1 Уравнение эллипса на плоскости XY, повернутого на угол α

Формулы преобразования координат:

$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$

$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$

Уравнение эллипса, связывающее координаты y и x:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Используем это уравнение вместе с формулами преобразования координат, чтобы получить уравнение, связывающее координаты (x, y) повернутого эллипса. Возьмем искомый повернутый эллипс с координатами (x', y') и определим координаты прямого эллипса, в котором каждая точка (x, y) соответствует точке (x', y') до поворота. И запишем обратное преобразование, которое равносильно повороту наклоненного эллипса на угол $-\alpha$ (до прямого).

$$x = x'\cos(-\alpha) - y'\sin(-\alpha) = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \tag{2}$$

$$y = x'\sin(-\alpha) + y'\cos(-\alpha) = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \tag{3}$$

Для x и y в (2), (3) верно уравнение эллипса (1). Подставим в (1) правые части для x и y из (2) и (3), чтобы получить уравнение, связывающее координаты x и y наклоненного эллипса (штрихи рядом с x и y больше не пишем):

$$\frac{x^2\cos^2\alpha + 2xy\sin\alpha\cos\alpha + y^2\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{x^2\sin^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha + y^2\cos^2\alpha}{b^2} = 1,$$

$$x^2(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) + 2xy\sin\alpha\cos\alpha(b^2 - a^2) + y^2(b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha) = b^2a^2.$$

Разделим на a^2 и введем новые обозначения (для сокращения записей): $c = \cos\alpha, \quad s = \sin\alpha, \quad q = \frac{b}{a} \quad (0 < q < 1)$:

$$x^2(q^2c^2 + s^2) + 2xysc(q^2 - 1) + y^2(q^2s^2 + c^2) = b^2 \tag{4}$$

Главная цель — получить функцию зависимости координат друг от друга, например, $y(x)$. Заметим, что было получено квадратное уравнение с переменными x и y. Чтобы получить функцию $y(x)$, запишем квадратное уравнение (4) в виде $Ay^2 + By + C = 0$.

$$(q^2s^2 + c^2)\cdot y^2 + 2sc(q^2 - 1)x\cdot y + (x^2(q^2c^2 + s^2) - b^2) = 0$$

Преобразуем уравнение, чтобы сделать дополнительное новое обозначение (для удобства) $Q = 1 - q^2$, $(0 < Q < 1)$. Заметим, что $c^2 + s^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

$$(q^2s^2 - s^2 + s^2 + c^2)\cdot y^2 - 2sc(1 - q^2)x\cdot y + (x^2(q^2c^2 - c^2 + c^2 + s^2) - b^2) = 0,$$

$$(q^2s^2 - s^2 + 1) \cdot y^2 - 2sc(1-q^2)x \cdot y + (x^2(q^2c^2 - c^2 + 1) - b^2) = 0,$$

$$(-s^2(1-q^2)+1) \cdot y^2 - 2sc(1-q^2)x \cdot y + (x^2(-c^2(1-q^2)+1) - b^2) = 0,$$

$$(1 - Qs^2) \cdot y^2 - 2scQx \cdot y + (x^2(1 - Qc^2) - b^2) = 0.$$

В уравнении вида $Ay^2 + By + C = 0$ получили: $A = 1 - Qs^2$ $(0 < A < 1)$, $B = -2scQx$, $C = x^2(1 - Qc^2) - b^2$.

Решим это уравнение относительно y (найдем корни y_1 и y_2).

$$D = B^2 - 4AC = 4s^2c^2Q^2x^2 - 4(1 - Qs^2)(x^2(1 - Qc^2) - b^2) =$$

$$= 4s^2c^2Q^2x^2 - 4x^2(1 - Qc^2) + 4b^2 + 4Qs^2x^2(1 - Qc^2) - 4Qs^2b^2 =$$

$$= 4x^2(s^2c^2Q^2 - (1 - Qc^2) + Qs^2(1 - Qc^2)) + 4b^2 - 4Qs^2b^2 =$$

$$= 4x^2(s^2c^2Q^2 - 1 + Qc^2 + Qs^2 - Q^2s^2c^2) + 4b^2(1 - Qs^2) =$$

$$= 4x^2(s^2c^2Q^2 - s^2c^2Q^2 + Q(c^2 + s^2) - 1) + 4b^2(1 - Qs^2) =$$

$$= 4x^2(Q \cdot 1 - 1) + 4b^2(1 - Qs^2) = 4x^2(1 - q^2 - 1) + 4b^2(1 - Qs^2) =$$

$$= -4x^2q^2 + 4b^2(1 - Qs^2) = 4(b^2(1 - Qs^2) - x^2q^2) =$$

$$= 4b^2(1 - Qs^2 - x^2/a^2)$$

Теперь запишем корни квадратного уравнения $y_{1/2}$:

$$y_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} = \frac{2scQx \pm 2b\sqrt{1 - Qs^2 - x^2/a^2}}{2(1 - Qs^2)} =$$

$$= \frac{scQx \pm b\sqrt{1 - Qs^2 - x^2/a^2}}{1 - Qs^2}$$

Таким образом, получено уравнение вида

$$y_{1/2} = C_1 \cdot (C_2 \cdot x \pm \sqrt{C_3 - x^2})$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые константы относительно x (зависят только от a, b и α).

