Metody generatywne wprowadzenie

Procesy Markowa to ciąg zdarzeń gdzie każde zdarzenie zależy jedynie od wyniku poprzednika- procesy posiadające tą własność spełniają własność Markowa. Ciąg zdarzeń jedno po drugim to łańcuch Markowa ale zakładamy że przestrzeń zdarzeń mus być dyskretna w naszym przypadku także skończone.

Przykład gry w szachy-> wymyślamy kolejny ruch ale ruchów poprawnych może być więcej więc ilość możliwych stanów jest różna (10do43 w szachach). Każdemu z kolejnych stanów chcemy przypisać prawdopodobieństwo, nie interesuje nas poprzednie ruchu ważne jest tu i teraz.

Co procesem Markowa nie byłoby ? Mamy giełdę i mamy stan że jest tyle akcji taki kurs i czy to wystarczy do podjęcia decyzji zakupu no nie ponieważ musimy uwzględnić różne inne rzeczy w historii.

Proces może przyjąć N stanów i m stanów się wykonało to jeżeli ich prawdopodobieństwo jest równe to są to procesy Markowa.

Możemy stworzyć macierz stochastyczną ma ona wiele nazw jest on nxn element to prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i w stan j. Macierz kwadratowa wartości nieujemne.

Będąc w jakimś stanie mamy rozkład prawdopodobieństwa stanów. Jeśli rozważymy je po pierwszym kroku to prawdopodobieństwo i \* warunkowe i możemy przechodzić wymnażając kolejne macierzy

Rozkład prawdopodobieństwa stanów pi nazywamy stacjonarnym jeśli pi=Ppi prawdopodobieństwo stanu nie ulegnie zmianie w kolejnej iteracji. Może istnieć jeden lub kilka a nawet zero. Suma tych elementów stanu =1

Akademicki przykład procesu Markowa

Mamy taką macierz z prawdopodobieństwami przejścia stanów i założymy że nie będzie zmienna w czasie-> macierz jednorodna (homogeniczna) czy też proces jednorodny (homogeniczny).

Zaczynamy od stanu pi0 jest słonecznie[1 0 0 ] jaka jest szansa na pogodę jutro-> mnożymy przez ten wektor macierz i wychodzi że 50 słonecznie i tak dalej.

Pewnego dnia dostajemy macierz taką dziwną nic nie wskazuje po k dniach już cały czas prawdopodobieństwa na pogody będę takie same niezmienne (po 28 iteracjach stan stabilny)

Stan j jest osiągalny ze stanu i jeżeli prawdopodobieństwo przejścia między i j jest większe od 0. Procesy są skomunikowane jeżeli są wzajemnie osiągalne. Czyli z j do i możemy dojść w jakiejś liczbie kroków i odwrotnie

Proces jest nieredukowalny jeżeli dla każdych dwóch stanów istnieje taka liczba kroków że ze stanu i mogę osiągnąć stan j.

W pierwszym przykładzie z każdego stanu możemy przejść do każdego. W drugim stanie również jest nieredukowalny nie ma możliwości przejścia bezpośrednio ze słonecznego w deszczowy ale w pochmurny i potem w deszczowy już tak

Kontrprzykład-> pokazuje że jest redukowalne bo nie wrócimy

Minimalna ilość kroków do siebie czyli jesteśmy w stanie i ile kroków potrzebujemy aby wrócić-> np. ze słonecznie to k =2,3,4,…

Proces aperiodyczny – jeżeli najmniejszy wspólny dzielnik NWD właśnie tych kroków po których stan może przejść w samego siebie wynosi jeden.

Najprostszy kontrprzykład stanu nie aperiodycznego-> każdy ze stanów przechodzi do siebie po trzech dniach

Natomiast jeżeli na przekątnej ma większe od zera to raczej będzie aperiodyczny

Jeśli łańcuch jest nieredukowalny (czyli do każdego rozważanego stanu możemy wrócić) i aperiodyczny(czyli nie następują one w konkretnej kolejności ) wówczas istnieje stacjonarny rozkład prawdopodobieństwa gdzie dla każdego stanu prawdopodobieństwo stanu jest równe granicy. Dąży do stanu stabilnego

Metody Monte Carlo

Metoda stosowana do modelowania matematycznego procesów zbyt złożonych aby przewidzieć wynik klasycznie.. my skupimy się na MCMC.

Monte Carlo z łańcuchem Markowa- Buduje na podstawie danych jest w stanie odtworzyć złożone , pozwolą nam generować dane z dowolnego rozkładu. Im większa liczba kroków tym dokładniej. Takich metod jest dużo wybór jest zależny od tego jakie mamy dane i jaki rozkład chcemy zastosować.

Metropolis-Hastings

Jest podstawową wersją MCMC, ona wymaga zdefiniowana rozkładu propozycji czyli jakiegoś znanego nam rozkładu dobór zależy od danych ale zazwyczaj wybieramy normlany. W pdf algorytm-> wybieramy początkową wartość dla łańcucha, ustalamy rozkład propozycji weźmy rozkład normalny skoncentrowany w punkcie x. Generujemy nową wartość z rozkładu propozycji i obliczamy współczynnik akceptacji, generujemy liczbę z rozkładu jednostajnego i jeżeli liczba < niż lambda to podmieniamy stan jeśli nie spełnione zostajemy w poprzednim stanie i to iterujemy ileś razy.

Przykład modelowanie ryzyka kredytowego

Burn-in to metoda która bierze próbki z końca procesu a nie z początku (ponieważ za bardzo są podobne do startu). Jak dobrać długość burn-in zależy od modelu i rozkładu im złożony tym dłużej osiąga się stan stacjonarny zasada jest że od 10 do 50% początkowych próbek powinno wylecieć.

Gibbs Sampling próbkowanie Gibbsa

To metoda do generowania próbek z trudnych do bezpośredniego próbkowania wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństw. Tutaj nacisk na tą wielowymiarowość tym właśnie się wyróżnia. Działanie i implementacja jest prosta.

Musimy znać warunkowe rozkłady prawdopodobieństwa.

Mamy n wymiarowy rozkład prawdopodobieństwa i mamy jakieś wygenerowane zmienne. Aktualizujemy je po kolei z rozkładu warunkowego i ten proces jest powtarzany do momentu aż łańcuch osiągnie stan stacjonarny

Przykład pdf

Gibbs sampling jest procesem nieredukowalnym i aperiodyczny czyli dąży do rozkładu stacjonarnego