

1 Комбинаторные правила произведения и суммы. Число выборок объема k из n элементов.

1.1 Правило произведения

Если $a \in A$ можно выбрать n способами и для каждого такого выбора $b \in B$ можем выбрать m способами, то пару ab мы можем выбрать $n \cdot m$ способами.

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times \cdots \times |A_n|$$

1.2 Правило суммы

Если элемент $a \in A$ может быть выбран n способами и независимо, а элемент $b \in B$ может быть выбран m способами, то выбор "a или b" может быть осуществлён $n + m$ способами.

\forall разбиения конечного множества $A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$

$$|A| = |A_1| + \cdots + |A_n|$$

1.3 Число выборок объема k из n элементов

1.3.1 Упорядоченная выборка объема k из n элементов с повторениями (число кортежей)

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$

1.3.2 Упорядоченная выборка объема k из n элементов без повторений (число k -размещений)

$$[n]_k = n(n - 1) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Доказательство:

Индукция по k :

$$k = 1: [n]_1 = n$$

$$k > 1: [n]_k = [n]_{k-1}(n - k + 1)$$

□

1.3.3 Неупорядоченные выборки объема k из n элементов без повторений (сочетания)

$$\forall n, k \quad 0 \leq k \leq n$$

$${n \choose k} = C_n^k = \frac{[n]_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Доказательство:

Индукция по n

$$n = 1: {1 \choose 0} = 1; {1 \choose 1} = 1$$

$n \geq 2$:

$$\text{Если } k = n, \text{ то } {n \choose n} = 1 = \frac{n!}{n! \cdot 0!}$$

Если $k < n$, то

$${n \choose k} = {n-1 \choose k} + {n-1 \choose k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□

1.3.4 Неупорядоченные выборки объема k из n элементов с повторениями (число мульти множеств)

$$\hat{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m$$

Доказательство:

$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ задаёт наше m -сочетание с повторениями

Сопоставим ему двоичный кортеж

$$\underbrace{(0, \dots, 0)}_{\alpha_1}, \underbrace{1, \underbrace{0, \dots, 0}_n}_{\alpha_2}, \underbrace{1, \dots, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha_n}}$$

Знаем, что $\sum_{i=1}^n \alpha_i = m \Rightarrow$ длина кортежа $m + n - 1$ и в нём $n - 1$ единица. Таких кортежей C_{n+m-1}^{m-1}

□

2 Число выборок объема k из n элементов. Комбинаторные тождества. Бином Ньютона.

2.1 Число выборок объема k из n элементов.

См. пункт 1.3

2.2 Комбинаторные тождества

2.2.1 Тождество Паскаля

$\forall n, k \ 1 \leq k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Доказательство:

M — все k -подмножества n -множества

$$|M| = \binom{n}{k}$$

$M_1 \subseteq M$ — не попал элемент а

$M_2 \subseteq M$ — попал элемент а

↓

$$M = M_1 \sqcup M_2 \Rightarrow |M| = |M_1| + |M_2| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

□

2.2.2

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Доказательство:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

□

2.3 Бином Ньютона

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Доказательство:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \cdots (a+b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

□

2.4 Обобщение бинома Ньютона

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_i \geq 0; \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n} P_n(\alpha_1 \dots \alpha_k) x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$$

$P_n(\alpha_1 \dots \alpha_k)$ — полиномиальный коэффициент

Доказательство:

Упражнение

□

3 Мульти множества, их спецификации. Полиномиальные коэффициенты.

3.1 Мульти множества, их спецификации.

3.1.1 Мульти множество первичной спецификации

Рассмотрим $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

и кортеж $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ на \mathbb{N}_0 т. ч. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$

Совокупность из m элементов множества X , в которой x_i встречается α_i раз $\forall i$ — m -мульти множество первичной спецификации $[x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}]$ порождённое множеством X .

3.1.2 Мульти множество вторичной спецификации

Совокупность из m элементов множества X , в которой в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ β_0 нулей, β_1 единиц...

Запись: $[[0^{\beta_0}, 1^{\beta_1}, \dots, m^{\beta_m}]]$

$$\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + m\beta_m = m$$

3.2 Полиномиальные коэффициенты

$P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — количество m -кортежей из m -мульти множества

$\forall m, \alpha_1 \dots \alpha_n: \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$

$$P_m(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$

Доказательство:

$$(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{\alpha_n})$$

$$\alpha_1! \cdots \alpha_n! P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = m!$$

$$\Downarrow \\ P_m = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$

$P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — полиномиальный коэффициент.

Обозначается: $\binom{m}{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$

4 Комбинаторное правило суммы. Формула включений и исключений.

4.1 Комбинаторное правило суммы.

См. пункт 1.3

4.2 Формула включений и исключений.

Пусть A - конечное конечное множество

$$A_1 \dots A_n \subseteq A$$

Тогда $|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k$,

$$S_0 = |A|$$

$$\forall k < 0 S_k = \sum_{\{i_1 \dots i_k\} \subseteq \{1 \dots n\}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Доказательство:

$$x \in A$$

пусть x попал ровно в t подмножеств A_{j_1}, \dots, A_{j_t}

Вклад "x"

В $S_0 = |A| - 1$ раз

В $S_1 = \sum_{i=1}^n |Ai| - t$ раз

В $S_2 = \binom{t}{2}$ раз

В $S_3 = \binom{t}{3}$ раз

:

В $S_t = \binom{t}{t}$ раз

$$\text{T. о. } 1 - t + \binom{t}{2} - \binom{t}{3} \dots + (-1)^t \binom{t}{t} = \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} = \begin{cases} 0; & t > 0 \\ 1; & t = 0 \end{cases}$$

□

5 Формула включений и исключений. Задача о беспорядках.

5.1 Формула включений и исключений.

См. пункт 4.2

5.2 Задача о беспорядках.

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) — \text{перестановка } (1, \dots, n).$$

Нужно найти число перестановок из n элементов множества, в которых никакой элемент не остался на месте.

Доказательство:

$$(\forall i \quad \pi_i \neq i).$$

A - все перестановки. $\forall i \quad A_i \leftrightarrow \pi_i = i$.

$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ - искомое множество.

$$|A| = n! \Rightarrow S_0 = n!$$

$$|A_i| = (n-1)!$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n |A_i| = n \cdot (n-1)!$$

при $i \neq j$ $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = \binom{n}{2} (n-2)!$$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (n-k)! = \binom{n}{k} (n-k)!$$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

□

6 Функция Эйлера, формула для функции Эйлера. Формула для числа сюръективных отображений.

6.1 Функция Эйлера, формула для функции Эйлера.

$\varphi(m)$ - функция Эйлера, $m \in N$. Кол-во натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m .

$\forall m \geq 2 \quad m = p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_n^{l_n}$ — разложение на простые множители, тогда

$$\varphi(m) = m \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Доказательство:

$$A = \{1 \dots m\}$$

A_i — числа A , которые делятся на p_i , $\forall i = 1 \dots m$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)|$$

$$|A| = m \Rightarrow S_0 = m$$

$$|A_i| = \frac{m}{p_i} (p_i, 2p_i, 3p_i, \dots, \frac{m}{p_i} \cdot p_i)$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \frac{m}{p_i} = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}$$

$$S_k = \sum_{i \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}$$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = m + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k = m + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} = m \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}\right) =$$

$$m \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

□

6.2 Формула для числа сюръективных отображений.