Иными словами, получена функция, которая при заданной координате x дает два варианта координаты y — двух точек, которые лежат на повернутом эллипсе:

$$y(x) = \frac{scQx \pm b\sqrt{1 - Qs^2 - x^2/a^2}}{1 - Qs^2} \tag{5}$$

Найдем максимальное и минимальное значение y. Они будут равны по модулю, потому что центр эллипса находится в точке $(0, 0)$, то есть эллипс симметричен относительно центра. Найдем максимальное значение y, приравняв производную функции $y(x)$ (то есть корень со знаком $+$ в выражении (5)) к нулю.

$$y'(x) = \frac{1}{1-Qs^2}\left(scQ + b\cdot\frac{-2x/a^2}{2\sqrt{1-Qs^2-x^2/a^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-Qs^2}\left(scQ - \frac{x\cdot b/a^2}{\sqrt{1-Qs^2-x^2/a^2}}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad scQ = \frac{x\cdot b/a^2}{\sqrt{1-Qs^2-x^2/a^2}},$$

$$s^2c^2Q^2 = \frac{x^2b^2/a^4}{1-Qs^2-x^2/a^2},$$

$$s^2c^2Q^2(1-Qs^2) - s^2c^2Q^2\cdot x^2/a^2 = x^2b^2/a^4, \quad [\cdot\, a^4]$$

$$s^2c^2Q^2(1-Qs^2)a^4 - s^2c^2Q^2a^2x^2 = x^2b^2,$$

$$x^2(b^2+s^2c^2Q^2a^2) = s^2c^2Q^2(1-Qs^2)a^4,$$

$$x^2 = \frac{s^2c^2Q^2(1-Qs^2)a^4}{b^2+s^2c^2Q^2a^2} = [:\, s^2c^2Q^2a^2] = \frac{a^2(1-Qs^2)}{(q^2/s^2c^2Q^2)+1} \qquad (6)$$

Преобразуем отдельно знаменатель в (6):

$$\frac{q^2}{s^2c^2Q^2}+1 = \frac{(1-Q)+s^2c^2Q^2}{s^2c^2Q^2} = \frac{1-Qs^2+Qs^2-Q+s^2c^2Q^2}{s^2c^2Q^2} =$$

$$= \frac{(1-Qs^2)+Q(s^2-1+s^2c^2Q)}{s^2c^2Q^2} = \frac{(1-Qs^2)-Q(1-s^2-s^2c^2Q)}{s^2c^2Q^2} =$$

$$= \frac{(1-Qs^2)-Q(1-s^2-s^2(1-s^2)Q)}{s^2c^2Q^2} = \frac{(1-Qs^2)-Q(1-s^2-Qs^2+Qs^4)}{s^2c^2Q^2} =$$

$$= \frac{(1-Qs^2) - Q((1-Qs^2) - s^2(1-Qs^2))}{s^2c^2Q^2} = \frac{(1-Qs^2) - Q(1-Qs^2)(1-s^2)}{s^2c^2Q^2} =$$

$$= \frac{(1-Qs^2) - Q(1-Qs^2)\cdot c^2}{s^2c^2Q^2} = \frac{(1-Qs^2)(1-Qc^2)}{s^2c^2Q^2}$$

Теперь подставляем преобразованный знаменатель в выражение (6):

$$x^2 = \frac{a^2(1-Qs^2)}{\left(\frac{(1-Qs^2)(1-Qc^2)}{s^2c^2Q^2}\right)} = \frac{a^2s^2c^2Q^2}{1-Qc^2},$$

$$x = \pm\frac{ascQ}{\sqrt{1-Qc^2}} \tag{7}$$

Найдем максимальное значение y, которое достигается в точке с положительной абсциссой (7) (со знаком плюс):

$$y_{\max} = \frac{scQx + b\sqrt{1-Qs^2-x^2/a^2}}{1-Qs^2} =$$

$$= \frac{x}{1-Qs^2}\cdot\left(scQ + b\sqrt{(1-Qs^2)/x^2 - 1/a^2}\right) =$$

$$= \frac{ascQ}{(1-Qs^2)\sqrt{1-Qc^2}}\cdot\left(scQ + b\sqrt{(1-Qs^2)(1-Qc^2)/(a^2s^2c^2Q^2) - 1/a^2}\right) =$$

$$= \frac{ascQ}{(1-Qs^2)\sqrt{1-Qc^2}}\cdot\left(scQ + b\sqrt{\frac{1-Qc^2-Qs^2+Q^2s^2c^2}{a^2s^2c^2Q^2} - 1/a^2}\right) =$$

$$= \frac{ascQ}{(1-Qs^2)\sqrt{1-Qc^2}}\cdot\left(scQ + b\sqrt{\frac{1-Q\cdot 1+Q^2s^2c^2}{a^2s^2c^2Q^2} - 1/a^2}\right) =$$

