

# Физика

*3 семестр*

# Оглавление

<b>I</b>	<b>Механика</b>	<b>6</b>
1	Объекты классической механики . . . . .	6
2	Кинематика . . . . .	7
2.1	Кинематика материальной точки . . . . .	7
2.2	Кинематические элементы движения точки . . . . .	8
3	Краткие сведения из дифференциальной геометрии . . . . .	11
4	Частные случаи движения точек . . . . .	14
4.1	Прямолинейное движение точки . . . . .	14
4.2	Круговое движение . . . . .	15
5	Кинематика системы материальных точек и твердого тела . . . . .	15
6	Координаты свободного твердого тела, углы Эйлера . . . . .	17
7	Простейшие формы движения твердого тела . . . . .	18
7.1	Поступательное движение . . . . .	18
7.2	Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси . . . . .	18
7.3	Скорость и ускорение точек абсолютно твердого тела при сложном движении . . . . .	20
7.4	Инвариантность вектора угловой скорости . . . . .	21
<b>II</b>	<b>Динамика</b>	<b>23</b>
1	Динамика материальной точки. Законы Ньютона . . . . .	23
1.1	Первый закон Ньютона . . . . .	23
1.2	Понятие силы и массы. Второй закон Ньютона . . . . .	23
1.3	Принцип относительности Галилея . . . . .	25
2	Виды сил . . . . .	26
3	Примеры интегрирования уравнения движения для материальных точек . . . . .	28
4	Динамические характеристики движения . . . . .	30
5	Работа . . . . .	31
5.1	Работа . . . . .	31
5.2	Примеры консервативный и неконсервативных сил . . . . .	32
6	Энергия . . . . .	33
6.1	Кинетическая энергия . . . . .	33

6.2	Потанцевальная энергия . . . . .	34
7	Связь потенциальной энергии и силы . . . . .	35
8	Механические системы . . . . .	35
8.1	Уравнение движения механической системы . . . . .	35
9	Первые интегралы уравнения движения механической системы . . . . .	36
10	Законы сохранения . . . . .	37
10.1	Закон сохранения энергии . . . . .	37
10.2	Закон сохранения импульса . . . . .	38
10.3	Закон сохранения момента импульса . . . . .	41
11	Секториальная скорость, теорема площадей . . . . .	44
12	Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения . . . . .	45
<b>III Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика</b>		<b>46</b>
1	Опытные газовые законы . . . . .	48
1.1	Закон Авогадро . . . . .	48
1.2	Закон Бойля-Мариотта . . . . .	49
1.3	Закон Гей-Люссака . . . . .	49
1.4	Закон Менделеева- Клапейрона . . . . .	50
1.5	Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов . . . . .	51
1.6	Закон Дальтона . . . . .	54
2	Первое начало термодинамики . . . . .	54
2.1	Теплоемкость . . . . .	55
2.2	Теплоемкость одноатомных и многоатомных газов . . . . .	56
3	Термодинамические процессы в газах . . . . .	57
3.1	Изохорический процесс . . . . .	57
3.2	Изобарический процесс . . . . .	57
3.3	Изотермический процесс . . . . .	58
3.4	Адиабатический процесс . . . . .	59
4	Циклы в газах . . . . .	60
5	Цикл Карно, машина Карно . . . . .	61
6	Второе начало термодинамики . . . . .	63
6.1	Энтропия . . . . .	63
7	Явление переноса в термодинамических неравновесных системах(в газах) . . . . .	64
7.1	Вязкость. Внутреннее трение . . . . .	64
7.2	Теплопроводность . . . . .	66
7.3	Диффузия . . . . .	67
<b>IV Электричество и магнетизм</b>		<b>69</b>
1	Электрическое поле в вакууме . . . . .	69
1.1	Закон сохранения заряда . . . . .	69

1.2	Закон Кулона . . . . .	69
2	Электрическое поле . . . . .	70
2.1	Электрический диполь . . . . .	71
2.2	Линии напряженности электрического поля . . . . .	71
2.3	Теорема Гаусса . . . . .	72
2.4	Поле бесконечно однородно заряженной плоскости . . . . .	73
2.5	Электрическое поле двух разноименно заряженных плоскостей . . . . .	75
2.6	Поле бесконечного однородно заряженного цилиндра . . . . .	76
2.7	Сферически однородно заряженная поверхность . . . . .	77
2.8	Работа сил электростатического поля . . . . .	78
2.9	Потенциал электрического поля . . . . .	79
3	Диэлектрики . . . . .	81
3.1	Электрическое поле в диэлектриках . . . . .	81
3.2	Описание поля в диэлектриках . . . . .	83
4	Проводники . . . . .	84
4.1	Проводники во внешнем электрическом поле . . . . .	84
4.2	Равновесие заряда на проводнике . . . . .	85
5	Емкость . . . . .	86
5.1	Конденсаторы . . . . .	87
6	Энергия электрического поля . . . . .	90
6.1	Энергия системы зарядов . . . . .	90
6.2	Энергия заряженного проводника . . . . .	91
6.3	Энергия заряженного конденсатора . . . . .	91
6.4	Энергия электрического поля . . . . .	91
7	Постоянный электрический ток . . . . .	92
7.1	Электродвижущая сила . . . . .	93
7.2	Закон Ома сопротивления проводников . . . . .	94
7.3	Закон Джоуля-Ленса . . . . .	95
7.4	Закон Ома для замкнутой цепи . . . . .	96
7.5	Коэффициент полезного действия источника тока . . . . .	96
7.6	Разветвленные цепи. Правило Кирхгофа . . . . .	97
7.7	Взаимодействие токов . . . . .	98
8	Магнитное поле . . . . .	98
8.1	Понятие магнитного поля . . . . .	98
8.2	Закон Био-Савара-Лапласа . . . . .	99
8.3	Поля прямого и кругового токов . . . . .	100
8.4	Циркуляция вектора в поле соленоида . . . . .	101
8.5	Магнитное поле в веществе . . . . .	103
8.6	Описание магнитного поля магнетика . . . . .	103
8.7	Виды магнетиков . . . . .	106

8.8	Действие магнитного поля на токи и заряды . . . . .	107
8.9	Контур с током в магнитном поле . . . . .	108
8.10	Электромагнитная индукция . . . . .	109
8.11	Ток при замыкании цепи . . . . .	111
8.12	При замыкании . . . . .	111
8.13	Движение заряженной частицы в магнитном поле . . . . .	111
9	Электромагнитное поле . . . . .	112
9.1	Вихревое электрическое поле . . . . .	112
9.2	Ток смещения . . . . .	112
9.3	Электромагнитное поле . . . . .	113
9.4	Уравнения Максвелла(Интегральная форма) . . . . .	113
<b>V</b>	<b>Физические основы ЭВМ</b>	<b>115</b>
1	Краткие сведения из квантовой механики . . . . .	115
1.1	Корпускулярно-волновой дуализм . . . . .	115
1.2	Спектр электронных состояний в атомах молекулах и кристаллах	116
1.3	Энергетические состояния электронов в многоэлектронных ато- мах . . . . .	118
2	Виды химических связей . . . . .	120
2.1	Ковалентная связь . . . . .	120
2.2	Металлическая связь . . . . .	121
2.3	Ионная связь . . . . .	121
2.4	Молекулярная связь . . . . .	121
2.5	Водородная связь . . . . .	122
3	Электропроводимость твердых тел . . . . .	122
4	Квантовая модель электропроводимости . . . . .	122
4.1	Распределение Ферми . . . . .	126
4.2	Полупроводники . . . . .	126
4.3	Уровень Ферми в собственном полупроводнике . . . . .	129
4.4	Уровень Ферми в легированных проводниках. . . . .	131
4.5	Движение свободных носителей заряда в полупроводниках. . .	132
4.6	Уравнение неразрывности . . . . .	133
5	Электрические переходы . . . . .	135
5.1	Р-Н переход.Контактные явления на границе . . . . .	135
6	Тест 1 . . . . .	136
6.1	Задание 1 . . . . .	136
6.2	Задание 2 . . . . .	136
6.3	Задание 3 . . . . .	137
6.4	Задание 4 . . . . .	137
6.5	Задание 5 . . . . .	138

---

6.6	Задание 6 . . . . .	138
6.7	Задание 7 . . . . .	139
6.8	Задание 8 . . . . .	139
6.9	Задание 9 . . . . .	139
6.10	Задание 10 . . . . .	140

# Глава I

## Механика

### 1 Объекты классической механики

- — **Определение:** *Материальная точка* - это тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с его пространственным перемещением.
- — **Определение:** *Система материальных точек* - это множество материальных точек, положение и движение каждой из которых зависит от положения и движения остальных точек множества.
- — **Определение:** *Абсолютно твердое тело* - тело, деформациями которого можно пренебречь по сравнению с его пространственным перемещением.
- — **Определение:** *Сплошная среда* - всюду плотное множество материальных точек (жидкость, газы, деформируемые твердые тела).

#### Три постулата классической физики

1. Считается возможным одновременное измерение с любой точностью всех физических величин, описывающих данное тело.
2. Во всех системах отсчета промежутки времени между двумя событиями считаются одинаковыми.
3. Во всех системах отсчета расстояние между двумя телами в данный момент времени считается одинаковым.

#### Разделы классической механики

— **Определение:** *Кинематика* — раздел механики, который изучает перемещение тел друг относительно друга без учета причин, вызывающих это движение.

— **Определение:** *Статика* — раздел механики, который изучает условия равновесия тел.

— **Определение:** *Динамика* — раздел механики, который изучает механическое движение тел с учетом причин, вызывающих это движение.

## 2 Кинематика

### 2.1 Кинематика материальной точки

— **Определение:** *Траектория* — линия, по которой движется материальная точка.

— **Определение:** *Радиус-вектор* — вектор, соединяющий тело отсчета с материальной точкой. Обозначается  $\vec{r}$ .

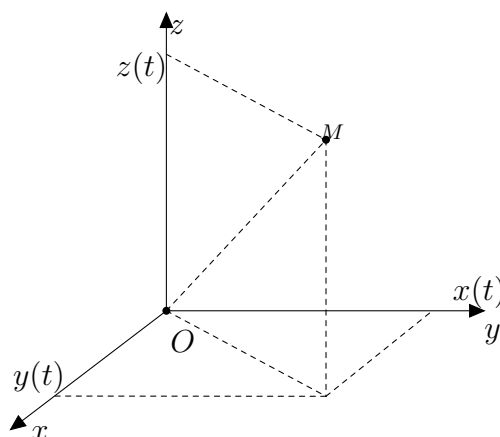
— **Определение:** *Вектор перемещения (или перемещение)* — вектор, соединяющий начальное положение материальной точки с ее текущим положением. Обозначается  $\Delta\vec{r}$ .

— **Определение:** *Путь* — полное расстояние, пройденное точкой по траектории. Величина пути всегда неотрицательна. Обозначается  $s$ .

#### Способы задания движения точки в пространстве

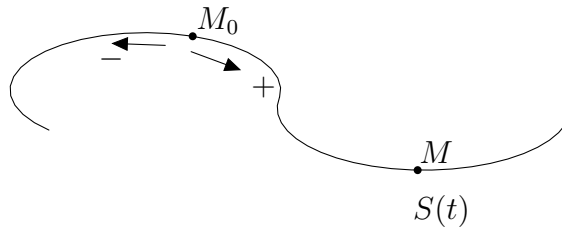
1. Векторный : задаются тело отсчета и радиус-вектор точки в зависимости от времени  $\vec{r}(t)$ .
2. Координатный: задаются точка отсчета, система координат, координаты точки в зависимости от времени  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

Взаимосвязь между 1 и 2 способами:  $\vec{r} = (x; y; z)$ .



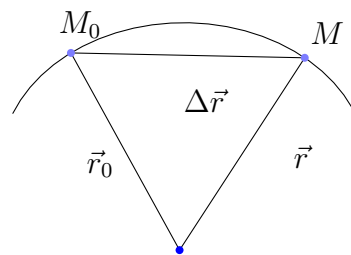


3. Естественный: задаются траектория движения, начальное положение точки на траектории, положительное направление движения по траектории, координата точки на траектории в зависимости от времени  $s(t)$  (причем такая функция должна быть непрерывна и дифференцируема).



## 2.2 Кинематические элементы движения точки

1. — **Определение:** *Скорость* — векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения точки в пространстве.



- (a) Векторный способ: фиксирует быстроту изменения положения материальной точки.

$$\vec{v}(cp) = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Рассмотрим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Получим скорость в исследуемый момент времени, так как  $v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$  — первая производная радиус вектора  $\vec{r}$  по времени.

- (b) Координатный способ:  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ , где  $v_x, v_y, v_z$  — скорость вдоль оси X, Y, Z или проекция вектора скорости на оси X, Y, Z соответственно.

Соотнося формулы получаем:

Так как  $\vec{r} = (x, y, z)$ , то

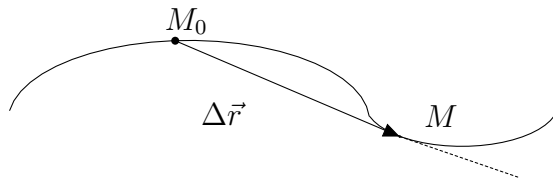
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Величина скорости - есть длина вектора  $\vec{v}$ , а именно :  $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

(с) Естественный способ:



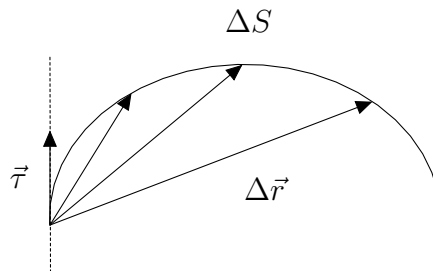
Рассмотрим

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории в момент времени.

Рассмотрим величину скорости:

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$



Таким образом, величина скорости определяется производной по времени, направленной по касательной, где сама касательная определена единичным вектором  $\vec{\tau}$ , то есть

$$\vec{v} = \vec{\tau} \cdot \dot{s}$$

где  $\vec{\tau}$  - вектор, скользящий по одной прямой и не *const*.

## 2. Ускорение (быстрота изменения скорости)

(а) Векторный способ:

$$w = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{r}$$

(b) Координатный способ:

$$\vec{w}(w_x, w_y, w_z)$$

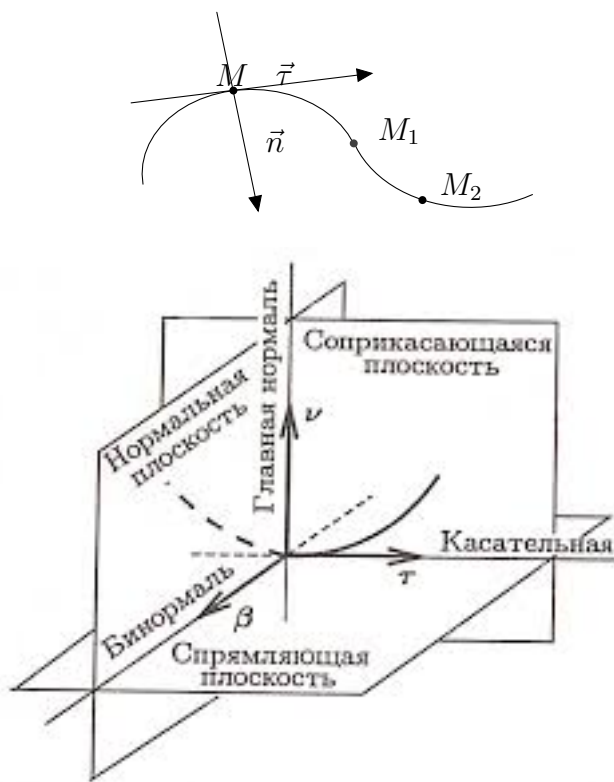
$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$w_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

$$w_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

### 3 Краткие сведения из дифференциальной геометрии



— **Определение:** Предельное положение плоскости проходящее через точки  $M_1, M_2$  некоторой траектории при стремлении  $M_1, M_2 \rightarrow M$  называется *соприкасающейся плоскостью*.

— **Определение:** Предельное положение прямой проходящей через точки  $M, M_1$  при  $M_1 \rightarrow M$  называется *касательной к траектории в точке M*. Касательная лежит в соприкасающейся плоскости.

— **Определение:** Плоскость перпендикулярная касательной называется *нормальной*.

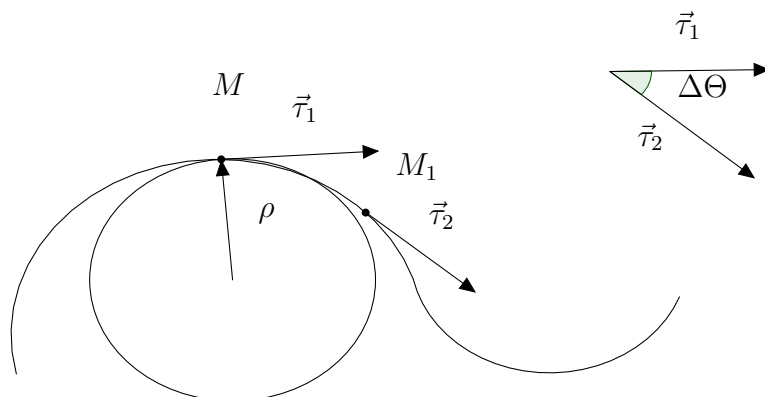
— **Определение:** Прямая перпендикулярная касательной и лежащая в соприкасающейся плоскости называется *главной нормалью*.

— **Определение:** Прямая перпендикулярная касательной и главной нормали называется *би-нормалью*.

$\tau$  выбирают в направлении движения точки, единичный вектор нормали  $\vec{n}$  направлен в сторону вогнутости траектории, а единичный вектор  $\vec{b}$  - би-нормаль направлен так, чтобы  $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$  образовывали правую тройку векторов.

— **Определение:** Плоскость проходящая через касательную и би-нормаль называется *спрямляющей плоскостью*.

— **Определение:** Набор векторов  $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$  носит название *естественного трехгранника*.



— **Определение:** Угол  $\Delta\Theta$  называют *углом дельта смежности*.

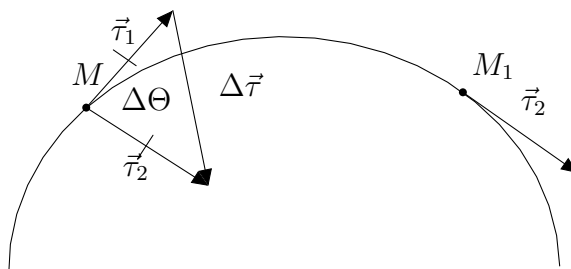
— **Определение:** Отношение  $\frac{\Delta\Theta}{\Delta s}$  называют *средней кривизной траектории*. Рассмотрим предел  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\Theta}{\Delta s} = K$  (параметр характеризующий траекторию) - *кривизна траектории* в точке  $M(\frac{d\Theta}{ds} = K)$

Выбираем три точки  $M_1, M_2, M$  и проведем через них окружность (причем такая окружность единственна)

— **Определение:** Предельное положение окружности при  $M_1, M_2 \rightarrow M$  называют *кругом кривизны*. Радиус такого круга называют *радиусом кривизны траектории* в точке  $M$  и обозначается  $\rho$ . Причем имеет место соотношение

$$K = \frac{1}{\rho} \quad (\text{I.1})$$

(с) Естественный способ:



$$\vec{w} = \frac{d(\vec{\tau} \cdot v)}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt}$$

Рассмотрим,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t}$$

При стремлении угла между  $\tau_1$  и  $\tau_2$  к нулю, угол между  $\tau$  и  $\Delta \vec{\tau}$  стремится к 90 градусам, то есть  $\Delta \vec{\tau}$  сонаправлен с *главной нормалью траектории движения*.

Из треугольника образованного векторами  $\tau_1, \tau_2$  и  $\Delta \vec{\tau}$  и того что:

$$|\Delta \tau| = 2|\vec{\tau}| \cdot \sin \frac{\Delta \Theta}{2} = 2 \sin \frac{\Delta \Theta}{2}$$

получаем что:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \tau|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{\Delta \Theta}{2})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Theta}{\frac{\Delta \Theta}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \Theta}{2}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta S}$$

Устремим,

$$\langle \Delta t \rightarrow 0; \Delta \Theta \rightarrow 0; \Delta S \rightarrow 0 \rangle =$$

$$\lim_{\Delta \Theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \Theta}{2}}{\frac{\Delta \Theta}{2}} \cdot \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Theta}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Так как,

$$\langle \lim_{\Delta \Theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \Theta}{2}}{\frac{\Delta \Theta}{2}} \rightarrow 1; \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Theta}{\Delta S} \rightarrow k; \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow v \rangle$$

«««< HEAD:mechanics.tex

$$k \cdot v = \frac{v}{\rho} \text{ (следует из (I.1) )}$$

===== »»»> 709a60454a4a05e0c33e14606180da56259f649b:chapters/mechanics.tex

То есть

$$\frac{d\tau}{dt} = \vec{n} \cdot \frac{v}{\rho}.$$

Таким образом,

$$\vec{w} = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} + \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{w}_n + \vec{w}_\tau$$

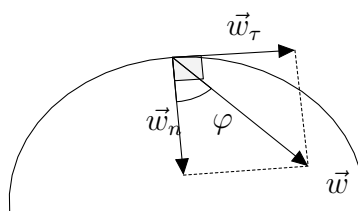
где  $\frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}$  - нормальная составляющая ускорения и  $\vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt}$  - тангенциальное ускорение.

Вывод:

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2}$$

где  $\tan \varphi = \frac{w_\tau}{w_n}$ , следовательно, тангенциальное ускорение:

$$w_\tau = \tan \varphi \cdot w_n$$



**!!!Важно :** При движении по кривой из  $v = \text{const}$  не следует, что  $w=0$  (например, движение по окружности)

## 4 Частные случаи движения точек

### 4.1 Прямолинейное движение точки

— **Определение:** Если траектория движения точки является частью прямой линии, такое движение называется **прямолинейным**. В этом движении систему координат выбирают так, чтобы траектория движения лежала на одной из осей декартовой системы координат.

Координаты на одной из осей всегда будут нулевыми, так движение точки будет описываться с помощью одной координаты. Тогда  $v(t) = \frac{df}{dt}$ ,  $w = \frac{dv}{dt}$ , а направление вектора скорости соответственно будет определяться по знаку:  $(+)$  — в направлении оси,  $(-)$  — в противоположном направлении.

1. *равномерное движение*  $v = \text{const}$ ;  $x = v \cdot t + x_0$
2. *равнопеременное движение*  $w = \text{const}$ ;  $w = a \frac{dv}{dt} = a \Rightarrow v = a \cdot t + C$  где  $C$  находится из начального условия  $v(0) = v_0$ , то есть:

$$v = at + v_0$$

«««< HEAD:mechanics.tex

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0t + C, \text{ где } C = x_0(x(0) = x_0)$$

===== »»»> 709a60454a4a05e0c33e14606180da56259f649b:chapters/mechanics.tex

### Колебательное движение

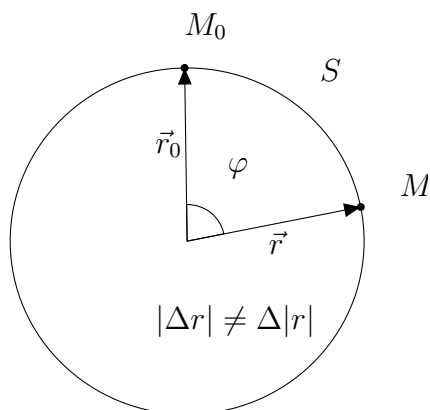
$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \text{ где } \varphi_0 - \text{начальная фаза}$$

$$v = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$W = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

Если знаки  $v(t)$ ,  $W(t)$  совпадают, то движение ускоренное, если нет - замедленное.

## 4.2 Круговое движение



— **Определение:** Если траектория движения точки является частью некоторой окружности, то движение называется **круговым**.

— **Определение:** Путь  $s(t) = \varphi(t) \cdot R$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

где  $\frac{d\varphi}{dt}$  называется **угловой скоростью** и обозначается  $\omega$  ( $v = R\omega$ )

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = R \cdot \frac{dw}{dt}$$

где  $\frac{dw}{dt}$  называется угловым ускорением и обозначается  $\varepsilon$

$$w_\tau = R \cdot \varepsilon \text{ — касательное ускорение}$$

$$w_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \text{ — нормальное ускорение}$$

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$$

$$w = R\sqrt{w_n^4 + \varepsilon^2}$$

## 5 Кинематика системы материальных точек и твердого тела

— **Определение:** На систему материальных точек могут быть наложены ограничения, называемые связями. Для однозначного задания системы из  $n$  точек необходимо задать  $3n$  координат.

— Если связи наложены только на координаты материальных точек, то они называются **геометрическими**.

— Если связи наложены на координаты и скорости точек, то такие связи называются **кинематическими**. Связи могут быть выражены уравнениями.



- Для геометрической связи:  $f_0 = f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$
- Для кинематической связи:  $g_0 = g(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n)$

Это уравнения для системы из  $n$  материальных точек.

— **Определение:** Если на систему наложено  $K$  связей, определенные уравнениями, то независимыми координатами будут только  $3n - K$  координат. Они называются координатами системы.

— **Определение:** Если на систему наложены только геометрические связи, то количество координат системы называется **числом степеней свободы системы**.

В абсолютно твердом теле расстояние между любыми двумя точками неизменно. Абсолютно твердое тело имеет 6 степеней свободы.

**Докажем данное утверждение:** возьмем в твердом теле точку  $A(x_A, y_A, z_A)$ . Затем точку  $B(x_B, y_B, z_B)$  и добавим связь

$$r_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \text{const}$$

Это уравнение накладывает одну связь между координатами  $x_B, y_B, z_B$ , то есть уменьшает количество независимых координат с 3 до 2.

Итого для описания положения точек А и В нужно  $3+2 = 5$  независимых координат

Возьмем аналогично точку  $(x, y, z)$  и добавим две связи :

$$r_{AC} = \text{const}, r_{BC} = \text{const}$$

Получим 9 координат и уже 3 связи:

$$r_{AB} = \text{const}$$

$$r_{AC} = \text{const}$$

$$r_{BC} = \text{const}$$

Эти связи уменьшают число независимых координат точки С с 3 до 1. Итого для описания положения точек А, В, С теперь нужно  $3+2+1 = 6$  независимых координат.

Возьмем точку  $D(x_0, y_0, z_0)$  , вместе с ней добавятся и 3 связи

$$r_{AD} = \text{const}$$

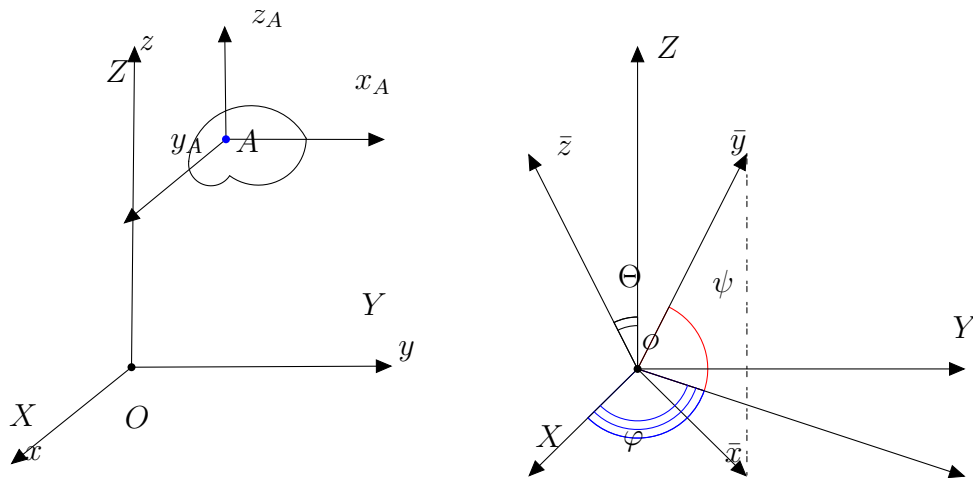
$$r_{CD} = \text{const}$$

$$r_{BD} = \text{const}$$

Эти связи полностью фиксируют положение точки D и они больше не добавляют степеней свободы (независимых координат для описания)

Для любой другой точки число степеней свободы останется прежним, они также жестко привязаны к первой точке А и поэтому не увеличивают общее число степеней свободы.

## 6 Координаты свободного твердого тела, углы Эйлера



Берем точку твердого тела  $A$ . Затем к ней привязываем систему координат внутри тела, задающих ориентацию тела в пространстве. Используя параллельный перенос переместим точку  $A$  в точку  $O$ .

1. при повороте измеряем углы поворота в  $x_A O y_A z_A$ . Совместим  $O$  и  $A$  образуется угол  $\angle ZOz = \Theta$  - *угол нутации*.

2. Рассмотрим плоскость  $x_A y$  в пересечении с  $XOY = ol$ .

$x_A y \cap XOY = ol$  - *линия узлов*

$\angle XOl = \varphi$  - *угол прецессии*

$\angle lAy = \psi$  - *угол собственного вращения*

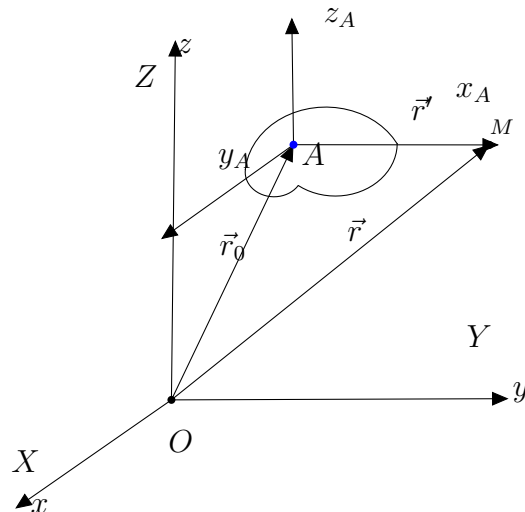
Причем

$$0 < \Theta \leq 180, 0 < \varphi \leq 360, 0 < \psi \leq 360$$

Таким образом, эти углы однозначно определяют положение твердого тела в пространстве с помощью координат  $(x_A, y_A, z_A, \Theta, \varphi, \psi)$ , где  $A(x_A, y_A, z_A)$  - полюс.

