Turbulence in Large eddy simulacije

Uroš Kosmač

Fakulteta za matematiko in fiziko
Mentor: prof. dr. Emil Žagar
Somentor: dr. Peter Smerkol

May 12, 2025

Uvod

Kaj je turbulenca?

Uvod

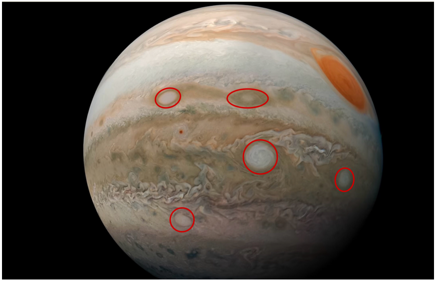
Kaj je turbulenca?

- Kaotičnost

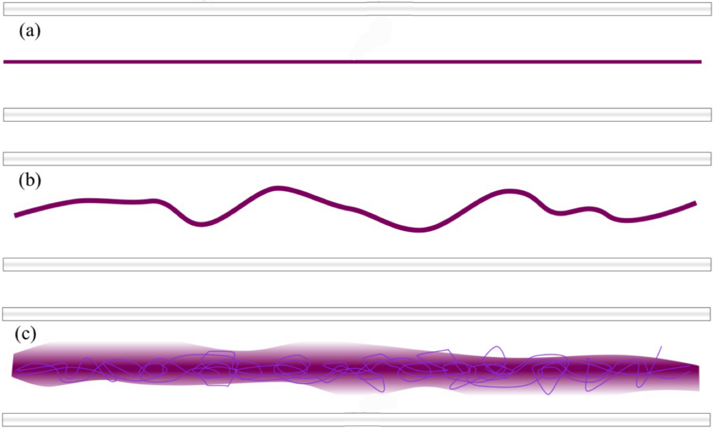
Uvod

Kaj je turbulenca?

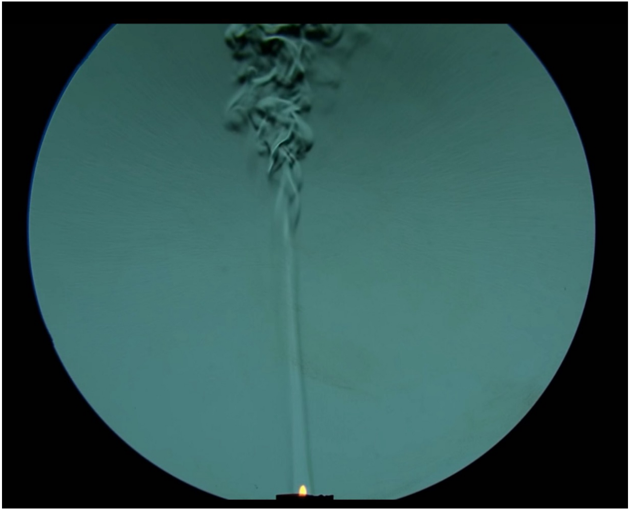
- Kaotičnost
- Vrtinci



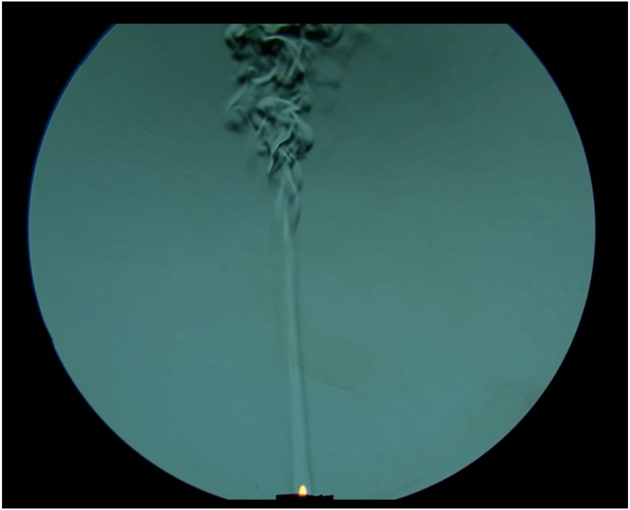
- Difuzivnost



- Reynoldsovo število



- Reynoldsovo število



- Disipativnost

Dva pristopa

Tok lahko obravnavamo na dva različna načina. Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

Dva pristopa

Tok lahko obravnavamo na dva različna načina. Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

Eulerjev pristop: tok je preslikava

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{x}, t) &\mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Dva pristopa

Tok lahko obravnavamo na dva različna načina. Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

Eulerjev pristop: tok je preslikava

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{x}, t) &\mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Lagrangev pristop: dana je trajektorija

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

za začetno točko $\mathbf{x}_0$ in $\mathbf{X}(t_0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$