Число сюръективных отображений из m -множества $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ в n -множество $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$

$$\text{равно } (-1)^n \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^m$$

Доказательство:

A — все отображения $X \rightarrow Y$

A_i — все отображения $X \rightarrow Y \mid y_i$ — нет прообраза.

$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)$ — множество всех отображений, у которых 1-й элемент покрыт, ..., k-й элемент покрыт.

$$|A| = n^m = S_0$$

$$|A_i| = (n-1)^m$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n |A_i| = C_n^1 |A_j| = n(n-1)^m$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = C_n^2 |A_i \cap A_j| = C_n^2 (n-2)^m$$

:

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$$

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (n-k)^m = C_n^k (n-k)^m$$

:

$$S_n = 0$$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^m \stackrel{j=n-k}{=} \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} C_n^{n-j} j^m = (-1)^n \sum_{j=1}^n (-1)^j C_n^j j^m$$

□

7 Число Стирлинга второго рода. Формула для числа Стирлинга второго рода. Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода.

7.1 Число Стирлинга второго рода.

Число стирлинга II рода $S(n, k)$ — количество неупорядоченных разбиений n-множества на k непустых подмножеств

Положим:

$$S(n, 0) = \begin{cases} 0; & n > 0 \\ 1; & n = 0 \end{cases}$$

$$S(n, k) = 0; \quad k > n$$

7.2 Формула для числа Стирлинга второго рода.

$$S(n, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} i^n$$

Доказательство:

Сюръективное отображение из n-множества в k-множество сопоставляется упорядоченному разбиению n-множества на k непустых подмножеств

$$\text{Их } (-1)^k \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^i i^n$$

Делим на $k!$ и получаем число неупорядоченных разбиений.

□

7.3 Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода.

$\forall k, n \in N, \quad 0 < k < n$

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k)$$

Доказательство:

M — все разбиения n -множества на k непересекающихся подмножеств.

В n -множестве зафиксируем элемент a

M_1 — множество разбиений, в которых есть одноэлементное подмножество $\{a\}$

$M_2 = M \setminus M_1$ — все остальные разбиения

$$|M| = S(n, k)$$

$|M_1| = S(n - 1, k - 1)$ ($n - 1$ т.к. один элемент уже участвует в разбиении, $k - 1$ т.к. одно множество в разбиении уже есть)

$|M_2| = kS(n - 1, k)$ (разбиваем $n - 1$ -множество на k непустых подмножеств, и добавление элемента a в каждое из k подмножеств порождает разбиение изначального n -множества)

$$M = M_1 \sqcup M_2$$

\Downarrow

$$|M| = |M_1| + |M_2|$$

\Downarrow

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$$

\square

8 Числа Бела. Теорема о числе Бела.

8.1 Числа Бела.

Число Бела B_n — количество неупорядоченных разбиений n -множества на непустые подмножества.

$$B_0 = S(0, 0)$$

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$$

8.2 Теорема о числе Бела.

$\forall n \geq 2$

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^n S(n, k) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=k-1}^{n-1} S(i, k - 1) \binom{n-1}{i} \stackrel{\text{поменяем знаки суммы местами}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{i+1} S(i, k - 1) \binom{n-1}{i} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{k=1}^{i+1} S(i, k - 1) \stackrel{k-1=t}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{t=0}^i S(i, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i \end{aligned}$$

\square

На экзамене требуется комбинаторное доказательство, но какое есть.

9 Число Стирлинга первого рода. Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга первого рода. Связь между числами Стирлинга.

9.1 Число Стирлинга первого рода.

Число Стирлинга первого рода — количество неупорядоченных разбиений n -множества на k циклов
Обозначение: $s(n, k)$

9.2 Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга первого рода.

Положим:

$$s(n, 0) = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n > 0 \end{cases}$$

$$s(n, k) = 0; \quad k > n$$

$$\forall n, k \quad 0 < k < n$$

$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) + (n - 1)s(n - 1, k)$$

Доказательство:

Аналогично числам Стирлинга I рода

□

9.3 Связь между числами Стирлинга.

$$\forall n, m \in N \quad \sum_{k=1}^n S(n, k)s(k, m)(-1)^{k-m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

Доказательство:

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)[x]_k = \sum_{k=1}^n S(n, k) \sum_{m=1}^k s(k, m)(-1)^{k-m} x^m = \sum_{m=1}^n x^m \sum_{k=1}^n S(n, k)s(k, m)(-1)^{k-m} x^m$$

Сравниваем степень при x^n : если $n = m$, то вторая сумма равна 1, иначе она должна быть равна 0.

□

10 Разложение x^n в базисе $[x]_k$. Разложение $[x]_k$ в базисе x^n . Связь между числами Стирлинга.

10.1 Разложение x^n в базисе $[x]_k$.

$$\forall n \in N : \quad x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)[x]_k.$$

Доказательство:

$$[x]_{k+1} = [x]_k \cdot (x - k) = [x]_k \cdot x - [x]_k \cdot k$$

↓

$$(*) \quad x \cdot [x]_k = [x]_{k+1} + k \cdot [x]_k$$

Индукция по n : $x^1 = [x]_1$ — очевидно

$$x^n = x \cdot x^{n-1} \stackrel{\text{по индукции}}{=} x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k)[x]_k = \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) \cdot [x]_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) \cdot k \cdot [x]_k \stackrel{t=k+1 \text{ в первой сумме}}{=}$$

$$= \sum_{t=2}^n S(n-1, t-1)[x]_t + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) \cdot k \cdot [x]_k$$

Первая сумма равна 0 при $t=1$, вторая сумма равна 0 при $k=n$. Получается:

$$\sum_{k=1}^n (S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)) [x]_k = \sum_{k=1}^n S(n, k) [x]_k$$

□

10.2 Разложение $[x]_k$ в базисе x^n .

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$[x]_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} s(n, k) x^k$$

Доказательство:

Аналогично пункту 10.1

□

10.3 Связь между числами Стирлинга.

См. пункт 9.3

11 Разбиения чисел. Диаграмма Ферре. Свойства числа разбиений. Равенство числа разбиений на различные слагаемые и на нечетные слагаемые.

11.1 Разбиения чисел.

Разбиение числа n на натуральные слагаемые - это представление n в виде суммы $x_1 + x_2 + \dots + x_k$, $x_i \in \mathbb{Z}_+$. Количество упорядоченных разбиений: $\binom{n-1}{k-1}$

Неупорядоченные разбиения:

$p(n)$ — количество разбиений числа n на слагаемые

$p(n, k)$ — количество разбиений числа n на k слагаемых

11.2 Диаграмма Ферре.

Диаграмма Ферре разбиения $n = x_1 + \dots + x_k$. $x_1 \geq \dots \geq x_k - k$ строк точек, в i -ой строке x_i точек в первых x_i столбцах.

11.3 Свойства числа разбиений.

