Débruitage d'images et ondelettes discrètes

Samuel MICHEL-CHAGNOT

MP

23 mai 2025

Introduction

Le bruit

- Définition : perturbation aléatoire qui masque, déforme ou dégrade une information utile
- Exemple :

EXIF :
Appareil : Canon EOS 5D Mark III
Focale : 200mm
ISO : 1600

Exposition : 250x240s

Introduction

Le bruit

- Définition : perturbation aléatoire qui masque, déforme ou dégrade une information utile
- Exemple :

EXIF :
Appareil : Canon EOS 5D Mark III
Focale : 200mm
ISO : 1600

Exposition : 250x240s

Problématisation

Problématique

Comment la transformation en ondelettes permet-elle de débruiter une image ?

Origines physiques et différents types de bruits

Capteurs

Capteurs : CCD, CMOS et photodiodes

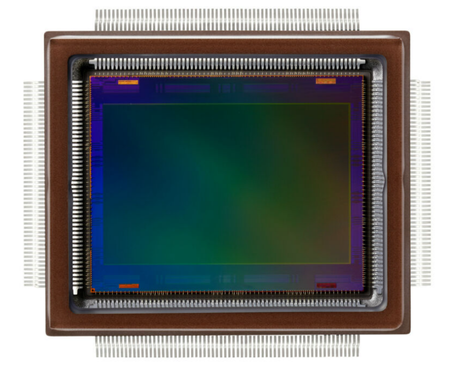


Figure: Capteur CMOS format APS-C

Origines physiques et différents types de bruits

Photodiodes

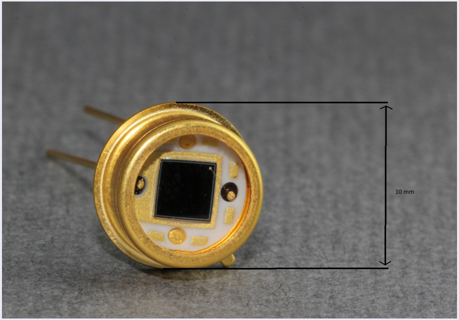


Figure: Photodiode

Origines physiques et différents types de bruits

Les pixels chauds

Dûs à la température de certains pixels

EXIF :
Appareil : Canon EOS 5D Mark III
Focale : 50mm
ISO : 400

Exposition : 1/100s

Figure: Pixels chauds

Bruit de quantification

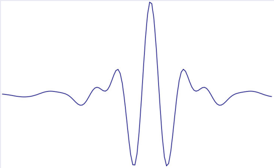
Dû à la précision finie des capteurs

Figure: Bruit de quantification

Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

Définition

Une ondelette est une fonction oscillante sur une période et nulle autre part.



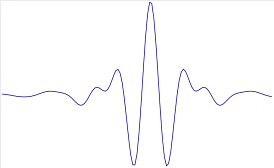
Quelques conditions sur l'ondelette mère

- Localisée en temps
- Localisée en fréquence (i.e $||\psi||_2 = 1$)
- Elle doit avoir une moyenne nulle

Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

Définition

Une ondelette est une fonction oscillante sur une période et nulle autre part.



Quelques conditions sur l'ondelette mère

- Localisée en temps
- Localisée en fréquence (i.e $||\psi||_2 = 1$)
- Elle doit avoir une moyenne nulle

Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

Nous utiliserons entre autres les ondelettes de Daubechies 2D et de Haar:

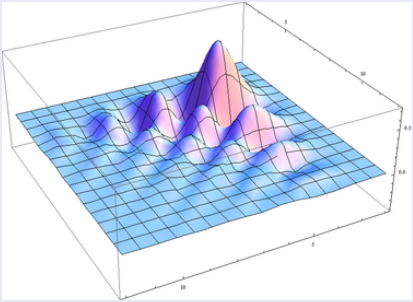


Figure: Ondelette de Daubechies 2D

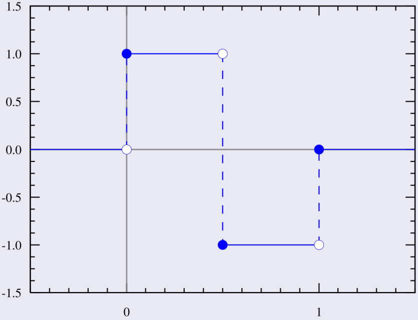


Figure: Ondelette de Haar

Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

Famille d'ondelettes

- Construction d'une famille d'ondelettes : $(a, b, t) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$

$$\psi_{(a,b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

- Paramètres :
  - ψ est l'ondelette mère
  - a caractérise l'ondelette en fréquence
  - b la positionne dans le temps
- Base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n)$ i.e : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{(a,b)}(t)|^2 dt = 1$

Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

Fonctions de carré sommable

On note $L^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ de carré sommable réelles :
$f \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$

Théorème, Stéphane Mallat, 1989

Toute fonction de carré sommable peut être vue sous la forme d'une somme de fonctions d'ondelettes, toutes issues d'une seule et unique fonction mère transformée par dilatation et translation.

Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

Fonctions de carré sommable

On note $L^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ de carré sommable réelles :
$f \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$

Théorème, Stéphane Mallat, 1989

Toute fonction de carré sommable peut être vue sous la forme d'une somme de fonctions d'ondelettes, toutes issues d'une seule et unique fonction mère transformée par dilatation et translation.

Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

Lien entre image et fonction de carré sommable

Si f est une image numérique, alors $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \{0, ...255\}$ où Ω est un ensemble fini (les pixels).
On peut étendre f à $\mathbb{R}^2$ en la définissant nulle en dehors de Ω. Cette extension $\tilde{f}$ est alors :

- bornée (par 255)
- de support fini (l'image)
- de carré sommable : $\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{f}(x, y)|^2 dxdy < \infty$

Ainsi, le théorème de Mallat s'applique à toute image numérique (dans $L^2(\mathbb{R}^2)$).

Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

Coefficients d'ondelette

- Les coefficients d'ondelette sont les scalaires de la matrice représentative du signal dans la base d'ondelette.
- Le coefficient d'ondelette pour $j > 0$ et $k \in \mathbb{R}$ est :
  $C(j, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{(j,k)}(t)dt$

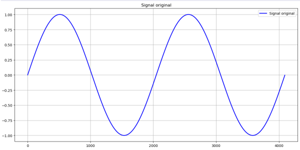
Interprétation qualitative et transformation discrète

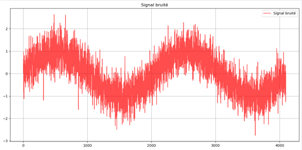
- Temporellement, $C(j, k)$ renseigne sur le signal f autour du point j.
- Fréquentiellement, $C(j, k)$ renseigne sur le signal autour de la fréquence $\frac{1}{k}$.

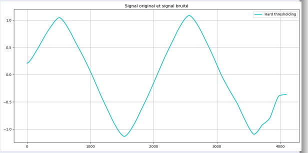
Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

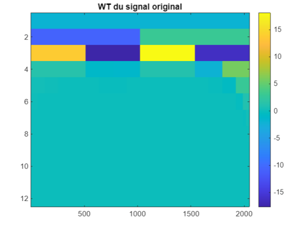
Représentation des coefficients d’ondelette

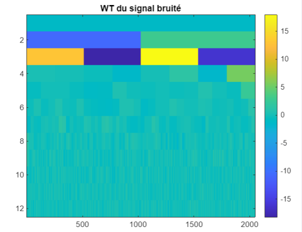
On peut représenter les coefficients d’ondelette dans une grille dyadique :

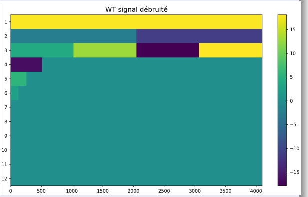












Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

Formule de reconstruction

Pour reconstruire le signal, on utilise les coefficients d'ondelette de la manière suivante :

$$s(t) = \sum_j \sum_k C_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

où $\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-k}{2^j}\right)$.

Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

Seuillage dur (ou hard thresholding)

Le principe du seuillage dur est de réduire les coefficients trop faibles devant une valeur seuil à zéro :

$$D^H(d|\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } |d| \leq \lambda \\ d & \text{si } |d| > \lambda \end{cases}$$

Mathématiques de la transformation en ondelettes et du débruitage

Résumé de la méthode généréale

- Capture d'une image bruitée
- Calcul des coefficients d'ondelette
- Seuillage des coefficients de bruit
- Reconstruction de l'image

Mise en oeuvre et résultats

Critères et mesures utilisés

- Appréciation visuelle
- Mesure du rapport signal sur bruit (SNR) (par une image de référence)
- Mesure du contraste
- Mesure de la variance d'un bruit gaussien par déviation absolue moyenne (MAD)
- Mesure de l'erreur quadratique moyenne (MSE) (par une image de référence)