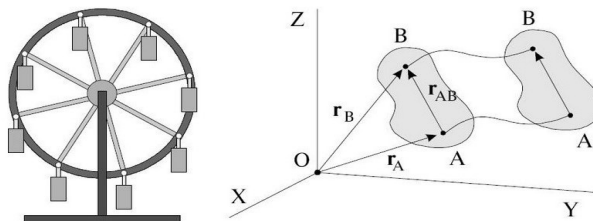
## 7 Простейшие формы движения твердого тела

### 7.1 Поступательное движение



При поступательном движении любой вектор проведенный в твердом теле остается параллелен самому себе. Очевидно:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$ ,  $r'$  - проведенный вектор из т.А в конец вектора  $r$  и за счет этого  $|\vec{r}'| = \text{const}$ , причем направление этого вектора также не меняется, поскольку движение поступательное.

Пример поступательного движения:



Траектории точек одинаковы, просто сдвиг на  $r'$ , применим операцию дифференцирования к  $r(t)$ :

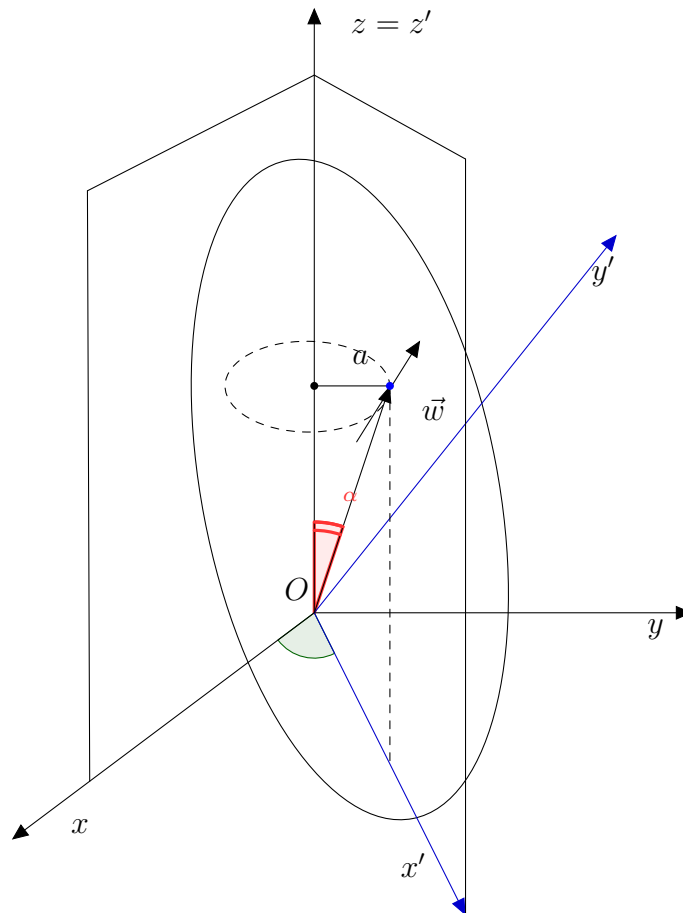
$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr_0}{dt} + \frac{dr'}{dt} = 0 \Rightarrow v_M = v_A$$

Получаем что скорости точек А и М одинаковы, причем если мы еще раз продифференцируем это равенство получим что ускорения этих точек также равны.

*Для описания поступательного движения твердого тела достаточно описания движения лишь одной его точки.*

### 7.2 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Если при своем движении твердого тела 2 точки А и В не меняют своего положения, то говорят, что *твердое тело вращается вокруг неподвижной оси*, проходящей через А и В, соответственно АВ - прямая являющаяся осью вращения.



Неподвижными точками будут и все точки на прямой АВ, то есть тело вращения имеет только одну степень свободы - достаточно лишь задать одну координату, чтобы определить положение тела в пространстве.

$\varphi(t)$  - функция определяющая положение тела в пространстве с помощью значения двухгранного угла, включающие отслеживаемую точку в разные моменты времени (причем траектория движения очевидно повторяет окружность)

$$\alpha - const, a - const : a = r_M \cdot \sin \alpha$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v = a \cdot \omega = r_M \cdot \sin \alpha \cdot \omega$$

- причем вектор скорости будет направлен по оси вращения, формулы можем записать вектор скорости как  $\vec{v} = [\omega, r] \Rightarrow \frac{dr}{dt} = [\omega, r]$ . Так как  $r - const$  такое равенство будет верно. Из этого выведем вектор ускорения:

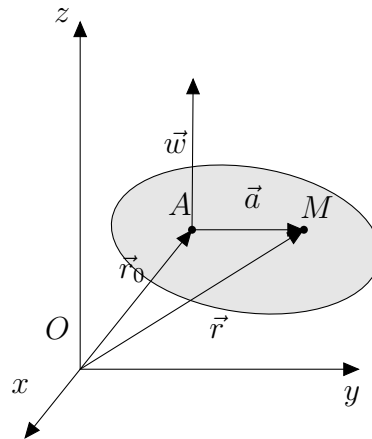
$$\vec{w} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\frac{d\omega}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{dr}{dt}\right]$$

так как  $\vec{\omega}$  - вектор, то и угловое ускорение  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}$  - вектор.

Получаем :

$$\vec{w} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\frac{d\omega}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\omega, [\omega, r]] \text{ , где } [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] = w_\tau \text{ , а } [\omega, [\omega, r]] = w_n$$

### 7.3 Скорость и ускорение точек абсолютно твердого тела при сложном движении



Пусть М - произвольная точка твердого тела.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}, |\vec{a}| = const$$

-берем модуль поскольку может меняться направление движения (произвольное движение)

Продифференцируем по t

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \frac{d\vec{a}}{dt} \text{ , где } \frac{d\vec{a}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{a}] \text{ (из вращательного движения)}$$

Тогда:

$$\vec{v}_m = \vec{v}_A + [\vec{w}, \vec{a}]$$

$\vec{v}_A$  - скорость поступательного движения

$[\vec{w}, \vec{a}]$  - вращательное движение вокруг подвижной оси

Еще раз продифференцируем по t

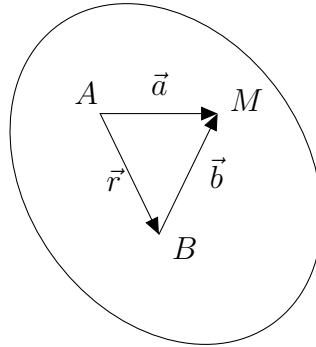
$$\vec{w}_M = \vec{w}_a + \frac{d[\vec{w}, \vec{a}]}{dt}$$

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + [\vec{\varepsilon}, \vec{a}] + [\vec{w}, [\vec{w}, \vec{a}]]$$

где  $\vec{w}_A$  - поступательное ускорение, а  $[\vec{\varepsilon}, \vec{a}] + [\vec{w}, [\vec{w}, \vec{a}]]$  - ускорение вращательного движения

## 7.4 Инвариантность вектора угловой скорости

Инвариантность вектора угловой скорости означает, что вектор угловой скорости сохраняет свое направление и величину в инерциальной системе отсчета, независимо от движения самого тела. Другими словами, если тело вращается относительно неподвижной точки его угловая скорость будет одинаковой в любой инерциальной системе отсчета.



$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + [\omega, a]$$

$$\vec{v}_B = v_A + [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

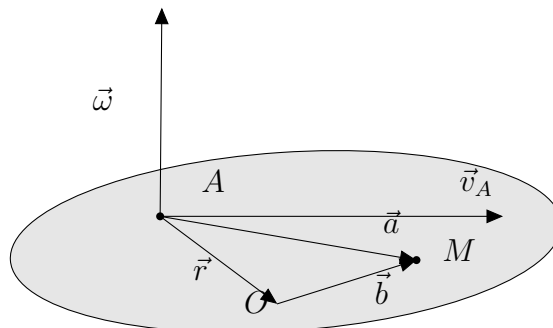
$$\vec{v}_M = \vec{v}_B + [\vec{\omega}, b]$$

$$v_M = \vec{v}_A + [\omega, r + b] = v_A + [\omega, r] + [\omega, b] = v_B + [\omega, b]$$

Вывод:  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ , то есть угловая скорость не зависит от выбора полюса. И тогда возникает вопрос: как найти наиболее оптимальный полюс?

**Ситуация 1:**

$$\vec{\omega} \perp v_A$$



$$v_M = v_0 + [\omega, \vec{b}]$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Выбираем  $r$  так, чтобы  $[\omega, r] = -v_A$ , то есть

$$v_0 = \vec{v}_A - \vec{v}_A = 0$$

Получаем

$$v_M = [\omega, b]$$

- есть только вращательная составляющая скорости, причем ось ОМ называют мнимой осью.

**Ситуация 2:**  $\vec{\omega}$  не перпендикулярно  $v_A$ , так тогда можем разложить  $v_A$  на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую. Тогда применим ситуацию 1 и получим что:  $[\omega, r] = -v_A$  (ортогональная проекция), а соответственно ортогональная составляющая будет перпендикулярна  $\omega$ .

Тогда :

$$v_M = v_A + [\omega, b] \text{ — винтовое движение}$$

# Глава II

## Динамика

### 1 Динамика материальной точки. Законы Ньютона

#### 1.1 Первый закон Ньютона

*Первый закон Ньютона : Существует такая система отсчета в которой всякое тело покоится или прямолинейно и равномерно движется до тех пор пока воздействие со стороны других тел не изменяет этого состояния - инерциальные системы отсчета (ИСО).*

В ИСО пространство однородно и изотропно, а время однородно.

- *Однородность* пространства означает, что во всех его точках все физические законы действуют одинаково.
- *Изотропность* пространства означает, что по всем направлениям пространства все физические законы (на вектора) действуют одинаково
- *Однородность времени* означает, что во все моменты времени все физические законы действуют одинаково.

*Любая система отсчета, которая покоится или движется прямолинейно и равномерно относительно инерциальной тоже будет ИСО, следовательно их бесконечное множество*

#### 1.2 Понятие силы и массы. Второй закон Ньютона

— **Определение: Масса** - мера инертности тела. Под инертностью понимают способность тела сопротивляться внешнему воздействию.

— **Определение: Сила** - мера взаимодействия тел. Она может проявляться либо в получении ускорения, либо в деформации.



### 1. *Принцип независимого действия*

Действия силы на тело не зависят от того покоится это тело или движется, а также не зависят от количества и вида других сил, действующих на это тело.

## 2. Принцип суперпозиции тел

**Определение:** Если на тело действует несколько сил, то их совместное действие можно заменить действием одной силы, равной векторной сумме сил. Таковую силу называют равнодействующей силой.

Если на тело действует система сил, равнодействующая которой равна  $\vec{0}$ , то тело не меняет своё состояние.

**Второй закон Ньютона:** ускорение тела прямо пропорционально силе, действующей на тело и обратно пропорционально массе тела

$$\vec{w} = k \cdot \frac{\vec{F}}{m}$$

где  $\vec{F}$  - равнодействующая сила,  $k$  - коэффициент пропорциональности из-за разных единиц измерения  $w$ ,  $m$ ,  $F$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{W}$$

Выберем единицы измерения так, чтобы  $k = 1$ , получаем:

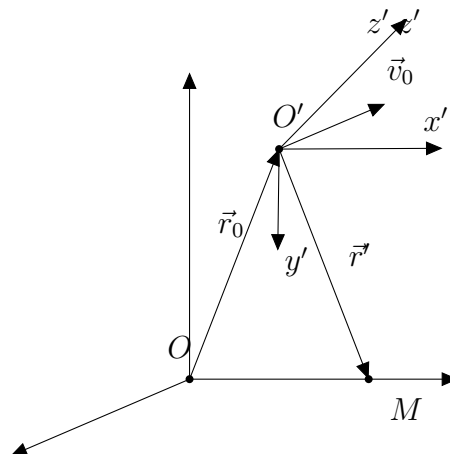
$$[F] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$$

**Третий закон Ньютона:** действие тел друг на друга носит характер взаимодействия. Силы, с которыми тела действуют друг на друга равны по величине, но противоположны по направлению.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$\vec{F}_{12}$  - сила, действующая на второе тело от первого,  $\vec{F}_{21}$  - сила, действующая на первое тело от второго

## 1.3 Принцип относительности Галилея



Возьмем две инерциальные системы отсчета. Пусть  $\vec{v}_0$  - постоянный вектор,  $Ox'y'z'$  - подвижная система (движется прямолинейно и равномерно)

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0(const) \Rightarrow$$

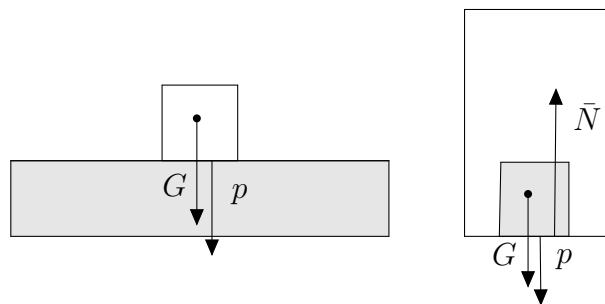
$$\vec{w} = \vec{w}'$$

**Принцип относительности Галилея:** Так как и масса и ускорение точки  $M$  равны в обеих системах отсчета, то во всех инерциальных системах отсчета силы действуют одинаково.

**Следствие:** Никакими опытами невозможно определить движется ли наша (инерциальная) система отсчета прямолинейно и равномерно или не движется.

## 2 Виды сил

### 1. Сила тяжести.



— **Определение: Сила тяжести**  $[G]$  - сила притяжения Земли, действующая на материальные объекты вблизи ее поверхности,  $G = m \cdot g$ . Сила тяжести приложена к телу.

— **Определение: Вес**  $[p]$  - сила, с которой тело действует на опору или подвес. Вес приложен к опоре.

Причем важно сказать, что вес и сила тяжести равны только для тел находящихся в покое.

— **Определение: Сила нормального давления**  $[\vec{N}]$  - сила, с которой опора действует на тело, так  $|\vec{N}| = |p|$  из третьего закона Ньютона.

Рассмотрим движение лифта на рисунке выше:

(а) вектор ускорения направлен вверх,  $\uparrow a, |a| < g$  (рисунок выше)

Применим второй закон Ньютона, а именно:  $m \cdot -a = mg + N(|N| = |p|) = mg + p$ , отсюда  $p = m \cdot (g + a) > G$

- (b) вектор ускорения направлен вниз,  $\downarrow a, |a| < g$

Применим второй закон Ньютона, а именно:  $m \cdot a = mg + N \langle |N| = |p| \rangle = mg + p$ , отсюда  $p = m \cdot (g - a) < G$

- (c) вектор ускорения направлен вверх,  $\uparrow a, |a| > g$  Тогда измениться лишь то, что тело будет действовать на другую опору, а именно на грань  $O_1$

- (d)  $|a| = g$ , то есть лифт находится в состоянии свободного падения.

Тогда по формулам получим, что  $|N| = 0 = |p|$ , то есть тело будет находиться в невесомости.

- (e) Рассмотрим движение по окружности, так чтобы тело оставалось на одной высоте (пример: движение спутника по орбите)

Тогда  $w_n = g = \frac{v^2}{R_3}$

## 2. Сила упругости (рассматриваем такие деформации как растяжение, сжатия)

**Закон Гука** : деформация, возникающая в упругом теле, пропорциональна приложенной к этому телу силе.

$$\vec{F} = -k \cdot \Delta x$$

## 3. Сила трения

Есть 2 деления этой силы на типы.

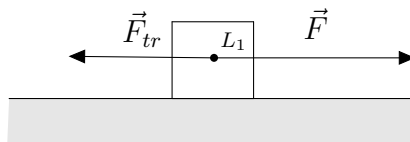
I.

- внешние
- внутренние

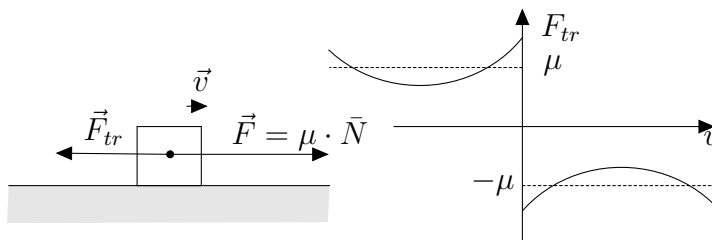
II.

- **Определение:** Силы сухого трения - силы возникающие при трении двух твердых тел

- (a) сила трения покоя:  $|F_{tr}| = |F|, F_{tr} = -F$



- (b) сила трения скольжения  $F = \mu \cdot N$



(с) сила трения качения:

- **Определение:** Силы вязкого трения - силы, возникающие при трении твердого тела в жидкой, газообразной среде, между слоями тел.

Рассмотрим движение в жидком вторнике, так:

$\vec{F} = -\alpha_1 \cdot \vec{v}$  — сопротивление при небольшой скорости (для каждого четверга разная)

$\vec{F} = -\alpha_2 \cdot \vec{v} \cdot v$  — сопротивление при большой скорости.

### 3 Примеры интегрирования уравнения движения для материальных точек

Основное уравнение движения материальной точки задается вторым законом Ньютона, а именно

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

с начальными условиями:

$$v(0) = v_0, r(0) = r_0$$

1. Сила зависит от *времени*

$$\begin{cases} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(t) \\ \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \\ \vec{r} = (x, y, z) \\ \vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \cdot \frac{dv_x}{dt} = F_x(t) \\ m \cdot \frac{dv_y}{dt} = F_y(t) \\ m \cdot \frac{dv_z}{dt} = F_z(t) \end{cases}$$

Рассмотрим для  $v_x(0) = v_{x0}; x(0) = x_0$ , для остальных аналогично:

$$dv_x = \frac{1}{m} \cdot F_x(t) dt$$

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} du = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t F_x(\xi) d\xi$$

$$v_x = v_{x0} + \frac{1}{m} \cdot \int_0^t F_x(\xi) d\xi$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \Rightarrow \int dx = \int v_x dx$$

$$x = x_0 + v_{x0}t + \int_0^t \left( \int_0^\eta F_x(\xi) d\xi \right) d\eta$$

2. Координаты вектора силы зависят от соответствующих *координат скорости*

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \frac{dv_x}{dt} = \vec{F}_x(v_x) \\ v = (v_x, v_y, v_z) \\ \vec{r} = (x, y, z) \\ \vec{F} = (F_x(v_x), F_y(v_y), F_z(v_z)) \end{cases}$$

Рассмотрим для  $v_x(0) = v_{x_0}; x(0) = x_0$ :

$$\frac{dv_x}{F_x(v_x)} = \frac{dt}{m}$$

$$\frac{t}{m} = \int_{v_{x_0}}^{v_x} \frac{du}{F_x(u)}$$

— отсюда получаем зависимости времени то скорости, а именно  $t = \varphi(v_x) \Rightarrow v_x = \varphi^{-1}(t)$ , пользуясь этим соотношением получим:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi^{-1}(t), x(0) = x_0$$

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi^{-1}(\tau) d\tau$$

Подставим:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \Rightarrow dt = \frac{dx}{v_x}$$

$$\frac{m \cdot v_x dv_x}{dx} = F_x(v_x), v(x_0) = v_{x_0}$$

$$\frac{m \cdot v_x dv_x}{F_x(v_x)} = dx$$

$$x = x_0 + \int_{v_{x_0}}^{v_x} \frac{m \cdot u du}{F_x(u)}$$

3. Координаты вектора силы зависят от соответствующих *координат радиус-вектора*

$\vec{r}$

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \frac{dv_x}{dt} = \vec{F}_x(x) \\ v = (v_x, v_y, v_z) \\ \vec{r} = (x, y, z) \\ \vec{F} = (F_x(x), F_y(y), F_z(z)) \end{cases}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(x), \text{ где } \frac{dx}{dt} = v_x \Rightarrow dt = \frac{dx}{v_x}$$

Подставим:

$$m \cdot \frac{v_x dv_x}{dx} = F_x(x)$$

$$dv_x^2 = \frac{2}{m} F_x(x) dx, v_x(x_0) = v_{x0}$$

$$v_x = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \int_{x_0}^x F(\xi) d\xi + v_{x0}^2}$$

— знак может быть определен из начального условия  $v_x(0) = v_{x0}$

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x), x(0) = x_0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{\varphi(x)} = dt, t = \int_{x_0}^x \varphi(\xi) d\xi$$

4. Сила есть сумма сил (с силами трения)

$$\vec{F} = \vec{F}_1(t) - \mu \vec{v} - k\vec{r}$$

В одномерном случае

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F_1(t) - \mu v - kx, v(0) = v_0, x(0) = x_0$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_1(t) - \mu \frac{dx}{dt} - kx$$

Поделим на m и введем новые обозначения:

$$\alpha = \frac{\mu}{m}, \omega^2 = \frac{k}{m}, f = \frac{F}{m}$$

Тогда, с учетом замены выше, получим

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x = f(t), v(0) = v_0, x(0) = x_0$$

## 4 Динамические характеристики движения

$$m \cdot \vec{w} = \vec{F}$$

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{F}$$

где  $m\vec{v} = \vec{p}$  - импульс точки - физическая величина, характеризующая движение материальной точки.

Получим:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F} dt$$

где  $\vec{F} dt$  - элементарный импульс силы. Проинтегрируем  $p(t_1) = p_1, p(t_2) = p_2$  от  $p_1$  до  $p_2$ :

$$\int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

— **интегральная форма записи второго закона Ньютона**, где  $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$  - импульс силы за промежуток времени.

— **Определение:** Моментом вектора  $\vec{a}$  относительно точки О называется векторное произведение  $[\vec{r}, \vec{a}]$ ;  $\text{mom}_O \vec{a} = [\vec{r}, \vec{a}]$ .

— **Определение:** Момент импульса  $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$

— **Определение:** Момент силы  $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$

Рассмотрим  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , умножим векторно слева на  $\vec{r}$ :

$$[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}] = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Рассмотрим  $\frac{d\vec{L}}{dt}$ :

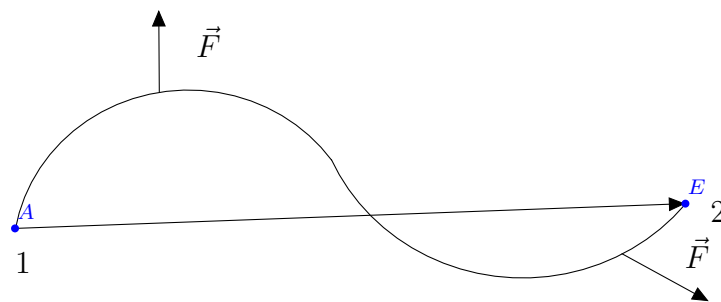
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = [\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}] + [\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}] = [\vec{v}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}] = \vec{0} + [\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}] = \vec{M}$$

## 5 Работа

### 5.1 Работа

Пусть точка перемещается под действием силы  $\vec{F}$ . Ее элементарное перемещение есть  $d\vec{r}$  ( $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$  не обязательно сонаправлены)

— **Определение:** *Элементарная работы силы* -  $\delta A = (\vec{F}, d\vec{r})$  - скалярное произведение вектора силы на вектор элементарного перемещения.



Пусть точка перемещается из положения 1 в положение 2 под действием силы  $\vec{F}$  необязательно постоянной.

Разобьем путь на малые отрезки:

$$\Delta A_i = F_i \cdot \Delta r_i$$



$$A_{12} \approx \sum_i \Delta A_i = \sum_i F_i \cdot \Delta r_i$$

При  $n \rightarrow \infty$  получим :

$$A_{12} = \oint \vec{F} d\vec{r} \text{ - криволинейный интеграл второго рода.}$$

Если  $\vec{F} = \text{const}$ , то  $A_{1,2} = F \cdot \delta \vec{r}_{1,2}$

— **Определение** Если работа силы не зависит от траектории движения материальной точки, а зависит только от начального и конечного положения, то такая сила называется **консервативной**.

**Теорема:** работа консервативной силы по замкнутой траектории равна 0

**Доказательство** Пусть  $\vec{F}$  - консервативная, а некоторая точка разбивает данную траекторию на две секции I и II:  $A = A_{12}^I + A_{21}^{II}$ , так как сила консервативная то  $A_{12}^I = A_{21}^{II}$ .

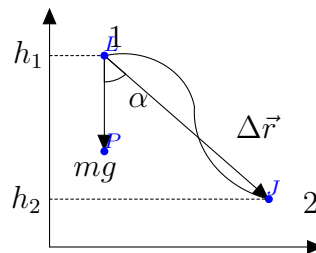
Пусть  $\delta A = \vec{F} d\vec{r}$ ,  $\delta A' = \vec{F} d\vec{r}'$ , но поскольку  $d\vec{r} = -d\vec{r}' \Rightarrow \delta A = -\delta A'$

Тогда из консервативности сил получаем:  $A = A^I - A^{II} = A^I - A^I = 0$

## 5.2 Примеры консервативных и неконсервативных сил

- Сила тяжести(консервативная)

$$A_{12} = mg \cdot \Delta r_{12} \cdot \cos \alpha = mg \Delta h = mg(h_1 - h_2)$$



- Сила упругости(консервативная)

$$F = -k\Delta x \Rightarrow A = - \int_{x_0}^{x_1} kx dx = -\frac{kx^2}{2}$$

- Сила трения(неконсервативная) Здесь  $\cos \alpha = -1$ , так как  $\alpha = -180$  и  $\Delta A_i < 0 \Rightarrow \delta A < 0 \Rightarrow \vec{F}$  - неконсервативная(силы противоположно направлены)

## 6 Энергия

- — **Определение: Энергия** — способность тела совершать работу. Различают два общих вида энергии:
  1. — **Определение: Кинетическая энергия** - энергия движения, связанная с перемещением тела в пространстве.
  2. — **Определение: Потенциальная энергия** - энергия в потенциальном поле сил.
- — **Определение: Мощность** — работа, совершаемая в единицу времени.  
 $N = \frac{\Delta A}{\Delta t}$  - средняя мощность  
 $N = \frac{\delta A}{dt} \Rightarrow N = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$  - элементарная мощность.
- **Определение:** Если к каждой точке пространства на тело действует сила закономерно, меняющаяся от точки к точке, то говорят, что тело находится в *поле сил*.
- **Определение:** Если работа силы по перемещению точки не зависит от траектории перемещения, а зависит только от начального и конечного положения, то такая сила называется *консервативной*. а соответствующее поле сил - *потенциальным полем*.
- **Определение:** Поле консервативной силы называется *потенциальным силовым полем*.

### 6.1 Кинетическая энергия

Рассмотрим высоту точки, изменяющей под действием силы  $\vec{F}$  свою скорость с 0 до  $v(t)$ . Обозначим  $T$  - *кинетическая энергия*, получим:

$$\delta A = dT$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = dT$$

Перепишем по второму закону Ньютона:

$$m \frac{dv}{dt} \cdot dr = dT$$

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} = dT$$

$$m \vec{v} d\vec{v} = dT$$

$$\frac{1}{2} m d\vec{v}^2 = dT$$

$$d\frac{v^2 \cdot m}{2} = dT$$

Тогда, итоговая формула:

$$\frac{mv^2}{2} = T$$

## 6.2 Потенциальная энергия

Возьмем произвольную точку  $u_0$  в потенциальном поле сил, возьмем вторую точку  $u_1$  и зафиксируем ее:

$u_1 = u_0 + \langle \text{работа по перемещению из (2) в (1), так потому что именно 2 точка у нас зафиксирована} \rangle A_{10}$ .

Возьмем вторую точку :  $u_2 = u_0 + A_{20}$ . Посчитаем работу при перемещении из (1)  $\rightarrow$  (2), так как поле это поле консервативных сил

$$\Rightarrow A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20} = u_1 - u_0 - u_2 + u_0 = u_1 - u_2$$

- для любых произвольных точек, таким образом можно считать что изменение величины и есть потенциальная энергия данной точки, поскольку она находится в потенциальном поле сил.

Таким образом, можно считать что  $A_{12} = -\Delta u$

**Замечание:** формула потенциальной энергии определена с точностью до произвольной постоянной. Причем важно отметить что значение потенциальной энергии зависит от выбора нулевого уровня.

### 1. Рассмотрим силу тяжести

$$A = (h_1 - h_2)mg = mgh_1 - mgh_2 = u_{h1} - u_{h2}$$

Итак, для силы тяжести:  $u = mgh$  (где  $h$  - высота над нулевым уровнем энергии)

### 2. Сила упругости

$$A = \frac{k\Delta x^2}{2}$$

Для простоты нулевым уровнем энергии для данной силы можно считать ту высоту при которой пружина(тело) не будет деформирована.

$$u = \frac{kx^2}{2}, \text{ где } x - \text{ есть высота от нулевого уровня энергии.}$$

## 7 Связь потенциальной энергии и силы

Пусть точка под действием силы  $\vec{A}$  перемещается вдоль направления  $l$ , очевидно совершая работу  $A$ , где

$$\delta \vec{A} = (\vec{F}, d\vec{l}) \Rightarrow -du = (\vec{F}, d\vec{l}) \Rightarrow -du = F \cdot dl \cdot \cos \alpha$$

$$F \cdot \cos \alpha \cdot dl = F_l dl \langle \text{так как } F \cdot \cos \alpha \text{ есть проекция силы на вектор } l \rangle$$

То есть, получим:

$$-du = F_l dl \Rightarrow F_l = -\frac{du}{dl}$$

Заметим, что  $l$  - произвольный вектор, так такая формула верна для любого вектора, который мы можем задать по координатам на осях  $x, y, z$ .

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$$

$$F = (F_x, F_y, F_z) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Итак, связь между потенциальной энергией и силой соответственно:

$$F = -grad(u)$$

- важно, градиент только по пространственным переменным  $x, y, z$ .

Тогда формула общей энергии:

$$E = T + U$$

## 8 Механические системы

### 8.1 Уравнение движения механической системы

*Механическая система* - множество материальных точек в которой движение каждой точки зависит от движения других точек в системе.

Рассмотрим механическую систему состоящую из  $n$  точек. Движение любой точки подчиняется второму закону Ньютона.

Важно сказать, что все силы присутствующие в этой системе разделяются на два типа:

1. внутренние - между точками системы
2. внешние - силы воздействующие извне

Пусть какая-то точка имеет массу  $m_i$ , тогда получим:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{w}_i$$

Принято разделять

$$F_i = \vec{F}^{in} + \vec{F}^{ex}$$

Обозначим  $F_{ij}$  - сила с которой i-тая точка действует на j-тую точку (внутренняя сила), тогда очевидно  $F^{in} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ij}$ , тогда можем переписать тождество так:

$$m \cdot \ddot{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ij} + F^{ex}$$

Запишем для каждой точки и получим систему дифференциальных уравнений второго порядка, причем не линейных. Чтобы получить конкретное решение данной системы, формулируем задачу Коши  $\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i0}, v_i(0) = v_{i0}$ .

