja $\beta > 0$, da v poljubni okolici U poljubne točke x_0 najdemo tudi točko $y_0 \in U$ za katero je $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$ za nek $n \in \mathbb{N}$.*

Opomba 7.

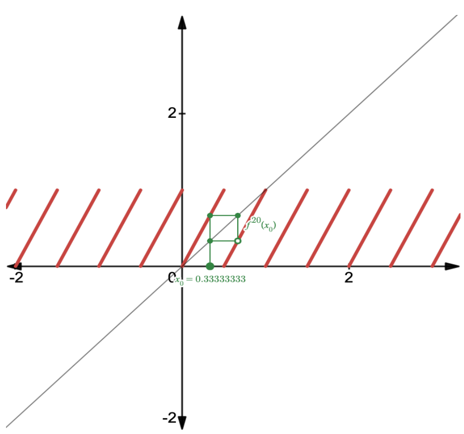
- *Točka* (c3) *je zanimiva pri izbiri majhnih okolic U, saj pomeni, da lahko poljubno blizu najdeš točko s čisto drugačno dinamiko. Temu se reče učinek metulja (butterly effect) tj. zaporedje oz. orbita je občutljiva na začetne podatke.*
- *Izkaže se, da je* (c2) *ekvivalentna obstoju goste orbite, če je f zvezna. Če ni zvezna je pogoj zadosten.*
- *Za kompakt $I \subset I$ se izkaže, da* (c1) *in* (c2) *implicirata* (c3).
- *Če je f zvezna iz* (c1) *in* (c2) *vedno sledi* (c3).

Opis kaosa: kaotični sistem je tak, v katerem s približnim začetkom niti približno nemoreš napovedati konca.

Primer 8. *Podvojitvena preslikava (doubling map).*

$$D : [0, 1) \to [0, 1)$$
$$D(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$$

Velja:



$D(0) = 0$ *je fiksna točka*
$D(\frac{1}{2}) = 0$ *predperiodična*

$D(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, $D(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$ 2-cikel.
Za dokaz kaotičnosti uporabimo dvojiški decimalni zapis.

$$x \in [0,1) : x = 0.x_1x_2\dots_{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{2^j}, \quad x_j \in \{0,1\}$$

Če prepovemo neskončen niz enic, je zapis enoličen. Kaj naredi naša preslikava?

$$D(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor = x_1.x_2x_3\dots_{(2)} - x_{1(2)} = 0.x_2x_3\dots_{(2)}\,.$$

Temu rečemo tudi operator zamika (shift map), ki "pozabi" prvo decimalko.

(c1) *Pokažimo, da imamo poljubno blizu točke $x \in [0,1)$ tudi periodično točko $\tilde{x}$.*

$$\begin{aligned} x &= 0.x_1x_2\dots x_Nx_{N+1}\dots_{(2)} \qquad N >> 1 \\ \tilde{x} &= 0.\overline{x_1x_2\dots x_N}_{(2)} \\ \Longrightarrow |x-\tilde{x}| &= 0.0\dots 0x_{N+1}\dots_{(2)} < \frac{1}{2^N} \end{aligned}$$

Očitno je $\tilde{x}$ periodičen, saj je $f^N(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Po drugo strani pa je $|x-\tilde{x}| < \frac{1}{2^N}$ tj. poljubno majhna.

c2) *Pokažimo, da obstaja gosta orbita. Naj bo $x \in [0,1]$ število z razvojem*

$$x = 0.01\,00\,01\,10\,11\,000\,001\,010\,\dots$$

tj. število vsebuje vse končne zapise v dvojiškem sistemu. Trdimo, da je za vsak $x \in [0,1]$ blizu nek $D^m(\tilde{x})$.

$$x = 0.x_1x_2\dots x_Nx_{N+1}\dots, \qquad \text{za } N >> 1.$$

Obstaja tak $m \in \mathbb{N} : f^m(x) = 0.x_1x_2\dots x_Ny_{N+1}$ tj. $|f^m(\tilde{x}) - x| < \frac{1}{2^N}$.