Mise en oeuvre et résultats

Mise en place informatique

Création d'une bibliothèque et utilisation des bibliothèques classiques.

```
import importlib
import SamWavelet as sw
importlib.reload(sw)
import pywt
import numpy as np
import cv2 as cv
from matplotlib import pyplot as plt
import math
```

Origines physiques et différents types de bruits

Modélisation du bruit

On modélise le bruit total par un bruit gaussien :

- plus courant dans la littérature
- facile à implémenter
- réaliste

Implémentation informatique

On utilise la fonction suivante :

```python
def bruit(imag,var):
    """
    Entree : img : image sous forme de matrice
               var : variance du bruit gaussien
    Sortie : image bruitée par bruit gaussien de variance var
    """
    row, col = imag.shape
    mean = 0
    sigma = var**0.5
    gauss = np.random.normal(mean, sigma, (row, col))  # matrice du bruit
    image_bruit = imag + gauss  # matrice image bruitée
    image_bruit = np.clip(image_bruit, 0, 255).astype(np.uint8)  # gère le domaine de def (0,255)
    return image_bruit
```

Mise en oeuvre et résultats, 1D

Débruitage de signaux 1D

On utilise une fonction simple faisant la transformation en ondelettes d'un signal en 1D par la méthode de Haar.

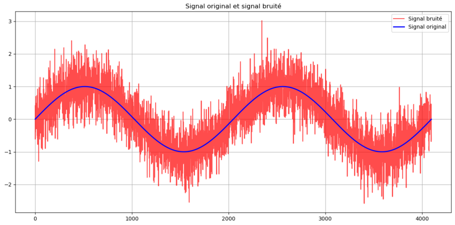
```
def transformee_ondelettes_haar(signal):
    sortie = []
    courant = signal[:]
    while len(courant) >= 2:
        moyenne = [(courant[i] + courant[i+1]) / 2 for i in range(0, len(courant), 2)]
        detail = [(courant[i] - courant[i+1]) / 2 for i in range(0, len(courant), 2)]
        sortie = detail + sortie
        courant = moyenne
    sortie = courant + sortie
    return sortie
```

Mise en oeuvre et résultats, 1D

Débruitage d'une sinusoïde

Création d'une sinusoïde bruitée.

```
#Signal pur
f0=2
nbpoints=2**12
t = np.arange(nbpoints)/ nbpoints
x = np.sin(2 * np.pi * f0 * t)
#x le signal sinusoidal pur
sigma = 0.5
bruit = sigma * np.random.randn(len(x))
y=x+bruit
#y le signal bruité
```



Mise en oeuvre et résultats, 1D

Débruitage d'une sinusoïde

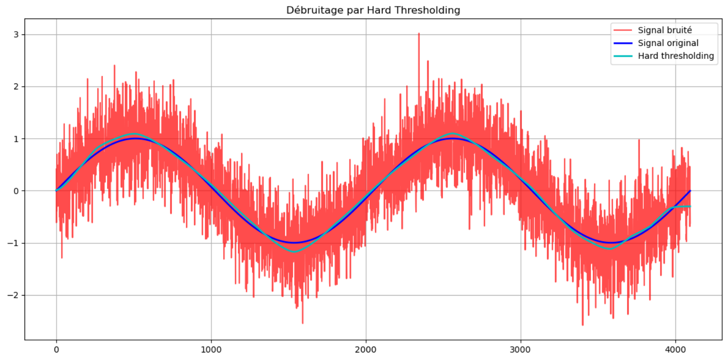


Figure: Sinusoïde débruitée

Mise en oeuvre et résultats, 1D

Résultats

On choisit le seuil égal à la variance du bruit.