Relacija med njima:

$$U(t;\mathbf{x}_0) = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t;\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}(X(t;\mathbf{x}_0), t),$$

Relacija med njima:

$$U(t; \mathbf{x}_0) = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t; \mathbf{x}_0) = \mathbf{u}(X(t; \mathbf{x}_0), t),$$

Definicija

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in $\boldsymbol{v} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ vektorsko polje. Diferencialni operator $\frac{D}{Dt} : C^1(\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n) \to C^0(\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ dan s predpisom

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x)u \tag{1}$$

Relacija med njima:

$$U(t;\mathbf{x}_0) = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t;\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}(X(t;\mathbf{x}_0),t),$$

Definicija

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in $\boldsymbol{v} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ vektorsko polje. Diferencialni operator $\frac{D}{Dt} : C^1(\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n) \to C^0(\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ dan s predpisom

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x)u \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t;\mathbf{x}_0) = \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x},t)\right)_{\mathbf{x}=X(t;\mathbf{x}_0)}, \tag{2}$$

Ohraniteni zakoni

Ohraniteni zakoni

Ohranitev mase:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{3}$$

Ohraniteni zakoni

Ohranitev mase:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{3}$$

Ohranitev gibalne količine:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla_x) u = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \tag{4}$$

Ohraniteni zakoni

Ohranitev mase:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{3}$$

Ohranitev gibalne količine:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla_x) u = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \tag{4}$$

Ohranitev vrtinčenja:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times \mathbf{f} \tag{5}$$

Ohraniteni zakoni

Ohranitev mase:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{3}$$

Ohranitev gibalne količine:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla_x) u = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \tag{4}$$

Ohranitev vrtinčenja:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times \mathbf{f} \tag{5}$$

Ohranitev skalarja:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = \gamma \nabla^2 c. \tag{6}$$

Reynoldsovo število

Reynoldsovo število

Enačbo za gibalno količino, preko transformacij

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}\frac{\rho L}{U^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{L}{U}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{\nabla} = L\nabla$$

za $L, U > 0$ prevedemo na **brezdimenzijsko Navier-Stokesovo enačbo**:

$$\frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \underbrace{\frac{\mu}{\rho U L}}_{\frac{1}{Re}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{f}}$$

Alternativna tranformacija, nam da:

$$Re\frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{D\tilde{t}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \tilde{\nabla}^2\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{f}.$$

Posledica: Časovna neodvisnost

Disipativnost

Naj bo $\mathbf{f} = 0$ in predpostavimo $\mathbf{u}_{|\partial\Omega} = 0$.

Disipativnost

Naj bo $\mathbf{f} = 0$ in predpostavimo $\mathbf{u}_{|_{\partial\Omega}} = 0$. Iz Navier-Stokesovih enačb izpeljemo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \, \mathrm{d}V = -\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \, \mathrm{d}V.$$

Disipativnost

Naj bo $\mathbf{f} = 0$ in predpostavimo $\mathbf{u}_{|_{\partial\Omega}} = 0$. Iz Navier-Stokesovih enačb izpeljemo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}V = -\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}V.$$

Če $\mathbf{f} \neq 0$ in $\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{u}|^2 = 0$ dobimo

Disipativnost

Naj bo $\mathbf{f} = 0$ in predpostavimo $\mathbf{u}_{|_{\partial\Omega}} = 0$. Iz Navier-Stokesovih enačb izpeljemo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}V = -\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}V.$$

Če $\mathbf{f} \neq 0$ in $\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{u}|^2 = 0$ dobimo

$$\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}V = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \,\mathrm{d}V.$$

Disipativnost "=" moč dela zunanjih sil.

LES

LES

Posledica disipativnosti, nam domeno/območje razdeli na tri dele:

- Energijsko bogato območje
- Inercijsko območje
- Disipativno območje

LES

Posledica disipativnosti, nam domeno/območje razdeli na tri dele:

- Energijsko bogato območje
- Inercijsko območje
- Disipativno območje

LES

- Filtracija in filtrirane enačbe

LES

Posledica disipativnosti, nam domeno/območje razdeli na tri dele:

- Energijsko bogato območje
- Inercijsko območje
- Disipativno območje

LES

- Filtracija in filtrirane enačbe

$$\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U}_i \, \overline{U}_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{\text{anizo}}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U}_j}{\partial x_i \partial x_i} + \overline{f}_j,$$

Posledica disipativnosti, nam domeno/območje razdeli na tri dele:

- Energijsko bogato območje
- Inercijsko območje
- Disipativno območje

LES

- Filtracija in filtrirane enačbe

$$\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U}_i\,\overline{U}_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{\text{anizo}}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U}_j}{\partial x_i \partial x_i} + \overline{f}_j,$$

- Problem zaprtja.