11.3.1

$$p(0, 0) = p(0)$$

$$p(n, 1) = 1$$

$$p(n, n) = 1$$

$$p(n, k) = 0; \quad k > n$$

11.3.2

1. $p(n, k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, наибольшее из которых равно k .
2. $p(n+k, k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, не превосходящие k .
3. Число разбиений $n-k$ ровно на $m-1$ слагаемое, не превосходящих k равно числу разбиений $n-m$ на $k-1$ слагаемое, не превосходящих m .

Доказательство:

1. Транспозиция диаграммы Ферре.
2. Рассмотреть диаграмму без первого столбца.
3. Тоже через диаграмму Ферре.

□

11.3.3 Рекуррентное соотношение

$$\forall n, k \mid 0 < k < n$$

$$p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n-k, i)$$

Доказательство:

$$(*) \quad (n-k) = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1)$$

$$y_i = x_i - 1$$

$$n-k = y_1 + y_2 + \dots + y_k, \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_k \geq 0$$

Если $s : y_s > 0, y_{s+1} = y_{s+2} = \dots = y_n = 0$, тогда $(*)$ - это разбиение $n-k$ на k слагаемых, которых у нас $p(n-k, s)$.

$$p(n, k) = \sum_{s=1}^k p(n-k, s)$$

□

11.4 Равенство числа разбиений на различные слагаемые и на нечетные слагаемые.

Количество разбиений n на различные слагаемые равно количеству разбиений n на нечётные слагаемые.

Доказательство:

Q_n - множество разбиений n на различные слагаемые, T_n - множество разбиений на нечётные слагаемые.

Докажем, что $|Q_n| = |T_n|$, построим для этого биекцию.

$$f : Q_n \rightarrow T_n$$

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 > x_2 > \dots > x_k$$

$$\forall i \quad x_i = 2^{t_i} \cdot y_i, \quad y_i - \text{нечётно}$$

$$n = \underbrace{y_1 + \dots + y_1}_{2^{t_1}} + \underbrace{y_2 + \dots + y_2}_{2^{t_2}} + \dots + \underbrace{y_k + \dots + y_k}_{2^{t_k}}.$$

$$h : T_n \rightarrow Q_n$$

$$n = \underbrace{y_1 + \dots + y_1}_{d_1} + \dots + \underbrace{y_s + \dots + y_s}_{d_s}, \quad y_i \neq y_j, i \neq j.$$

$\forall i \quad d_i$ - однозначно раскладывается в степени двойки.

$$d_i = 2^{\sigma_{i,1}} + 2^{\sigma_{i,2}} + \dots + 2^{\sigma_{i,m_i}}; \quad \sigma_{i,1} > \sigma_{i,2} > \dots > \sigma_{i,m_i}$$

$$n = 2^{\sigma_{1,1}}y_1 + 2^{\sigma_{1,2}}y_1 + \dots + 2^{\sigma_{i,m_i}} + \dots + 2^{\sigma_{s,1}}y_s + \dots + 2^{\sigma_{s,m_s}}y_s.$$

$h = f^{-1}$ — биекция.

□

12 Производящие функции и их свойства. Элементарные производящие функции.

12.1 Производящие функции и их свойства.

12.1.1 Определение

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A(t)$ — производящая функция последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

12.1.2 Свойства

Пусть $A(t)$ и $B(t)$ - производящие функции последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ соответственно. Тогда:

1. $\alpha A(t) + \beta B(t)$ - производящая функция. $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=0}^{\infty}$.
2. $A(t) \cdot B(t)$ - производящая функция последовательности $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$, $d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$
3. $t^m A(t)$ - производящая функция. $\underbrace{0, \dots, 0}_m, a_0, a_1, \dots$
4. $A(ct)$ - производящая функция последовательности $\{c^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$
5. $tA'(t)$ - $\{n \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$
6. $\int_0^t \frac{A(t) - a_0}{t} dt$ - производящая функция последовательности $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$
7. $\frac{A(t)}{1-t}$ - производящая функция последовательности $\left\{ \sum_{i=0}^n a_i \right\}_{n=0}^{\infty}$

12.2 Элементарные производящие функции.

$$1. (1+T)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n; \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$2. e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$3. \ln \left(\frac{1}{1-t} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

$$4. \sin(t) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$5. \cos(t) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

13 Числа Каталана, производящая функция последовательности чисел Каталана, формула для числа Каталана.

13.1 Числа Каталана

$$\{C_n\}_{n=0}^{\infty}: \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \dots + C_{n-1} \cdot C_0 \end{cases}$$

C_n – Количество правильных скобочных последовательностей с n парами скобок.

13.2 Производящая функция последовательности чисел Каталана

$$C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{k-1} \cdot C_0 + \dots + C_0 \cdot C_{k-1}) t^k = 1 + t \sum_{k=0}^{\infty} (C_k \cdot C_0 + \dots + C_0 \cdot C_k) t^k = 1 + t(C(t))^2 \\ \Downarrow \\ tC^2(t) - C(t) + 1 &= 0 \\ \Downarrow \\ 2tC_{1/2}(t) &= 1 \pm \sqrt{1-4t} \end{aligned}$$

т.к. при $t = 0$ $C(t) = 1$

$$\Downarrow \\ C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

□

13.3 Формула для числа Каталана

$$n\text{-ое число Каталана: } C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} (1-4t)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-4t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-3}{2})}{n!} (-4t)^n = \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot 2^n \cdot t^n}{n!} &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{n!(n-1)!2^{n-1}} 2^n t^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2t^n = \\ \sqrt{1-4t} \end{aligned}$$

$$C(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} t^n$$

$$\text{т.о. } C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

□

14 Числа Фибоначчи, производящая функция последовательности чисел Фибоначчи, формула для числа Фибоначчи.

14.1 Числа Фибоначчи

$$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}: \begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

14.2 Производящая функция последовательности чисел Фибоначчи

Производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет вид $F(t) = \frac{1}{1-t-t^2}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} t^n = \\ &= 1 + t \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} t^{n-1} + t^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} t^{n-2} = 1 + tF(t) + t^2 F(t) \Rightarrow F(t) = \frac{1}{1-t-t^2} \end{aligned}$$

□

14.3 Формула для числа Фибоначчи

$$\forall n \geq 0 \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Доказательство:

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{-1}{t^2 + t - 1} = \frac{-1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{t-t_2} - \frac{1}{t-t_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}t_1} \left(\frac{1}{1-\frac{t}{t_1}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2} \left(\frac{1}{1-\frac{t}{t_2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}t_1} \left(1 + \frac{t}{t_1} + \frac{t^2}{t_1^2} + \dots \right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2} \left(1 + \frac{t}{t_2} + \frac{t^2}{t_2^2} + \dots \right) \\ f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{t_1^{n+1}} - \frac{1}{t_2^{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{t_2^{n+1} - t_1^{n+1}}{t_1^{n+1} \cdot t_2^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} (t_2^{n+1} - t_1^{n+1}) = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

□

15 Линейная однородная возвратная последовательность, ее производящая функция. Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения.

15.1 Линейная однородная возвратная последовательность

Линейное однородное рекуррентное соотношение порядка k для последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ выглядит:
 $(*) \quad a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \dots + p_k a_n = 0, \quad p_k \neq 0.$

Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет $(*) \forall n$ она наз-ся однородной возвратной последовательностью порядка k .