**Замечание 1:** начальное условие определяет поведение системы в дальнейшем

**Замечание 2:**  $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F$ , т.е. такое уравнение разрешает брать отрицательное изменение времени, то есть мы можем двигаться назад во времени

## 9 Первые интегралы уравнения движения механической системы

— **Определение:** В уравнении движения системы те функции которые на протяжении всей системы остаются постоянными называют первыми интегралами.

$$f(r_1, \dots, r_m, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t) = f_0 - const$$

Они дают соотношения между точками системы, тем самым уменьшая размерность всей системы.

**Пример:** Рассмотрим точку которая движется под действием силы сопротивления среды:  $F = -kv$ , получаем

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= -kv \\ m \frac{d\vec{v}}{dt} + k \frac{dr}{dt} &= 0 \\ \frac{d(mv)}{dt} + \frac{d(kr)}{dt} &= 0 \\ \frac{d(m\vec{v} + k\vec{r})}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

То есть  $m\vec{v} + k\vec{r} = const = m\vec{v}_0 + k\vec{r}_0$  - постоянная величина, то есть эта функция и является первым интегралом.

Важно сказать, что первые интегралы не зависят от времени.

## 10 Законы сохранения

— **Определение:** *Аддитивная величина* - есть такая величина в системе, которую можно разбить на сумму величин составляющих эту систему (например, энергия всей системы). Причем в разных системах одна и та же величина может быть как аддитивной, так и неаддитивной. С такими аддитивными величинами связаны законы сохранения.

### 10.1 Закон сохранения энергии

— **Определение:** Механическая система называется *замкнутой* если на нее не действуют внешние силы или их действие скомпенсировано.

— **Определение:** Если все силы действующие на механическую систему являются *консервативными*, то такая система называется *консервативной механической системой*.

**Формулировка закона:** *механическая энергия системы сохраняется, остается постоянной для консервативной системы.*

Док-во:

Мы знаем что уравнение движения для механической системы:

$$m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{ex}$$

Причем заметим что равнодействующая таких сил будет консервативной силой, тогда можем по второму закону Ньютона перейти к следующему:

$$\begin{aligned} m_i \cdot \frac{dv_i}{dt} &= \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{dr_i}{dt} \\ m_i \cdot v_i \frac{dv_i}{dt} &= \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{m_i v_i^2}{2} \right) &= \frac{F_i dr_i}{dt} \end{aligned}$$

где  $F_i dr_i$  есть элементарная работа

$$\delta A_i = -du_i$$

Можно так записать поскольку она консервативная

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_i v_i^2}{2} \right) = -\frac{du_i}{dt}$$

Заметим, что  $\frac{m_i v_i^2}{2}$  - кинетическая энергия, тогда найдем энергию всей системы:

$$\frac{d}{dt}(T) = -\frac{d}{dt}(U)$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

$$T + U = E - const$$

### 10.1.1 Теорема об изменении кинетической энергии системы

Перейдем к предыдущим равенствам и рассмотрим их уже в не консервативной системе, а именно:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \frac{F_i dr_i}{dt}$$

Распишем это равенство как сумму внутренних и внешних сил:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = -\frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ij} dr_i + F_i^{ex} dr_i}{dt}$$

$$dT_i = \delta A_i^{in} + \delta A_i^{ex}$$

это работа над точками системы внутри и работа над точками системы извне

$$dT = \delta A^{in} + \delta A^{ex}$$

Так как данная система *не консервативна*, следовательно эта **работа зависит от траектории каждой точки**, чтобы посчитать ее нужно проинтегрировать по траектории движения:

$$\int_{T_1}^{T_2} dT_i = \oint_{\sigma_i} \delta A_i^{in} + \oint_{\sigma_i} \delta A_i^{ex}$$

$$\Delta T = A^{in} + A^{ex}$$

То есть изменение величины кинетической энергии механической системы равно работе всех внутренних и внешних сил соответственно над каждой точкой этой системы.

## 10.2 Закон сохранения импульса

**Закон сохранения импульса:** Импульс сохраняется в замкнутой механической системе

Док-во: Выпишем второй закон Ньютона

$$m_i \ddot{r}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ij} + F_i^{ex}$$

так как мы рассматриваем замкнутую систему, то уравнение следующее:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ij}$$

$$\begin{aligned}\frac{d(m_i v_i)}{dt} &= \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ij} \\ \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i v_i \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ij} \\ &= \begin{pmatrix} F_{12} & F_{13} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{23} & \dots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Будем складывать элементы этой матрицы так :  $F_{ij} + F_{ji} = 0$ , поскольку это сумма силы и противодействующей ей силе. Тогда получим:  $\frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow p = const$ , где  $p = mv$

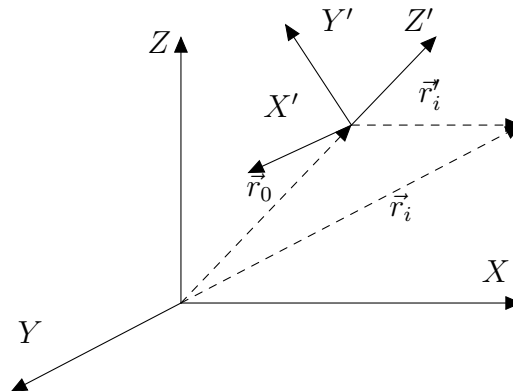
### 10.2.0.1 Импульс незамкнутой системы

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ij} + F_i^{ex}$$

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ij} (= 0) + \sum_{i=1}^n F_i^{ex} \Rightarrow \vec{K} = \sum_{i=1}^n F_i^{ex}$$

$\vec{K}$  - вектор внешних сил, и в этом случае:  $\frac{dp}{dt} = \vec{K}$

### 10.2.1 Центр масс теорема о движении в системе центра масс.



Вычислим импульс точки перемещающейся из одной системы координат в другую систему:

$$P = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i(K)$$

$$P' = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i(K')$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$



Так как обе системы инерциальны, то можем взять производные:  $\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{v}'_i$ , тогда подстановкой в  $P$  получаем:

$$P = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_0 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i$$

$P = v_0 \cdot M + P'$  для вычисления импульса в другой системе отсчета.

— **Определение:** Оказывается, что можно найти такую систему отсчета с центром в точке  $C$  для которой  $P' = 0$ , такая система будет называться **системой центра масс**, а сама точка  $C$  - центром масс. Тогда в такой системе:  $P = \vec{v}_c \vec{M}$

$$M \cdot \frac{dr_c}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{dr_i}{dt}$$

$$\frac{dr_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{M} \right) \cdot dt$$

$$r_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} + C, \text{ где } C = 0 \text{ в силу начальных условий}$$

Формула для нахождения центра масс или для непрерывных тел (через координаты):

$$x_c = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV}, \text{ где } \rho(x, y, z) - \text{функция распределения плотности.}$$

И подставляя  $P = M \cdot \vec{v}_c$  в  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K}$  получим

$$M \cdot \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{K}$$

**Центр масс механической системы движется как некоторая материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы.**

### 10.2.2 Теорема Кенига

*Кинетическая энергия механической системы представляет собой сумму двух слагаемых: кинетической энергии механической системы как единого целого и энергии движения точек системы вокруг ее центра.*

Доказательство

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot \vec{v}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}'_i)^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot v_c^2}{2} + \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_c \cdot \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot v_i'^2}{2} \\ &\Rightarrow \frac{M \cdot v_c^2}{2} + v_0 \cdot \sum_{i=1}^n m_i v_i + \frac{m_i \cdot v_i'^2}{2} = \frac{M v_c^2}{2} + \frac{m_i \cdot v_i'^2}{2} = T \end{aligned}$$

### 10.3 Закон сохранения момента импульса

**Формулировка:** Момент импульса механической системы сохраняется для замкнутой механической системы.

Доказательство:

$$m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{ij} + \vec{F}^{ex}$$

Поскольку рассматриваемая система замкнутая, перепишем так:

$$m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{ij}$$

Умножим векторно каждое из уравнений слева на радиус вектор каждой точки:

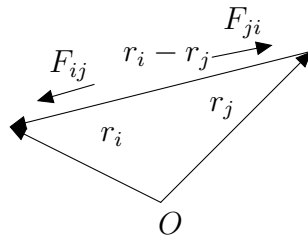
$$[\vec{r}_i, \frac{dm_i \vec{v}_i}{dt}] = \sum_{j=1, j \neq i}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}]$$

Заметим, что  $[r, \frac{dp}{dt}] = \frac{d}{dt}[r, p] = \frac{dL}{dt}$ , из-за замкнутости системы получим  $L = \sum_{i=1}^n L_i$ , подставим :

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \sum_{j=1, j \neq i}^n [r_i, \vec{F}_{ij}] \\ \sum_{i=1}^n \frac{dL_i}{dt} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n [r_i, \vec{F}_{ij}] \end{aligned}$$

Рассмотрим  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n [r_i, \vec{F}_{ij}]$  :

$$= \begin{pmatrix} [r_1, \vec{F}_{12}] & [r_1, \vec{F}_{13}] & \dots & [r_1, \vec{F}_{1n}] \\ [r_2, \vec{F}_{23}] & [r_2, \vec{F}_{24}] & \dots & [r_2, \vec{F}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [r_n, \vec{F}_{n1}] & [r_n, \vec{F}_{n2}] & \dots & [r_n, \vec{F}_{nn}] \end{pmatrix}$$



Разобьем специальным образом по суммам:

$$= [r_1, F_{12}] + [r_2, F_{21}] + \dots + [r_i, F_{ij}] + [r_j, F_{ji}] + \dots = \dots + [r_i, F_{ij}] - [r_j, F_{ij}] = [r_i - r_j, F_{ij}] = 0$$

Такое векторное произведение равно нулю из свойств векторного произведения (угол между слагаемыми-векторами = 0, см. рисунок выше)

Таким образом, возвращаясь к рассмотрению равенства выше получаем:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = const$$

### 10.3.1 Момент импульса незамкнутых систем

Возьмем полное уравнение второго закона Ньютона для незамкнутых систем:

$$m_i \cdot \frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{ex}$$

$$[\vec{r}_i, \frac{dm_i v_i}{dt}] = \sum_{j=1, j \neq i}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{ex}]$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{ex}]$$

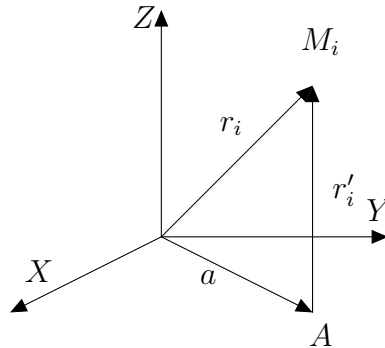
Из доказанного выше  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] = 0$

$$\sum_{i=1}^n \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{ex}]$$

$$\frac{dL_i}{dt} = \vec{N}$$

$\vec{N}$  - главный момент внешних сил

### 10.3.2 Момент импульса при изменении точки отсчета

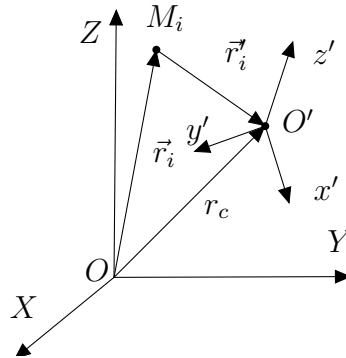


$$\sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{P}_i] = L, \text{ где } \vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{a}.$$

Продифференцируем этот вектор по времени:  $\vec{v}_i = \vec{v}'_i$ . Следовательно, при изменении точки отсчета скорость движения точек не изменится, а следовательно импульс так же не изменится  $\vec{p}_i = \vec{p}'_i$ , посчитаем момент сил

$$L = \sum_{i=1}^n [r'_i + a, p_i] = \sum_{i=1}^n [r'_i, p_i] + [\vec{a}, \sum_{i=1}^n p_i] = L' + [\vec{a}, \vec{P}]$$

### 10.3.3 Момент импульса относительно центра масс



Разница от прошлого случая в том, что система движется вместе с основной системой

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_c$$

Продифференцируем этот вектор по времени:  $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + v_c$ . Переходим к новой системе:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i, \mathbf{P}_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_c, m_i(\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_c)] \Rightarrow \\ &= \sum_{i=1}^n [r'_i, m_i \cdot v'_i] + \sum_{i=1}^n [r'_i, m_i \cdot v_c] + \sum_{i=1}^n [r_c, m_i \cdot v'_i] + \sum_{i=1}^n [r_c, m_i \cdot v_c] \\ &= L'_c + [r_c, v_c \cdot \sum_{i=1}^n m_i] \end{aligned}$$

Пояснение:

1.  $\sum_{i=1}^n [r'_i, m_i \cdot v_c] = 0$  поскольку  $r'_c = \frac{r'_i m_i}{M}$ , но так как мы рассматриваем систему центра масс, то в ней  $r'_c = 0$ , а следовательно  $\sum_{i=1}^n [r'_i, m_i \cdot v_c] = 0$
2.  $\sum_{i=1}^n [r_c, m_i \cdot v'_i] = 0$ , поскольку импульс в системе центра масс равен нулю

**Вывод:** момент импульса равен сумме момента импульса относительно центра масс и импульса всей системы как единого целого (аналог теоремы Кенига)

$$L = L'_c + [r_c, v_c \cdot \sum_{i=1}^n m_i]$$

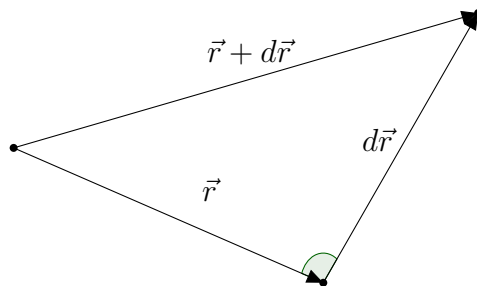
Тем самым, для абсолютного твердого тела хватит лишь двух уравнений, чтобы полностью определить его движение:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

$\vec{N}$  - главный момент внешних сил,  $\vec{K}$  - главный вектор внешних сил

## 11 Секториальная скорость, теорема площадей



Пусть есть некоторая точка, которая движется в пространстве. Посчитаем площадь треугольника на рисунке за время  $dt$  (поскольку наш треугольник изменяется со временем) :

$$ds = \frac{1}{2} r \cdot dr \cdot \sin(\hat{r}; \hat{dr})$$

$$\langle dr = v dt \rangle$$

$$ds = \frac{1}{2} r v dt \sin(\hat{r}; \hat{dr})$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin(\hat{r}; \hat{dr})$$

— **Определение:** *Площадь, производная которой определяется радиус вектором при движении - **секториальная площадь**.* Причем вектор этой величины направлен перпендикулярно плоскости в которой лежит треугольник. Обозначение:  $\dot{S} = \frac{1}{2}[r, v]$

Несложно заметить, что этот вектор похож на вектор момента импульса, учитывая что  $L = [r, mv]$  следует  $L = 2M\dot{S}$

— **Определение:** ***Центральная сила** - сила, линии действия которой проходят через одну точку, которая в свою очередь называется центром силы.*

*Если механическая система движется под действием центральной силы ее момент импульса относительно центра масс и любой другой неподвижной точки не изменяется.*

$$L = [r, p] = \text{const}$$

**Теорема площадей:** *Если материальная точка движется под действием центральной силы то ее траектория - плоская кривая и за равные промежутки времени радиус-вектор точки описывает равные по величине площади.*

Справедливо и обратно: если траектория точки - плоская кривая и за равные промежутки времени радиус-вектор точки описывает равные по величине площади, то точка движется под действием центральной силы.

## 12 Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения

1. **I закон:** все планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.
2. **II закон:** радиус-векторы планет за равные промежутки времени описывают равные по величине площади.
3. **III закон:** квадрат времени обращения планет вокруг Солнца относится как кубы больших полуосей эллиптических орбит:  $T_1^2 : T_2^2 : \dots = r_1^3 : r_2^3 : \dots$

Рассмотрим второй закон Ньютона:

$$F = m \frac{v^2}{r} = \left\langle v = \frac{2\pi r}{T} \right\rangle = m \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = 4\pi^2 \frac{mr}{T^2}$$

При этом по закону Кеплера:

$$T^2 = Kr^3, \text{ подставив получим}$$

$$F = \frac{4\pi^2 m}{Kr^2}$$

Тогда, логично полагать что если Солнце притягивает к себе планеты солнечной системы, то очевидно что тело с такой же силой притягивает солнце, но тогда в этой формуле должна быть масса солнца, и она заключена в  $\frac{4\pi^2}{K}$

$$F = G_1 \frac{Mm}{r^2}, \text{ где } G_1 M = \frac{4\pi^2}{K}.$$

Однако очевидно, что существует сила с которой объекты на Земле притягиваются друг другу.

**Закон всемирного тяготения:** все тела притягиваются друг другу с силой прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

$$\text{Гравитационная постоянная: } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

Заметим, что во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения отличается масса: в первом случае - масса инерциальная, во втором масса гравитационная. В практике было доказано что значения этих масс совпадают с точностью до 13 знака, однако в теоретически еще ничего не было доказано.

## Глава III

# Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика

Молекулярно-кинетическая теория рассматривает состояния тел и переходы между агрегатными состояниями, преобразования различных тел с позиции что они состоят из большого числа молекул.

### Положения молекулярно-кинетической теории

1. Все тела состоят из огромного числа молекул
2. Молекулы непрерывно и хаотично движутся в телах
3. Взаимодействие между молекулами различных тел - различно

Важно отметить, что действие огромного числа молекул описывается статистическими законами. Будем рассматривать среднее значение молекул.

— **Определение: Термодинамика** - рассматривает различные термодинамические состояния системы и различные переходы между ними, причем рассматривает систему как единое целое. Состояния любой системы описывается с помощью термодинамических параметров : давление  $P$ , объем(удельный объем)  $V$ , температура  $T$ . То есть любое состояние описывается функцией  $F(P, V, T)$ .

— **Определение: Давление** - отношение силы к площади, к которой эта сила приложена:  $P = \frac{F}{S}$

Причем, в газообразных и жидких телах - давление, в твердых - напряжение. Также в газообразных и жидких телах давление распределяется одинаково по всем направлениям. а в твердых - может и нет.

За единицу атомной массы(атомный вес) принимают значение равное :  $M = \frac{1}{12}C^{12}$

— **Определение:** Количество вещества масса которого выражена в килограммах численно равна атомной массе называется киломоль (если в граммах - моль).

— **Определение:** Масса одного киломоля называется молярной массой вещества.

Средняя кинетическая энергия всех молекул, обозначается:  $\xi_k$

Энергия взаимодействия между молекулами вещества:  $u$

Общая энергия вещества:  $U = \xi_k + u$



Зависимость между  $\xi_k$  и  $u$  определяется агрегатным состоянием вещества:

- $\xi_k \gg u$  - газообразное
- $\xi_k \approx u$  - жидкое
- $\xi_k \ll u$  - твердое

У температуры нет точного и однозначного определения, но мы ее определили так:

— **Определение:** Если два тела при соприкосновении обмениваются энергией в виде тепла, то значит у этих тел разные температуры, причем тела отдающие тепло, имеет более высокую температуру, а принимающие соответственно более низкую.

Для измерения используют специальные шкалы, самые популярные из них: *шкала Цельсия* - мировая практическая шкала, *шкала Кельвина* - термодинамическая шкала.

- шкала Цельсия: имеет 2 реперные точки - температура замерзания воды -  $0C^\circ$  и температура кипения воды -  $100C^\circ$
- шкала Кельвина: имеет 1 реперную точку - тройная точка воды (достигается при давлении 611 Па), это состояние когда вода находится сразу в трех агрегатных состояниях.

$$\text{Абсолютный ноль} - 0K, T_k = tC^\circ + 273,15$$

— **Определение:** *Идеальный газ* - это газ, который удовлетворяет нескольким условиям:

1. размер молекул пренебрежительно мал по сравнению с размером сосуда где находится газ (то есть размер молекул много меньше чем расстояние между ними)
2. энергия взаимодействия между молекулами  $U = 0$
3. Столкновение молекул между собой и стенками сосуда считаются абсолютно упругими (то есть происходят без потери энергии)

## 1 Опытные газовые законы

### 1.1 Закон Авогадро

**Формулировка:** киломоли всех идеальных газов при одних и тех температурах и давлениях занимают одинаковый объем. При этом при нормальных условиях ( $T_o =$

$273,15^\circ, P_o = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ) один киломоль идеального газа занимает объем  $V_o = 22,4 \text{ м}^3$ .

Из этого следует вывод, что киломоли всех веществ содержат одинаковое число молекул, называемое числом Авогадро:  $N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$  в киломолях и соответственно (соответственно в молях:  $N_a = 6,023 \cdot 10^{23}$ )

Следующие законы связаны с постоянством одной из величин. В продолжении, масса вещества не изменяется.

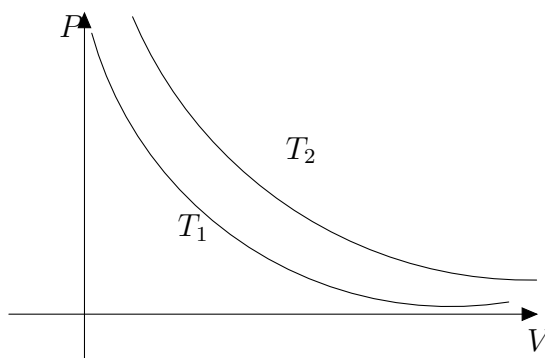
## 1.2 Закон Бойля-Мариотта

**Формулировка:** При постоянной температуре и массе  $m - \text{const}, T - \text{const}$  произведение  $P \cdot V = \text{const}$  (произведение давления на объем - постоянная величина)

— Процесс протекающий при  $T = \text{const}$  называется **изотермальным**:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

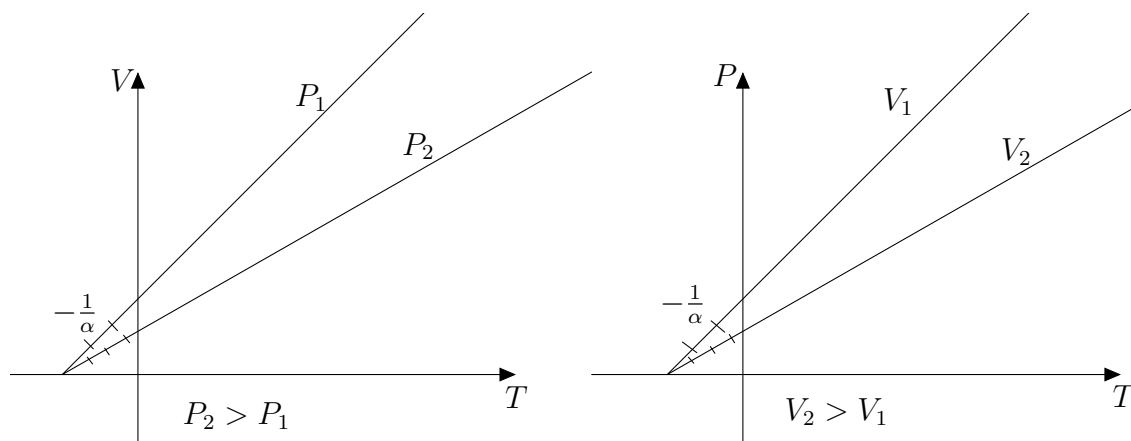
— Линия изображающая изотермальный процесс называется **изотермой**



## 1.3 Закон Гей-Люссака

**Формулировка:**

1. Объем любого газа при  $m - \text{const}, P - \text{const}$  линейно зависит от температуры ( $V = V_o(1 + \alpha t^\circ \text{C})$ , где  $\alpha = \frac{1}{273,15}$ )
2. Давление любого газа при  $m - \text{const}, V - \text{const}$  линейно зависит от температуры ( $P = P_o(1 + \alpha t^\circ \text{C})$ , где  $\alpha = \frac{1}{273,15}$ )



— **Определение:** Процесс, протекающий при постоянном объеме называется **изохорическим**(**изохорным**), а соответствующая линия **изохорой**.

— **Определение:** Процесс, протекающий при постоянном давлении называется **изобарическим**(**изобарным**), а соответствующая линия **изобарой**.

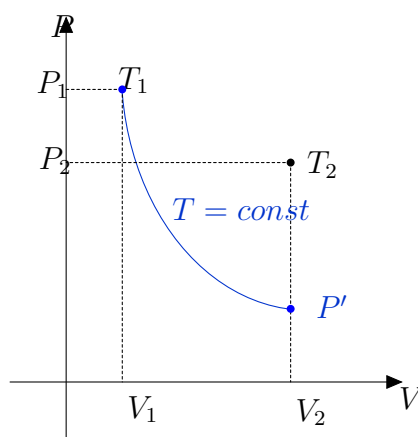
Тогда можно записать:

$$V = V_o \frac{T}{T_o} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{V}{V_o} = \frac{T}{T_o} \\ \frac{P}{P_o} = \frac{T}{T_o} \end{cases}$$

## 1.4 Закон Менделеева- Клапейрона

— PV-диаграмма – график, связывающий давление и объем.



$P'$  - промежуточное состояние. Пользуясь известными законами,попробуем перевести из состояния 1 в состояние 2.

1. Изотермически приведем  $V_1 \rightarrow V_2$
2. Изохорически приведем к  $T_2$

Применим закон *Бойля- Мариотта*:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \langle T = const = T_1 \rangle$$

Тогда, в силу:  $\langle V_1 = const = V_2 \rangle$

$$\begin{aligned}\frac{P_1}{T_1} &= \frac{P_2}{T_2} \\ P_1 &= \frac{T_1 P_2}{T_2} \\ P_1 V_1 &= \frac{T_1 P_2 V_2}{T_2} \\ \frac{P_1 V_1}{T_1} &= \frac{P_2 V_2}{T_2}\end{aligned}$$

В силу произвольности выбранных состояний для данной массы данного газа справедливо:

$$\frac{P \cdot V}{T} = const$$

- *уравнение Клапейрона*

Пусть  $V_m$  - объем одного киломоля. Тогда в силу закона Авогадро:

$$\frac{P \cdot V_m}{T} = R$$

- *уравнение состояний идеального газа*, где  $R$  - одинаковая постоянная для всех газов.

Тогда если  $V = V_m \cdot \nu$ , где  $\nu = \frac{m}{\mu}$  - количество вещества. Получим:

$$PV = \nu RT \Rightarrow PV = \frac{m}{\mu} RT$$

- *уравнение Менделеева-Клайперона*

## 1.5 Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

$\xi_i$  - энергия отдельной молекулы,  $\bar{v}_i$  - скорость отдельной молекулы.

**Внутренняя энергия газа:**

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m \bar{v}_i^2}{2}$$

где  $N$  - количество молекул газа

$\langle \varepsilon \rangle$  - средняя энергия одной молекулы:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{E}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{m \bar{v}_i^2}{2}$$

Если рассматриваем однородный газ:

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \bar{v}_i^2 = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\bar{v}_i^2}{N} = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle$$

где  $\sum_{i=1}^N \frac{\bar{v}_i^2}{N}$  - средний квадрат скорости

$v_{sr} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$  - **среднеквадратичная скорость**,  $\langle v \rangle$  - средняя величина скорости:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i$$

Заметим,  $\langle v \rangle < v_{sr}$

- Макропараметры:  $P, T, \nu$

- Микропараметры  $\varepsilon, v_{sr}$

1. Будем считать что все молекулы в газе движутся по трем взаимно перпендикулярным прямым
2. Из всех молекул к стенке будет двигаться лишь  $\frac{1}{6}$  часть молекул в объеме, так как лишь  $\frac{1}{3}$  прямых перпендикулярна стенке и на ней 2 направления, то есть  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
3. Все молекулы имеют скорость  $v$

— **Определение: Концентрация** - количество молекул в единице объема:  $n \cdot \Delta t$  - изменение времени

Пусть имеется стенка сосуда площадью  $\Delta S$ . Выясним  $\Delta N$  - число молекул, которое ударяется о стенку за время  $\Delta t$ .

Объем из которого молекулы могут долететь до стенки:

$$V = v \cdot \Delta t \cdot \Delta S$$

$$, \text{ где } \Delta N = \frac{1}{6} \cdot n \Delta V = \frac{1}{6} \cdot nv \cdot \Delta t \cdot \Delta S$$

Импульс обозначим буквой  $j$ :  $j = mv$

$$\Delta j = -mv - (mv) = -2mv \Rightarrow$$

сама стенка получила тот же импульс но со знаком +

Тогда общий импульс:

$$\Delta J = \Delta N \cdot \Delta j = \frac{1}{3} nv^2 m \Delta t \cdot \Delta S$$

Тогда используя запись второго закона Ньютона в импульсной форме получим:

$$\Delta J = F \Delta t$$

$$\begin{aligned} \langle P = \frac{F}{\Delta S} \Rightarrow F = P \Delta S \rangle \\ \Rightarrow \Delta J = P \Delta S \Delta t \end{aligned}$$

Подставляя в  $\Delta j = -mv - (mv) = -2mv$  и сокращая  $\Delta t, \Delta S$  получим

$$P = \frac{1}{3} nmv^2$$

Так как  $n = \frac{N}{V}$  и  $v^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 \Rightarrow$

$$m \cdot v^2 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \frac{mv_i^2}{2} = 2 \langle \varepsilon \rangle \Rightarrow$$

$$P = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle$$

- **основное уравнения МКТ**

Домножим последнее уравнение на объем:

$$PV = \frac{2}{3} V \cdot n \langle \varepsilon \rangle \Rightarrow PV = \frac{2}{3} U$$

где  $V \cdot n$  - общее число молекул  $N$ , а  $U$  - внутренняя энергия молекул газа. По уравнению Менделеева-Клайперона получим:

$$\nu RT = \frac{2}{3} U \Rightarrow U = \frac{3}{2} \nu RT$$

Рассмотрим эту формулу для одного киломоля:  $E = \frac{3}{2}RT$ , здесь можно заметить что температура есть мера внутренней энергии молекул газа.

В таком виде можем применить закон Авогадро:

$$N_A \cdot \langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}RT \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT$$

$$k = \frac{R}{N_A}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} - \text{постоянная Больцмана.}$$

В общем,  $kT$  определяет хаотическое движение молекул, электронов и других частиц. Подставив это соотношение в основное уравнение МКТ получим:  $P = nkT$ , то есть получили связь давления с температурой и концентрацией молекул в данном газе. Причем, эта формула верна для любых типов молекул.