c3) *Želimo videti, da poljubno blizu $x \in [0,1]$ obstaja $\tilde{x} \in [0,1]$, da je za nek $m \in \mathbb{N}$: $|f^m(x) - f^m(\tilde{x}) \geq \frac{1}{2}$. Vzamemo*

$$x = 0.x_1x_2\dots x_Nx_{N+1}\dots_{(2)}$$

in

$$\tilde{x} = 0.\tilde{x}_1\tilde{x}_2\dots\tilde{x}_N\tilde{x}_{N+1}\dots_{(2)}$$

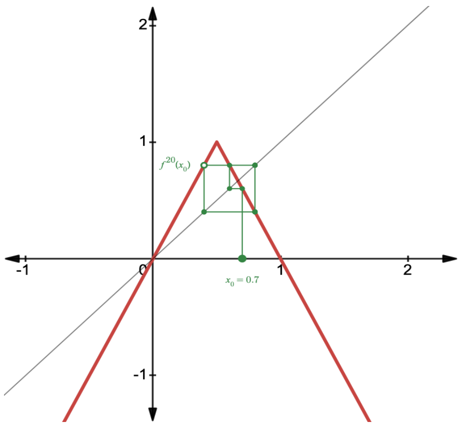
Naj velja $\tilde{x}_{N+1} \neq x_{N+1}$ Potem je

$$|f^N(x) - f^N(\tilde{x})| = |0.x_{N+1}x_{N+2}\dots - 0.\tilde{x}_{N+1}\tilde{x}_{N+2}\dots| \geq \frac{1}{2}.$$

Dobimo števili, ki sta $\frac{1}{2^N}$ blizu in po n-iteracijah $\frac{1}{2}$ narazen.

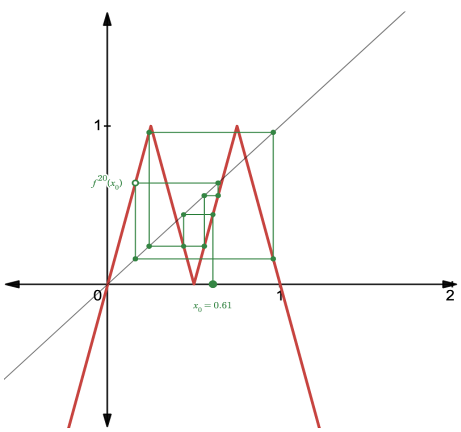
Primer 9. *Šotorasta preslikava(Tent map)*

$$T(x) = \begin{cases} 2x; & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x; & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = 2\min\{x, 1 - x\}$$

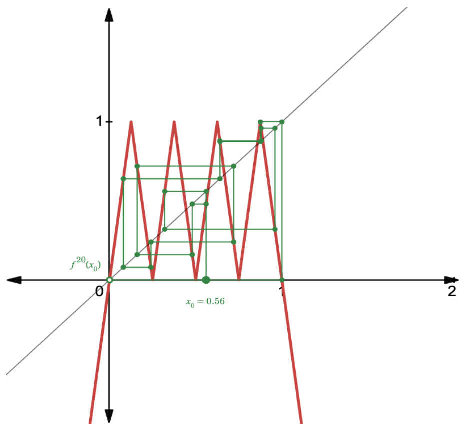


Drugi iterat:

$$T^2(x) = \min\{T(x), 1 - T(x)\}$$



Podobno dobimo T^3 in višje iterate



Definiramo intervale

$$I_{j,n} := \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right], \quad j = \{1, 2, \dots, 2^n\}.$$

c1) *Je izpolnjen, saj ima periodično točko na vsakem intervalu oblike $I_{k,j}$. Perioda teh točk je n ali manjša.*

ii) *Sledi, ker je $f^n(I_{j,n}) = [0,1]$, tj. za U_1 obstaja $I_{j,n} \subset U_1$, bo $T(I_{j,n}) \cap U_2 \neq \emptyset$ za poljubni odprti $U_1, U_2 \subset [0,1]$.*

c3) *Samo ideja: za vsak $x \in [0,1]$, poiščemo j, k in $\tilde{x} \in I_{j,n}$, da bo $T^k(x) - T^k(\tilde{x})| \geq \frac{1}{2}$.*