15.2 Производящая функция однородной возвратной последовательности

Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет $(*) \forall n, n \geq 0$, то производящая функция $A(t)$ этой последовательности имеет вид:

$$A(t) = \frac{C(t)}{K(t)}, \text{ где } K(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_k t^k, C(t) - \text{многочлен степени, не превосходящий } k-1.$$

Доказательство:

$$\text{Пусть } A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

$$\begin{aligned} C(t) = A(t) \cdot K(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \\ &+ \dots + a_0 p_1 t + a_1 p_1 t^2 + \dots + a_{k-1} p_1 t^k + a_k p_1 t^{k+1} + \\ &+ \dots + a_0 p_2 t^2 + \dots + a_{k-2} p_2 t^k + a_{k-1} p_2 t^{k+1} + \\ &+ \dots + a_0 p_k t^k + a_1 p_k t^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

(Все столбцы после первого многоточия будут зануляться, а до первого в сумме образуют $C(t)$.)

□

15.3 Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения.

$f(t) = t^k + p_1 t^{k-1} + \dots + p_k$ — характеристический многочлен для $(*)$.

$$f(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdots (t - \lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, \sum r_i = k$$

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — линейная однородная возвратная последовательность удовлетворяющая $(*)$. Тогда $a_n = \sum_{i=1}^s Q_i(n) \lambda_i^n$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — корни характеристического многочлена кратного r_1, \dots, r_s соответственно.

$Q_i(t)$ — многочлен степени, не превосходящий $r_i - 1$, который находится из начальных условий.

Доказательство:

$$K(t) = t^k f\left(\frac{1}{t}\right) = t^k \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{t} - \lambda_i\right)^{r_i} = \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{t} - t\lambda_i\right)^{r_i}$$

$$A(t) = \frac{C(t)}{\prod_{i=1}^s (1 - t\lambda_i)^{r_i}} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} \frac{B_{ij}}{(1 - t\lambda_i)^j}$$

$$(1 - t\lambda_i)^{-j} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-j}{n} (-\lambda_i t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-j)(-j-1)\dots(-j-n+1)}{n!} (-1)^n \lambda_i^n t^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j(j+1)\dots(j+n-1)}{n!} \lambda_i^n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{n} \lambda_i^n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{j-1} \lambda_i^n t^n$$

$$A(t) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} B_{ij} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{j-1} \lambda_i^n t^n \right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \lambda_i^n \sum_{i=1}^s B_{ij} \binom{j+n-1}{j-1} \right) t^n.$$

При этом $\binom{j+n-1}{j-1}$ - многогранен степени, не превышающей $n-j+1$.

□

16 Формула Стирлинга. Асимптотика биномиальных коэффициентов.

16.1 Формула Стирлинга

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Доказательство:

Без доказательства

□

16.2 Асимптотика биномиальных коэффициентов.

$$1. k^2 = o(n) \Rightarrow C_n^k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

$$2. k^3 = o(n^2) \Rightarrow C_n^k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} e^{\frac{-k(k-1)}{2n}} \text{ т.к. } \frac{k}{2n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 0 \quad \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k^2}{2n}}$$

Доказательство:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{n^k}{k!} e^{\ln(1-\frac{1}{n}) + \ln(1-\frac{2}{n}) + \dots + \ln(1-\frac{k-1}{n})} =$$

$$\frac{n^k}{k!} e^{-\frac{1}{n} + O(\frac{1}{2n^2}) - \frac{2}{n} + O(\frac{4}{2n^2}) + \dots + -\frac{k-1}{n} + O(\frac{(k-1)^2}{2n^2})} = \frac{n^k}{k!} e^{\frac{k(k-1)}{2n} + O(\frac{k^3}{n^2})}$$

Рассмотрим сумму:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(k-1)^2}{n^2} \leq \frac{k(k-1)^2}{n^2} \quad (\text{все слагаемые заменили на последнее})$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(k-1)^2}{n^2} \geq \frac{(\frac{k}{2})^2}{n^2} \frac{k}{2} \quad (\text{половину слагаемых заменили на } \frac{(\frac{k}{2})^2}{n^2})$$

Из доказанного следуют оба пункта

□

17 Граф, мультиграф, псевдограф. Изоморфизм графов, автоморфизм. Лемма о рукопожатиях. Орграф, связный, сильно связный орграф.

17.1 Граф, мультиграф, псевдограф.

V - непустое конечное множество (конечное)

$V^{(2)}$ - множество всех двухэлементных подмножеств множества V .

Графом называется пара множеств $(V, E) = G$, где $E \subseteq V^{(2)}$

Элементы V - вершины,

Элементы E - рёбра.

VG - множество вершин

EG - множество рёбер.

$|VG|$ - порядок графа.

$|G| = |VG| = n \Rightarrow G$ — n -граф

$|G| = n, |EG| = m \Rightarrow G$ — (n, m) - граф.

17.2 Изоморфизм графов, автоморфизм.

$G = (V, E), G' = (V', E')$.

G и G' изоморфны ($G \cong G'$), если \exists биекция $\varphi : V \rightarrow V' : uv \in E \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E'$.

φ - изоморфизм графов G и G' . Если $G = G'$, то φ - автоморфизм графа (V и V' совпадают).

17.3 Лемма о рукопожатиях.

Пусть G - произвольный граф, тогда $\sum_{v \in VG} \deg_G(v) = 2|EG|$.

Доказательство:

Возьмем пустой граф. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер.

□

17.4 Орграф, связный, сильно связный орграф.

Орграф - это пара $G = (V, D)$, где V - непустое множество, а $D \subseteq V \times V$. Элементы V - вершины, элементы D - дуги.

$(v, u) \in D$. vu - выходит из v и входит в u .

$x, y \in VG$ — связные в G , если в $G \exists$ простая (x, y) - цепь.

Граф G — связный, если $\forall 2$ вершины связные.

Вершина v достижима из u , если \exists ориентированная (u, v) -цепь.

Орграф G — сильносвязанный, если любая вершинка достижима из любой другой.

18 Подграф, порожденный подграф, оствовый подграф. Объединение, соединение, умножение графов. Связный граф, компонента связности.

18.1 Подграф, порожденный подграф, оствовый подграф.

Граф H называется подграфом графа G , если $VH \subseteq VG, EH \subseteq EG$.

Если $VH = VG$, то H - оствовый подграф.

18.1.1 Порожденные подграфы

Пусть $U \subseteq VG$, $D = \{uv \mid u, v \in U, uv \in EG\}$.

Тогда $G(U) = (U, D)$ - подграф, порождённый множеством вершин U .

Пусть $D \subseteq EG$, U - множество концов рёбер из D .

Тогда $G[D] = (U, D)$ - подграф, порождённый множеством рёбер D .

18.2 Объединение, соединение, умножение графов.

18.2.1 Объединение графов

Граф H называется объединением графов G и F , если $VH = VG \cup VF$, $EH = EG \cup EF$, будем обозначать $H = G \cup F$.

Если $VG \cap VF \neq \emptyset \Rightarrow G \cup F$ - дизъюнктивное объединение.