Предположим что у нас имеется смесь газов, то есть  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_S$ , подставив в формулу выше получим

$$P = n_1kT + n_2kT + \dots + n_SkT$$

где  $P_i = n_ikT$  - *парциальное давление*

## 1.6 Закон Дальтона

**Формулировка:** Давление смеси газов складывается из суммы парциальных давлений:  $P = P_1 + P_2 + \dots + P_S$

## 2 Первое начало термодинамики

Внутренняя энергия:  $U = \frac{3}{2}\nu RT$

Причем  $\Delta U$  зависит от:

- *тепла поступающего и уходящего из тела*
- *совершенной газом над телом работы или телом над газом*

Будем обозначать  $Q$  - **положительная тепловая энергия, измеряемая в Джоулях.**

- $Q$  будет положительной если работа совершается газом над телом и если газу сообщают некоторое количество тепла
- $Q$  будет отрицательной если тело совершает работу над газом и сам газ сообщает телу некоторое количество тепла.

Так

$$\Delta U = Q - A \Rightarrow Q = A + \Delta U$$

- выражение первого начала термодинамики

**Формулировка:** Тепло поступающее в термодинамическую систему расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение работы системы над внешними телами

## 2.1 Теплоемкость

— **Определение:** **Теплоемкость** тела называется количество тепла, которое надо передать телу для того чтобы поднять его температуру на один градус:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

1. **Определение:** **Удельная теплоемкость**  $c$  - теплоемкость одного килограмма вещества:

$$c = \frac{Q}{\Delta T m}$$

2. **Определение:** **Молярная теплоемкость**  $\mathbb{C}$  - теплоемкость одного киломоля вещества

$$\mathbb{C} = \frac{Q}{\Delta T \nu} = \frac{m}{\nu} c = \mu c$$

Важно отметить, что при различных процессах теплоемкость различается существенно.

- **Изохорический процесс**  $V = \text{const}, \nu = 1$  Киломоль. Так как  $V = \text{const} \Rightarrow A = \text{const}$ . Тогда получаем, что  $U$  состоит из внутренней тепловой энергии, то есть  $\Delta U = Q$ , тогда для 1 киломоля:  $\Delta U = \frac{3}{2} R \Delta T$

Тогда согласно формуле молярной теплоемкости получим:

$$\mathbb{C}_V = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{3}{2} R \approx 12,5 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

- **Изобарический процесс**  $P = \text{const}$  В таком процессе может присутствовать работа, то есть  $Q = \Delta U + A$ , тогда вычислим теплоемкость:

$$\frac{Q}{\Delta T} = \mathbb{C}_P = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{A}{\Delta T} = \frac{3}{2} R + \frac{A}{\Delta T} \quad (\text{III.1})$$

Очевидно,  $\mathbb{C}_P > \mathbb{C}_V$ , найдем  $\frac{A}{\Delta T}$

Пусть есть некоторый сосуд, в котором есть поршень:

$$\begin{cases} PV_1 = \nu RT_1 \\ PV_2 = \nu RT_2 \end{cases} \Rightarrow$$



$$P(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) \Rightarrow \langle \nu = 1 \rangle P \Delta V = R \Delta T$$

Сила с которой газ давит на поршень выражается как :

$$F = const = P \cdot S$$

Тогда работа будет равна:

$$A = F \cdot \Delta x = PS \Delta x = P \Delta V \Rightarrow A = R \Delta T$$

Подставим в (III.1):

$$\mathbb{C}_P = \mathbb{C}_V + \frac{A}{\Delta T} = \mathbb{C}_V + R$$

- **формула Майера:** Теплоемкость при постоянном давлении равна сумме теплоемкости при постоянном объеме и газовой постоянной

- Изотермический процесс  $T = const$

$$\mathbb{C}_T = \frac{Q}{\Delta T} \rightarrow \infty$$

При таком процессе можно сделать вывод, что при передаче тепло газ совершает большую работу. К тому, же сама теплоемкость может быть так положительной, так и отрицательной.

## 2.2 Теплоемкость одноатомных и многоатомных газов

Мы рассчитали что молярная теплоемкость газа равна:  $\mathbb{C}_V \approx 12,5 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ . Однако экспериментально оказалось, что не у всех газов такая молярная теплоемкость, а лишь у инертных и одноатомных газов.

Рассмотрим молекулы газов, точнее их степени свободы. Экспериментально было доказано что у многоатомных газов молярная теплоемкость было больше чем у одноатомных:  $\approx 20,5 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  - для двухатомных и  $\approx 25,5 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  - для трех и более атомных.

Рассмотрим среднюю энергию молекулы:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \rangle + \langle \varepsilon_y \rangle + \langle \varepsilon_z \rangle = \frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT = \frac{3}{2} kT$$

Заметим, что поступательное движение может перейти во вращательное, тем самым следует что на каждую степень свободы приходится одно и то же количество энергии. Так, у двухатомной молекулы 5 степеней свободы ( по X,Y,Z, и еще 2 вращательных направления), получаем

$$\langle \varepsilon \rangle = 3 \langle \varepsilon_{post} \rangle + 2 \langle \varepsilon_{vr} \rangle = \frac{5}{2} kT$$

Соответственно для трехатомного газа:

$$\langle \varepsilon \rangle = 3 \langle \varepsilon_{post} \rangle + 3 \langle \varepsilon_{vr} \rangle = \frac{6}{2} kT$$

*То есть общая формула для молярной теплоемкости:*

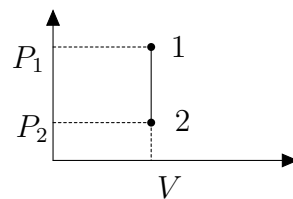
$$C_V = \frac{i}{2} R$$

### 3 Термодинамические процессы в газах

#### 3.1 Изохорический процесс

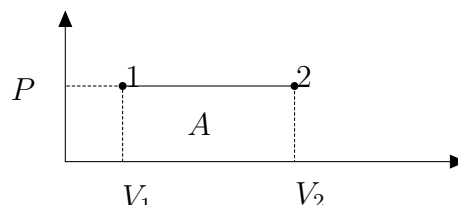
Заметим, что при постоянном объеме работа газом не совершается, то есть тепловая энергия по первому началу термодинамики есть изменение внутренней энергии :

$$Q = \Delta U = \nu C_V \Delta T$$



Соответственно,  $V = \text{const}$  есть уравнение этого процесса.

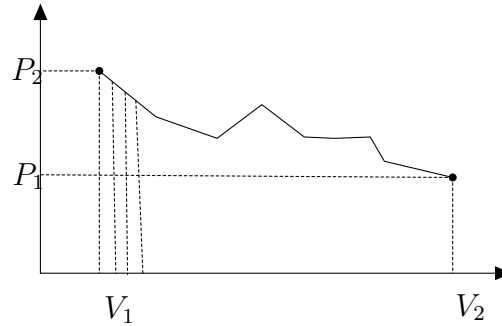
#### 3.2 Изобарический процесс



$$P = \text{const}$$

$$A = P\Delta V, Q = \Delta U + A$$

Отсюда явно видим, что по сути значение работы совпадает со значением площади прямоугольника со сторонами  $\langle P, V_1 V_2 \rangle$  соответственно.



Рассмотрим диаграмму для произвольного процесса, учитывая этот "геометрический" смысл разобьем эту диаграмму на бесконечно малые прямоугольники, где  $P = \text{const}$ . Тогда,  $\Delta A_i = P_i \Delta V_i$ , где  $A = \sum_i A_i$ . При  $\Delta V \rightarrow 0$  получим интеграл, с помощью которого может быть вычислена работа в любом процессе:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV$$

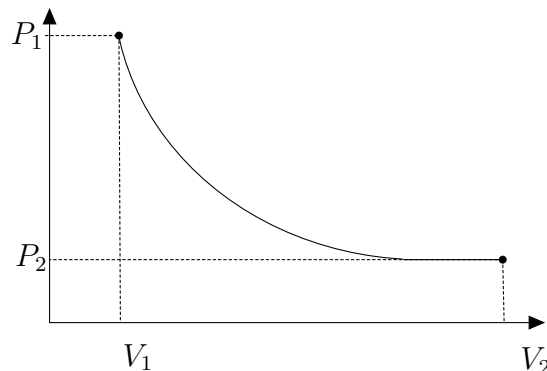
### 3.3 Изотермический процесс

При постоянной температуре, учитывая первое начало термодинамики, не изменяется внутренняя энергия и все тепло уходит на совершение работы:  $Q = A$ .

Рассмотрим закон Менделеева-Клапейрона для этого процесса:

$$PV = \nu RT \Rightarrow P = \frac{\nu RT}{V} \langle T = \text{const} \rangle$$

Тогда диаграмма для этого процесса выглядит так:



Вычислим работу:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

- $V_2 > V_1 \Rightarrow \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$ , то есть работа будет положительной
- $V_2 < V_1 \Rightarrow \ln \frac{V_2}{V_1} < 0$ , то есть работа будет отрицательной

### 3.4 Адиабатический процесс

— **Определение:** *Адиабатический процесс* - процесс протекающий без теплообмена с внешней средой, то есть по определению  $Q = 0$ , тогда из первого начала термодинамики получаем  $\Delta U + A = 0$ .

Работа в таком процессе выполняется за счет изменения внутренней энергии.

Теплоемкость в этом процессе:

$$\mathbb{C}_Q = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{0}{\Delta T} = 0$$

Запишем уравнение этого процесса. Рассмотрим:

$$PV = \nu RT \Rightarrow d(PV) = d(\nu RT) \Rightarrow$$

$$PdV + VdP = \nu R dT$$

Преобразуем формулу  $\Delta U + A = 0$  как ( $\delta A$  - элементарная работа):

$$dU + \delta A = 0 \Rightarrow d(\nu \mathbb{C}_V T) + p dV$$

$$\nu \mathbb{C}_V dT + p dV = 0$$

Итого:

$$\begin{cases} PdV + VdP = \nu R dT \mid \cdot \mathbb{C}_V \\ \nu \mathbb{C}_V dT = -p dV \mid \cdot R \end{cases}$$

Домножим эти уравнения на соответствующие множители и сложим:

$$(\mathbb{C}_V(PdV + VdP) + R p dV = 0$$

$$\mathbb{C}_V + R)PdV + \mathbb{C}_V VdP = 0$$

$$\langle \mathbb{C}_V + R = \mathbb{C}_P, \gamma = \frac{\mathbb{C}_P}{\mathbb{C}_V} \rangle$$

$$VdP = -\gamma PdV$$

Решим это дифференциальное уравнение:

$$V \frac{dP}{dV} = -\gamma P$$

$$\ln P = -\gamma \ln V + \ln C$$

$$P = V^{-\gamma} \cdot C$$

**Окончательное уравнение для адиабатического процесса:**

$$PV^\gamma = const$$

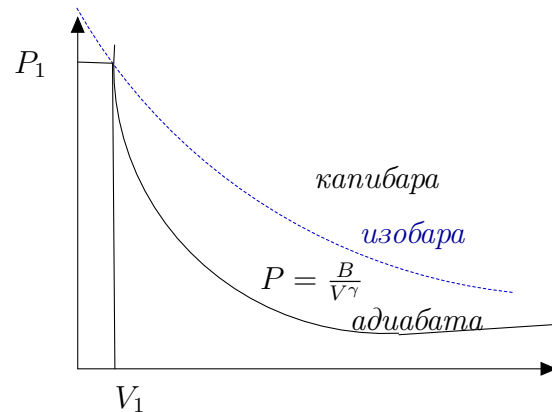
Из формулы Майера получим  $\mathbb{C}_V = \frac{i}{2}R$ ,  $\mathbb{C}_P = \frac{i+2}{2}R$ , тогда из  $\gamma = \frac{\mathbb{C}_P}{\mathbb{C}_V} \Rightarrow$

$$\gamma = \frac{i+2}{i}$$

Очевидно, что показатель для адиабатического процесса  $\gamma > 1$

Построим график этого процесса

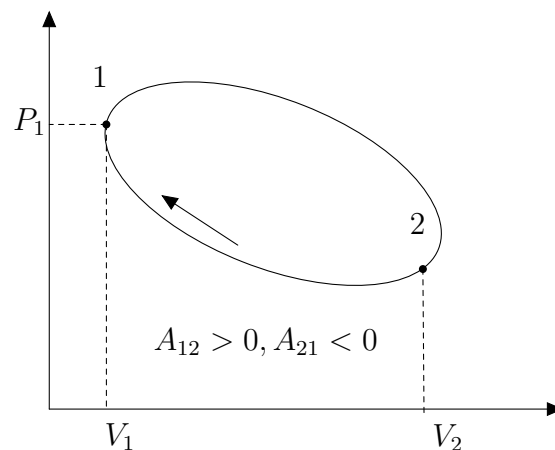
$$P = \frac{B}{V^\gamma}$$



1. Чисто(идеальный) изотермический процесс можно осуществить только за бесконечно большое время из-за колебаний температуры
2. Аналогично, идеально адиабатический процесс также невозможен в естественных условиях и протекает только за бесконечное время.

## 4 Циклы в газах

— **Определение:** *Циклом в газе* называется процесс при котором газ, проходя ряд термодинамических состояний возвращается в исходное состояние.



Разбивая цикл 1-2 точкой 2, получаем разбиение участка и совершаемой работы:  $A_{1,2} > 0, A_{2,1} < 0 \Rightarrow A = A_{1,2} + A_{2,1}$ .

Заметим, что площадь этой фигуры есть работа:  $S = A$

— при переходе  $1 \rightarrow 2$  газ получает тепло  $+Q_1$  - расширяется

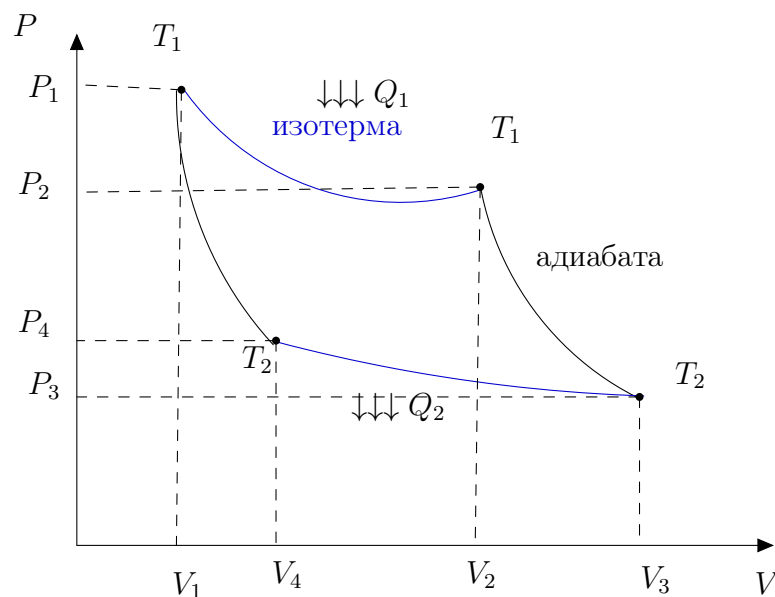
— при переходе из  $2 \rightarrow 1$  отдает тепло  $-Q_2$  - сжимается

**Работа любой тепловой машины находится как  $A = Q_1 - Q_2$ , где  $Q_1$  - газ берет тепло от нагревателя,  $Q_2$  - газ отдает тепло холодильнику. Тогда у машины есть коэффициент полезного действия, при котором работа будет минимальна:**

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Циклы тепловых машин идет по часовой стрелке, холодильников против часовой стрелки. Существуют и холодильные машины, которые за счет работы не повышают температуру, а наоборот снижают.

## 5 Цикл Карно, машина Карно



— **Определение: Обратный процесс** называется процесс, который можно провести в обратном направлении без изменений в окружающей среде. Такие процессы только изотермические или адиабатические (условно обратимые)

- $1 \rightarrow 2$  **изотермический** процесс  $T_1 = const$  забирает тепло  $Q_1$  от нагревателя, газ есть рабочее тело
- $2 \rightarrow 3$  **адиабатический** процесс  $Q = 0; T_1 \rightarrow T_2 (T_2 < T_1)$
- $3 \rightarrow 4$  **изотермический** процесс  $T_2 = const$ , газ отдает тепло  $Q_2$

- $4 \rightarrow 1$  **адиабатический** процесс  $Q = 0$ , так что  $T_2 \rightarrow T_1$

Посчитаем коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$A = Q_1 - Q_2$$

Выведем формулу коэффициента полезного действия для цикла Карно:

$$\begin{cases} 1 \rightarrow 2 : Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ 3 \rightarrow 4 : Q_2 = \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \end{cases}$$

Запишем

$$\eta = \frac{\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Рассмотрим адиабатический процесс:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

Рассмотрим **уравнение Менделеева-Клайперона**  $PV = \nu RT$  и подставим в формулу:

$$\begin{aligned} \frac{\nu RT_1}{V_1} V_1^\gamma &= \frac{\nu RT_2}{V_2} V_2^\gamma \Rightarrow \\ T_1 V_1^{\gamma-1} &= T_2 V_2^{\gamma-1} \end{aligned}$$

Перейдем к процессу  $2 \rightarrow 3$  и к  $4 \rightarrow 1$  :

$$\begin{cases} 2 \rightarrow 3 : T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \\ 4 \rightarrow 1 : T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} \\ \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} \end{cases}$$

Из этих выражений получим:

$$\begin{aligned} \frac{V_3}{V_2} &= \frac{V_4}{V_1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow \\ \eta &= \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \end{aligned}$$

**Важно:** КПД идеальной тепловой машины всегда больше КПД другой машины работающей с одним и тем же нагревателем и холодильником. Рассмотрим это утверждение:

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \geq \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
1 - \frac{T_2}{T_1} &\geq 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \\
\frac{Q_2}{Q_1} &\geq \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1} \Rightarrow \\
\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} &\leq 0
\end{aligned}$$

Заметим что  $Q_1$  - количество тепла *поступающее* газу,  $Q_2$  - количество газа *уходящего*, тогда очевидно что  $Q_2 < 0$ , тогда:

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \leq 0$$

— *неравенство Клаузиуса, запишем для нескольких машин:*

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

## 6 Второе начало термодинамики

**Формулировка 1:** *Невозможны процессы единственным результатом которых было бы передача тепла от тела менее нагретого к более нагретому телу. Такая формулировка указывает направление движения процесса.*

**Формулировка 2:** *Невозможны те процессы в которых все тепло взятое у нагревателя полностью превращалось бы в работу.*

Покажем эквивалентность Формулировки 1 и Формулировки 2.

- Возьмем два тела: заберем тепло  $Q_2$  у тела 1 и передадим это тепло совершив работу  $A = Q_2$  более нагретому телу 2. Тогда получается, что мы передали полностью тепло от менее нагретого тела к более нагретому :  $T_1 \rightarrow T_2$ , что невозможно по первой формулировке то есть тепло не полностью превращается в работу, что и требовалось доказать.

### 6.1 Энтропия

Заметим, что любое макросостояние состоит из множества микросостояний .

— **Определение:** *Термодинамическая вероятность  $W$  - количество микросостояний систем соответствующее данному макросостоянию. Измерим общую термодинамическую вероятность  $W_1, W_2$ , где каждое состояние  $W_1$  соответствует состоянию  $W_2$  :  $W = W_1 \cdot W_2$*

Поскольку таких состояний очень много, величиной  $W$  очень неудобно оперировать. Больцманом было предложено использовать логарифм этой величины и с помощью него было введено понятие энтропии.



**Энтропия** :  $S = k \cdot \ln W$ ,  $k$  – *постоянная Больцмана*.

**Формулировка 3:** Энтропия системы не убывает ( $\Delta S \geq 0$ ) Такая формулировка относится не ко всем системам, но к любой замкнутой, применяется только для систем с огромным числом степеней свободы.

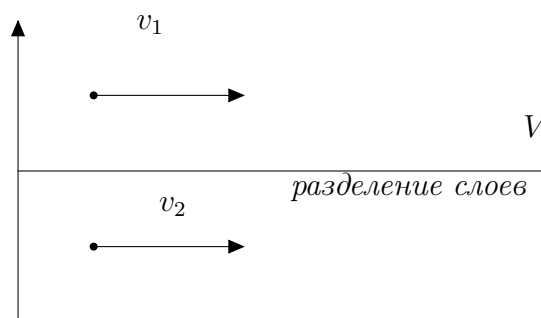
## 7 Явление переноса в термодинамических неравновесных системах(в газах)

К ним относятся:

1. Внутреннее трение(вязкость) - перенос импульса
2. Теплопроводность - перенос энергии
3. Диффузия - перенос массы

### 7.1 Вязкость. Внутреннее трение

Рассмотрим газ:



$$f = \eta \frac{dV}{dz} S$$

- сила на единицу площади, где  $\eta$  - коэффициент вязкости,  $S$  - площадь соприкосновения слоев,  $\frac{dV}{dz}$  - скорость движения вдоль  $z$ .

Попробуем обосновать и вывести эту формулу:

Пусть  $v_1 > v_2$ ,  $U$  - средняя скорость хаотического(теплового) движения молекул,  $m_0$  - масса молекул. Пусть общие импульсы слоев соответственно  $J_1$  и  $J_2$ .  $v_1, v_2$  - скорость соответственно упорядоченного движения молекул.

Обозначим за число молекул переходящих из первого слоя во второй слой  $\Delta N_{12}$  и наоборот:  $\Delta N_{21}$ , тогда очевидно:  $\Delta N_{12} = \Delta N_{21} = \Delta N$ , посчитаем это число

$$\Delta N = \frac{1}{6} n U S \Delta t$$

Посчитаем переход импульса  $\Delta J_1 = \Delta N m_0 V_1, \Delta J_2 = \Delta N m_0 V_2$ :

$$\Delta J^I = \Delta J_2 - \Delta J_1 = \Delta N m_0 (v_2 - v_1) < 0$$

для первого слоя

$$\Delta J^{II} = \Delta J_1 - \Delta J_2 = \Delta N m_0 (v_1 - v_2) > 0$$

для второго слоя

— Основная мысль в том, что весь потерянный импульс первого слоя получает второй слой, то есть:

$$\Delta J^{II} = -\Delta J^I$$

Выразим импульс через силу:

$$f_1 = \frac{\Delta J_1}{\Delta t} = \frac{1}{6} n U m_0 (v_2 - v_1) S$$

Обозначим длину свободного пробега молекулы(средняя):  $\langle l \rangle$

Тогда  $v_2 = v(z - \langle l \rangle)$ ,  $v_1 = v(z + \langle l \rangle)$ , учитывая, что  $\langle l \rangle$  - крайне мала:

$$v_2 = v(z) - \langle l \rangle \frac{dv}{dz} + O(\langle l \rangle^2)$$

$$v_1 = v(z) + \langle l \rangle \frac{dv}{dz} + O(\langle l \rangle^2)$$

Подставляя в  $f_1 = \frac{\Delta J_1}{\Delta t} = \frac{1}{6} n U m_0 (v_2 - v_1) S$ , получим:

$$f_1 = \frac{1}{6} n U m_0 \cdot 2 \cdot \langle l \rangle \cdot \frac{dv}{dz} \cdot S$$

для первого слоя.

Аналогично для второго, только с противоположным знаком:

$$f_1 = \frac{1}{6} n U m_0 \cdot -2 \cdot \langle l \rangle \cdot \frac{dv}{dz} \cdot S$$

## 7.2 Теплопроводность

Пусть  $T_1 > T_2$ , выразим  $T_1, T_2$  как:

$$T_1 = T(x - \langle l \rangle)$$

$$T_2 = T(x + \langle l \rangle)$$

Изменения количества молекул соответственно:

$$\Delta N = \frac{1}{6} n U S \Delta t$$

Примем то, что  $U$  - значение не значащее и следовательно не меняющееся. Как известно из *основного уравнения МКТ* следует:

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{3}{2} k T_1 \Rightarrow \Delta Q_1 = \Delta N \cdot \langle \varepsilon_1 \rangle$$

$$\langle \varepsilon_2 \rangle = \frac{3}{2}kT_2 \Rightarrow \Delta Q_2 = \Delta N \cdot \langle \varepsilon_2 \rangle$$

Тогда вычислим изменения количества теплоты в первом слое:

$$\Delta Q^I = -\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = \Delta N(\langle \varepsilon_2 \rangle - \langle \varepsilon_1 \rangle)$$

Подставляя  $\Delta N = \frac{1}{6}nUS\Delta t$ ,  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT$  получим:

$$\Delta Q^I = \frac{1}{6}nUS\Delta t \frac{3}{2}k(T_2 - T_1)$$

$$T_1 = T(x) - \langle l \rangle \frac{dT}{dx}$$

$$T_2 = T(x) + \langle l \rangle \frac{dT}{dx}$$

Обозначим  $q$  - поток тепла через единичную поверхность в единицу времени:

$$q = \frac{\Delta Q}{S\Delta t}$$

Разделим  $\Delta Q^I = \frac{1}{6}nUS\Delta t \frac{3}{2}k(T_2 - T_1)$  на  $S\Delta t$ , получим:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t S} = q = \frac{1}{6}nU \frac{3}{2}k \cdot 2 \langle l \rangle \frac{dT}{dx}$$

Тогда:

$$q = \frac{1}{3}nU \frac{3}{2}k \langle l \rangle \frac{dT}{dx}$$

, где  $\frac{1}{3}nU \frac{3}{2}k \langle l \rangle$  - коэффициент теплопроводности -  $\lambda$

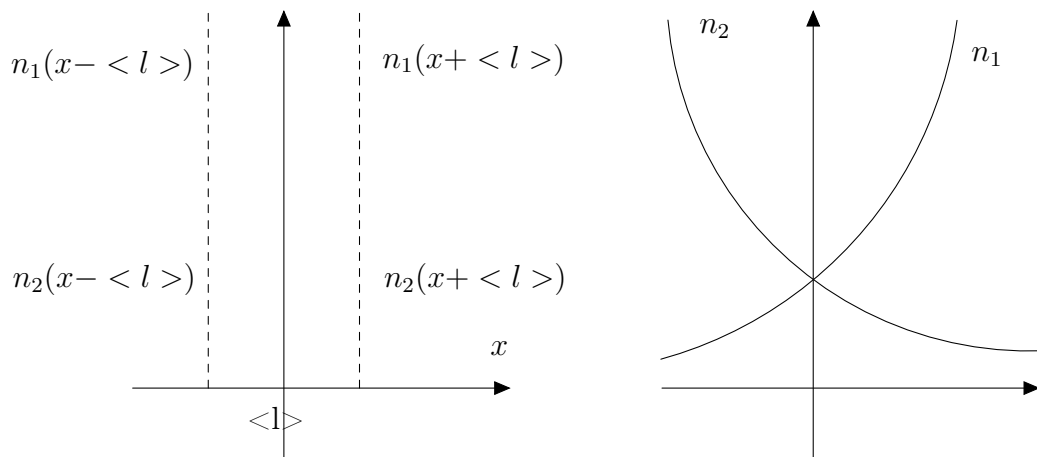
Поскольку  $T_1 > T_2 \Rightarrow \frac{dT}{dx} < 0$

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

- *общее уравнение переноса тепла*

### 7.3 Диффузия

Имеем как минимум два различных вещества с различной концентрацией



При рассмотрении одного вещества получаем перенос массы.

Пусть  $G$  - количество молекул, прошедшие через единичную площадку в единицу времени:  $G = \frac{\Delta N}{S \Delta t}$ . Тогда:

$$\Delta N_1 = \frac{1}{6} U S \Delta t (n_1(x + \langle l \rangle) - n_1(x - \langle l \rangle))$$

Распишем концентрации  $n_1, n_2$  как:

$$n_1(x + \langle l \rangle) = n_1(x) + \langle l \rangle \frac{dn_1}{dx}$$

$$n_2(x - \langle l \rangle) = n_1(x) - \langle l \rangle \frac{dn_1}{dx}$$

Тогда подставив получим:

$$\Delta N = \frac{1}{6} U S \Delta t \langle l \rangle \cdot 2 \frac{dn_1}{dx}$$

Вычислим  $G$ . Подставим полученные значения:

$$G = \frac{1}{3} U \langle l \rangle \frac{dn_1}{dx}$$

Обозначим  $D = \frac{1}{3} U \langle l \rangle$  - коэффициент диффузии. Отметим, что изначальный поток идет против оси  $x$ , в сторону уменьшения концентрации.

$$G = -D \frac{dn}{dx}$$

— уравнение диффузии

# Глава IV

## Электричество и магнетизм

### 1 Электрическое поле в вакууме

Наименьший заряд в природе обозначается как  $e$  и называется электроном. Из такого утверждения, следует что любой заряд в природе может быть определён как  $q = \pm e \cdot N, N \in \mathbb{Z}$

Заряд — величина дискретная, может быть положительной и отрицательной, при соприкосновении разноименных зарядов они взаимоуничтожаются.

#### 1.1 Закон сохранения заряда

**Формулировка:** Заряд сохраняется в электрически замкнутой системе.

— **Определение:** Электрически замкнутая система - система, через границу которой не проходят электрические заряды.

#### 1.2 Закон Кулона

**Формулировка:** Все заряженные тела взаимодействуют между собой. При этом одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. При чем сила с которой они взаимодействуют равна:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

где  $k$  - коэффициент пропорциональности,  $q_1, q_2$  - величины зарядов

— **Определение: Точечным зарядом** называется заряженное тело, размером которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до других заряженных тел.

В системе СИ заряд измеряют в Кулонах, при этом Кулон не основная единица измерения, а составная:  $[q] = \text{Кл} = \text{Ам} \cdot \text{с}$ . При измерении в Кулонах коэффициент  $k$  будет равен  $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$

На практике в опытах также возникал некоторый коэффициент, поэтому при решении задач используют уже нормализованную форму:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

где  $\epsilon_0$  электрическая постоянная,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

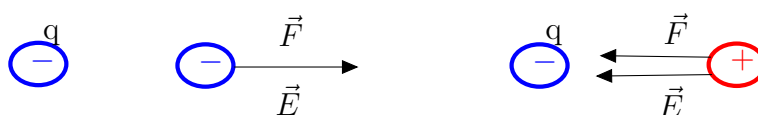
## 2 Электрическое поле

— **Определение:** Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} (\text{векторная})$$



Получим, что линии напряженности электрического поля направлены от положительного заряда к отрицательному:



Величина напряженности точечного заряда:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

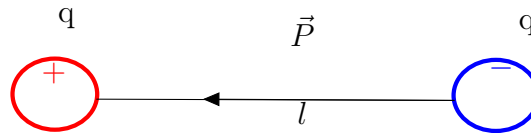
**Принцип суперпозиции полей:** Если имеется несколько электрических полей  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ , то

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Это вытекает из принципа суперпозиции сил.