4 Konjugacije in semi-konjugacije

Definicija 11. *Pravimo, da sta $f : I \to I$ in $g : J \to J$* ***konjugirani****, če obstaja homeomorfizem $h : I \to J$, da $\forall x \in I$: $h \circ f(x) = g \circ h(x)$*

Imamo komutirajoči diagram za dano definicijo
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "h"] \\ J \arrow[r, "g"] & J \end{tikzcd}$$

Iz definicije sledi, da je $h(O_f(x)) = O_g(h(x))$ za vsak $x \in I$. Z drugimi besedami orbite f se slikajo v orbite h za g. To vodimo iz naslednjega razmisleka: ker je h obrljiva in h^{-1} zvezna, se zvezno traslira celotna dinamika tj.

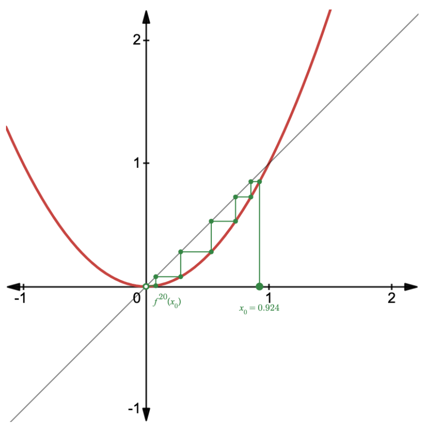
$$\begin{aligned} f &= h^{-1} \circ g \circ h \implies \\ f^n &= (h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ \cdots \circ (h^{-1} \circ g \circ h) = \\ &= h^{-1} \circ g^n \circ h \end{aligned}$$

Primer 10.

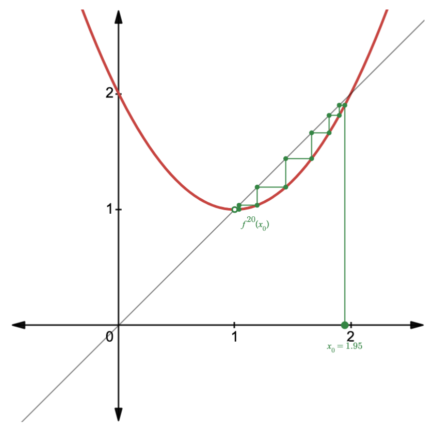
$$g(x) = x^2 \ \textit{na} \ [0, \infty)$$
$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \ \textit{na} \ [1, \infty)$$
$$h(x) = x - 1 \ \textit{kot preslikava} \ h : [1, \infty) \to [0, \infty).$$

Preverimo pogoj iz definicije

$$h \circ f(x) = h(x^2 - 2x + 2) = x^2 - 2x + 2 - 1 = x^2 - 2x - 1 =$$
$$= (x-1)^2 = g(x-1) = g \circ h(x)$$



(a) $g(x) = x^2$



(b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

Opomba 8.

- *V splošnem velja, da je vsaka kvadratna funkcija* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$ *konjugirana* $p_c(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.
- *Vidimo, da se je v primeru ohranil tudi karakter fiksnih točk. To ne preseneča oz. še več, če sta* h *in* h^{-1} *tudi odvedljivi, velja:*

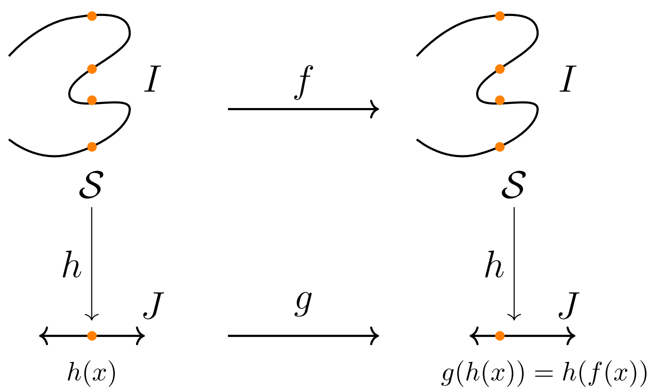
$$f'(x) = (h^{-1} \circ g \circ h)(x) = (h^{-1})(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) =$$
$$= \frac{1}{h'(h^{-1}(g(h(x))))} \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) = g'(h(x)),$$

kjer smo uporabili dejstvo, da je $g(h(x)) = h(x)$ *za fiksno točko* x*. Torej se tip fiksne točke ograni. Podobno velja za periodične točke.*