- SNR : 18.28 DB
- MSE divisée par un facteur 34.7

Mise en oeuvre et résultats, 1D

Cas d'un signal moins commun

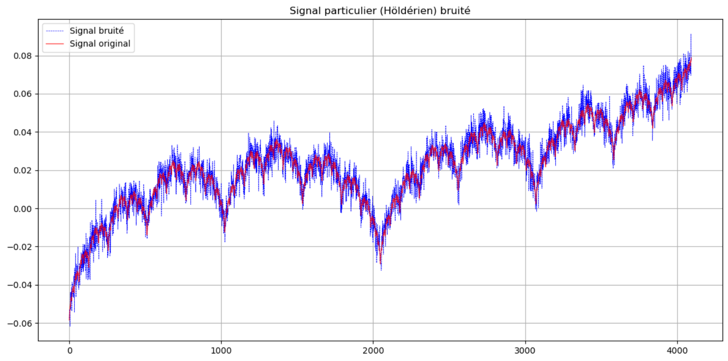


Figure: Signal Hölderien

Mise en oeuvre et résultats, 1D

Cas d'un signal moins commun

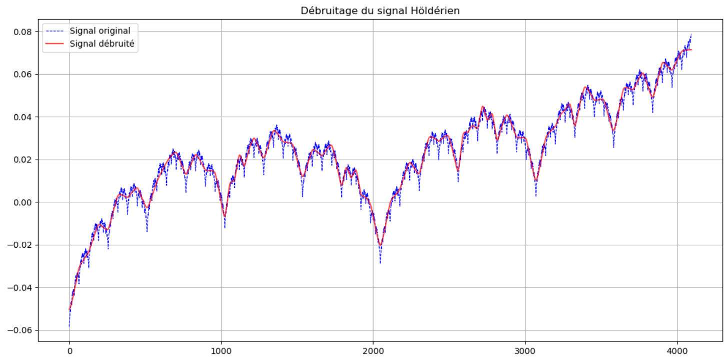


Figure: Signal Hölderien débruité

Mise en oeuvre et résultats, 1D

Résultats

On choisit le seuil égal à la variance du bruit.

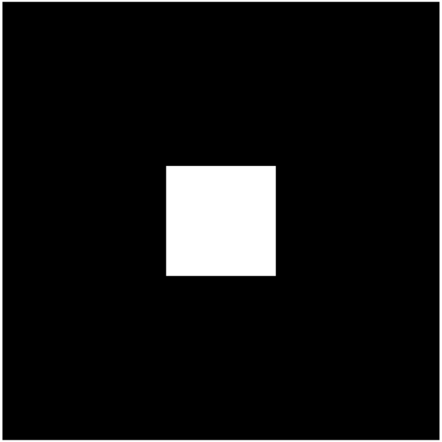
- SNR : 21.7 DB
- MSE divisée par un facteur 3.6

Mise en oeuvre et résultats, 2D

Débruitage d'une image

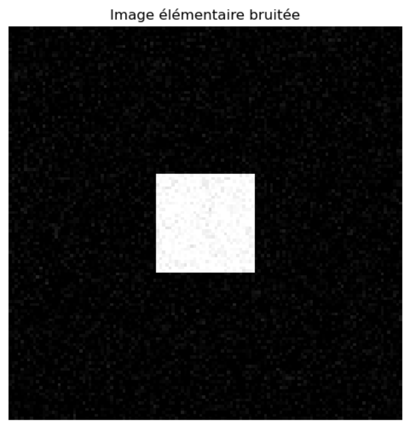
```python
### Création d'une image élémentaire (matrice 2D)
image_size = 128  # Taille de l'image 128x128
x = np.zeros((image_size, image_size))  # Fond noir

# Dessiner un carré blanc au centre
square_size = 32
start = (image_size - square_size) // 2
end = start + square_size
x[start:end, start:end] = 255  # Carré blanc
```

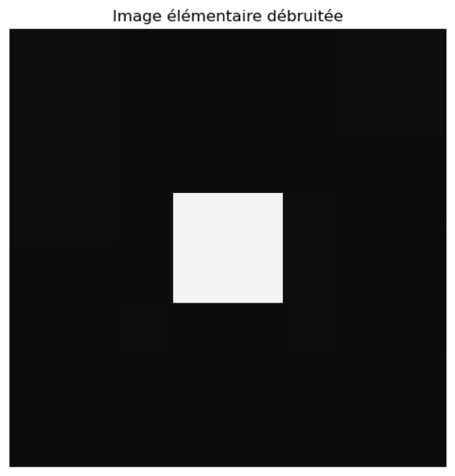
Image élémentaire



Mise en oeuvre et résultats, 2D

Débruitage d'une image





Mise en oeuvre et résultats, 1D

Résultats

On choisit le seuil égal à la variance du bruit.