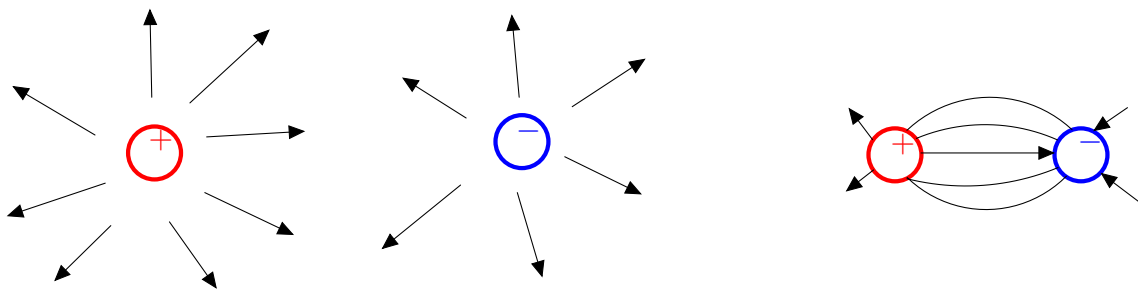
## 2.1 Электрический диполь

— **Определение:** Электрический диполь - это структура, состоящая из пары зарядов.



Для характеристики данной структуры используют **момент диполя**:  $P = q \cdot l$ , причем направлен он от отрицательного заряда к положительному.

## 2.2 Линии напряженности электрического поля



Линии напряженности электрического поля проводятся так, чтобы касательная к ним совпадала по направлению с вектором напряженности электрического поля.

Количество линий пропорционально величине напряженности электрического поля. Для подсчета таких линий, возьмем  $dS$  - элементарная площадка,  $dN$  - количество линий на этой площадке, тогда очевидно:  $dN = E dS$ , а для подсчета таких линий на всей поверхности возьмем поверхностный интеграл:

$$N = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

где  $\vec{n}$  - нормаль к поверхности  $S$

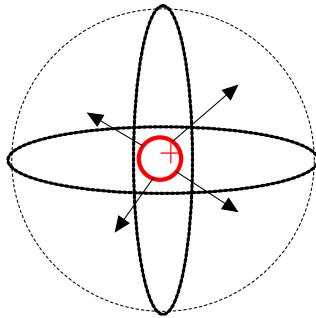
— **Определение:** Произвольный интеграл такого вида называется потоком, то есть для произвольного вектора  $A$  поток  $\Phi_A$



$$\Phi_A = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

## 2.3 Теорема Гаусса

**Формулировка:** поток вектора электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенной внутри поверхности и деленному на электрическую постоянную  $\varepsilon_0$



Возьмем точечный заряд, окружим положительный заряд сферой радиуса  $\vec{r}$

$$N = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Очевидно, что  $\vec{E}, \vec{n}$  будут сонаправлены, где  $\vec{n}$  - нормаль ко всей сфере. Распишем эту формулу:

$$N = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oiint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \oiint_S dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Тогда можно сделать вывод, что число линий проходящих через любую замкнутую поверхность:

$$N = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

В произвольном случае, в котором имеется несколько электрических полей:  $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$  получаем:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oiint_S \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \vec{n} dS = \sum_{i=1}^n \oiint_S \vec{E}_i \cdot \vec{n} dS = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

где  $q_i$  находятся внутри замкнутой поверхности S

Таким образом, теорема Гаусса может быть записана таким образом:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

или

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_D \rho_\varepsilon dV$$

где  $D$  - объем, заключенный внутри поверхности  $S$ ,

$\rho$  - объемная плотность электрического заряда

— **Определение: Объемная плотность заряда**  $\rho_q$  - общий заряд который имеется в объеме деленный на объем, то есть заряд в единице объема.

$$\rho_q(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

Как правило распределена неравномерно. Для того чтобы получить заряд в точке уменьшаем объем до точки, то есть делаем бесконечно малый объем.

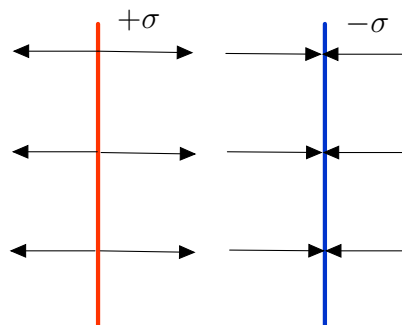
— **Определение: Поверхностная плотность заряда** - средний заряд на единицу площади поверхности.

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$$

— **Определение: Линейная плотность заряда** - собственно на линии, когда площадь стремится к нулю соответственно.

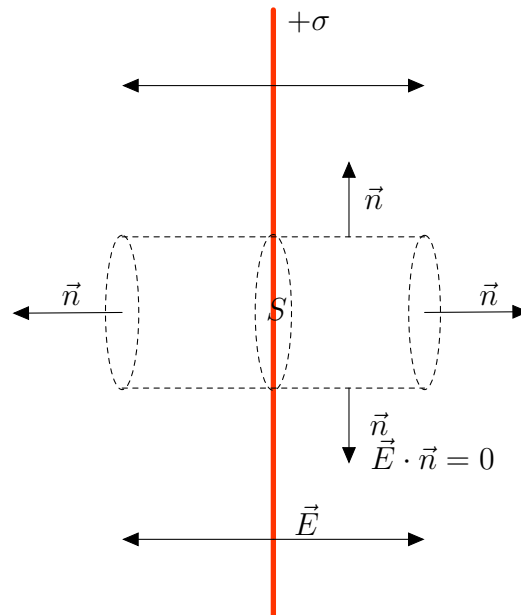
$$\lambda = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell}$$

## 2.4 Поле бесконечно однородно заряженной плоскости



Пусть есть заряд  $\sigma$  в некотором поле. Рассмотрим линии напряженности: в силу симметрии линии напряженности будут перпендикулярны плоскости, с плюсом от нее и с минусом к ней соответственно. Воспользуемся **теоремой Гаусса** для определения напряженности этого поля.

Выделим замкнутую поверхность: выделим цилиндр с площадью основы  $S$ , посчитаем поток через эту цилиндрическую поверхность:



Первый способ, из физических соображений, используя формулу потока:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \cdot S$$

Второй способ, возьмем тот же цилиндр. Рассмотрим боковую поверхность цилиндра, поверхностный интеграл можно расписать как сумму соответственно поверхностных интегралов по боковой поверхности и по основаниям.

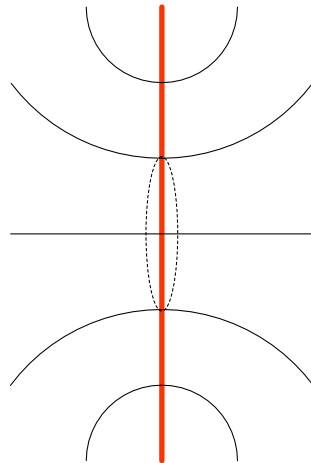
Заметим, что нормаль к боковой поверхности будет перпендикулярно силовым линиям, то есть:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_{\text{бок}}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + 2 \iint_{S_{\text{осн}}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 2E \cdot S$$

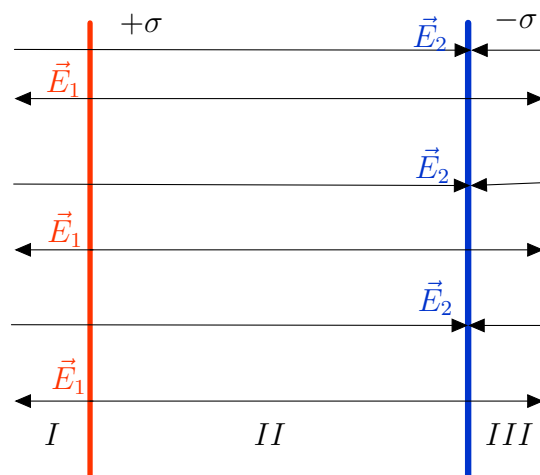
Получается, можно приравнять, потому что мы считаем одну и ту же площадь одно и того же тела разными способами, то есть:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \sigma S = 2 \cdot E \cdot S \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

В реальности не существует бесконечной пластины, а у конечной пластины линии напряженности таковы:



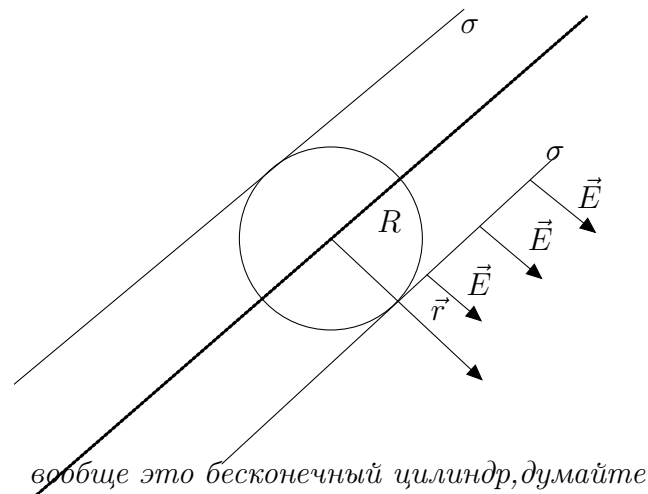
## 2.5 Электрическое поле двух разноименно заряженных плоскостей



Из геометрических соображений получаем, что поле будет сосредоточено только между этими плоскостями:  $I, III : E = 0; II = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

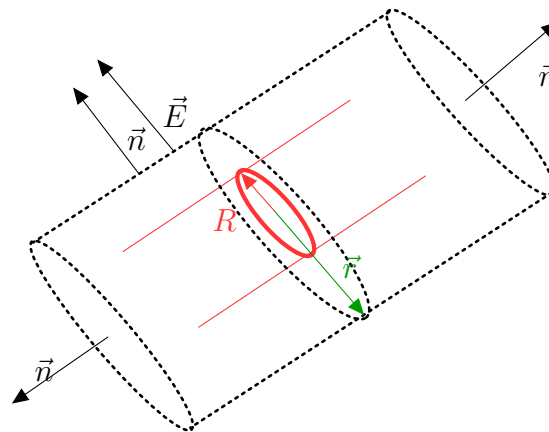
Причем такое поле однородно и направлено в одну сторону.

## 2.6 Поле бесконечного однородно заряженного цилиндра



По поверхности цилиндра распределен заряд с плотностью  $\sigma$ , в силу симметрии наши линии напряженности будут перпендикулярны поверхности цилиндра. Возьмем некоторую точку, и пусть расстояние до нее от цилиндра  $r$ .

Поступим аналогично: применим *теорему Гаусса*, возьмем замкнутую поверхность в виде цилиндра который окружает наш цилиндр и посчитаем поверхностные интегралы:



Сначала рассматриваем поток сквозь этот цилиндр:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{1}{\varepsilon_0} 2\pi R l \cdot \sigma$$

И разобьем на поверхности соответственно: на основаниях нормаль будет перпендикулярно заряду, а соответственно нормали  $n$  боковой поверхности будут направлены векторам силового поля, то есть получаем:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \iint_{S_{\text{бок}}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + 2 \iint_{S_{\text{осн}}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E \iint dS = 2E\pi r l$$

где

$$2 \iint_{S_{\text{осн}}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Тогда сопоставляя два способа получаем ( $r$  - расстояние от оси цилиндра):

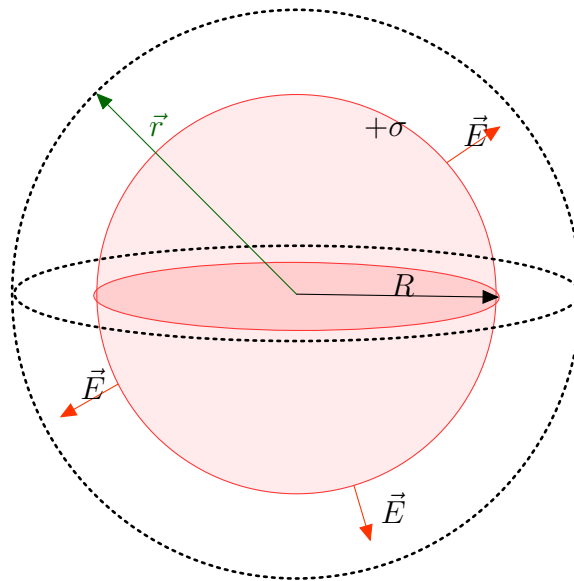
$$\frac{1}{\varepsilon_0} R \sigma = E r \Rightarrow E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$$

Формула выше справедлива только для случая когда  $r > R$ , при  $r < R \Rightarrow E = 0$ .

Если  $r \gg R$  в этом случае мы переходим от поверхностной плотности заряда к линейной. Итак  $\lambda = \sigma \cdot 2\pi R$ , подставим:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

## 2.7 Сферически однородно заряженная поверхность



Линии напряженности будут перпендикулярны поверхности сферы. По аналогии с предыдущими доказательствами, возьмем сферу окружающую нашу сферу и применим *теорему Гаусса*:

$$\Phi_E = \oiint_{S_r} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma 4\pi R^2$$

Или можно посчитать с помощью формулы площади поверхности сферы:

$$\Phi_E = \oiint_{S_r} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E \cdot \oiint_{S_r} \vec{n} dS = 4\pi R^2 \cdot E$$

При этом сфера замкнута и мы можем посчитать общий заряд на сфере и он будет равен:

$$q = \sigma \cdot 4\pi R^2 \Rightarrow \sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

И тогда при  $r > R$ :

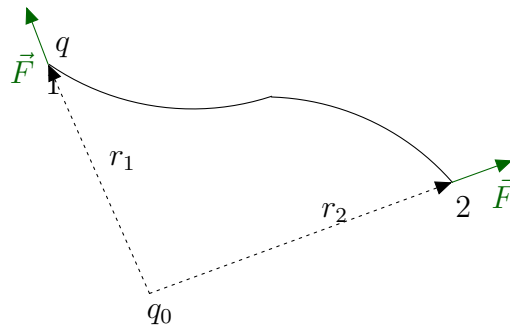
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Заметим, что напряженность поля точечного заряда совпадает с этой формулой.

## 2.8 Работа сил электростатического поля

Рассмотрим два заряда: заряд создающий поле соответственно и пробный заряд, произвольно движущийся в этом поле. Нужно посчитать работу по перемещению этого заряда в поле.

Заметим, что действие силы поля напоминает действие центральной силы, а именно что вектор силы будет на одной линии с неподвижной точкой, к тому же любая центральная сила консервативна и тогда пределы интегрирования будут определяться радиус векторами от начальной  $q_0$  до первой точки и до второй соответственно:



$$A = \int_{r_1 r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_0 q}{r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Соответственно, если  $r_1 = r_2$ , то  $A = 0$ .

При этом не обязательно что это будет одна и та же точка, главное чтобы радиус векторы совпадали по длине.

## 2.9 Потенциал электрического поля

— **Определение:** Потенциалом электрического поля называется величина равная отношению потенциальной энергии заряженной частицы к величине этого заряда.

Рассмотрим замкнутую дугу, то есть контур:

$$A = \oint_q \vec{E} d\vec{\ell} = 0$$

Так как наш сила консервативная, то можем ввести понятие потенциальной энергии, то есть:

$$\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = W_1 - W_2$$

$$W = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon r} + C$$

Для того чтобы посчитать эту энергию, нужно взять точку в которой потенциальная энергия равна нулю, а именно можно взять точку расстояние от которой приближается к бесконечности.

Тогда для нее  $W \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  получим что  $C = 0$ :

$$W = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Потенциальную энергию поле не принято считать характеристикой этого поля, поскольку зависит от заряда помещенного в это поле. Тогда рассматривают величину потенциальной энергии деленное на величину заряда помещенное в это поле - она и будет являться характеристикой этого поля.

$$\varphi = \frac{W}{q}$$

*Если есть несколько частиц с потенциалами соответственно  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ , то общий потенциал равен сумме этих потенциалов:*

$$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

— **Определение:** Величину  $A = W_1 - W_2 = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi$  называют **разностью потенциалов**.

Данную формулу можно использовать для вычисления потенциала электрических полей. Если возьмем  $q = +1, r_2 \rightarrow \infty, \varphi_2 = 0$ , получим что потенциал численно



равен работе, которую совершают силы поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки на бесконечности.

Соответственно для нескольких заряженных тел работает принцип суперпозиции:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i$$

Из формулы для вычисления потенциала:  $\varphi = \frac{W}{q} \Rightarrow [q] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}$

### 2.9.1 Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом

Из прошлых формул  $\varphi = \frac{W}{q}$ ,  $E = \frac{F}{q}$ ,  $F = -\text{grad}W$ . Выразим потенциальную энергию из  $\varphi = \frac{W}{q}$ ,  $F = -\text{grad}W$  и силу из  $E = \frac{F}{q}$ , получим:

$$q \cdot \vec{E} = \text{grad}(q \cdot \varphi)$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$$

Выразим работу по перемещению заряда из точки 1 в точку 2:

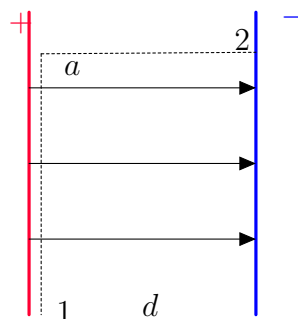
$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r} \Rightarrow$$

Из формулы для разности потенциалов получим что:

$$q(\varphi_1 - \varphi_2) = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r} \Rightarrow$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r}$$

Рассмотрим две пластинки:



Поле между данными пластинками будет потенциальным, следовательно работа не будет зависеть от пути, тогда выберем такой путь как на картинке и посчитаем работу по перемещению из точки 1 в точки 2.

$$A = q \int_{a_1} \vec{E} d\vec{r} + q \int_{a_2} \vec{E} d\vec{r} = q \int_a^2 \vec{E} d\vec{r}$$

То есть получаем формулу, важно отметить что только для потенциальных полей:

$$A = E \cdot q \cdot d \Rightarrow q\Delta\varphi = E \cdot q \cdot d$$

— **Определение:** Поверхность равного потенциала называется эквипотенциальной поверхностью.

- Линии напряженности электрического поля всегда перпендикулярны эквипотенциальной поверхности.
- Потенциал электрического поля убывает в направлении линии напряженности электрического поля.

### 3 Диэлектрики

#### 3.1 Электрическое поле в диэлектриках

Пусть имеется молекула некоторого вещества, найдем в ней радиус-векторы центра положительных и отрицательных зарядов:

$$\vec{r}_i^+ = \frac{\sum_i \vec{r}_i^+ \cdot \vec{q}_i^+}{\vec{q}_i^+}$$

$$\vec{r}_i^- = \frac{\sum_i \vec{r}_i^- \cdot \vec{q}_i^-}{\vec{q}_i^-}$$

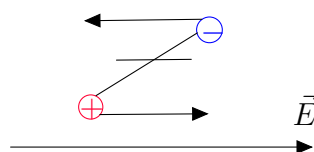
Заметим, что:  $|\sum_i \vec{q}_i| = \sum_i q_i^+$

Можно разделить на полярные и неполярные молекулы:

- $\vec{r}_i^+ \neq \vec{r}_i^-$  - полярная молекула
- $\vec{r}_i^+ = \vec{r}_i^-$  - неполярная молекула

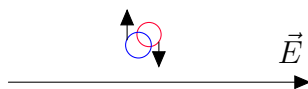
— Любая **полярная молекула** представляет собой электрический диполь, у которой дипольный момент  $P = ql$

Поместим полярную молекулу в электрическое поле:

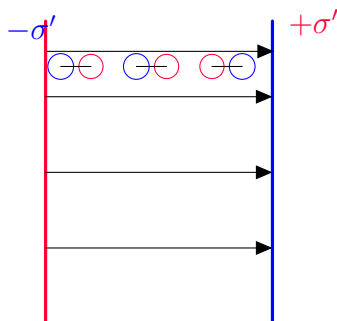


Таким образом, поле оказывает ориентирующее воздействие на молекулу, как бы стремясь развернуть от минуса к плюсу.

— Рассмотрим **неполярную молекулу**, поскольку у нее в некотором роде заряды сосредоточены в одном месте, под воздействием электрического поля она поляризуется и образует диполь с некоторым дипольным моментом.



— **Определение:** Диэлектрик состоящий из полярных молекул называется полярным диэлектриком.



На рисунке можно заметить что диполи на концах компенсируют друг друга, но на концах остаются заряды, из этого делаем вывод что любые диэлектрики **поляризуются**.

**Вывод:** в электрическом поле весь диэлектрик поляризуется, причем это характеризуется вектором поляризации диэлектрика.

— **Определение:** Вектор  $\vec{P}$  называется вектором поляризации диэлектрика и вычисляется он таким образом:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{P}_i}{\Delta V}$$

Важно отметить что вектор поляризации связан с напряженностью электрического поля.

Как я поняла, физический смысл: поляризованность диэлектрика - дипольный момент, который приобретают полярные молекулы в единице объема диэлектрика.

$$\vec{P} = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{P}_i}{\Delta V} = \kappa \cdot \epsilon_0 \cdot E$$

Следовательно, **единицы измерения:**  $[p] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$

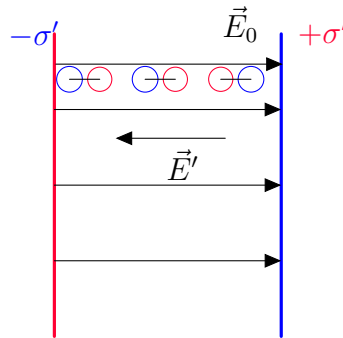
$\kappa > 0$  - диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, *не зависит от напряженности электрического поля*, является характеристикой диэлектрика.

Важно что диэлектрическая восприимчивость ведет себя по разному для полярных и неполярных диэлектриков, в полярном диэлектрике  $\kappa$  зависит от температуры, в неполярном зависит от концентрации молекул.

В общем случае,

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n} = (\vec{P}, \vec{n})$$

### 3.2 Описание поля в диэлектриках



Помещая диэлектрик в внешнее поле  $E_0$ , то образуется некоторое внутреннее поле  $E'$  (молекулярные заряды),

тем самым общее поле складывается как сумма  $E = E' + E_0$ , причем сумма векторная:

Найдем поток по теореме Гаусса:

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint_S (\vec{E}_0 + \vec{E}') dS = \oiint_S \vec{E}_0 \cdot \vec{n} dS + \oiint_S \vec{E}' \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \\ \Phi_E &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q'_i\end{aligned}$$

Для того чтобы не учитывать связанные (молекулярные заряды), ввели величину называемую **электрическим смещением**. Это векторная величина и вычисляется она так:

$$\vec{D} = \vec{E}\varepsilon_0 + \vec{P}$$

где  $\vec{P}$  - вектор поляризации диэлектрика

Тогда применив теорему Гаусса и получим:

$$\Phi_D = \oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \sum_i q_i$$

Поскольку мы можем переписать  $\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$ , то подставив это в формулу для  $\vec{D}$  получим:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \kappa \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = (1 + \kappa) \varepsilon_0 E$$

где  $(1 + \kappa) = \varepsilon > 1$  ( $\varepsilon = 1$  - только в вакууме) - электрическая проницаемость диэлектрика, тогда:

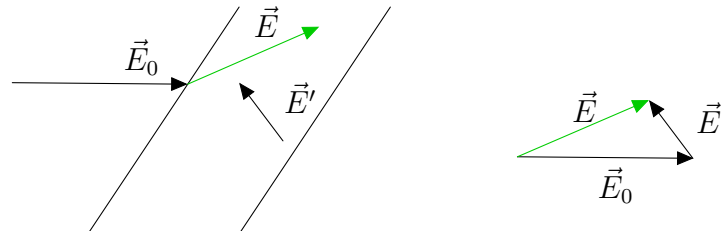
$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

*Замечание:* Если диэлектрик изотропный (то есть по всем направлениям его электрические свойства одинаковы), то  $\vec{D}$  сонаправлен с  $\vec{E}$ , а если он анизотропный то равенство выше не будет верным (например в кристаллах).

Рассмотрим  $\vec{D}$  в вакууме:  $\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0$ . Тогда:

$$\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}$$

**Вывод:** Диэлектрическая проницаемость показывает во сколько раз уменьшается электрическое поле внутри диэлектрика, то есть диэлектрик можно использовать для ослабления влияния внешних электрических полей.

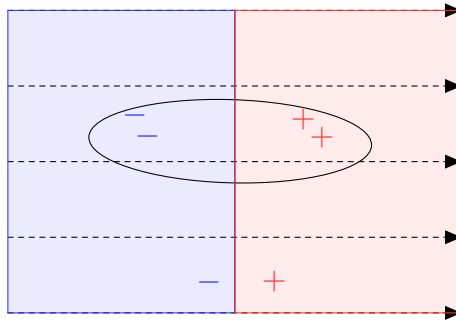


**Вывод:** Граница диэлектрика преломляет линии электрического поля

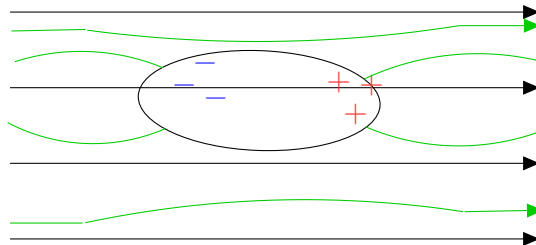
## 4 Проводники

### 4.1 Проводники во внешнем электрическом поле

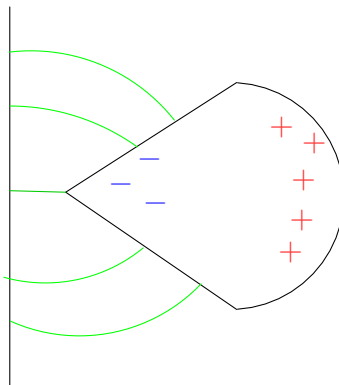
В отличие от диэлектриков, в проводниках есть свободные заряды которые проводят ток.



При разделении проводника одна половина окажется положительно заряженной(+), другая отрицательно(-). При этом линии поле будут выглядеть так:



Получаем вывод, что *проводник либо искривляет линии поля либо прерывает их.*



Рассмотрим рисунок, на острие будет очень высокая напряженность поля, из-за которой может ионизироваться воздух в результате отрыва электронов и их перетекания, приводит к его свечению.

## 4.2 Равновесие заряда на проводнике

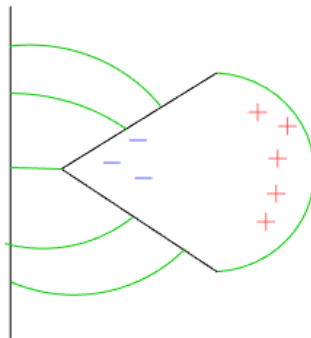
Из предыдущих формул, известна зависимость напряженность электрического поля и потенциала соответственно.

Рассмотрим поверхность проводника, поскольку движение частиц прекращается напряженность такого электрического поля будет равна нулю:

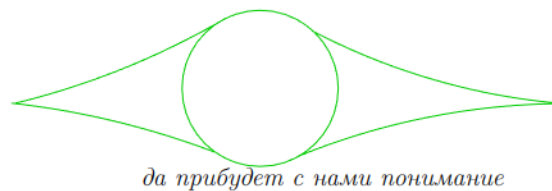
$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}$$

Так получается, что поверхность проводника есть **эквипотенциальная поверхность**. Тогда линии напряженности  $\vec{E}$  вблизи поверхности проводника будут перпендикулярны поверхности проводника, из свойств эквипотенциальных поверхностей.

Рассмотрим проводник вида:



Важно отметить, что заряды на проводниках будут распределены неравномерно, так на рисунке ниже они будут скапливаться на остриях.



## 5 Электроемкость

Экспериментально доказана следующая линейная зависимость:

$$q = C\varphi$$

— **Определение:** Здесь коэффициент  $C$  называется электроемкостью проводника. Для сферы:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$$

где  $\epsilon$  есть *диэлектрическая проницаемость*

В системе СИ соответственно:  $[C = \frac{q}{\varphi}] = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$  — Фарад

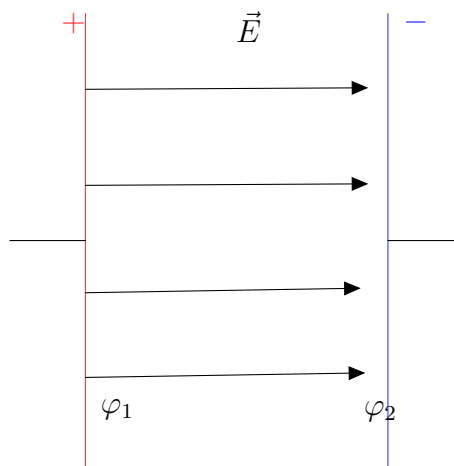
## 5.1 Конденсаторы

Уединенные проводники, то есть те рядом с которыми нет других проводников, обладают малой емкостью.

Рассмотрим два проводника. Работа по перемещению от положительно заряженного проводника к отрицательно заряженному уменьшается, поскольку такое перемещение совершается на  $r$ , а не на  $\infty \Rightarrow$  уменьшается потенциал при сохранении заряда  $\Rightarrow$  растет электроёмкость.

— **Определение:** Устройство состоящее из таких проводников называется **конденсатором**.

### 5.1.1 Плоский конденсатор



$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2) = CU$$

Далее:  $Ed = U$ , и в силу того что  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$

$$q = CE d = C \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = C \frac{qd}{s\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow 1 = C \frac{d}{s\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{s\varepsilon_0\varepsilon}{d}$$

, где  $S$ - площадь пластины,  $d$  - расстояние между пластинами

**- электроёмкость**

Оптимальный способ увеличения электроемкости без увеличения размер пластины — подбор других диэлектриков. то есть изменение значения  $\varepsilon$ .

— **Определение:** Диэлектрики удовлетворяющие свойствам:

1. Высокая диэлектрическая проницаемость



2. При исчезновении электрического поля у них остается некоторая остаточная поляризация.

называются *сегнетоэлектриками*.

### 5.1.2 Цилиндрический конденсатор

Вычислим заряд всего цилиндра с помощью площади боковой поверхности:

$$2\pi R \cdot l \cdot \sigma = q \Rightarrow \sigma = \frac{q}{2\pi Rl}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 \varepsilon} dr = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 \varepsilon} (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right| = \frac{q \cdot R}{2\pi Rl \varepsilon_0 \varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Отсюда, в силу  $q = C(\varphi_1 - \varphi_2) = CU \Rightarrow$ :

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 2\pi l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

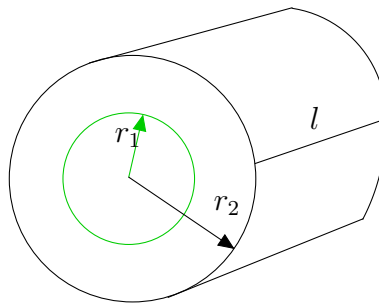
Если  $d = r_2 - r_1 \ll r_2$ , то:

$$\ln \left( 1 + \frac{r_2 - r_1}{r_1} \right) \sim \frac{d}{r_1}$$

Тогда заменяя:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 2\pi l r_1}{d} \approx \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

Равенство выше верно для разности размеров много меньше, чем радиус большего цилиндра.