Definicija 12. *Pravimo, da je* $g : J \to J$ ***semi-konjugirana*** *funkciji* $f : I \to I$*, če obstaja zvezna surjektivna preslikava* $h : I \to J$*, za katero velja:*

i) $\forall x \in I$*:* $h \circ f(x) = g \circ h(x)$

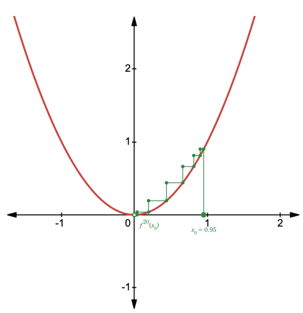
ii) $\exists m \in \mathbb{N}. \forall x \in J$ ima $h^{-1}(x)$ največ m elementov.



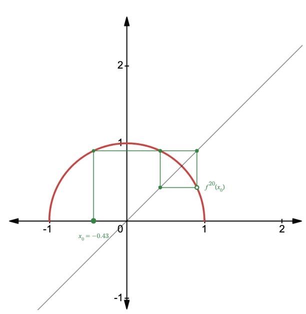
Opomba 9.

- *Definicija semi-konjugacije lahko varira glede na literaturo.*
- *Znova velja*
$$h(O_f(x)) = O_g(h(x))$$
vendar pa ta relacija ni več bijektivna.

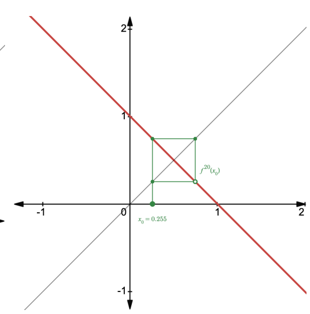
Primer 11. *Dane imamo naslednje preslikave*



(a)
$h : [-1, 1] \to [0, 1]$
$x \mapsto x^2$



(b)
$f : [-1, 1] \to [-1, 1]$
$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$



(c)
$g : [0, 1] \to [0, 1]$
$x \mapsto 1 - x$

$$h \circ f(x) = g(\sqrt{1 - x^2}) = (\sqrt{1 - x^2})^2 = 1 - x^2 = g(x^2) = g \circ h(x).$$

Sebi-konjugacija ne ohranja dinamike popolno. V našem primeru je priklopila predperiodične točke, periodičnim.

Trditev 1. *Naj bo g semi-konjugirana f preko $h : I \to J$. Če je $x_0 \in I$ periodična za f, je tudi $h(x_0)$ periodična za g, a se perioda ne ohranja nujno.*

Dokaz: Naj bo $f^n(x_0) = x_0$ in $n \in \mathbb{N}$ najmanjše tako število. Potem velja

$$g^n(h(x_0)) = g^{n-1} \circ (g \circ h)(x_0) = g^{n-1} \circ (h \circ f)(x_0) = \cdots = h \circ f^n(x_0) = h(x_0).$$

□

Opomba 10.

- *Problem je, da nemoremo zagotoviti minimalnosti n za g. Recimo, da ima f 2-cikel $\{0, 1\}$, g pa fiksno točko 0. Če vzamemo $h(0) = h(1) = 0$, bo veljalo $h \circ f(0) = 0 = g \circ h(0)$, a ne bosta isti periodi.*
- *V splošnem velja, da je perioda delitelj števila n.*

Izrek 3. *Naj bo g semi-konjugirana f s $h : I \to J$ in naj bosta $I, J \subset \mathbb{R}$ kompaktna intervala in naj bo f kaotičen. Potem je g kaotična, če je izpolnjen eden od treh pogojev:*

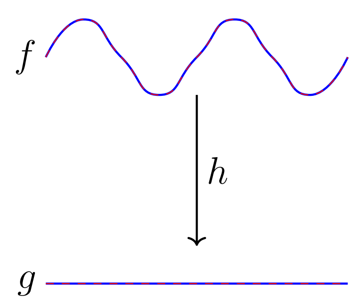
i) h je injektivna

ii) g je zvezna

iii) f je zvezna

Dokaz:

c1) Sledi iz trditve. Če vzamemo poljubno $U \subset J$ odprto, je tudi $h^{-1}(U) \subset I$ odprta in vsebuje periodično točko x_0. Torej je $h(x_0)$ periodična in v U.



