Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Отчёт по заданию 1

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ РУНГЕ-КУТТЫ

Подготовил студент
группы ФФБ-603-О
Отчет Оригинальный Почти

Подпись

Омск-2018

Содержание

1 Введение

В этой работе исследовалось численное решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
Задача Коши обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом эволюции и начальным состоянием (математическим выражением которых и являются уравнение и начальное условие). Этим мотивируется терминология и выбор обозначений: начальные данные задаются при $t = 0$, а решение отыскивается при $t > 0$. Решением задачи Коши для системы ОДУ называется вектор $\vec{u}$, удовлетворяющий системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{F}(\vec{u}, t); \\ \vec{u}(t = 0) = \vec{u}_0; \end{cases}$$

$$t \in [0; T]$$

В нашем случае $T = 100$.
Методы Рунге-Кутты основан на разбиении отрезка, на котором находится решение на отрезки с шагом дискретизации τ_j, при этом, если $\tau_j \equiv \tau \equiv \text{const}$, то сетка называется равномерной, но МРК не требуют равномерной сетки.
МРК называется явным, если решение на шаге зависит только от решений на предыдущих шагах.

$$\vec{u}_{n+1} = G\big(\vec{u}_n, \vec{u}_{n-1}, ..., \vec{u}_{n-k}; \tau; F\big);$$

Где τ — шаг дискретизации.
В этой работе рассматривается численное решение ЗК СОДУ одним из методов Рунге-Кутты — методом Лобатто IIIC. Он является вложенным, т.е. в него "вложено" ослабление точности решения. Для вложенного метода решение ЗК СОДУ примет вид:

$$\begin{cases} \vec{k}_i = \vec{F}\Big(u_n + \tau \sum\limits_{j=0}^{s-1} a_{ij}\vec{k}_j; t_n + c_i\tau\Big); i = 0, ..., s-1; \\ \vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \tau \sum\limits_{j=0}^{s-1} b_j \vec{k}_j; \\ \vec{u}^*_{n+1} = \vec{u}_n + \tau \sum\limits_{j=0}^{s-1} b^*_j \vec{k}_j; \end{cases}$$

где $\vec{u}_{n+1}$ соответствует локальному порядку точности P, а $\vec{u}^*_{n+1}$ — (P-1), она связана с экстраполяцией по Ричардсону.
Вектор погрешности для вложенного метода:

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{u}_{n+1} - \vec{u}^*_{n+1} = \sum_{j=0}^{s-1} \big(b_j - b^*_j\big)\vec{k}_j;$$

А погрешность равна: $\epsilon_{n+1} = \max\limits_{L}(|r_{n+1}^{(L)}|)$;
В такой системе можно ввести предел погрешности $\widetilde{\epsilon}$ и тем самым по необходимости регулировать шаг:
$\tau \downarrow$ при $\epsilon_{n+1} > \widetilde{\epsilon}$;
$\tau \uparrow$ при $\epsilon_{n+1} < \widetilde{\epsilon}$;

Набор коэффициентов обычно упорядочивают в таблицу Бутчера.

2 Постановка задачи

Я рассматривал систему, представляющую из себя маятнк на пружине, Лагранжиан такой системы имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r^2} + r^2\dot{\theta^2}) + grcos(\theta); \tag{2.1}$$

Воспользовавшись, уравнением Лагранжа 2-го рода, получаем СОДУ.

$$\begin{aligned}
&\frac{du_1}{dt} = u_3;\\
&\frac{du_2}{dt} = u_4;\\
&\frac{du_3}{dt} = -g\frac{sin(u_1)}{u_2};\\
&\frac{du_4}{dt} = u_2 * {u_3}^2 + g * cos(u_1) + k\frac{l - u_2}{m};
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
&u_1(t = 0) = \frac{\pi}{2};\\
&u_2(t = 0) = l;\\
&u_3(t = 0) = 0;\\
&u_4(t = 0) = 0;
\end{aligned} \tag{2.3}$$