### 5.1.3 Сферический конденсатор

Рассмотрим сферический конденсатор:

$$C = \frac{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 R_1 R_2}{(R_1 - R_2)}$$

где  $R_1 \approx R_2$

Если  $d = R_1 - R_2 \ll R_2$ , то можно использовать:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

### 5.1.4 Соединение конденсаторов

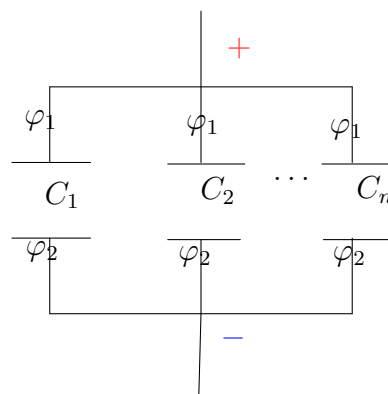
Предельное значение напряжения конденсатора  $U_{max}$ .

Если превысить это значение может случиться так называемый *пробой конденсаторов*.

Таким образом, получаем что у конденсатора можно выделить две характеристики:  $U_{max}$  и  $C$ . Часто требуется использовать несколько конденсаторов объединяя их в конденсаторные батареи.

Соединения могут быть двух типов:

#### 1. Параллельные:



$$U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$$

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n (C_i \cdot U) = U \sum_{i=1}^n C_i$$

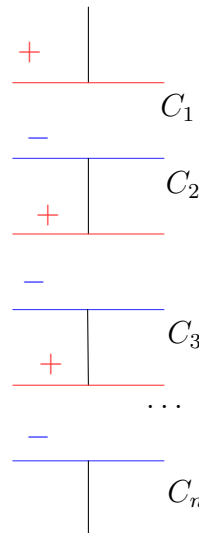
Для параллельного соединения:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

При этом

$$U_{max} = \min_{(i=1,n)} U_{i_{max}}$$

#### 2. Последовательные



$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$$

$$U = \frac{q}{C}$$

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{q}{C_i} \Rightarrow \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

если все конденсаторы одинаковые

$$U_{max} = n \cdot U_{i_{max}}$$

если ёмкость конденсаторов одинаковая

## 6 Энергия электрического поля

### 6.1 Энергия системы зарядов

Возьмем два заряда,  $q_1$   $q_2$ ,

Обозначим потенциал создаваемый первым зарядом в точке  $q_2$  назовем  $\varphi_2$ , и наоборот потенциал вторым зарядом в точке  $q_1$  назовем  $\varphi_1$ .

Энергия взаимодействия зарядов:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}} \right) \cdot q_1$$

$$W_{12} = \varphi_2 q_2 = \varphi_1 q_1 = \frac{1}{2} (\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2)$$

К этой системе добавим заряд  $q_3$  и добавим обозначение  $\varphi_3$  - потенциал который создают заряды  $q_1$   $q_2$  в точке  $q_3$ , тогда выразим энергию заряда  $q_3$  в этом поле:

$$W_3 = \varphi_3 q_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}}$$

Тогда можем получить полную формулу энергии трех зарядов в этой системе:

$$\begin{aligned}
 W &= W_{12} + W_{13} + W_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 \cdot q_1}{r_{21}} + \frac{q_3 \cdot q_1}{r_{31}} + \frac{q_3 \cdot q_2}{r_{32}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} \right) + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} \right) + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_2}{r_{13}} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3)
 \end{aligned}$$

Продолжая аналогичным образом получим итоговую энергию системы зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i$$

где потенциал  $\varphi_i$  создаваемый в точке  $q_i$  всеми остальными зарядами

## 6.2 Энергия заряженного проводника

Возьмем проводник. Поскольку заряд распределен на поверхности проводника, так разобьем всю поверхность на маленькие кусочки. Важно отметить что поверхность проводника есть эквипотенциальная поверхность, тогда посчитаем энергию зарядов на этих кусочках:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\varphi_i \Delta q_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\varphi \Delta q_i) = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^N (\Delta q_i) = \frac{1}{2} \varphi q = \frac{1}{2} \varphi^2 \cdot C = \frac{q^2}{2C}$$

## 6.3 Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{1}{2} \varphi_1 q + \frac{1}{2} \varphi_2 - q = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} q \Delta \varphi = \frac{1}{2} q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

## 6.4 Энергия электрического поля

Наличие диэлектрика влияет на общую энергию электрического поля.

Будем рассматривать плоский конденсатор, подставим в эту формулы выражение для емкости:

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} \cdot U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} \cdot E^2 d^2 = \frac{1}{2} (\epsilon \epsilon_0 E^2) S \cdot d = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \cdot V$$

где  $V$  - объем конденсатора

Объемная плотность энергии электрического поля:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2} \varepsilon \varepsilon_0$$

В анизотропных средах заметим что направления  $D$  и  $E$  не совпадают тогда берем скалярное поризведение векторов  $D$  и  $E$ :

$$w = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} = \frac{\vec{E}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\vec{E} \vec{P}}{2}$$

$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$  - энергия электрического поля в вакууме,

$\frac{\vec{E} \vec{P}}{2}$  - энергия поляризации

## 7 Постоянный электрический ток

— **Определение:** **Электрическим током** называется упорядоченное движение заряженных частиц.

За направление тока принимается движения положительно заряженных частиц.

— **Определение:** Такое движение принято характеризовать **силой тока** — заряд прошедший через сечение проводника за единицу времени.

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq^+}{dt} + \frac{dq^-}{dt}$$

— сила переменного электрического тока.

Поскольку наши частицы есть свободные частицы, то движутся они хаотично. Тогда можем определить скорость хаотического движения зарядов  $\vec{v}$ , а  $\vec{u}$  - скорость упорядоченного движения заряда.

Рассматривая ток внутри материала вводят *величину плотности тока*.

Сила тока величина *скалярная*, плотность тока величина *векторная* —  $\vec{i} = \frac{I}{S}$ , плотность тока всегда направлена по линии движения тока.  $S$  есть площадь перпендикулярная направлению тока.

$$i = \iint_s \vec{i} \cdot \vec{n} ds$$

$$\vec{i} = q \cdot n \cdot \vec{u} = q^+ \cdot n^+ \cdot \vec{u}^+ + q^- \cdot n^- \cdot \vec{u}^-$$

В системе СИ:

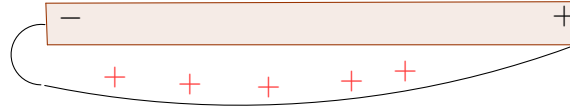
$$[I] = A \text{ (Ампер)}$$

В свою очередь, через Амперы может вычислить и другие величины:

$$K_{\text{Л}} = A \cdot c \cdot B = \frac{\text{Дж}}{K_{\text{Л}}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с}^2}$$

## 7.1 Электродвижущая сила

Возьмем уединенный проводник и поместим его в электрическое поле. Движение частиц по такому проводнику будет недолгим.



Так для того чтобы движение частиц продолжилось нужны посторонние силы, которые заставляют заряженные частицы переместиться в начало:

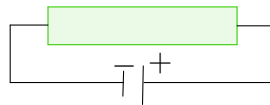
Эти сторонние силы совершают работу по переносу заряда.

— **Определение:** Величина равная работе сторонних сил, деленная на величину перенесенного заряда называется **электродвижущей силой**.

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}$$

В системе СИ:  $[\mathcal{E}] = \text{В}$

Рассмотрим некоторый контур:



Посчитаем работу сторонних сил по такому замкнутому контуру:

$$A = \oint \vec{F}_{st} d\vec{l} + \oint \vec{E} d\vec{l} = \oint \vec{F}_{st} d\vec{l}$$

Вводя напряженность поля создаваемого сторонними силами:

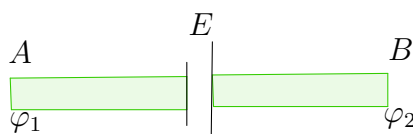
$$\vec{E}_{st} = \frac{\vec{F}_{st}}{q}$$

Получаем что:

$$A = q \oint \vec{E}_{st} d\vec{l} \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{st} dl$$

Рассмотрим другой проводник на который действует ЭДС:



Посчитаем работу всех силы произведенную на этом участке

$$A = \int_a^b \vec{F}_{st} d\vec{l} + \int_a^b \vec{F} d\vec{l} = q \int \vec{E}_{st} d\vec{l} + q \oint \vec{E} d\vec{l} = q \cdot \mathcal{E}_{ab} + q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

— **Определение:** Падением напряжения называется величина равная:

$$\frac{A}{q} = U = \mathcal{E}_{ab} + (\varphi_1 - \varphi_2)$$

В общем говоря, разность потенциалов и падение напряжение не одно и то же, они совпадают тогда и только тогда  $\mathcal{E}_{ab}$  отсутствует.

— **Определение:** Проводник на котором нет ЭДС называется *однородным*, если ЭДС имеется называется *неоднородным*.

## 7.2 Закон Ома сопротивления проводников

Сила тока и приложенное напряжение(и разность потенциалов) в однородном проводнике вычисляется как:

$$I = \frac{U}{R}$$

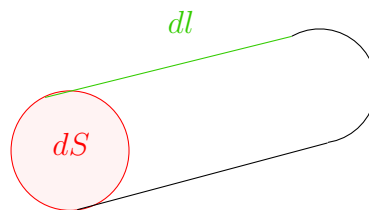
где R - сопротивление проводника

Экспериментально было показано, что сопротивление зависит от площади, длины и свойств материала проводника, тогда верна формула:

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

где  $\rho$  называется *удельным сопротивлением проводника*

— **Определение:** Величина обратная к сопротивлению проводника:  $\frac{1}{\rho} = \sigma$  называется **удельной проводимостью**.



Будем считать, что на  $dl$  напряженность постоянна, тогда:

$$U = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

При малых значениях длины проводника можем вычислить:

$$I = \iota ds$$

$$\iota ds = \frac{E dl}{\rho \frac{dl}{ds}} = \frac{E}{\rho} ds \Rightarrow$$

$$\iota = \frac{E}{\rho}$$

— **Определение:** Такую запись называют **дифференциальной записью закона Ома**

Для металлических проводников справедлива зависимость сопротивления проводника от его температуры, тогда:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{273}$$

Данная дифференциальная запись справедлива и для неоднородных проводников с учетом наличия ЭДС,  $U$  воспринимается как разность потенциалов ( $U = \varphi_1 - \varphi_2$ ), тогда для неоднородных проводников справедливо:

**Дифференциальная запись:**

$$j = \frac{1}{\rho} (\vec{E} + \vec{E}_{st})$$

**Интегральная запись:**

$$I = \frac{U}{R}$$

### 7.3 Закон Джоуля-Ленса

Экспериментально было установлено, что при прохождении тока происходит выделение тепла проводниками, так вычислили количество тепловой энергии выделяемое проводником:

$$Q = I^2 R t = U \cdot I \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

Данная формула верна для постоянного тока, температура проводника не меняется.

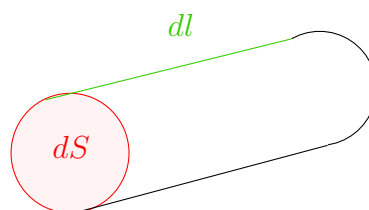
Если ток переменный, то выделяем элементарное тепло при котором ток был постоянный:

$$dQ = i^2 \cdot R dt$$

Тогда:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i^2 R dt$$

Снова рассмотрим малое время сечение:





Выделяем единицу длины проводника

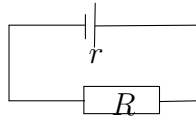
$$dQ = (\iota ds)^2 \cdot \rho \cdot \frac{dl}{ds} dt = \iota^2 \cdot \rho \cdot ds \cdot dl \cdot dt = \iota^2 \cdot \rho \cdot dV \cdot dt$$

— **Определение:** Величину  $\frac{Q}{t} = N = UI$  называют мощностью тока.

— **Определение:** Удельная мощность тока есть мощность тока в единицу времени и единицу площади:

$$w = \frac{dQ}{dV \cdot dt} = \iota^2 \cdot \rho = \frac{E^2}{\rho}$$

## 7.4 Закон Ома для замкнутой цепи



Посчитаем падение напряжение на этом замкнутом участке

$$U = \mathcal{E} + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

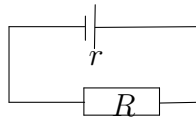
— **Определение:** Если  $1 = 2$  то падение будет численно равно ЭДС , тогда используя закон Ома получаем:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

называют **законом Ома для замкнутой цепи**

## 7.5 Коэффициент полезного действия источника тока

Рассмотрим замкнутую электрическую цепь:



Согласно закону Ома

$$U = IR = \frac{\mathcal{E}}{r + R} \cdot R$$

С другой стороны, посчитаем мощность тока выделяемая на этом участке:

$$P = \frac{\mathcal{E} \cdot R}{R + r} \cdot I$$

еще рассмотрим мощность источника тока

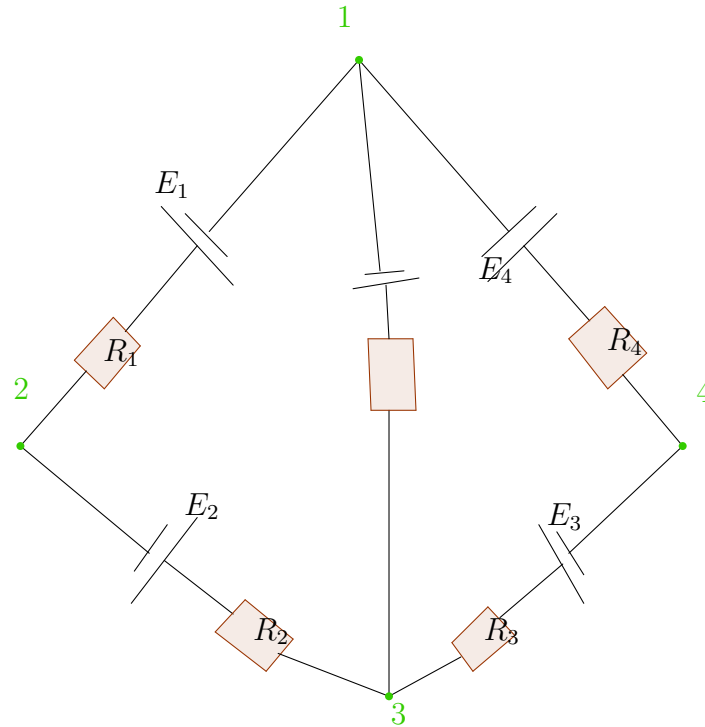
$$P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cdot I$$

Итого полезная мощность

$$\nu = \frac{P_R}{P_E} = \frac{R}{R + r}$$

где  $r$  — сопротивление источника тока и проводящих проводов,  $R$  — сопротивление прибора

## 7.6 Разветвленные цепи. Правило Кирхгофа



— **Определение:** Точка цепи в которой сходятся три и более проводников называется **узлом цепи**.

Будем на узлах считать входящий ток положительным, а выходящий - отрицательным.

- **Первое правило Кирхгофа:** *сумма токов входящих и выходящих из узлов равна нулю:*

$$\sum_k I_k = 0$$

Пройдем по цепи в порядке: 1, 2, 3, 4, 1 и посчитаем последовательно разности потенциалов:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + E_1 = I_1 R_1$$

$$(\varphi_2 - \varphi_3) + E_2 = I_2 R_2$$

$$(\varphi_3 - \varphi_4) + E_3 = I_3 R_3$$

$$(\varphi_4 - \varphi_1) + E_4 = I_4 R_4$$

- **Второе правило Кирхгофа:**

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^n E_i$$

где  $n$  — количество участков замкнутой цепи

1. Если направления обхода совпадает с направлением движение тока то ток положительный.
2. Если направление обхода совпадает с направлением работы ЭДС то ЭДС положительное.

## 7.7 Взаимодействие токов

Опытным путем было установлено, что сила взаимодействия между проводниками приходящаяся на единицу длины проводника равна:

$$f = k \cdot \frac{2i_1 i_2}{b}$$

где  $b$  - расстояние между проводниками,  $i_1$  и  $i_2$  - сила тока соответственно в первом и втором проводнике

В системе СИ коэффициент  $k$  обычно представляют в виде:

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

где  $\mu_0$  магнитная постоянная, которая  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Генри}}{\text{м}}$

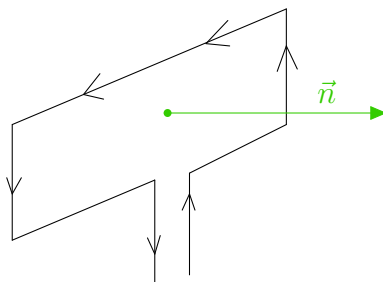
## 8 Магнитное поле

### 8.1 Понятие магнитного поля

Для изучения магнитного поля используется рамка с током.

Магнитное поле оказывает на контур с током ориентирующее действие, а именно поворачивает.

Направление  $\vec{n}$  выбирается по *правилу буравчика*.



— **Определение:** Магнитный момент контура(рамки)  $P_m = I \cdot S$  или в векторном виде:  $\vec{P}_m = P_m \cdot \vec{n}$

Тогда направлением магнитного поля будет выбран вектор нормали  $\vec{n}$ .

Так как поле вращает рамку, то здесь применима не сила  $\vec{F}$ , а момент силы  $\vec{M}$ , выберем  $\vec{M}_{max}$

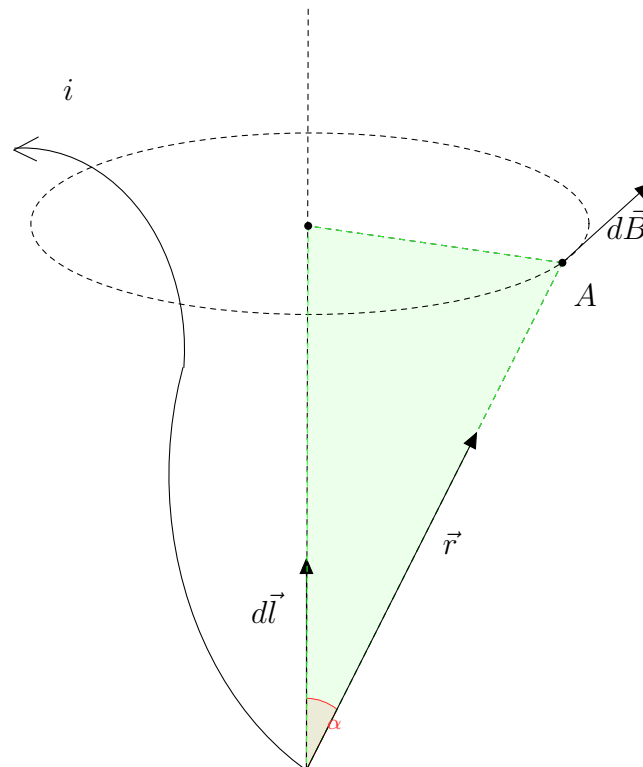
Тогда  $\frac{M_{max}}{P_m} \approx B$  - магнитная индукция

1. Направление совпадает с нормалью к рамке после поворота
2. Величина равна максимальному моменту силы, действующей на рамку на магнитный момент самой рамки.

*Вектор  $\vec{B}$  магнитной индукции характеризует магнитное поле*

## 8.2 Закон Био-Савара-Лапласа

Возьмем произвольный проводник с током:



Возьмем также небольшой участок  $dl$ ,  $r$  — радиус-вектор точки.

Было получено следующее соотношение:

$$d\vec{B} = ki \cdot \frac{[d\vec{l}; \vec{r}]}{r^3}$$

где  $d\vec{B}$  направлен по касательной к окружности

Величина:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2}$$

Заменим  $i \cdot d\vec{l} = \vec{l} \cdot \vec{s} \cdot dl$ , а также  $\iota = q \cdot n \cdot \vec{V}$

Внесем  $\iota$  в векторное произведение:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{V}, \vec{r}]}{r^3} q \cdot n \cdot \vec{s} \cdot dl$$

Разделим это на  $dN$  получим:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

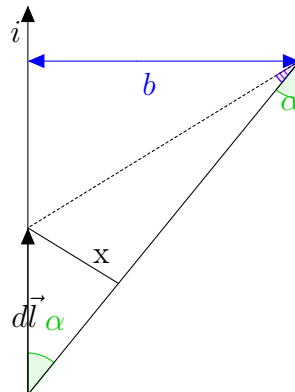
— **магнитная индукция**, которую создает в пространстве движущаяся заряженная частица в определенной точке.

Формула справедлива для скоростей много меньших скорости света

### 8.3 Поля прямого и кругового токов

Возьмем ток, текущий по прямолинейному бесконечному проводнику.

— **Определение:** Ток текущий по прямолинейному беконечному проводнику называется **прямым током**.



Получим, что  $r = \frac{b}{\sin\alpha}$ :

$$dl = \frac{r d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

Откуда:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot b \cdot d\alpha \cdot \sin\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \frac{b^2}{\sin^2\alpha}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot \sin\alpha d\alpha}{b}$$

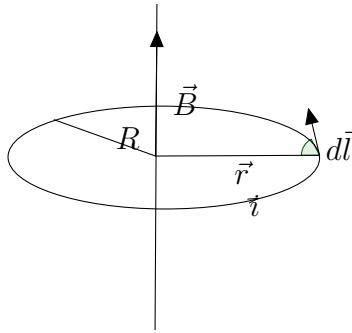
Тогда

$$B = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \cdot \sin\alpha}{b} d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} (-\cos\alpha) \Big|_0^\pi = \frac{\mu_0 i}{2\pi b}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi b}$$

**Линии магнитного поля замкнуты**

Рассмотрим ток, текущий по круговому проводнику:



Тогда в центре:

$$B = \int_{C_l} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^2} dl = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \int_{C_l} dr = 2\pi i \cdot \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 i}{2r}$$

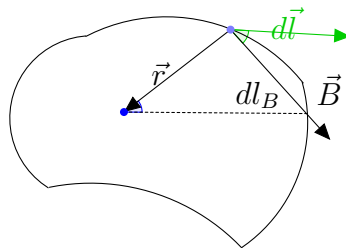
$$B = \frac{\mu_0 i}{2r}$$

## 8.4 Циркуляция вектора в поле соленоида

— **Определение:** Циркуляцией вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  называется:

$$\oint_{\zeta} \vec{B} d\vec{l}$$

Рассмотрим некоторый произвольный контур:



$$\vec{B} d\vec{l} = B \cdot dl \cdot \cos d\alpha = \frac{\mu_0 i}{2r\pi} \cdot r d\alpha = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\alpha$$

Тогда:

$$\oint_{\zeta} \vec{B} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\alpha = \mu_0 i \Rightarrow$$

$$\oint_{\zeta} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i$$

Если внутри контура проходит несколько токов:

$$\oint_{\zeta} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k i_k$$

Или:

$$\oint_{\zeta} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{i} \vec{n} dS$$

— **Определение: Соленоид** — стержень цилиндрической формы, с намотонной на него проволокой (проводником).

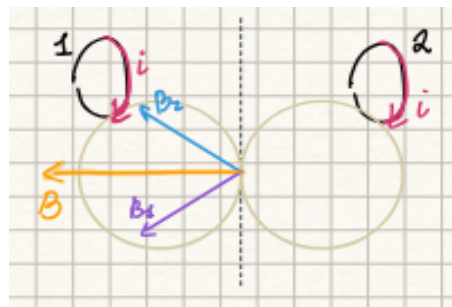
Пусть по соленоиду ток:



Создаваемое магнитное поле будет направлено по оси соленоида.

Рассмотрим магнитное поле в других точках, будем считать что соленоид бесконечен:

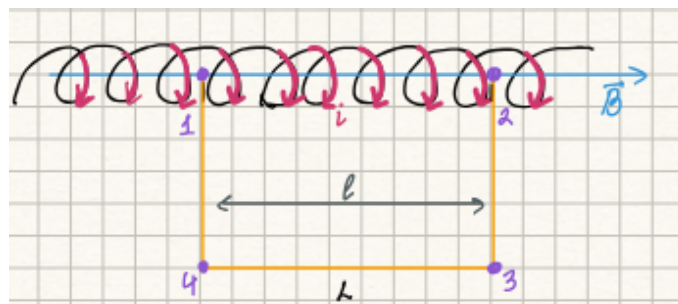
1. Возьмем два витка соленоида и рассмотрим такой рисунок



$$|B_1| = |B_2|, \alpha = \beta \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

где  $B \parallel$  оси соленоида.

2. Возьмем замкнутый контур внутри соленоида



$$\oint_{\zeta} \vec{B} d\vec{l} = \int_{1,2} \vec{B} d\vec{l} + \int_{2,3} \vec{B} d\vec{l} + \int_{3,4} \vec{B} d\vec{l} + \int_{4,1} \vec{B} d\vec{l}$$

Поскольку  $\vec{B} \perp d\vec{l} \Rightarrow \int_{2,3} \vec{B} d\vec{l} = 0$  и  $\int_{4,1} \vec{B} d\vec{l} = 0$ , и при отдалении участка 3,4 от соленоида на бесконечности  $\int_{3,4} \vec{B} d\vec{l} \rightarrow 0$ , тогда:

$$\oint_{\zeta} \vec{B} d\vec{l} = \int_{1,2} \vec{B} d\vec{l} \Rightarrow$$

Из того что  $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{l} \Rightarrow \cos \alpha = 1$

$$B \int_{1,2} dl = Bl$$

3. Пусть  $n$  - количество витков соленоида, приходящие на единицу длины ( $n$  - плотность намотки).

Тогда по теореме о циркуляции вектора  $\vec{B}$ :

$$\oint_{\zeta} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 n i l$$

Откуда

$$B = \mu_0 n i$$

— внутри соленоида соответственно, вне соленоида  $B = 0$

Во всех точках внутри соленоида поле будет одинаковым.

## 8.5 Магнитное поле в веществе

Попадая в магнитное поле любое вещество приобретает магнитный момент (намагничивается) и создает вокруг себя собственное магнитное поле.

Пусть внешнее магнитное поле -  $B_0$ , а  $\vec{B}'$  - внутренне магнитное поле, тогда общее магнитное поле соответственно:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

Молекулярный ток:

$$P_m = i_m \cdot S$$

где  $i_m$  - сила тока молекулы,  $S$  - площадь контура вращения

Тогда вектор намагничивания:

$$\vec{J} = \frac{\sum_{\Delta V'} \vec{P}_m}{\Delta V}$$

## 8.6 Описание магнитного поля магнетика

Возьмем замкнутую поверхность.

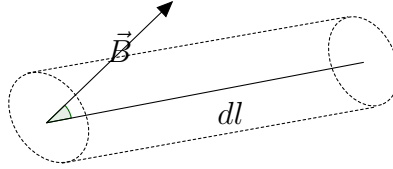
Очевидно, что  $\oint_S \vec{B} \vec{n} dS = 0$  поскольку линии замкнуты, то есть при входе они обязательно выходят или количество линий входящих и выходящих одинаковое.



Тогда с учетом  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ :

$$\oint_{\zeta} \vec{B} d\vec{l} = \oint_{\zeta} \vec{B}_0 d\vec{l} + \oint_{\zeta} \vec{B}' d\vec{l} = \mu_0 \sum i + \mu_0 \sum i_m$$

Возьмем маленький кусочек траектории  $dl$ , для упрощения будем считать, что все молекулярные точки имеют одинаковую площадь:



Объем цилиндра:  $dV_l = S_m \cdot dl \cdot \cos\alpha$ .

В самом цилиндре лежат центры молекул.

Обозначим за  $n$  - концентрация, число молекул в единицу объема.

Тогда количество токов:

$$N_l = n \cdot dV_l = n \cdot S_m \cdot dl \cdot \cos\alpha$$

Тогда:

$$\sum_{dl} i_m = n \cdot S_m \cdot dl \cdot \cos\alpha \cdot i_m$$

С другой стороны:

$$S_m \cdot i_m = P_m$$

где  $P_m \cdot n \cdot dl \cdot \cos\alpha$  - модуль вектора намагниченности в проекции на  $dl$

Тогда:

$$\sum_{dl} i_m = J \cdot dl \cdot \cos\alpha = \vec{J} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \sum i_m = \oint_{\zeta} \vec{J} \cdot d\vec{l}$$

Таким образом:

$$\oint_{\zeta} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum i + \mu_0 \oint_{\zeta} \vec{J} \cdot d\vec{l}$$

Тогда:

$$\int_{\zeta} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum i$$

Вводится вспомогательная величина:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

— **напряженность магнитного поля.**

Важно отметить, что  $\vec{H}$  не учитывает молекулярные токи, поэтому  $\vec{H} = \vec{H}_0$  - напряженность магнитного поля в вакууме.

**Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля:**

$$\oint_{\zeta} \vec{H} d\vec{l} = \sum i$$

Экспериментально было показано, что  $\vec{J} = \chi \cdot \vec{H} \Rightarrow$ :

$$\vec{H}(1 + \chi) = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \vec{H} = \frac{B}{\mu\mu_0}$$

Так  $\chi$  может быть меньше 0  $\Rightarrow \mu$  может быть меньше единицы.

У некоторых веществ  $\chi \neq const (\Rightarrow \mu \neq const)$  она зависит от магнитного поля. В вакууме  $\chi = 0, \mu = 1$ .

Покажем, что  $\vec{H} = \vec{H}_0$ . Возьмем некоторый стержень и расположим его вдоль вектора магнитной индукции  $\vec{B}_0$ . Все молекулярные токи  $i_m$  будут соориентированы перпендикулярно  $\vec{B}$ .

Заметим, что *внутри* стержня молекулярные токи  $i_m$  компенсируются, а те которые вышли на границу ничем не компенсируются. Получается, что по контуру циркулирует ток  $I_1$ , так как  $I_1$  есть на протяжении всего стержня, то логично рассматривать его как соленоид.