$$= \frac{ascQ}{(1-Qs^2)\sqrt{1-Qc^2}} \cdot \left(scQ + b\sqrt{\frac{q^2+Q^2s^2c^2}{a^2s^2c^2Q^2} - 1/a^2} \right) =$$

$$= \frac{ascQ}{(1-Qs^2)\sqrt{1-Qc^2}} \cdot \left(scQ + \frac{b}{a}\sqrt{\frac{q^2+Q^2s^2c^2}{s^2c^2Q^2} - 1} \right) =$$

$$= \frac{ascQ}{(1-Qs^2)\sqrt{1-Qc^2}} \cdot \left(scQ + q\sqrt{\frac{q^2}{s^2c^2Q^2} + 1 - 1} \right) =$$

$$= \frac{ascQ}{(1-Qs^2)\sqrt{1-Qc^2}} \cdot \left(scQ + q \cdot \frac{q}{scQ} \right) =$$

$$= \frac{ascQ}{(1-Qs^2)\sqrt{1-Qc^2}} \cdot \left(\frac{s^2c^2Q^2 + q^2}{scQ} \right) =$$

$$= \frac{a(s^2c^2Q^2 + q^2)}{(1-Qs^2)\sqrt{1-Qc^2}} = \tag{8}$$

Ранее был преобразован знаменатель в (6) и было получено, что

$$\frac{q^2}{s^2c^2Q^2} + 1 = \frac{(1-Qs^2)(1-Qc^2)}{s^2c^2Q^2} \tag{9}$$

Заметим, что левую часть в (9) можно представить как $\frac{q^2+s^2c^2Q^2}{s^2c^2Q^2}$ и тогда получим:

$$q^2 + s^2c^2Q^2 = (1-Qs^2)(1-Qc^2) \tag{10}$$

Подставим (10) в числитель (8) ($y_{\max}$):

$$y_{\max} = \frac{a(1 - Qs^2)(1 - Qc^2)}{(1 - Qs^2)\sqrt{1 - Qc^2}} = a\sqrt{1 - Qc^2} \tag{11}$$

Таким образом, найдено значение $y_{\max}$. Минимальное значение $y_{\min}$ равно по модулю $y_{\max}$, взятым со знаком минус.

Теперь найдем максимальное значение $x_{\max}$. Воспользуемся выражением для производной $y'(x)$ и найдем такие точки x, в которых производная $y'(x)$ стремится к бесконечности (то есть в этих точках дуга эллипса заворачивается).

$$y'(x) = \frac{1}{1 - Qs^2}\left(scQ - \frac{x \cdot b/a^2}{\sqrt{1 - Qs^2 - x^2/a^2}}\right) \tag{12}$$

В выражении (12) правая часть стремится к бесконечности тогда, когда второе слагаемое в скобках стремится к бесконечности. Запишем его отдельно:

$$\frac{xb/a^2}{\sqrt{1 - Qs^2 - x^2/a^2}} \to \infty \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2}{1 - Qs^2 - x^2/a^2}} \to \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - Qs^2 - x^2/a^2}{x^2} \to 0 \Leftrightarrow \frac{1 - Qs^2}{x^2} - \frac{1}{a^2} \to 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - Qs^2}{x^2} \to \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow x^2 \to a^2(1 - Qs^2) \Leftrightarrow x \to a\sqrt{1 - Qs^2}$$

Таким образом, найдены максимальные по модулю значения x и y:

$$y_{\max} = a\sqrt{1 - Qc^2}, \tag{13}$$

$$x_{\max} = a\sqrt{1 - Qs^2}. \tag{14}$$

Перепишем выражение функции $y(x)$ из (5), применяя (14):

$$y(x) = \frac{1}{1 - Qs^2}\left(scQx \pm b\sqrt{\frac{1}{a^2}(a^2(1 - Qs^2) - x^2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{1 - Qs^2}\left(scQx \pm q\sqrt{x_{\max}^2 - x^2)}\right) \tag{15}$$

Таким образом, были получены константы $x_{\max}$, $y_{\max}$ и функция $y(x)$, которая дает два значения y для заданной точки x. В программе можно построить эллипс, пробегая все значения x от $-x_{\max}$ до $x_{\max}$ и заполняя все пиксели в столбце внутри эллипса при заданном x от $\frac{1}{1-Qs^2}\left(scQx - q\sqrt{x_{\max}^2 - x^2}\right)$ до $\frac{1}{1-Qs^2}\left(scQx + q\sqrt{x_{\max}^2 - x^2}\right)$.

Python

Для того, чтобы уменьшить количество арифметических операций при вычислении $y(x)$ по формуле (15), выделим в ней константы (которые можно вычислить отдельно заранее):

$$y(x) = \frac{scQ}{1 - Qs^2} \cdot x \pm \frac{q}{1 - Qs^2} \cdot \sqrt{x_{\max}^2 - x^2},$$

$$y(x) = C_1 \cdot x \pm C_2 \cdot \sqrt{C_3 - x^2},$$

где $C_1 = \frac{scQ}{1-Qs^2}, \quad C_2 = \frac{q}{1-Qs^2}, \quad C_3 = x_{\max}^2.$