18.2.2 Соединение графов

Соединение графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$) — граф $G_1 + G_2$ — дизъюнктивное объединение G_1 и G_2 и добавление ребёр $v_1v_2 = v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.

18.2.3 Умножение графов.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.

Произведение $G = G_1 \times G_2$ называется $G = (V_1 \times V_2, E)$.

(v_1, v_2) смежные с $(u_1, u_2) \Leftrightarrow$ или $(v_1 = u_1, v_2u_2 \in E_2)$ или $(v_2 = u_2, v_1u_1 \in E_1)$.

18.3 Связный график, компонента связности.

$x, y \in VG$ — связные в G , если в G \exists простая (x, y) - цепь.

Граф G — связный, если \forall 2 вершины связные.

Максимальный по включению вершин и рёбер связный подграф графа G называется компонентой связности графа G .

19 Дополнение к графу, реберный график. Двудольность, критерий двудольности.

19.1 Дополнение к графу, реберный график.

Дополнение к графу $G = (V, E)$ есть $\bar{Q} = (V, \bar{E})$, где $\bar{E} = \{uv \mid uv \notin E, u, v \in V\}$.

Для графа $G = (V, E)$ реберным графиком называется $L(G)$, $VL(G) = EG$, $e_1e_2 \in EL(G) \Leftrightarrow e_1$ и e_2 смежные в G .

19.2 Двудольность, критерий двудольности.

19.3 Двудольность

Граф $G = (V, E)$ — двудольный, если \exists разбиение $V = A \sqcup B : G[A]$ и $G[B]$ — пустые

19.4 Критерий двудольности Кенига

G - двудольный \Leftrightarrow в G нет циклов нечётной длины.

Доказательство:

$\Rightarrow)$ C - цикл в G . $C = v_1v_2v_3v_4\dots v_e, v_{e+1} = v_1$. $V = A \cup B$, $v_1, v_3, v_5 \dots \in A$, $v_2, v_4, v_6 \in B$, т.е. все нечётные в A , все чётные в B .

$\Leftarrow)$ Пусть G - связный

$$v \in VG$$

Разбиваем множество $VG = A \sqcup B$

$$A = \{u \in VG | d(v, u) - \text{чётно}\}$$

$$B = \{u \in VG | d(v, u) - \text{нечётно}\}$$

Надо показать что в A и B нет рёбер.

От противного. $e = uw \in EG$, $u, w \in$ одному мно-ву (A или B). По построение $u, w \neq v$. Рассмотрим кратчайшие цепи: U - кратчайшая (u, v) -цепь, W - кратчайшая (w, v) -цепь. Длины этих цепей имеют одинаковую чётность. Пусть v_1 - последняя, начиная с v , общая вершина цепей U, W . (v, v_1) - подцепи цепей U и W имеют одинаковую длину $\Rightarrow (v_1, u)$ -подцепь цепи U и (v_1, w) -подцепь цепи W имеют одинаковую чётность длины. Их объединение с ребром uw даёт цикл нечётной длины. Противоречие. Следовательно, граф является двудольным.

□

20 Оценки числа ребер графа. Эксцентризитет, радиус, диаметр, центр графа.

20.1 Оценки числа ребер графа.

$\forall (n, m)$ -графа с k компонентами связности верны два неравенства: $n - k \leq m \leq \binom{n - k + 1}{2}$, причём обе оценки достижими.

Доказательство.

верхняя) Пусть G - n -граф с k компонентами связности с максимальным числом рёбер. Очевидно, что G - дизъюнктное объединение полных графов ($G = K_{n_1} \cup \dots \cup K_{n_k}$). Пусть $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$.

Покажем, что $n_2 = n_3 = \dots = n_k = 1$.

Пусть не так ($n_2 > 1$). Рассмотрим $v \in K_{n_2}$. Рассмотрим граф $G' = (K_{n_1} + v) \cup (K_{n_2} - v) \cup K_{n_3} \cup \dots \cup K_{n_k}$ - удалили $n_2 - 1$ рёбёр. Добавили n_1 ребёр. Получили, что в G' добавили больше, чем удалили. Противоречие к предположению в самом начале.

В G у нас $\binom{n - k + 1}{2}$ рёбер.

нижняя) Индукция по числу рёбер:

$m = 0$ - всё очевидно, равенство есть.

Пусть $m > 0$ и для всех графов с меньшим числом рёбер наше неравенство верно.

Рассмотрим (n, m) -граф G с k комп. связности. Возьмём некоторое $e \in EG$ и безжалостно удалим его: $G_1 = G - e$. G_1 - $(n, m-1)$ -граф с k_1 компонентами связности. По лемме 2.7 из лекций имеет, что $k_1 \leq k+1$.

По индукционному предположению $n - k_1 \leq m - 1 \Rightarrow m \geq n - k_1 + 1 \geq n - k + 1 - 1 = n - k$.

Пример такого графа: $G = O_{k-1} \cup P_{n-k}$.

□

20.2 Эксцентризитет, радиус, диаметр, центр графа.

Эксцентризитет вершины v : $e(v) = \max_{u \in VG} d(v, u)$.

Радиус графа G : $r(G) = \min_{v \in VG} e(v)$.

Диаметр графа G : $d(G) = \max_{v \in VG} e(v)$.

Вершина $v \in VG$ | $e(v) = r(G)$ называется **центральной** вершиной.

Множество всех центральных вершин - **центр** графа.

21 Лес, дерево, характеристизация деревьев.

21.1 Определения

Ациклический граф — **лес**

Ациклический связный граф — **дерево**.

21.2 Характеризация деревьев

(n, m) -граф G . Следующие условия эквивалентны:

1. G — дерево.
2. G — связный, $m = n - 1$
3. G — ациклический, $m = n - 1$
4. В графе G любые 2 вершины связаны единственной простой цепью.
5. G — ациклический и добавление одного нового ребра приводит к появлению ровно одного простого цикла.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$) Докажем, что в любом (n, m) -дереве $m = n - 1$. Индукцией по m :

$m = 0 \Rightarrow n = 1$.

Пусть G - произвольное (n, m) -дерево и для всех деревьев с меньшим числом рёбер наше равенство выполняется.

Возьмём некоторое ребро $e \in EG$. e не принадлежит никакому циклу, т.к. в нашем графе их нет лемма 2.7 из лекций \Rightarrow в $G - e$ ровно 2 компоненты связности G_1 и G_2 - деревья (n_1, m_1) и (n_2, m_2) .

По индукционному предположению $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$. Тогда для нашего графа имеем $m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$.

$2 \Rightarrow 3$) Пусть в графе G есть цикл, рассмотрим некоторое ребро e из этого цикла лемма 2.7 из лекций $\Rightarrow G - e$ — связный и является $(n, n - 2)$ -графом, что противоречит оценке числа рёбер (пункт 20.1).

$3 \Rightarrow 4$) Докажем, что G — связный

G — ациклический $\Rightarrow G$ — лес.

Пусть в G k компонент связности

Каждая компонента связности G_1, \dots, G_k — дерево

G_i — (n_i, m_i) -дерево

Т.к. доказано, что из $1 \Rightarrow 2$, то $m_i = n_i - 1$

$n - 1 = m = m_1 + \dots + m_k = n_1 + \dots + n_k - k = n - k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ граф связан

$\Rightarrow \forall u, v \exists(u, v)$ — цепь.