Выделим в соленоиде кусочек длины  $dl$ , посчитаем магнитный момент:

$$dp_m = S \cdot I_1 dl \Rightarrow dp_m = I_1 \cdot dv \Rightarrow \vec{J} = I_1 = \frac{dp_m}{dv}$$

— это и есть вектор намагничивания  $J$

Так подставим этот вектор  $I_1 = J$ , получим  $\vec{B}' = \mu_0 \cdot \vec{J}$ , таким образом

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \mu_0 \cdot \vec{J}$$

Из определения  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0 + \mu_0 \cdot \vec{J}}{\mu_0} - \vec{J}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{H}_0 \Rightarrow H = H_0$$

Таким образом, мы получили что  $H$  в магнетике и в вакууме  $H_0$  совпадают.

Отсюда вытекает:

$$\begin{cases} \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \\ \vec{H}_0 = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{B}{\mu} = B_0 \Rightarrow B = \mu \cdot B_0$$

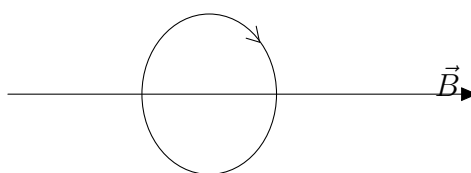
— то есть  $\mu$  показывает во сколько раз изменяется магнитное поле в магнетике.

**Замечание:** Если магнитное поле расположено под углом, то так же как и электрическое поле оно преломляется на границах.

## 8.7 Виды магнетиков

### *Классификация магнетиков*

1. Диамагнетики ( $\chi < 0$ , с порядком  $10^{-8} \dots 10^{-7}$ )
2. Парамагнетики ( $\chi > 0$ , с порядком  $10^{-7} \dots 10^{-4}$ )
3. Ферромагнетики ( $\chi > 0$ , с порядком  $10^3$ )
4. Ферримагнетики
5. Антиферромагнетики

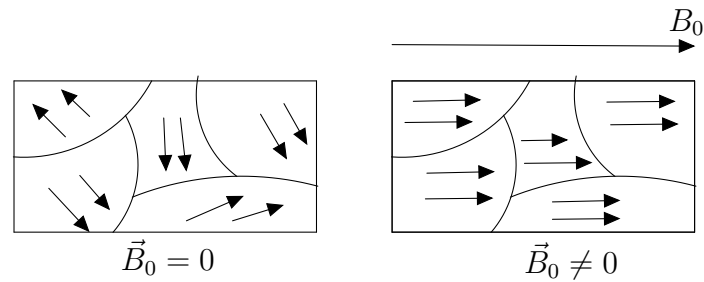


Электрон вращается вокруг ядра по некоторой окружности. Значит он обладает орбитальным моментом  $p_m$ . Но электрон также обладает собственным магнитным моментом — спином ( $p_s$ ). Складываясь они влияют на магнитный момент молекулы.

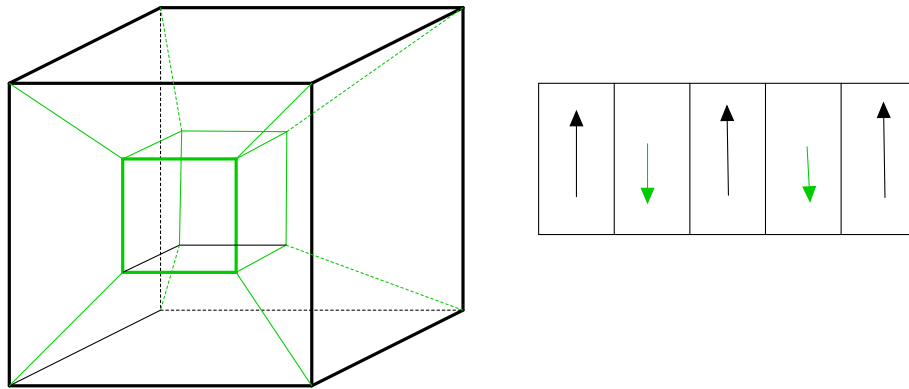
- Собственный магнитный момент есть у всех магнетиков за исключением диамагнетиков, то есть  $p_s, p_m$  скомпенсировали друг друга. Диамагнетики намагничиваются против направления магнитного поля.

— **Явление диамагнетизма** : происходит прецессия орбиты электрона, то есть она сама начинает вращаться. Это создает дополнительное смещение электрона.

- У парамагнетиков все молекулы обладают магнитным моментом, но они перемешаны и в магнитном поле разворачиваются, создавая намагниченность, то есть без магнитного поля они друг друга компенсируют.
- Ферромагнетики обладают доменной структурой, то есть в некоторых локальных областях магнитные моменты направлены в одну сторону. То есть в отсутствие магнитного поля они также не намагничиваются, но в магнитном поле они все стремятся развернуться в одну сторону, значительно усиливая магнитное поле. После снятия магнитного поля намагниченность ферромагнетиков уменьшается, но сохраняется, то есть обладают остаточной намагниченностью. У ферромагнетиков имеется точка Кюри. Магнетик перестает быть ферромагнетиком и становится парамагнетиком.



- Ферритмагнетики состоят из двух слоев — из более намагниченного внешнего слоя и слабо намагниченного внутреннего слоя, направленного противоположно внешнему слою.



Таким образом, они обладают разными по модулю магнитными моментами.

Ферритмагнетики могут быть диэлектриком и полупроводником.

- Антиферромагнетики также обладают доменной структурой, но их соседние молекулы противоположно направлены. При изменении внешнего магнитного поля изменяется сопротивление антиферромагнетика.

## 8.8 Действие магнитного поля на токи и заряды

Возьмем элемент проводника с током  $dl$ , на него соответственно действует сила  $d\vec{f}$

$$d\vec{f} = ki \cdot [d\vec{l}, \vec{B}]$$

Тогда сила, действующая на единицу длины проводника:

$$d\vec{f} = i \cdot [d\vec{l}, \vec{B}]$$

— *Закон Ампера*

### 8.8.1 Сила Лоренца

Скажем, что  $i = j \cdot S$ , тогда

$$d\vec{F} = S \cdot dl \cdot [\vec{j}, \vec{B}] \Rightarrow$$

где  $d\vec{l}$  и  $\vec{j}$  направлены в одну сторону

$$d\vec{f} = dV \cdot [\vec{j}, \vec{B}] \langle \text{в силу } \vec{j} = q \cdot n \cdot V \rangle \Rightarrow$$

$$d\vec{f} = q \cdot [\vec{V}, \vec{B}] n \cdot dV \Rightarrow \frac{df}{dN} = F_l = q[\vec{V}, \vec{B}]$$

Сила с которой магнитное поле действует на движущуюся заряженную частицу:

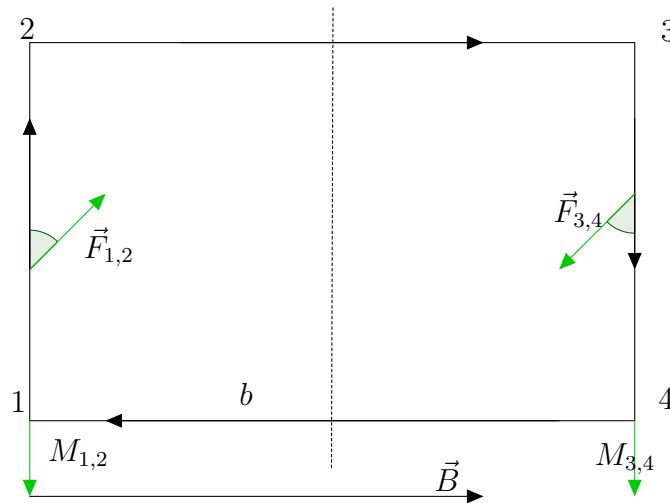
$$F_l = q[\vec{V}, \vec{B}]$$

— *Сила Лоренца*

где  $\vec{B}$  - индукция магнитного поля,  $\vec{V}$  - скорость частицы.

## 8.9 Контур с током в магнитном поле

Пусть имеется некоторый контур с током, направленным изначально вниз:



Используем закон Ампера:

$$F_{1,2} = i \cdot a \cdot b; F_{3,4} = i \cdot a \cdot B$$

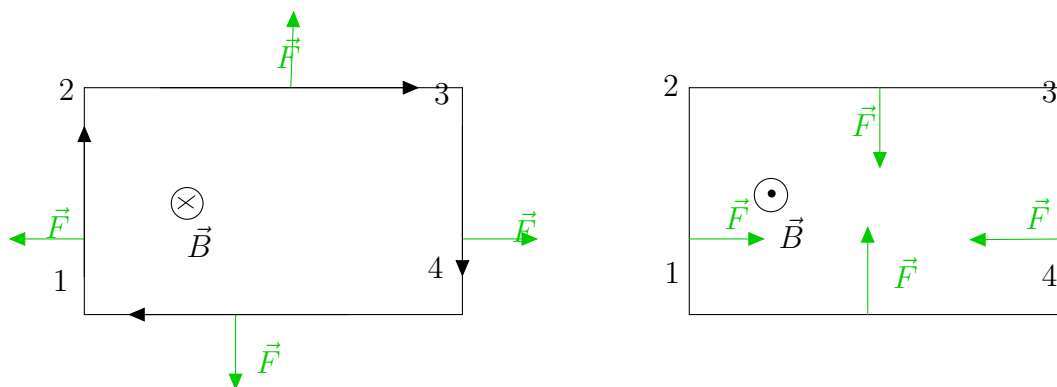
$$F_{2,3} = 0; F_{4,1} = 0$$

Силы стремятся повернуть контур вокруг оси, проходящей через центр:

$$M_{1,2} = F_{1,2} \cdot \frac{b}{2}; M_{3,4} = F_{3,4} \cdot \frac{b}{2}$$

Тогда

$$M = M_{1,2} + M_{3,4} = i \cdot a \cdot b \cdot B = i \cdot S \cdot B = P_m \cdot B \Rightarrow B = \frac{M_{max}}{P_m}$$



## 8.10 Электромагнитная индукция

### 8.10.1 Закон электромагнитной индукции

**Формулировка:** Во всяком замкнутом проводящем контуре, при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром возникает электрический ток, называемый **индукционным**

$$\Phi_b = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

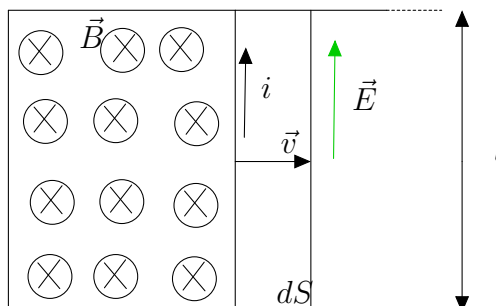
$$[\Phi_b] = \text{Вб} = \text{Вебер}$$

### 8.10.2 Правило Ленца

**Формулировка:** Индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине его вызывающей

При увеличении тока в реостате  $\vec{B}$  растет и создается ток противоположного направления. Расчитаем ЭДС индукционного тока.

Пусть имеется проводник:



Поскольку  $l$  есть подвижный участок, то на электроны участка будет действовать сила Лоренца:

$$F_l = e \cdot v \cdot B \Rightarrow E_s t = v \cdot B$$

$$\mathcal{E} = \int_I \vec{E}_s t \cdot d\vec{l} = E \cdot l$$

при постоянной скорости

Подставим скорость  $v$ :

$$\mathcal{E} = v \cdot B \cdot l = \frac{dS}{dt} \cdot l \cdot \vec{B} = \frac{dS}{dt} \cdot \vec{B} = \langle B \cdot S - \text{поток } B \text{ через площадь } S \rangle \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

— ЭДС индукции

Для потока вектора магнитной индукции,  $[\Phi_B] = \text{Вебер (Вб)}$

### 8.10.3 Явление самоиндукции

Любой контур с током создает магнитный поток  $\psi$ - поток магнитный индукцией пронизывающий контур создаваемый самим током. Когда ток постоянный,  $\psi$  тоже постоянна, если же переменный то  $\psi$  меняется и возникает индукционный ток и ЭДС индукции в самом контуре. Такое явление называется явлением самоиндукции.

Ток самоиндукции будет влиять на исходный ток. Ток магнитной индукции пропорционален силе исходного тока, то и поток вектора магнитной индукции пси пропорционален силе тока.

$$\psi = L \cdot i$$

— коэффициент  $L$  называют индуктивностью тока.

Индуктивность тока не зависит от силы тока, только в том случае нет вблизи ферромагнетиков.  $L$  константа только в том случае если контур жесткий и нет вблизи ферромагнетиков, в любом другом случае зависит от силы тока.

Пример:

$$L_{sol} = \mu\mu_0 \frac{N^2 \cdot s}{l}$$

где  $N$  - число витков соленоида,  $s$  - площадь сечения,  $l$  - длина соленоида

Учитывая  $\psi = L \cdot i$  и  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$  можем получить ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\left(\frac{dL}{dt} \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}\right) = -\left(\frac{dL}{dt} \cdot i + L\right) \cdot \frac{di}{dt}$$

В том случае когда  $L$  константа:

$$\mathcal{E} = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

В системе СИ:  $[L] = \text{Генри (Гн)}$

про влиянии самоиндукции что плавно угасает и возникает

### 8.11 Ток при замыкании цепи

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} - \text{Изначальный ток}$$

Ток уменьшается и поток уменьшается и ЭДС индукции стремится его поддержать, то из закона Ома у нас получается, причем в этом случае у нас будет ЭДС именно самоиндукции:

$$i \cdot R = \mathcal{E} = L \frac{di}{dt} \Rightarrow$$

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0 (\text{Начальное условие: } i(0) = I_0) \Rightarrow$$

$$i = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

То есть когда мы выключаем ток, эдс создает индукционный ток, который направлен противоположно то есть уменьшая ток.

### 8.12 При замыкании

$$i \cdot R = \mathcal{E} + \mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + \mathcal{E} \Rightarrow$$

$$L \frac{di}{dt} + iR = \mathcal{E} (\text{Начальное условие: } i(0) = I_0) \Rightarrow$$

$$i = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

То есть при включении тока также нам препятствует ЭДС индукции и получается ток набирает свою силу равномерно.

### 8.13 Движение заряженной частицы в магнитном поле

Пусть магнитное поле направлено от себя, пусть заряженная частица положительная и скорость частицы перпендикулярна ветвору магнитной индукции. Сила Лоренца действующая на частицу будет направлена вверх. Из-за перпендикулярности вектора силы лоренца частица будет двигаться по окружности причем против часовой стрелки, отрицательная частица по часовой стрелке.

Пусть у нас есть вектор  $\mathbf{B}$  и заряженная частица будет двигаться со скоростью по вектору  $\mathbf{B}$ , причем сила Лоренца не будет действовать поскольку веткорное произведение будет давать ноль из-за сонаправленности векторов.

Энергия частицы не будет меняться, поскольку работа над частицей совершаться не будет, поскольку вектор скорости будет перпендикулярен вектору силы Лоренца, следовательно скалярное произведение будет равно нулю.

Рассмотрим движение частицы под углом. Вектор  $\mathbf{B}$  разложим на составляющие: перпендикулярную и параллельную. На перпендикулярную будет действовать сила



Лоренца поскольку по одной составляющей будет действовать вдоль, а по другой по окружности то движение частицы будет направлено по спирали, отрицательная частица будет закручиваться в другую сторону.

## 9 Электромагнитное поле

### 9.1 Вихревое электрическое поле

Рассмотрим случай, когда будет меняться веток магнитной индукции. Так при изменении магнитной индукции появится и самоиндукция, следовательно и ЭДС индукции. ЭДС индукции появилось так что возникает электрическое поле, которое связано с появлением индукционного тока.

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_{\zeta} \vec{E} d\vec{l} \\ \mathcal{E} &= -\frac{\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\zeta} \vec{B} \cdot \vec{n} ds \Rightarrow \\ \oint_{\zeta} \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \iint_{\zeta} \vec{B} \cdot \vec{n} ds \Rightarrow\end{aligned}$$

Поскольку ничто другое кроме вектора магнитной индукции не меняется, то:

$$\oint_{\zeta} \vec{E} d\vec{l} = - \iint_{\zeta} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{n} ds$$

Такое поле называется вихревым, причем оно не стационарное, поскольку работа по замкнутому контуру не равна нулю. Вихревое поле возникает в любом случае при наличии переменного магнитного поля. В общем говоря при наличии таких двух полей, общее магнитное поле будет вычисляться как:  $E = \vec{E}_q + \vec{E}_B$

$$\oint_{\zeta} = - \iint_{\zeta} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{n} ds$$

*Переменное магнитное поле порождает в пространстве вихревое электрическое поле.*

### 9.2 Ток смещения

Максвелл предположил что порождаемое электрическое поле должно в свою очередь порождать магнитное поле.

Пусть у нас имеется конденсатор, по этому конденсатору циркулирует переменный электрический ток. Максвелл ввел в рассмотрение так называемый ток смещения, условно предполагая что между пластинами конденсатора возникает ток. Соответственно, мгновенное значение силы тока:  $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow j = \frac{i}{s} = \frac{dq}{dS} = \frac{d\sigma}{dt}$ .

Поле возникающее между обкладками можно характеризовать через ... Пусть известно что напряженность тока  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon\varepsilon_0 E = \sigma(D = \sigma)a$

$$j = \frac{dD}{dt}$$

Тогда полный ток:  $\vec{j}_{pol} = \vec{j} + \vec{j}_{smes} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$

$$\oint_{\zeta} \vec{H} d\vec{l} = \iint_S (\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}) \cdot \vec{n} dS \quad (\text{В силу того, что: } \oint_{\zeta} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum i) = \iint_S \vec{j}_{pol} \cdot \vec{n} dS = \iint_S (\vec{j} + \vec{D}) \cdot \vec{n} dS$$

Тогда:

$$\oint_{\zeta} \vec{H} d\vec{l} = \iint_S (\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}) \cdot \vec{n} dS$$

### 9.3 Электромагнитное поле

1. Переменное магнитное поле порождает электрическое поле

$$\oint_{\zeta} \vec{E} d\vec{l} = - \iint_S \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \cdot \vec{n} dS$$

2. Линии магнтного поля замкнуты

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$$

3. Магнитное поле порождается либо токами проводимости либо переменным электрическим током

$$\oint_{\zeta} \vec{H} d\vec{l} = \iint_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \vec{n} dS$$

4. Теорема Гаусса

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \rho_q dV$$

### 9.4 Уравнения Максвелла(Интегральная форма)

Такие уравнения можно переписать в дифференциальной форме

1. Применим формулу Стокса

$$\iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow$$

$$1. \text{rot}(\vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$3. \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

2. Применим формулу Гауса Остроградского

$$2. \operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

$$3. \operatorname{div}(\vec{D}) = \rho_q$$

3. К этим уравнениям добавляем еще 3:

$$5. \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$6. \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$7. \vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

Уравнения 1 - 7 составляют полную систему уравнений электродинамики.

# Глава V

## Физические основы ЭВМ

### 1 Краткие сведения из квантовой механики

В 1923 Де Бройль вывел формулу длины волны, после было доказано наличие волновых свойств у электрона

$$\lambda = \frac{\hbar}{p}$$

где  $\hbar$  это постоянная Планка равная  $6,626 * 10^{-34}$

#### 1.1 Корпускулярно-волновой дуализм

Определим некоторые погрешности:  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  — погрешности измерения координат,  $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$  — погрешности измерения импульса

Гейзенберг пришел к следующим соотношениям называемыми Неравенство Гейзенберга(соотношения неопределенности):

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \\ \Delta y \Delta p_y \geq \hbar, \\ \Delta z \Delta p_z \geq \hbar. \end{cases}$$

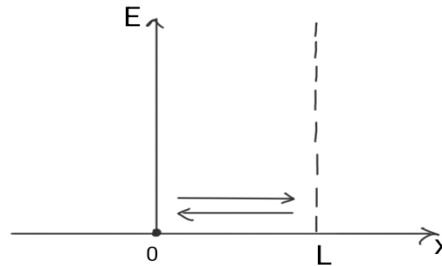
Для описания квантовых объектов вводится волновая функция. Волновая функция  $\Psi(x, y, z)$  - физического смысла не имеет, через нее выражаются уравнения частиц и явлений. В частности:

$|\psi(x, y, z, t)|^2$  — имеет физический смысл.

Если  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  - волновые частицы в разных положениях, то  $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n$  — общая волновая функция.

## 1.2 Спектр электронных состояний в атомах молекулах и кристаллах

Рассмотрим абстрактный пример: пусть частица в потенциальном яме:



$$A \cdot e^{i(kx+\omega t)} = \psi_1$$

$$A \cdot e^{i(-kx-\omega t)} = \psi_2$$

Поскольку  $e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i \cdot \sin kx$

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2 = A(e^{ikx} \cdot e^{-i\omega t} - e^{-ikx} \cdot e^{-i\omega t}) = A \cdot e^{-i\omega t} \cdot 2i \cdot \sin kx$$

Так как  $\sin kL \Rightarrow kL = \pi n$  выведем формулу волного числа:

$$k = \frac{\pi n}{L}, n = 1, 2, \dots$$

где  $n$  - количество длин волн

**Формула, определяющая длину волны:**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Используя формулу Де-Бройля

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{h}{2\pi} = k \cdot \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar$$

— приведенная постоянная Планка

Тогда:

$$p = \frac{n \cdot \hbar}{2L}$$

Рассмотрим потенциальную энергию:

$$W = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 \cdot \hbar^2}{8L^2m}$$

В силу того что  $n \in \mathbb{Z}$ , то  $W$  принимает фиксированные значения - квантуется.

Рассмотрим атом водорода: пусть на электрон действует сила Кулона, а именно

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_e \cdot q_p}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

Рассмотрим второй закон Ньютона:

$$\begin{aligned} F = ma &\Rightarrow a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} &= m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow \\ r &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \end{aligned} \quad (\text{V.1})$$

На орбиту электрона укладывается целое число волн, то есть число квантуется:

$$\begin{aligned} 2\pi r &= \lambda \cdot n \\ 2\pi r &= \frac{h \cdot n}{mv} \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

Решим систему (V.1), (V.2) с неизвестными  $r$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}, \\ r = \frac{hn}{2\pi m v}. \end{cases} \\ \begin{cases} e^2 \cdot 2\pi m v = hn \cdot 4\pi\epsilon_0 m v^2, \\ r = \frac{hn}{2\pi m v}. \end{cases} \\ \begin{cases} e^2 \cdot 2\epsilon_0 hn = e^2, \\ r = \frac{hn}{2\pi m v}. \end{cases} \\ \begin{cases} v = \frac{e^2}{2\epsilon_0 hn}, \\ r = \frac{h^2 n^2}{\pi m e^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

**Уравнение Шредингера:**

$$\psi = A \cdot e^{i(kx - \omega t)} - \text{для одномерного случая.}$$

где  $k$  - волновое число,  $\omega$  - угловая скорость (волновой вектор)

Если  $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$  -

$$r = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{m e^2 \pi}$$

$$v = \frac{e^2}{2 h \varepsilon_0 n}$$

Получаем, что чем дальше электрон, тем медленнее он будет вращаться.

Тогда:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2n^2}$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = -\frac{me^4}{4h^2\varepsilon_0^2n^2}$$

Поскольку  $\vec{F} = -\nabla E_n$  получаем полную энергию электрона на орбите при  $E_n \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ :

$$E = E_k + E_p = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2n^2}$$

Электрон как и всякое тело стремится к минимуму потенциальной энергии, для электрона это достигается на нижней орбите — самой стабильной орбите. Следовательно, электрон всегда стремится к нижней орбите, при этом он должен избавиться от избытка энергии. Поскольку энергия электрона квантована, при переходе он испускает волны определенной частоты. Причем этот набор у каждого элемента фиксирован.

Свободный электрон может иметь любую энергию, а несвободный только фиксированную. Будем называть валентным тот электрон, который прикрепленным к некоторому ядру, а свободным соответственно неприкрепленным.

## 1.3 Энергетические состояния электронов в многоэлектронных атомах

### 1.3.1 Принцип Паули

*В пределах одной квантовой системы в данном квантовом состоянии может находиться только один фермион(электрон)*

Квантовое состояние описывает всевозможное состояния квантовой системы, характеризуется **квантовыми числами**.

1.  $n$  главное квантовое число определяет радиус круговой орбиты или величину большой полуоси эллиптической орбиты. ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) Состояние электрона определяемое главным квантовым числом называют главным энергетическим уровнем.

2.  $l$  главное орбитальное квантовое число определяет величину малой полуоси эллиптической орбиты. ( $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ )
3.  $m$  магнитное квантовое число ( $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ ) определяет ориентацию орбит, орбитальный магнитный момент электрона
4.  $s$  спиновое квантовое число  $s = \pm 1/2$

Из принципа Паули вытекает что на орбите не может находится не более двух электронов.

### 1.3.2 Принцип Хунда

*Суммарное значение спина электронов данного подуровня должно быть максимальным.*

$n$	$s$	$p$
1	$\uparrow\downarrow$	
2	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow--$

$n$	$s$	$p$
1	$\uparrow\downarrow$	
2	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow-$

$n$	$s$	$p$
1	$\uparrow\downarrow$	
2	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow\uparrow$



## 2 Виды химических связей

### 2.1 Ковалентная связь

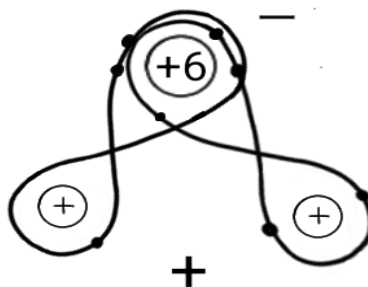
При такой связи возникает обобществленная пара электронов по одному от каждого атома. Различают два вида связи, связь **смещенная** и **несмещенная**.

n	s	p
1	$\uparrow\downarrow$	
2	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$

1. Несмещенная связь - возникает между атомами одинаковой массы ( $O_2, H_2, N_2$ )

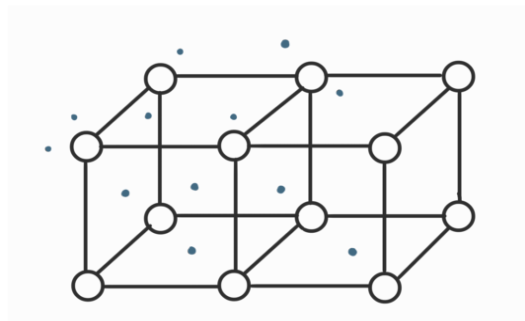


2. Смещенная связь - обычно возникают между атомами с различным числом протонов в ядре, что вызывает *поляризацию*.



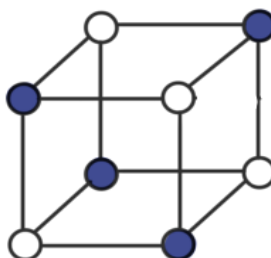
## 2.2 Металлическая связь

Будем рассматривать решетку образованную электронами и ионами соответственно, такая решетка будет сохраняться за счет электронного облака.



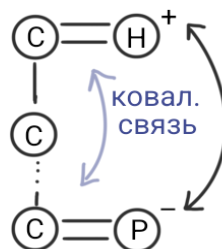
## 2.3 Ионная связь

Характерно для связи металлов с неметаллами.



## 2.4 Молекулярная связь

Возникает в газах при очень низких температурах.



## 2.5 Водородная связь

Для связи электрон может принимать фиксированное значение энергии, их называют энергетическими уровнями.

## 3 Электронная проводимость твердых тел

Модель электронного газа - в металлах большое количество свободных электронов. Эти электроны внутри металла движутся непрерывно и хаотично подобно молекулам газа. При наличии электрического поля, эти свободные электроны приходят в упорядоченное движение, создавая электрический ток.

Напишем **среднюю хаотическую энергию электрона**:

$$E_t = \frac{3}{2}kT$$

В результате применения законов термодинамики приходим к этой формуле:

$$j = \frac{1}{\rho E}$$

Модель верна, потому что приходим потом к закону Ома в дифференцированной форме.

При своем упорядоченном движении электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки, чем объясняется электрическое сопротивление. С ростом температуры проводника увеличивается сопротивление проводника, поскольку само движение атомов становится активнее и электроны больше сталкиваются.

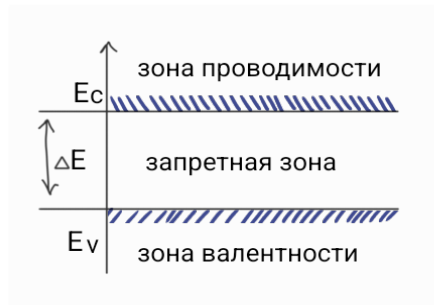
В полупроводниках наоборот: *при уменьшении температуры увеличивается сопротивление*, то есть теория электронного газа не подходит для полупроводников.

Сверхпроводимость проявляется лишь при ультра низких температурах, на таком явлении построены квантовые компьютеры.

## 4 Квантовая модель электропроводимости

Рассмотрим энергию атомов, можно разделить на три уровня:

- **Валентная зона** ( $E_v$  - граница валентной зоны)
- **Запретная зона** — те уровни энергии, которые не может принимать электрон в этом материале
- **Зона проводимости** — электрон свободный и может перемещаться по материалу ( $E_c$  - граница нижняя зоны)



Наивысшая плотность уровней в одной зоне вблизи границ зон, верхней для валентной и нижней для зоны проводимости.

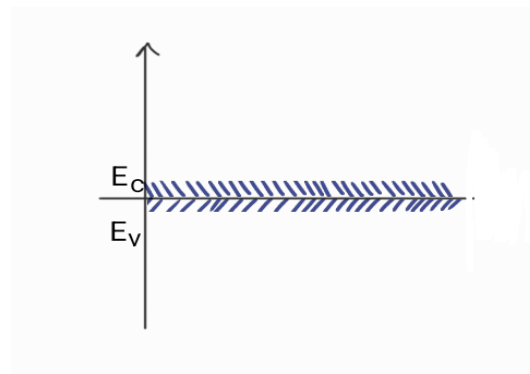
— У металлов запретная зона практически отсутствует,  $\Delta E < 0,1 \text{ эВ}$  - ширина запретной зоны, измеряется в энергиях эВ.