3 Полученные результаты

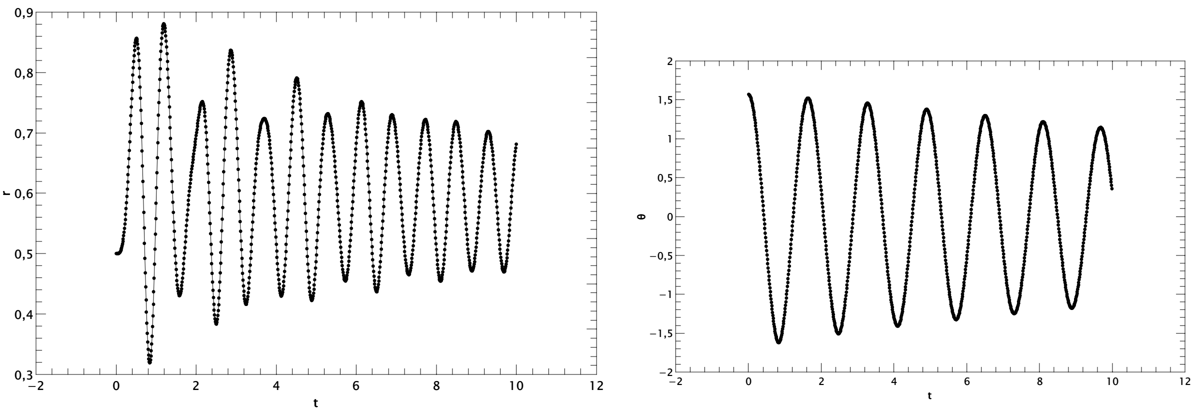

Рис. 3.1: Решение системы уравнений

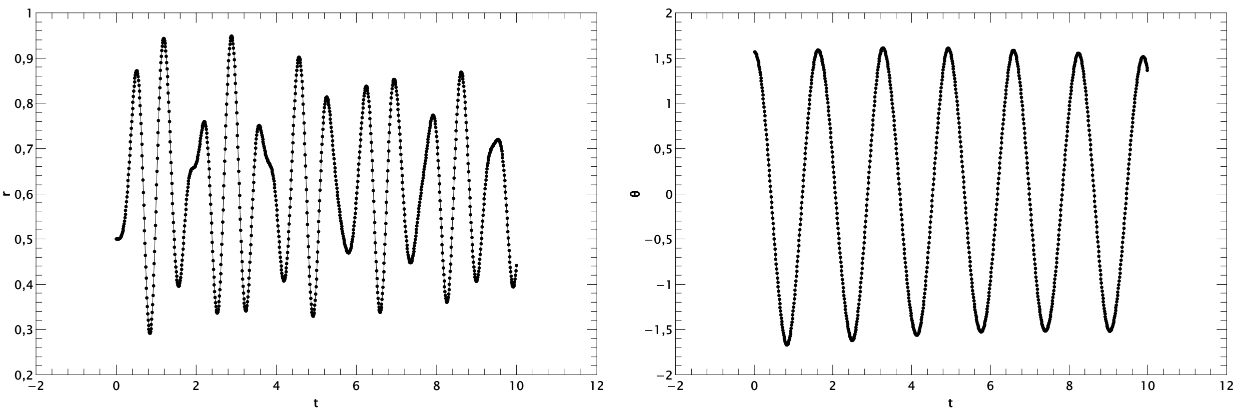

Рис. 3.2: Решение системы уравнений, с использованем экстрополяции по Ричардсону

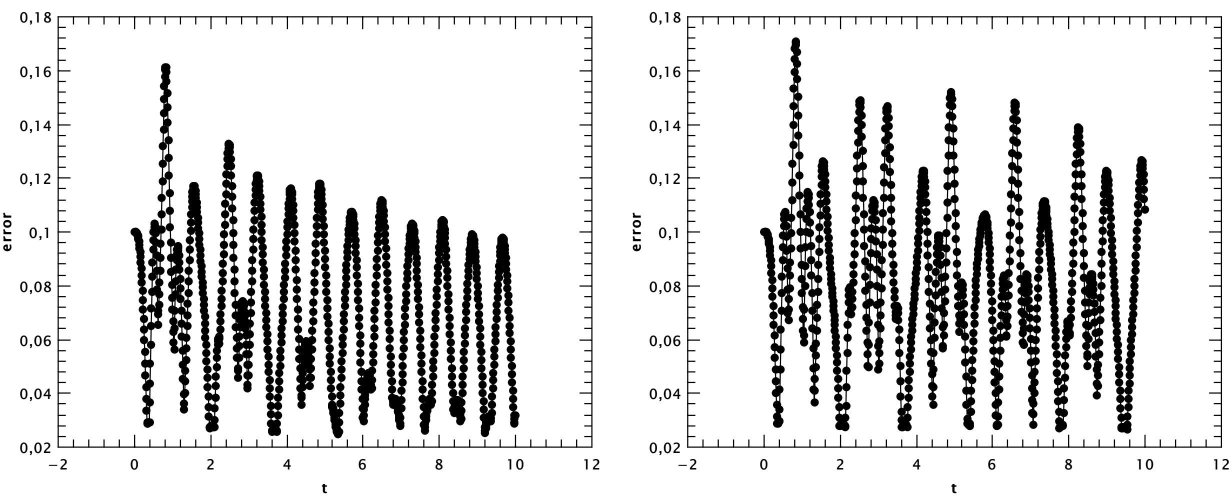

Рис. 3.3: Погрешности методов "справа с использованием экстрополяции"

4 Заключение

Из 3.1 мы видим, что данный метод не очень хорошо работает, для выбранной системы. В системе возникают диссипации, не связанные с особенностями поведения данной СОДУ. Но на 3.2 мы можем увидеть , что экстрополяция для данной СОДУ дает повышение точности и уменьшение диссипаций.