Пусть $\exists u, v$ т.ч. в G есть две различные (u, v) -простые цепи L_1 и L_2

Пусть x — последняя вершина общего начала путей L_1 и L_2 начиная с u , y - следующая на цепи L_1
 $\Rightarrow G - xy$ - остаётся связным $\xrightarrow{\text{лемма 2.7 из лекций}}$ xy принадлежит некоторому циклу \Rightarrow противоречие с ацикличностью.

4 \Rightarrow 5) В любом цикле 2 вершины соединены не менее 2 различными путями \Rightarrow в G нет циклов.

Пусть $u, v \in VG$ и $uv \notin EG$, тогда единственная (u, v) -цепь в G вместе с ребром uv даёт единственный простой цикл

5 \Rightarrow 1) Докажем, что G связный.

От противного: пусть G не связен. Пусть u и v в разных компонентах связности $\Rightarrow G + uv$ не имеет циклов (по лемме 2.7 из лекций). Противоречие.

□

22 Центр дерева. Остовное дерево, остов.

22.1 Центр дерева.

Центр любого дерева состоит из одной или двух смежных вершин.

Доказательство.

$n = 1$ — очевидно.

$n = 2$ — аналогично.

Пусть T - дерево порядка $n \geq 2$. Рассмотрим дерево T' , которое получается из T удалением всех висячих вершин.

$\forall v \in T' \quad e_{T'}(v) = e_T(v) - 1 \Rightarrow$ центры T и T' совпали.

Продолжаем, пока порядок дерева > 2 .

□

22.2 Остовное дерево, остов.

G — связный. Оставной подграф графа G , являясь деревом, называется, как ни странно, оставным деревом графа G .

Оставной подграф графа G , являющийся дизъюнктным объединением оставных деревьев его компонент связности - **остов** графа G .

23 Код Прюфера помеченного дерева. Теорема Кэли.

23.1 Код Прюфера помеченного дерева.

Пусть T - помеченное дерево $VT = \{1, \dots, n\}$. Сопоставим ему $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$:

1. Полагаем $T_0 = T$
2. $\forall i \quad 1 \leq i \leq n-1$ в T_{i-1} находим висячую вершину x_i с наименьшим номером. a_i — номер её соседа
 $T_i = T_{i-1} - x_i$
 (a_1, \dots, a_{n-1}) — код Прюфера

23.2 Теорема Прюфера

(не знаю, нужна ли она в этом вопросе)

Если $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \{1, 2, \dots, n\}^{n-1}$, $a_{n-1} = n$, то $\exists!$ помеченное дерево T , для которого a — код Прюфера.

Доказательство:

Построим $b = (b_1, \dots, b_{n-1})$

$b_i = \min\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1}\}$

рассмотрим граф T т.ч.

$VT = \{1, 2, \dots, n\}$,

$ET = \{(a_i, b_i) | 1 \leq i \leq n-1\}$

Докажем, что:

1) T — дерево

2) a — код Прюфера дерева T

1) Рассмотрим последовательность $T_0 = T, T_1, \dots, T_{n-1}$

$T_i = T_{i-1} - b_i; 1 \leq i \leq n-1$

$T_{n-1} = K_1$ — дерево

По построению $\{1, 2, \dots, n\} = \{b_1, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\}$

$\forall i \quad VT_{i-1} = \{b_i, b_{i+1}, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\}$

(*) $ET_{i-1} \subseteq \{a_i b_i, a_{i+1} b_{i+1}, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$

$b_i \neq b_j; \quad i \neq j$

$b_i \notin \{a_i, \dots, a_{n-1}\}$

b_i — висячая в T_{i-1}

$T_i = T_{i-1} - b_i$

Если T_i дерево, то T_{i-1} тоже дерево

T_n дерево $\Rightarrow T_0$ дерево $\Rightarrow T$ дерево

Т.к. T_{i-1} дерево, то из (*) следует, что

$ET_{i-1} = \{a_i b_i, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$

Получается $\forall x \in VT_{i-1} \quad deg_{T_{i-1}} x$ — количество появлений x в $b_i, \dots, b_{n-1}, a_i, \dots, a_{n-1}$

$deg_{T_{i-1}} x > 1 \Leftrightarrow x \in \{a_i, \dots, a_{n-1}\}$

\Downarrow

$\{b_i, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{a_i, \dots, a_{n-2}\}$ — множество висячих вершин в T_{i-1}

$a_i = \min\{1, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-2}\} = \min\{b_1, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-2}\} =$

$\min\{b_i, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{a_i, \dots, a_{n-2}\}$

b_i — висячая вершина в T_{i-1} с наименьшим номером \Rightarrow Декодирование даёт исходное дерево

□

23.3 Теорема Кэли.

Число помеченных деревьев на n вершинах равно n^{n-2}

24 Числа вершинной и реберной связности, их связь. Точка сочленения, характеристизация точек сочленения. Мост, характеристизация мостов.

24.1 Числа вершинной и реберной связности, их связь.

Число вершинной связности $\alpha(G)$ — наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу, либо одновершинному.

Число рёберной связности $\lambda(G)$ графа G порядка $n > 1$ — минимальное количество рёбер, удаление которых делает граф несвязным.

$$\delta(G) = \min_{v \in VG} (\deg(v)).$$

$$\forall G \quad \alpha(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Доказательство:

оценка сверху: берём нашу вершинку с минимальной степенью и удаляем все смежные ей рёбра.

оценка снизу:

для несвязного графа $0 \leq 0$

для графа с мостом: $\lambda(G) = 1$. и хотя бы одна вершина соединённая с мостом является точкой сочленения (если e — мост в связном графе, то его концы — либо точки сочленения, либо висячая вершина)
Если $\lambda(G) > 1$:

$$E_1 \subseteq EG, |E_1| = \lambda, G - E_1 \text{ — не связен.}$$

$$\text{Пусть } e \in E_1, E'_1 = E_1 - \{e\}$$

Для каждого ребра из E'_1 выберем один конец не инцидентный e и удалим его.

$$\text{Получим множество } V_1 = \{h \mid h \in E_1 \setminus \{e\} \text{ и } h \text{ не инц. } e\}$$

$$|V_1| \leq |E_1| - 1$$

$$G' = G - V_1$$

$$1) G' = G - V_1 \text{ — не связный} \Rightarrow \alpha(G) \leq |V_1| \leq |E_1| - 1 = \lambda(G) - 1$$

$$2) G' = G - V_1 \text{ — связный} \Rightarrow e \text{ — мост в } G' \Rightarrow \alpha(G') = \lambda(G') = 1 \Rightarrow \exists \text{ точка сочленения } x \text{ в } G'.$$

$$V_1 \cup \{x\}: G - (V_1 \cup \{x\}) \text{ — несвязный}$$

$$\alpha(G) \leq |V_1 \cup \{x\}| = |V_1| + 1 \leq |E_1| = \lambda(G)$$

□

24.2 Точка сочленения, характеристика точек сочленения.