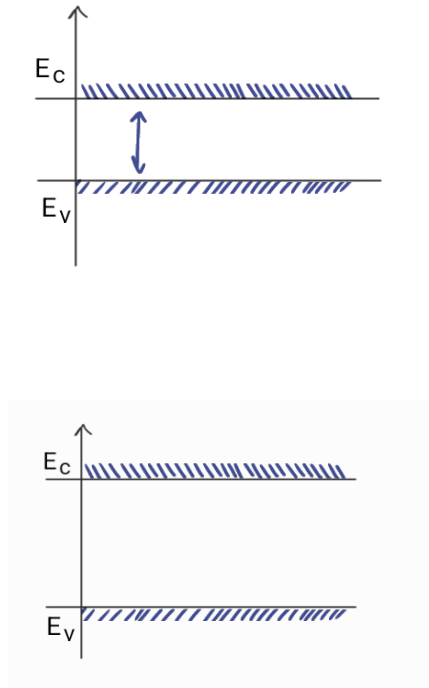
— У полупроводников есть запретная зона, но  $0,1 \leq \Delta E \leq 0,3$

— У диэлектриков  $\Delta E > 3$

Чтобы перейти в другую зону, электрону нужно сообщить энергию, можно тепловую энергию (фотоэлементы). Для полупроводников достаточно сообщить тепловую энергию чтобы перевести в проводимое состояние. Для диэлектриков слишком широкая полоса для преодоления электронами, следовательно не может идти ток, есть свободные электроны, но они не достигают зоны.

Для металлов, поскольку по сути запретной зоны нет то переходя в другую зону они не вызывают такого влияния как колебания кристаллической решетки, следовательно сопротивление ухудшается.





Рассмотрим трехмерный потенциальный ящик, для одномерного:  $P_p = \frac{h}{L} \cdot n \Rightarrow n = \frac{P_p}{h} \cdot L$ , разложим квантовое число по каждому измерению:

$$\begin{cases} n_x = \frac{2L}{h} \cdot P_x, \\ n_y = \frac{2L}{h} \cdot P_y, \\ n_z = \frac{2L}{h} \cdot P_z. \end{cases}$$

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = \frac{h^2}{4L^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

— **Определение:** Уровень Ферми - уровень энергии для которого заполнены электронные состояния при Т стремящемся к нулю называется уровнем энергии Ферми.

Для металлов  $E_c = E_f = E_v$  это одна и та же линия. Вероятность обнаружить электрон на уровне Ферми =  $\frac{1}{2}$

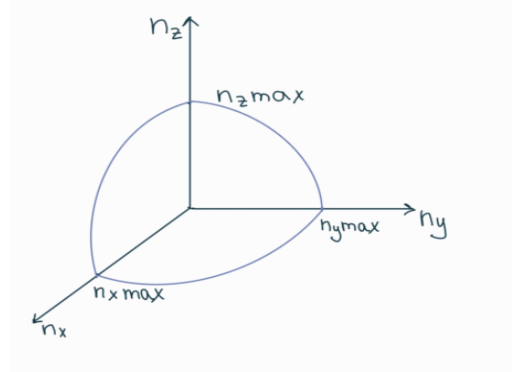
**Таким образом, уровень ферми определяет значение главного квантового числа.**

Тогда можем считать, что:

$$n_{zmax} = n_{ymax} = n_{xmax} = \frac{2L}{h} \cdot P_f$$

До сих пор мы рассматривали ящик в рассматриваемом пространстве, сейчас переходим к пространству квантовых чисел, то есть по каждой оси число  $n$  ограничено  $n_{max}$

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \leq \frac{2L}{h} \cdot P_F$$



Тем самым любое значение:

$$0 < n_x, n_y, n_z \leq \frac{2L}{h} \cdot P_F$$

Определяет октант сферы, найдем площадь поверхности этой части сферы:

$$S = 2 \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \cdot \left( \frac{2L}{h} P_F \right)^3 = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{P_F}{h} \right)^3 \cdot L^3$$

где  $L^3$  - объем потенциального ящика, обычно рассматривают в единице объема

$$N = \frac{S}{V} = \frac{8\pi}{3} \frac{P_F^3}{h^3}$$

$$P_F = \frac{h}{2} \cdot \left( \frac{3N}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

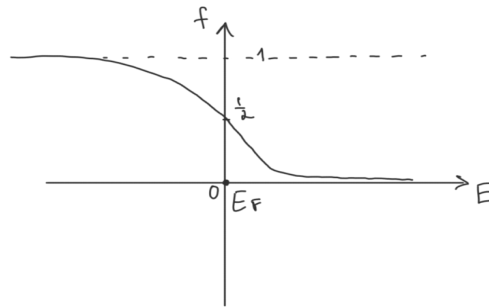
$$E_F = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{3N}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$N = \frac{\pi}{3} \frac{(8mE_f)^{3/2}}{h^3}$$

Найдем плотность энергетических состояний электрона на единицу энергии (количество состояний):

$$\frac{dN}{dE} = \rho_N(E) = \frac{\pi(8m)^{\frac{3}{2}}}{2h^3} \cdot E^{\frac{1}{2}}$$

## 4.1 Распределение Ферми



Это функция  $f(E)$  представляет из себя вероятность того, что *электрон будет находиться на данном уровне с энергией  $E$*  (вероятность заполнения состояниями).

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp \frac{E - E_F}{kT}}$$

Тогда концентрация электронов на данном уровне энергии:

$$h(E) = \rho_N(E) \cdot f(E)$$

Общая концентрация электронов:

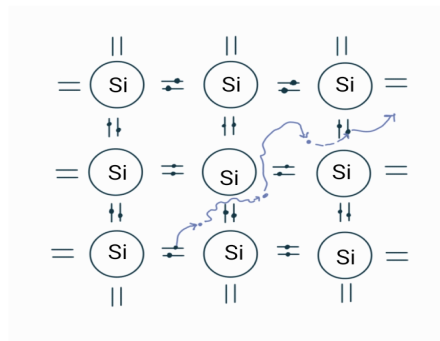
$$n = \int_{E_F}^{\infty} f(E) \cdot \rho_N(E) dE$$

## 4.2 Полупроводники

Примеры полупроводников: кремний, германий, фосфор, мышьяк, сурьма

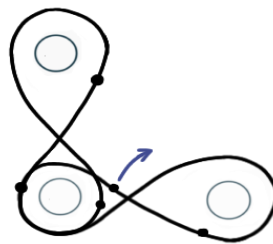
Ширина запрещенной зоны: Германий  $\Delta E \approx 0,67$  Кремний  $\Delta E \approx 1,12$

### 4.2.1 Носители зарядов в полупроводнике



Пусть электрон в решетке получает энергию чтобы выйти из ковалентной связи, следовательно из решетки - появляются свободные электроны. Когда есть свободное место в связи (там меньше потенциальной энергии) он заходит туда.

Рассмотрим прошлое место, откуда ушел электрон, теперь оно свободно, там образуется положительный заряд, и так электрон может перейти на другую орбиталь с вакантным местом. Так пустое место заряженное место перемещается до кристаллу, это место находится всегда в валентной зоне - поскольку меньше потенциальной энергии.



В полупроводнике носители заряда являются как электроны так и вакантные места. (n - электрон, p - пустое место) Так образуется пара - пустое место и электрон.

В идеальном кристалле количество дырок и электронов совпадает.

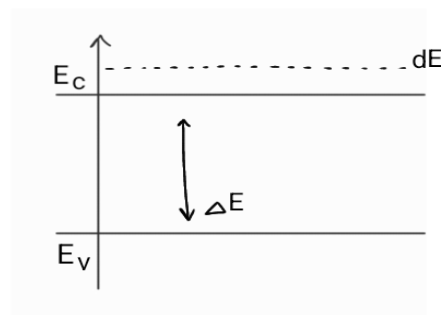
Причем свободный и электрон в решетке это разные электроны и их массы не совпадают, у пустого места тоже есть масса называемая эффективной массой.

$$m_n^* = \frac{pE}{v_n} \text{ — масса электрона}$$

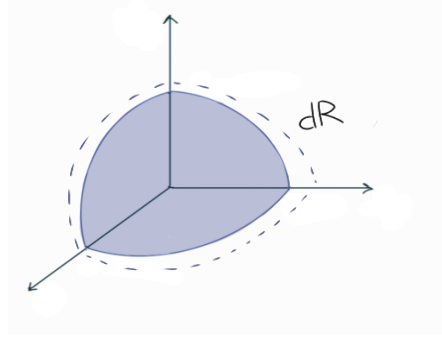
$$m_p^* = \frac{pF}{v_p} \text{ — эффективная масса}$$

— **Определение:** Образование электронно-дырочной пары называется генерацией, обратный процесс - рекомбинацией. При генерации электрон из валентной зоны в зону проводимости, и при рекомбинации наоборот.

Количество электронов в зоне проводимости:







$$R = \frac{2L}{h}p \Rightarrow dR = \frac{2L}{h} \cdot dp$$

$$S = \frac{2}{8} \cdot 4\pi R^2$$

$$V = \frac{2}{8} \cdot 4\pi R^2 dR \Rightarrow \frac{8\pi L^3}{h^3} p^2 dp — \text{площадь узкой области между } dE$$

$$N = \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp$$

Общая энергия в полупроводнике

$$E = E_c + \frac{p^2}{2m_n}$$

Получим зависимость  $p$  от энергии и потом зависимость  $n$ :

$$p = (2m_n(E - E_c))^{\frac{1}{2}}$$

$$dp = \frac{\sqrt{2m_n} \cdot dE}{2(E - E_c)^{\frac{1}{2}}}$$

Тогда получим:

$$N = \frac{8\pi}{h^3} \cdot 2m_n(E - E_c) \cdot \frac{\sqrt{2m_n}}{2} \cdot (E - E_c)^{1/2} dE = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n)^{3/2} (E - E_c)^{1/2} dE$$

$$\frac{dN}{dE} = \rho$$

$$\rho_n(E) = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n)^{3/2} (E - E_c)^{1/2}$$

$$\rho_p(E) = \frac{4\pi}{h^3} (2m_p)^{3/2} (E_v - E)^{1/2}$$

$$n = \int_{E_c}^{\infty} \rho_n(E) f(E) dE = \int_{E_c}^{\infty} \frac{4\pi}{h^3} (2m_n)^{3/2} (E - E_c)^{1/2} \cdot \exp \frac{-E - E_F}{kT} dE$$

$$\frac{4\pi}{h^3}(2m_n)^3/2 \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2} \cdot \exp \frac{-E_c - E_F}{kT} dE \Rightarrow$$

$$\frac{4\pi}{h^3}(2m_n)^3/2 \cdot \exp \frac{-E_c - E_F}{kT} \int_0^{\infty} \sqrt{U} \exp(-u) \cdot (kT)^{3/2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Для полупроводников известно, что:

$$E_c - E_f \gg kT$$

$$E_F - E_v \gg kT$$

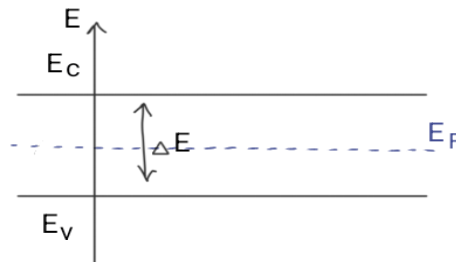
$N_v$  — **эффективная плотность состояний в валентной зоне**

Введем параметр  $p$  — температурную концентрацию носителей заряда:

$$n_i^2 = n \cdot p \Rightarrow n_i = \sqrt{N_c \cdot N_v} \cdot \exp\left(\frac{-\Delta E}{2kT}\right)$$

Рассматриваем температуру близкой к нулю градусов кельвина.

### 4.3 Уровень Ферми в собственном полупроводнике



Рассмотрим температуру стремящуюся к нулю градусов кельвина, скажем что вероятность появления электрона в зоне проводимости равна вероятности его отсутствия в валентной зоне:

$$f(E_c) = 1 - F(E_v) \Rightarrow \frac{1}{1 + \exp \frac{E_c - E_v}{kT}} = 1 - \frac{1}{1 + \exp \frac{E_v - E_f}{kT}}$$

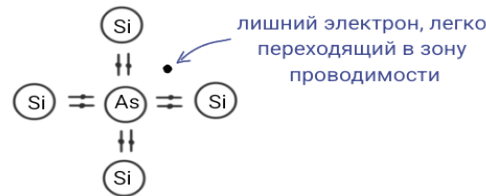
$$= \frac{\exp \frac{E_v - E_f}{kT}}{1 + \exp \frac{E_v - E_f}{kT}} = \frac{1}{\exp - \frac{E_v - E_f}{kT} + 1} = \frac{1}{1 + \exp \frac{E_v - E_f}{kT}}$$

Из монотонности функции  $F$  должны быть равны и аргументы функции то есть  $\frac{E_c - E_v}{kT} = \frac{E_v - E_f}{kT}$ , тогда получим:

$$E_f = \frac{E_c + E_v}{2}$$

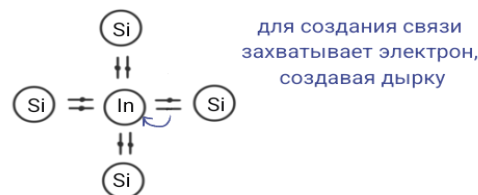
Так уровень ферми располагается по центру и не зависит от температуры, он зафиксирован.

Представим что в решетке можно подставить в решетку атом другого элемента например атома кремния, для того чтобы увеличить проводимость полупроводника. Например, возьмем полупроводники Si, Ge. При легировании проводников вносятся элементы третьей группы например *In Ga* либо элементы пятой группы *P As Sb*.



Соответственно получаем по свойствам разные полупроводники, так элементы 3 группы называются **акцепторами** 5 группы — **донорами**.

- Рассмотрим легирование элементами 5 группы. Электрон не участвующий в связях разрывается и переходит в зону проводимости, получается от каждого атома донора внедренного в решетку мы получаем свободный электрон  $\Rightarrow$  получается мы существенно увеличиваем количество свободных электронов  $\Rightarrow$  количество дырок резко уменьшается, тогда  $n \gg p$  и  $n \cdot p = n^2$



— **Определение:** Такой полупроводник называется *полупроводником с электронной проводимостью* или *полупроводник n-типа*.

—  $N_D$  — концентрация доноров в примеис, каждый атом вносит в полупроовдник свободный электрон.

—  $n_n = N_D + p_n$  — соотношения связи между электронами и дырками в полупроводника n-типа. Таким образом концентрация электронов примерно равняется концентрации доноров.

- Рассмотрим легирование акцепторами. Например, помещаем индий (3 группа). Так на одной из связей будет вращаться один электрон, то есть образуется дырка или вакантное место. Так будут поглощаться свободные электроны в эти дырки. Так  $p \gg n$ , концентрация акцепторов  $N_A$ .

— **Определение:** Эти полупроводники называются *полупроводниками с дырочной проводимостью* или *полупроводниками p-типа*  $p_p = N_A + n_p$

#### 4.4 Уровень Ферми в легированных проводниках.

Уровень ферми не двигается, двигаются только границы  $E_c$  и  $E_v$ .

Рассмотрим изменения при легировании:

$$n_n = N_c \cdot \exp - \frac{E_c - E_f}{kT}$$

$$p_n = N_v \cdot \exp - \frac{E_f - E_c}{kT}$$

Возьмем отношение  $\frac{n_n}{p_n} = \frac{N_c}{N_v} \cdot \exp - \frac{E_c + E_v - 2E_F}{kT}$

Берем  $\frac{N_c}{N_v} \approx 1$

Известно из  $n_i^2 = n_n \cdot p_n \Rightarrow p_n = \frac{n_i^2}{n_n}$  подставим

$$\frac{n_n^2}{n_i^2} = \exp - \frac{E_c + E_v - 2E_F}{kT}$$

$$2 \ln \frac{n_n}{n_i} = - \frac{E_c + E_v - 2E_F}{kT} \Rightarrow kT \ln \frac{n_n}{n_i} = - \frac{E_c + E_v}{2} + E_f$$

Для n-типа:

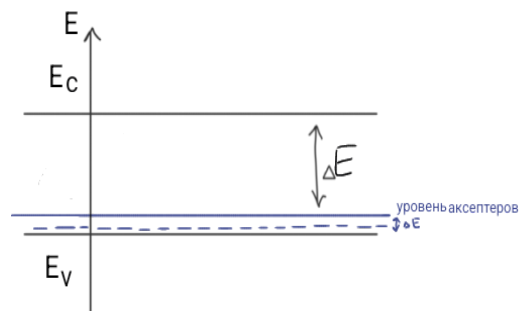
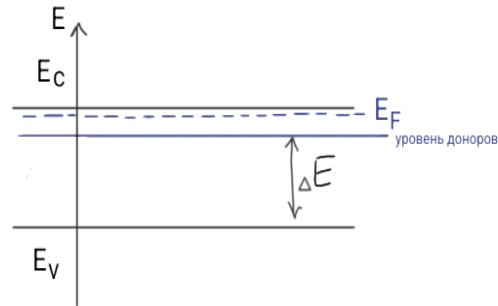
$$E_f = \frac{E_c + E_v}{2} - kT \ln \frac{n_n}{n_i} = \frac{E_c + E_v}{2} - kT \ln \frac{N_D}{n_i}$$

Уровень ферми будет смещен ближе к зоне проводимости. Выше для p типа:

$$E_f = \frac{E_c + E_v}{2} - kT \ln \frac{p_p}{n_i} = \frac{E_c + E_v}{2} - kT \ln \frac{N_A}{n_i}$$

То есть уровень Ферми больше смещен к зоне проводимости.

— **Определение:** Если уровень Ферми при легировании попадает в зону проводимости (для n типа) или в валентную зону (p - тип) такие полупроводники называются **вырожденными**.



По хорошему уровень Ферми должен располагаться в запретной зоне.

## 4.5 Движение свободных носителей заряда в полупроводниках.

В полупроводниках будем рассматривать движение не только из-за действия электрического поля, но из-за неравномерного распределения электронов из меньшей концентрации в большую.

— **Определение:** Ток в полупроводнике может быть вызван двумя причинами: при наличии электрического поля и такой ток называется **дрейфовый** и в следствии неравномерного распределения на сфере заряда — **диффузионный**.

Мы будем рассматривать именно плотность тока:

$$j = qkv$$

— плотность тока в проводника,  $v$  скорость направленного движения тока, за направление тока мы принимает движение положительных частиц.

### 4.5.1 Дрейфовый ток

Рассмотрим движения дрейфовых электронов: электроны будут идти в одну сторону, а ток в другую соответственно

$$j = -e \cdot n \cdot V$$

Вычислим подвижность электрона  $\mu = \frac{v_n}{E} \Rightarrow v = -\mu E$ . Эта подвижность характеризуется свойствами материалов.

Тогда для электронов:

$$j = e \cdot n \cdot \mu_n E$$

В выражении выше нет знака, поскольку ток движется в направлении электрического поля.

Для дырок:

$$j = e \cdot p \cdot \mu_p E$$

**Напомним: Закон Ома в диф форме**  $j = \frac{E}{\rho} \sigma = 1/\rho$

#### 4.5.2 Диффузионный ток

Диффузия это стремление вещества распространится по всему объему равномерно. Возникает тогда когда электроны и дырки распространены неравномерно, тогда возникает стремление заполнить объем равномерно, например с концентрацией  $k$ :

$$\Phi_k = -D_k \nabla k$$

—  $D$  — поток частиц через поверхность единичной площади через площадку в единицу времени.

Перейдем к полупроводникам и рассмотрим плотность тока.

$$\vec{j}_{difn} = e \cdot D_n \cdot \nabla n = -e \cdot n \cdot \vec{v}_{difn}$$

$$\vec{j}_{difp} = -e \cdot D_p \cdot \nabla p = e \cdot p \cdot \vec{v}_{difp}$$

$$\begin{aligned} \vec{j}_n &= \vec{j}_{difn} + \vec{j}_{drp} = e(n\mu_n E + D_n \nabla n), \\ \vec{j}_p &= \vec{j}_{difp} + \vec{j}_{drp} = e(p\mu_p E + D_p \nabla p). \end{aligned}$$

#### 4.6 Уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho_p}{dt} = -\text{div}(\vec{j})$$

— изменение плотности заряда за время  $T$  — **уравнение неразрывности**

Плотность заряда для электронов

$$\rho_{qn} = -e \cdot n$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial - en}{\partial t} &= -\operatorname{div}(e\mu_n n \vec{E} + eD_n \nabla n) \\ -e \frac{dn}{dt} &= -e\mu_n \operatorname{div}(n \vec{E}) - eD_n \Delta n \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dn}{dt} = \mu_n \operatorname{div}(n \vec{E}) + D_n \Delta n}$$

*Уравнение неразрывности для свободных электронов в проводнике.*

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = \mu_n \operatorname{div}(p \vec{E}) + D_n \Delta p}$$

*Уравнение неразрывности для дырок в проводнике.*

При рассмотрении легированных проводников  $n_n = N_D$ , поэтому уравнение неразрывности мы рассматриваем для неосновных носителей зарядов.

Записываем с учетом генерации и рекомбинации:

$$\begin{aligned} \frac{dn_p}{dt} &= \mu_n \frac{dn \vec{E}}{dx} + D_n \cdot \frac{d^2 n}{dx^2} + G_n - \frac{n_p - n_p 0}{\tau_n} \\ \frac{dp_n}{dt} &= \mu_n \frac{dn \vec{E}}{dx} + D_n \cdot \frac{d^2 n}{dx^2} + G_p - \frac{n_p - n_p 0}{\tau_n} \end{aligned}$$

Здесь:  $G$  — скорость генерации электронов и дырок;  $p, n$  — равновесные концентрации неосновных носителей заряда;  $\tau_n$  — характерное время рекомбинации (среднее время, в течение которого электрон остаётся свободным);  $\mu_n$  — подвижность электрона;  $D_n$  — коэффициент диффузии.

**Соотношение Эйнштейна**

$$\boxed{\begin{aligned} D_n &= \frac{kT}{e} \mu_n, \\ D_p &= \frac{kT}{e} \mu_p. \end{aligned}}$$

## 5 Электрические переходы

— **Определение:** *Электрический переход* называется граничный слой между двумя областями, электрические характеристики которых имеют существенные физические различия.

В полупроводниках 4 перехода:

1. Электронно-дырочный переход или  $p_n$  переход Переход между двумя областями одного и того же полупроводника имеющими различный тип электропроводимости, но полупроводник один и тот же
2. Переход металл-полупроводник
3. Переход между двумя областями проводника с одним типом электропроводимости,  
но с различной степенью легирования
4. Гетеро-переход переход между двумя различными полупроводниковыми материалами  
с различной шириной запрещенной зоны.

### 5.1 P-N переход. Контактные явления на границе

Рассмотрим полупроводниковый переход типа  $p-n$ . В начальный момент после его образования начинается **диффузия** электронов из  $n$ -области в  $p$ -область и дырок — из  $p$ -области в  $n$ -область. В результате диффузии вблизи границы раздела происходит **рекомбинация** носителей заряда. Из-за этого в приповерхностных слоях остаются оголённые ионы доноров и акцепторов, что приводит к **накоплению неподвижного заряда** и возникновению **внутреннего (контактного) электрического поля**.

Это поле создаёт разность потенциалов между областями:

$$\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_n,$$

которая называется **потенциальным барьером**.

Возникающее контактное поле препятствует дальнейшей диффузии носителей заряда. Однако носители, обладающие достаточной энергией, могут преодолеть барьер — их движение обусловлено диффузией и формирует **диффузионный ток**. Для основных носителей заряда это поле не является препятствием: они перемещаются под действием поля, создавая **дрейфовый ток**.

В конце концов устанавливается **динамическое равновесие**, при котором диффузионный ток неосновных носителей полностью компенсируется дрейфовым током основных носителей. В области перехода формируется **запирающий слой**, лишённый подвижных носителей заряда, внутри которого существует **контактное электрическое поле**.



— **Определение:** Если  $N_A \approx N_D$  то такой переход называют *симметричным* переходом, иначе *несимметричным*.

Более высокая степень легирования области обозначается плюсом:  $n^+, p^+$

## 6 Тест 1

### 6.1 Задание 1

- Длина волны Де Бройля обратно пропорциональна импульсу частицы ( $\lambda = h/p$ , где  $\lambda$  – длина волны,  $h$  – постоянная Планка, а  $p$  – импульс частицы)
- Гипотеза Де Бройля состояла в предположении о наличии волновых свойств микрочастиц.
- Любой частице, обладающей импульсом  $p$  можно сопоставить волновой процесс с длиной волны  $h/p$ . ??? Вар 3
- Длина волны Де Бройля обратно пропорциональна массе частицы и ее скорости ( $\lambda = h/p = h/mv$ ,  $p = mv$ , где  $m$  – масса частицы,  $v$  – скорость частицы.)
- Движение любой элементарной частицы с массой  $m$  и скоростью  $v$  описывается  $\lambda = h/mv$ .
- Длина волны Де Бройля имеющего кинетическую энергию  $E$  вычисляется по формуле  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\epsilon m}}$
- Энергия частицы через длину волны  $E = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$
- Длина волны де Бройля прошедшего разность потенциалов вычисляется по формуле  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\epsilon m \cdot U}}$

### 6.2 Задание 2

- Что выражают соотношения неопределённости в квантовой механике? – Соотношения между погрешностями координатами и импульсами микрочастицы, а также между погрешностями энергией микрочастицы и моментом времени.
- Соотношения Гейзенберга для энергии частицы утверждает что чем меньше погрешность энергии тем больше погрешность времени
- Соотношение неопределённостей Гейзенберга для проекций импульса и координаты говорит о том, что одновременное точное определение координаты и проекции импульса частицы невозможно.

- Из соотношения Гейзенберга следует, что при уменьшении неопределённости импульса частицы, неопределённость в её координате возрастает. ( $\Delta x \cdot \Delta p \geq h/2$ , где  $\Delta x$  – неопределённость положения частицы,  $\Delta p$  – неопределённость импульса частицы)
- Из соотношения Гейзенберга следует, что при уменьшении неопределённости энергии частицы неопределённость в моменте времени возрастает. ( $\Delta E \cdot \Delta t \geq h$ , где  $\Delta E$  – неопределённость энергии, а  $\Delta t$  – промежуток времени, в течение которого это состояние существует.  $\Delta t \geq h/\Delta E$ )

### 6.3 Задание 3

- Если частица  $\psi$  может быть в состоянии  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , то общее состояние частицы описывается волновой функцией  $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  – некоторые константы (согласно принципу суперпозиции)
- Вероятность обнаружить частицу в указанной точке пространства в данный момент времени пропорциональна квадрату модуля волновой функции.
- Волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера

### 6.4 Задание 4

(Радиус орбиты электрона пропорционален квадрату номера орбиты. Скорость движения электрона по орбите обратно пропорциональна номеру орбиты – для первой орбиты она равна  $2,186 \times 10^6$  м/сек, для второй –  $1,093$ . Электрон излучает энергию (фотон), когда переходит с более высокого энергетического уровня на более низкие. При обратных переходах электрон, наоборот, поглощает энергию. Энергия не меняется, когда он находится на стационарной орбите)

**Верные утверждения:**

- При переходе электрона с дальней орбиты на ближнюю относительно ядра атом излучает энергию
- Разрешёнными орбитами для электронов являются те, длина которых пропорциональна (кратна) длине волны электрона.
- В атоме существуют стационарные состояния, когда энергия не изменяется во времени без внешних воздействий.
- Радиус орбиты электрона не может измениться без внешнего воздействия.

**Неправильные утверждения:**

- При переходе на другую орбиту энергия не меняется.

- Электрон в атоме водорода обладает максимальной энергией на ближней от ядра орбите.
- При переходе электрона с ближней орбиты на дальнюю его скорость увеличивается.
- При движении электронов по орбите происходит непрерывное излучение энергии.

## 6.5 Задание 5

- Из принципа Паули следует, что количество электронов на каждом уровне может быть не более двух. (ни одна пара электронов в атоме не может иметь одинаковые электронные квантовые числа)
- На одной орбите любого атома может находиться не более двух электронов.
- В квантово-механической системе в данном квантовом состоянии может находиться не более 2 электронов.
- «На внешнем уровне любого атома может находиться не более 8 электронов» - правило устойчивости
- «При заполнении эллиптических орбит суммарное значение спинового квантового числа электронов должно быть максимальным» - правило Хунда (максимум спина при неполном заполнении подуровня).
- «Электрон в атоме водорода обладает минимальной энергией» - свойство энергетических уровней атома водорода (основное состояние).
- «На каждой разрешённой орбитали любого атома находится менее трёх электронов» - это следствие принципа Паули.

## 6.6 Задание 6

- Главное квантовое число характеризует энергетический уровень электрона.
- Орбитальное квантовое число характеризует ориентацию эллиптической орбиты в пространстве.
- Магнитное квантовое число характеризует ориентацию эллиптической орбиты в пространстве. (Оба числа, орбитальное ( $l$ ) и магнитное ( $m_l$ ), связаны с ориентацией орбитали в пространстве, но на разных уровнях.)
- Спинное квантовое число характеризует собственный магнитный момент электрона.

## 6.7 Задание 7

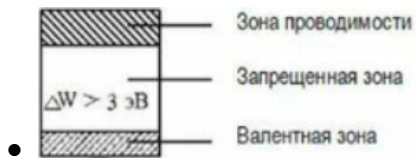
- Спиновое квантовое число для электрона может принимать значения:  $s = \pm 1/2$ .
- Магнитное квантовое число в состоянии с орбитальным квантовым числом 1 может принимать значения:  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ .
- Главное квантовое число является: натуральным числом ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )
- Какие значения может принимать орбитальное квантовое число с главным квантовым числом  $n$ ?  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  (т.к.  $n$  определяет форму орбитали)

## 6.8 Задание 8

- Химическая связь, возникающая при взаимодействии ионов решётки с электронным газом – металлическая связь
- Химическая связь, возникающая за счёт обобществления электронной пары – ковалентная связь
- Химическая связь, обусловленная кулоновским взаимодействием противоположно направленных ионов – ионная связь
- Химическая связь, возникающая при взаимодействии газовых молекул при низких температурах – молекулярная связь
- Нет в варианте, но есть в ответах: Ковалентная связь – это химическая связь, образованная за счёт образования общей электронной пары у двух атомов вещества при сближении их ядер.

## 6.9 Задание 9

- Ширина запрещённой зоны твердотельного материала характеризует минимальную энергию, необходимую для перевода электрона из валентной зоны в зону проводимости.
- Уровень Ферми – энергетический уровень, до которого заполнены электронные состояния при  $T = 0\text{К}$ .
- Согласно теории электронного газа электрическое сопротивление объясняется соударениями электронов с узлами кристаллической решётки.



## 6.10 Задание 10

- Согласно квантовой теории проводимости различие между диэлектриками, полупроводниками и проводниками состоит в ширине запрещённой зоны.
- В порядке убывания ширины запрещённой зоны вещества располагаются: диэлектрик, полупроводник, металл.
- В порядке возрастания энергии, необходимой для перехода электрона из валентной зоны в зону проводимости, вещества располагаются: металл, полупроводник, диэлектрик.