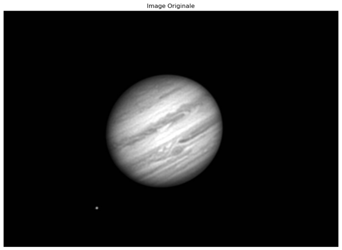
- SNR : 31.6 DB
- MSE divisée par un facteur 25.4

Mise en pratique concrète

On utilise un cliché de Jupiter bruité par un bruit gaussien de variance de 100

EXIF :
Appareil : Asi 585MC
Optique : c8 edge HD
(f'=2032mm, f/10)
ISO : 200

Exposition : 3min, 10ms



Mise en oeuvre et résultats, 2D

Première approche brute

- On crée un ensemble de seuils prétendants
- Pour chacun d'eux, on débruite l'image
- On mesure le SNR de chaque image débruitée
- On mesure le contraste de chaque image débruitée
- On choisit le seuil qui maximise le SNR et respecte le contraste

Résultats de la méthode

- L'apport du critère de contraste est très intéressant
- La méthode fonctionne mal dans beaucoup de cas cependant
- La méthode est lente, naïve, complexe et coûteuse

Mise en oeuvre et résultats, 2D

Première approche brute

- On crée un ensemble de seuils prétendants
- Pour chacun d'eux, on débruite l'image
- On mesure le SNR de chaque image débruitée
- On mesure le contraste de chaque image débruitée
- On choisit le seuil qui maximise le SNR et respecte le contraste

Résultats de la méthode

- L'apport du critère de contraste est très intéressant
- La méthode fonctionne mal dans beaucoup de cas cependant
- La méthode est lente, naïve, complexe et coûteuse

Mise en oeuvre et résultats, 2D

Seconde méthode

- On détermine statistiquement la variance du bruit de l'image.
- Pour cela, on utilise la déviation moyenne absolue (MAD) pour estimer l'écart-type du bruit.
- On utilise le seuil universel de VisuShrink pour débruiter l'image : $\lambda = \sqrt{2\ln(N\sigma)}$

Déviation moyenne absolue

Soit une distribution gaussienne $N(\mu, \sigma^2)$, on a :
$MAD = \mathbb{E}(|X - \mu|) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$

```python
def MAD(y):
    """
    Donne une estimation de la variance du bruit par utilisation de déviation absolue moyenne

    Entrée :
    y : signal d'entré bruité

    Sortie :
    var : variance estimée du bruit
    """
    cA, (cH, cV, cD) = pywt.dwt2(y, 'haar')
    return np.median(np.abs(cD)) / 0.6745
```

Résultats

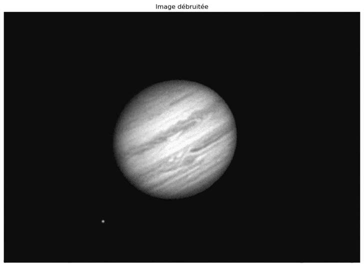


Figure: Image débruitée

- SNR : 34.06 DB
- MSE divisée par un facteur 1.5
- Absence de bruit dans le fond
- Dégradation des contours

Mise en oeuvre et résultats, 2D

Exemples classiques

Figure: Le caméraman

- SNR : 57.34 DB
- MSE divisée par un facteur 1.2
- "Sous-échantillonnage"

Exemples classiques

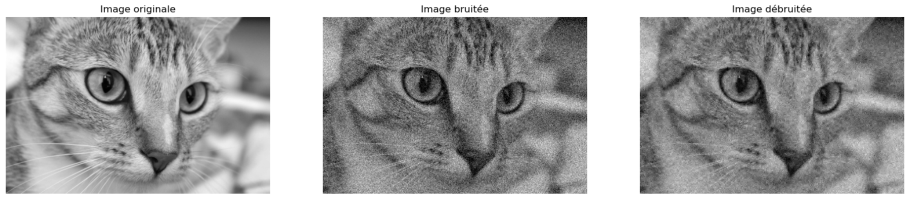


Figure: Le chat Chelsea

- SNR : 68.58 DB
- MSE divisée par un facteur 1.4
- "Sous-échantillonnage"

Conclusion

Conclusion

- Efficace selon la nature de l'image
- Rapide et peu coûteux
- Effet de pixelisation (type sous-échantillonnage)

Une technique plus avancée, la transformation en ondelettes à trous (ou "lifting en ondelettes").

Annexe

Seuillage doux (ou soft thresholding)

Le principe du seuillage doux est de modifier tous les coefficients de la manière suivante :

$$D^S(d|\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } |d| \leq \lambda \\ d - \lambda & \text{si } d > \lambda \\ d + \lambda & \text{si } d < -\lambda \end{cases}$$