c2) Če je $O_f(x)$ gosta, je taka tudi $O_g(h(x))$.

c3) i) h je injektivna: poglejmo si preslikavo $d : I \times I \to \mathbb{R}$, podano s predpisom $d(x, y) = |h(x) - h(y)|$. Gre za zvezno preslikavo iz kompakta v $\mathbb{R}$. Poglejmo si množico

$$\Delta_\beta = \{(x, y) \in I \times I \mid |x - y| \geq \beta\}.$$

Ker je Δ_β zaprta in podmnožica $I \times I$ je omejena, torej je kompaktna. Zato je $I \times I - \Delta_\beta$ kompaktna. Ker je d zvezna, slika $d(I \times I - \Delta_\beta)$

kompaktna. Obstaja $\beta' > 0$: če $|x-y| > \beta$, potem $|h(x)-h(y)| > \beta'$. Potem iz pogoja $|f^n(x)-f^n(y)| > \beta$ sledi $|g^n(h(x))-g^n(h(y))| > \beta'$. To je občutljivostna konstanta za g.

ii) g je zvezna: ker je g zvezna pogoj $c3$) sledi iz ($c1$) in ($c2$).

iii) f je zvezna (ideja): zaradi konjugacije obstaja osprta $U \subset J$, ki ima do m praslik. Zaradi kompaktnosti, zveznosti h in lokalne obrljivosti, obstaja $\delta > 0$, da iz $\operatorname{diam}(U) < \delta$ sledi, da imajo praslike $\operatorname{diam}(g^n(U)) < \delta$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$. Zaradi zveznosti se praslike $g^n(U)$ slikajo v $g^{nm}(U)$. Torej obstaja praslika V od U, da je $\operatorname{diam}(f^n(V)) < \beta$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$, kar je protislovje.

□

Opomba 11. *Zakaj je pomembna kompaktnost intervalov I in J? Poglejmo si preslikavi*

$$f(x) = 2x \ \textit{na}\ (0, \infty)$$
$$g(x) = x + \ln 2 \ \textit{na}\ \mathbb{R}.$$

Očitno je, da je f izpolnjuje ($c3$), saj sta za velik n števili $2^n x$ in $2^n y$ daleč narazen, če $x \neq y$. Po drugi strani, je tudi očitno, da g ne izpolnjuje ($c3$), saj je razlika

$$|g^n(x) - g^n(y)| = |x + n\ln(2) - (y + n\ln(2))| = |x - y|$$

konstantna za vse $n \in \mathbb{N}$. Sta pa vseno f in g konjugirani preko $h(x) = \ln(x)$.

$$g(x) = h \circ f \circ h^{-1}(x) = \ln(2e^x) = \ln(e^x) + \ln(2) = x + \ln(2).$$

.

Primer 12. *Poglejmo si sedaj primere semi-konjugacije na Podvojitveni in šotorasti preslikavi.*

$$D(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$$
$$T(x) = 2\min\{x, 1-x\}$$

Imamo

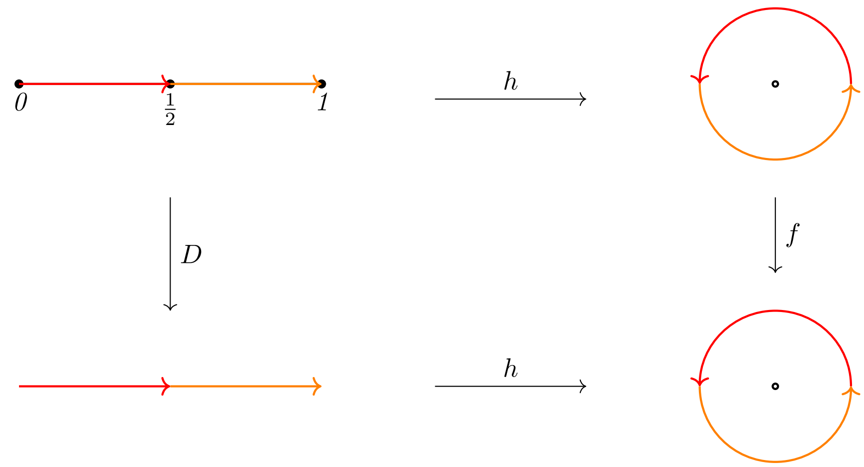
$$T(D(x)) = 2\min\{D(x), 1 - D(x)\} = T(T(x))$$

. To pomeni, da je T semi-konjugirana D za $h = T$. Posledično kaotičnost T sledi.