$x \in VG$ — точка сочленения, если в $G - x$ больше компонент связности чем в G

Характеризация точек сочленения. В связном графе следующие утверждения эквивалентны:

1. x — точка сочленения графа G
2. \exists разбиение $VG \setminus \{x\} = U \sqcup W : \forall a \in U, \forall b \in W \forall$ простая (a, b) -цепь содержит x .
3. $\exists a, b \in VG \setminus \{x\}$: любая простая (a, b) -цепь содержит x .

Доказательство:

1 \Rightarrow 2) $G - v$ — не связный. А — одна компонента, В — остальные. значит, для любой пары вершин из эти множеств не существует простой цепи, следовательно в G любая цепь проходит через v

2 \Rightarrow 3) Очевидно

3 \Rightarrow 1) Если удалить x , то все простые цепи (a, b) -цепи исчезнут и a, b никак не будут связаны \Rightarrow граф будет несвязным $\Rightarrow x$ — точка сочленения

□

24.3 Мост, характеристика мостов.

$e \in EG$ — мост, если $G - e$ имеет больше компонент связности чем G

Характеризация мостов. В связном графе следующие утверждения эквивалентны:

1. e — мост в G
2. \exists разбиение $VG = U \sqcup W : \forall a \in U, \forall b \in W \forall$ простая (a, b) -цепь содержит e .
3. $\exists a, b \in VG \setminus \{e\}$: любая простая (a, b) -цепь содержит e .

4. ребро e не принадлежит простому циклу

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ — аналогично характеристики точек сочленения

$1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ — лемма 2.7 из лекций

□

25 Характеризация двусвязных графов. Блок, bc-дерево графа.

25.1 Характеризация двусвязных графов.

Для связного графа порядка $n > 2$ эквивалентны:

1. G — двусвязный
2. $\forall 2$ вершины принадлежат простому циклу
3. \forall вершина и \forall ребро принадлежат простому циклу
4. $\forall 2$ ребра принадлежат простому циклу
5. \forall двух вершин $x, y \in VG$, $\forall e \in EG$ существует простая (x, y) -цепь содержащая e
6. $\forall x, y, z \in VG \exists$ простая (x, y) -цепь содержащая z

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$)

Пусть $x, y \in VG$;

u — множество всех вершин графа G , принадлежащих хотя бы одному простому циклу проходящему через x

Если $y \in u \Rightarrow \square$

Если $y \notin u \Rightarrow u \subset VG \Rightarrow VG \setminus u \neq \emptyset$

Но т.к. G — связный $\Rightarrow \exists a \in u$ и $b \in VG \setminus u$ т.ч. $ab \in EG$

По лемме 2.14 из лекций. \exists простая (x, b) -цепь не содержащая a

По построению \exists простой цикл C проходящий через x, a

Пусть z — 1-я, начиная от b общая вершина (b, x) -цепи из цикла C

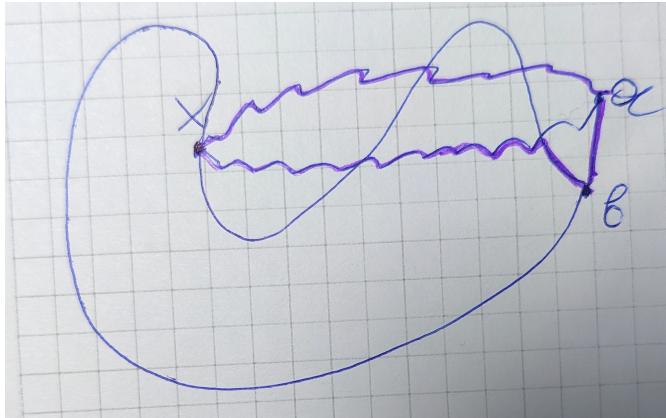
Тогда (b, z) — подцепь, ребро (a, b) и часть цикла C между вершинами z и a , содержащая x образуют простой цикл $\Rightarrow b \in u$. Противоречие. $\Rightarrow y$ обязан принадлежать u

$2 \Rightarrow 3$)

Есть вершина x и ребро ab

Если цикл содержащий a и x содержит и b , то доказано

Если цикл содержащий a и x не содержит b , то см. рисунок



Остальное в качестве упражнения.

□

26 Теорема Менгера

Минимальное число вершин, разделяющих две несмежные вершины u и v равно максимальному числу попарно непересекающихся простых (u, v) -цепей.

Доказательство. (не вникал в доказательство, но идеино оно такое же как и на лекциях)

Наибольшее число попарно непересекающихся простых (u, v) -цепей не больше минимального числа вершин, разделяющих u и v (поскольку можем удалить по вершине в каждой из этих (u, v) -цепей и разделить т.о. вершины u и v).

Докажем, что если наименьшее число вершин, разделяющих u и v в графе G равно k , то существует k попарно непересекающихся простых цепей.

При $k = 1$ — очевидно.

Пусть для некоторого $k > 1$ — неверно. Пусть t — наименьшее такое k . F — граф с наименьшим числом вершин, для которого не выполнено условие (которое после слова “доказать”) для t .

Будем удалять из F рёбра до тех пор, пока не получим некоторый граф G такой, что $\forall e \in EG$ для разделения u и v в графе G надо t вершин, а в графе $G - e$ надо $t - 1$ вершину.

Т.о. имеется G и t такие, что теорема верна для

1. $\forall k < t$.
2. \forall графа с числом вершин, меньшим, чем $|VG|$.
3. \forall графа $G - e \forall e \in EG$.

(док-во ниже) □

26.1 Утверждение 1

В графе G нет вершин, которые одновременно смежны с u и v .

Доказательство. Пусть w смежно с u и v . Тогда в $G - w$ для разделения u и v достаточно $t - 1$ вершины по пункту 2 в $G - w$ существует $t - 1$ попарно непересекающихся простых (u, v) -цепей. Добавляем цепь $u, w, v \Rightarrow t$ попарно непересекающихся простых (u, v) цепей в графе G . Противоречие с выбором графа G . □

26.2 Утверждение 2

Любое множество вершин W , разделяющих u и v , $|W| = t$ смежно либо с u , либо с v .

Доказательство. Цепь, соединяющую u с нек...

Доказательство. (продолжение)

Рассмотрим некоторое $e = xy \in EG$. По условию 3 в $G - e$ существует $t - 1$ вершина, разделяющая u и v .

В $(G - S_e)$ существует (u, v) -цепь и каждая точка цепи содержит ребро e .

(**) $\forall e = xy \Rightarrow 1) x, y \notin S_e$

2) если $x \neq u, x \neq v$, то $S_e \cup \{x\}$ разделяет u и v в G .

Рассмотрим кратчайшую (u, v) -цепь в графе G . $P = u, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, v$.

Рассмотрим $e = x_1x_2$. Из утверждения 1 $x_2 \neq v$.

$$S_e = \{y_1, \dots, y_{t-1}\}$$

$W_1 = S_e \cup \{x_1\}$ по $(**)$ разделяет u и v . По утверждению 1, $x_1, v \notin EG$. По утверждению 2, W_1 смежно с u . $\{y_1, \dots, y_{t-1}\}$ смежно с u и не смежно с v .