Primer 13. *Imamo preslikavo*

$$h : [0, 1) \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$$
$$h(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

Zanima nas, kaj se zgodi z doubling map, če uporabimo to konjugacijo oz. trdimo, da bo konjugirana preslikava



Sklep: D *je konjugirana* $f : S^1 \to S^1$, $f(\cos t, \sin t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ *za* $t \in [0, 2\pi]$ *tj. preslikavi ki podvoji argument. V kompleksni notacijo bi j o zapisali z* $e^{it} \mapsto e^{2it}$ *ali* $z \mapsto z^2$. *Posledično je tudi* f *kaotična.*

Primer 14. *Pokažimo, da je* $q_{-2}(x) = x^2 - 2$ *kaotična. To bo sledilo iz dejstva, da je semi-konjugirana preslikavi podvojitev argumenta, preko semi-konjugacije* h

$$\begin{aligned} h : S^1 &\to [-2, 2] \\ (x, y) &\mapsto 2x \end{aligned}$$

Ta preslikava ima v vsaki točki $y \in [-2, 2]$ *največ* 2 *prasliki, je zvezna in surjektivna. Preverimo, da komutirata* g *in* q_{-2}:

$$\begin{aligned} h \circ g(\cos 2t, \sin 2t) &= 2\cos 2t = 2\cos^2 t - 2\sin^2 t = 4\cos^2 t - 2 \\ q_{-2} \circ h(\cos t, \sin t) &= q_{-2}(2\cos t) = 4\cos^2 t - 2 = 4\cos^2 t - 2 \end{aligned}$$

Sklep: q_{-2} *je semi-konjugirana* D. *Direktna preslikava bi bila*

$$h(x) = 2\cos(2\pi x).$$

Ker je q_{-2} *zvezna, po prejšnjem izreku je tudi kaotična.*

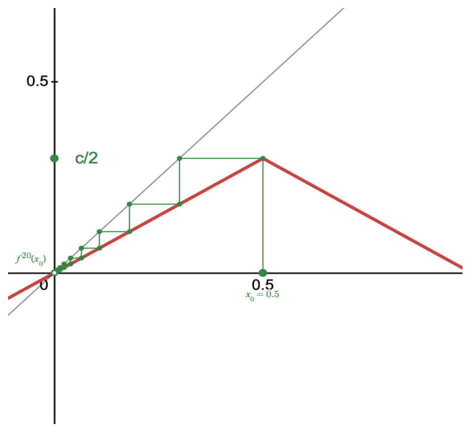
5 Bifurkacije

Za motivacijo si oglejmo enoparametrično družino šotorskih preslikav za $c \in [0, 2]$:

$$T_c(x) = \frac{c}{2} \cdot \min\{x, 1 - x\} = \frac{c}{2} T(x).$$

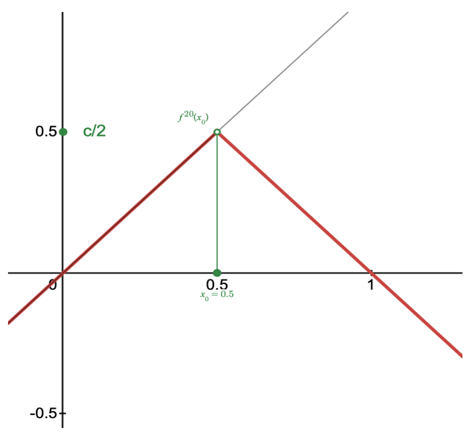
Vse te preslikave interval $[0, 1]$ slikajo vase, dinamike pa se za različne vrednosti malce razlikujejo

- če je $c < 1$:

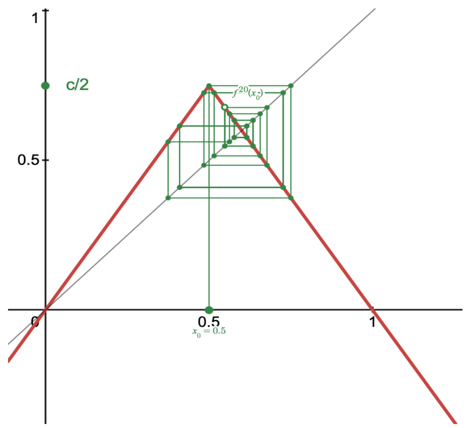


x_0 je edina periodična točka, gre pa za privlačno fiksno točko, saj je $T_c'(0) = c < 1$.

- če je $c = 1$:



- če je $c \in (1, 2]$:



pojavi se dodatna fiksna točka

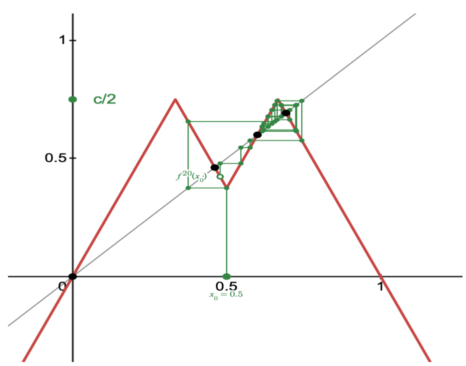
$$c - cx = x \iff x = \frac{c}{1+c}.$$

Ta točka je odbojna , saj je na $(\frac{1}{2}, 1]$ odvod $T_c'(x) = -c < -1$. Opazimo, da je $x = 0$ postala odbojna točka, saj $T_c'(0) = c > 1$.

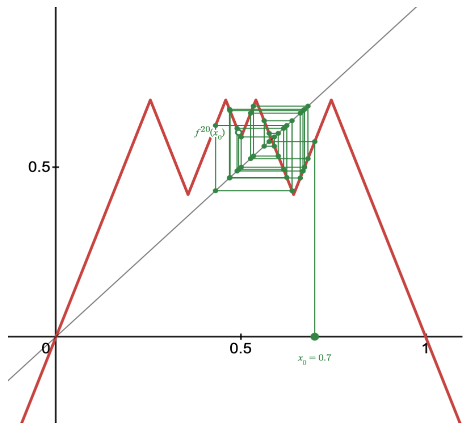
Opazka: ob prehodu čez $c = 1$ je prišlo do kvalitativne spremembe dinamike, saj smo iz ene dobili dve fiksni točki.
Poglejmo si kaj se dogaja z 2-cikli oz. T_c^2:

$$T_c^2(x) = c \cdot \min\{T_c(x), 1 - T_c(x)\}$$

Za $c < 1$ nimamo presečišč z $y = x$ zato se omejimo na $c \geq 1$. Za $c = 1$ so vsa presečišča fiksne točke. Ob prehodu čez $c = 1$ pa iz točke $x = \frac{1}{2}$ dobimo dve 2-periodični točki.



Za T_c^3 postane obnašanje še bolj zanimivo Izkaže se, da pri $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sekamo



T^3 natanko 5-krat (3-cikel + 2 fiksni točki). Pri večjih je presečišč 8 (dva 3-cikla) pri manjših pa 2. Kasneje bomo dokazali, da se ob 3-ciklu pojavijo še vse ostale periode. Točkam, pri katerih se zgodi "kvalitativna sprememba" dinamike, pravimo bifurkacije.
Formalno:

Obravnavamo družino zveznih funkcij $f_c : I \to I \subset \mathbb{R}$, za parametr $c \in J \subset \mathbb{R}$. Ta družina je C^k-odvisna od c, če k-ti parcialni odvodi $F(x,c) := f_c(x)$ obstajajo $\frac{\partial^k}{\partial c^k}F(x,c)$ in so zvezni, za $k \in \mathbb{N}_0$. Na primer $T_c(x) = \frac{c}{2}T(x)$ je taka, čeprav ni odvedljiva po x v $x = \frac{1}{2}$ in velja

$$\frac{\partial}{\partial c}T_c(x) = \frac{1}{2}T(x)$$
$$\frac{\partial^k}{\partial c^k}T_c(x) = 0,\ k \geq 2.$$

Definicija 13. *Vrednosti $c \in J$ pravimo **bifurkacija** družine f_c, če se dinamika ob prehodu čez njo kvalitativno spremeni.*

Pri motivaciji smo opazili različne tipe bifurkacij:

- Fiksna točka se je pojavila in izginila (npr. $x = \frac{1}{4}$ pri $c = 1$).
- Fiksna točka se je pojavila in nato podvojila (za $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ in poljubni fiksni točki)
- Iz fiksne točke $x = \frac{1}{2}$, ki se pojavi pri $c = 1$, smo dobili fiksno točko drugega tipa in 2-cikel.

Ključna opazka je, da so se spremembe zgodile, ko je odvod v fiksni točki 1 ali pa ne obstaja.

Izrek 4. *Naj bo $f_c : I \to I$ družina zvezno odvedljivih funkcij, ki so gladko odvisne od parametra $c \in J$. Denimo, da za $x_0 \in I$ velja $f_{c_0}(x_0) = x_0$ in $f'_{c_0}(x_0) \neq 1$. Potem obstajata okolica $I' \subset I$ in $J' \subset J$, ter preslikava $p : J' \to I'$, da je $f_c(p(c)) = p(c)$, za katero je $p(c)$ edina fiksna točka na I' pri $c \in J'$.*

Dokaz: Uporabimo izrek o implicitni preslikavi za

$$F(x, c) = f_c(x) - x.$$

Po predpostavki je:

$$F(x_0, c_0) = 0 \text{ in } \frac{\partial}{\partial x} F(x_0, c_0) = f'_{c_0}(x_0) - 1 \neq 0.$$

Torej lahko na majhni okolici $c_0 \in J$ izrazimo $x = p(c)$, ter velja $F(p(c), c) = 0$ oz. $f_c(p(c)) = p(c)$. $\square$

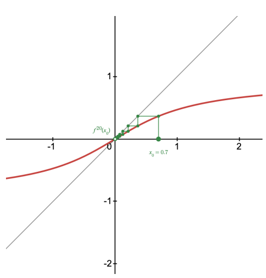
Opomba 12. *Izrek podaja le potreben, ne pa tudi zadosten pogoj.*

Posledica 1. *Privlačne in odbojne fiksne točke se pri majhnih motnjah ohranijo. Enako velja za točke, kjer je odvod -1. Pri nevtralnih točkah z odvodom $+1$ pa lahko pride do sprememb.*

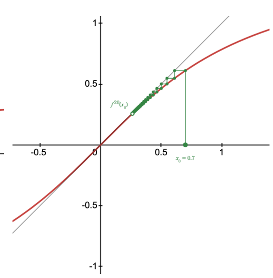
Primer 15 (Tangentna bifurkacija)**.** *Bifurkacija, v katerih iz nevtralne točke, ki zadošča $f'_{c_0}(x_0) = 1$, dobimo dve fiksni točki, ki jih prej ni bilo. Ena je privlačna, druga odbojna, zato se tudi imenuje saddle-node bifurcation. Opazujemo družino $g_c(x) = x^2 + c$. Dobimo*

- *za $c > \frac{1}{4}$ ni fiksnih točk*
- *za $c = \frac{1}{4}$ se pojavi nevtralna točka*
- *za $c < \frac{1}{4}$ se razcepi v privlačno in odbojno točko.*

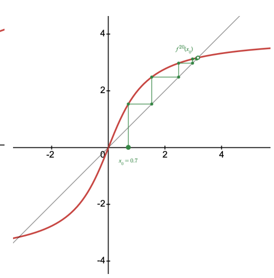
Primer 16 (Potrojitev fiksnih točk)**.** *Imamo družino $f_c(x) = c \arctan x$ za $c \in [0, \infty]$.*



(a)
$c < 1$ privlačna



(b)
$c = 1$ nevtralna in šibko privlačna



(c)
$c > 1$ odbojna in dve privlačni