$W_2 = S_e \cup \{x_2\}$ по $(**)$ разделяет u и v . По утверждению 2 x_2 смежно с u . Противоречие с выбором кратчайшей цепи \square

27 Независимое множество. Оценки числа независимости. Вершинное покрытие. Связь чисел покрытия и независимости.

27.1 Независимое множество.

Мн-во вершин $W \subseteq VG$ называется **независимым**, если $\forall w, u \in W \quad uw \notin EG$.

Независимое мно-во **тупиковое (максимальное)**, если оно не является собственным подмножеством другого независимого мно-ва.

Независимое мно-во наибольшей мощности - **наибольшее** независимое мно-во. Мощность такого мно-ва называется **числом независимости** $\alpha_0(G)$

27.2 Оценки числа независимости.

$$\forall G \quad \alpha_0(G) \geq \sum_{v \in VG} (1 + \deg(v))^{-1}$$

Доказательство. Пусть $G = K_n$. Тогда $\alpha_0(K_n) = 1$.

$$\sum_{v \in VG} n^{-1} = \frac{n}{n} = 1.$$

Индукция по числу вершин для $G \neq K_n$:

$|VG| \leq 2$ - всё очевидно.

Пусть $|VG| = n \geq 3$, для любого графа с меньшим числом вершин теорема верна, $G \neq K_n$.

Выбираем x - вершинка G наименьшей степени. Т.к. $G \neq K_n$, то $x \cup N(x) \neq VG$.

$$G' = G - x - N(x). \text{ По индукционному предположению в } G': \alpha_0(G') \geq \sum_{v \in VG'} (1 + \deg(v))^{-1}.$$

Пусть $M' \subseteq VG'$, M' - независимо в G' , $|M'| = \alpha_0(G')$.

$$v \cup M' \text{ - независимо в } G \Rightarrow \alpha_0(G) \geq |x \cup M'| = \alpha_0(G') + 1.$$

$$\forall v \in VG' \quad \deg_G(v) \geq \deg_{G'}(v)$$

$$\sum_{v \in VG'} (1 + \deg_{G'}(v))^{-1} \geq \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1}$$

$\forall v \in N(x) \quad \deg_G(v) \geq \deg_G(x)$ (т.к. x - вершина с наименьшей степенью в G)

$$\sum_{v \in N(x)} (1 + \deg_G(v))^{-1} \leq \sum_{v \in N(x)} (\deg_G(x) + 1)^{-1} = \frac{\deg_G(x)}{\deg_G(x) + 1}$$

Берём неравенства 1 и 3 строчками выше и подставляем их куда-то в начало:

$$\alpha_0(G) \geq 1 + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} \geq \frac{\deg_G(x) + 1}{\deg_G(x) + 1} + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} = \frac{\deg_G(x)}{1 + \deg_G(x)} + (1 + \deg_G(x))^{-1} +$$

$$\sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} \geq \sum_{v \in N(x)} (\deg_G(v) + 1)^{-1} + (1 + \deg_G(x))^{-1} + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} = \sum_{v \in VG} (1 + \deg_G(v))^{-1} \quad \square$$

27.3 Вершинное покрытие.

Вершина покрывает рёбра, инцидентные ей. Мно-во вершин, покрывающих все рёбра - **покрытие** (вершинное покрытие).

Покрытие W - тупиковое (минимальное), если $\forall V \subset W, V$ - не покрытие. Покрытие наименьшей мощности - наименьшее покрытие и его мощность Обозначается $\beta_0(G)$ - число покрытия графа G .

27.4 Связь чисел покрытия и независимости.

Для $\forall G: \alpha_0(G) + \beta_0(G) = |VG|$

Доказательство:

Берём S — независимое: $|S| = \alpha_0(G)$

По лемме 2.19 из лекций ($S \subseteq VG$ — независимое $\Leftrightarrow VG \setminus S$ — вершинное покрытие)

$VG \setminus S$ — вершинное покрытие

$$\beta_0(G) \leq |VG \setminus S| = |VG| - \alpha_0(G) \Rightarrow \alpha_0(G) + \beta_0(G) \leq |VG|$$

Теперь, пусть P — вершинное покрытие: $|P| = \beta_0(G)$

По лемме 2.19 $VG \setminus P$ — независимое множество

$$\alpha_0(G) \geq |VG \setminus P| = |VG| - \beta_0(G) \Rightarrow \alpha_0(G) + \beta_0(G) \geq |VG|$$

↓

$$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |VG|$$

□

28 Паросочетание, реберное покрытие. Теорема о связи чисел паросочетания и реберного покрытия. Совершенное паросочетание.

28.1 Паросочетание, реберное покрытие.

$M \subseteq EG$ — паросочетание, если $\forall e, h \in M$ e, h — не смежны.

Наибольшее по мощности паросочетание — наибольшее паросочетание. Его мощность — число паросочетания $\alpha_1(G)$

$Q \subseteq EG$ — рёберное покрытие, если оно покрывает все вершины

Наименьшее по мощности рёберное покрытие — мин. рёберное покрытие. Его мощность — число рёберного покрытия $\beta_1(G)$

28.2 Теорема о связи чисел паросочетания и реберного покрытия.

$\forall G$ без изолированных вершин

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) = |VG|$$

Доказательство:

Пусть $\alpha_1 = \alpha_1(G)$, $\beta_1 = \beta_1(G)$, $|VG| = n$

Докажем: $\alpha_1 + \beta_1 \leq n$ $\alpha_1 + \beta_1 \geq n$

1. Пусть M - наибольшее паросочетание в G . Пусть V' - мно-во вершин, не покрытых M .

Либо V' - пусто, либо V' - независимое мно-во вершин (т.к. иначе M — не наибольшее паросочетание). Для каждой вершины из V' выберем ребро, инцидентне ей. получаем E' . (если $V' = \emptyset \Rightarrow E' = \emptyset$).

Поскольку V' - независимо, то $|E'| = |V'|$.

По построению V' : $|V'| = n - 2 \cdot \alpha_1$

$E' \cup M$ - рёберное покрытие $\beta_1 \leq |E' \cup M| = |E'| + |M| = n - 2\alpha_1 + \alpha_1 = n - \alpha_1$.

2. Пусть P - наименьшее рёберное покрытие графа G . $G' = G[P]$. В G' нет циклов (были бы, могли бы убрать одно ребро)

Получаем, что G' — ациклический граф, т.е. G' — лес

Каждая компонента связности графа G' — дерево. Пусть t компонент связности и число рёбер k_1, k_2, \dots, k_t .

В каждой компоненте выберем по одному ребру \Rightarrow получим паросочетания M . $|M| = t$.

Имеем, $t \leq \alpha_1$. Получаем, что $n = \sum_{i=1}^t (k_i + 1) = t + \sum_{i=1}^t k_i = t + \beta_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$.

□

28.3 Совершенное паросочетание.

Совершенное паросочтание — паросочтание, являющееся рёберным покрытием.

29 Терема Кенига о числе паросочетания для двудольных графов. Теорема Кенига о $(0,1)$ -матрицах.

29.1 Терема Кенига о числе паросочетания для двудольных графов.

Для любого двудольного графа G : $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$.

Доказательство. Пусть G — граф. Докажем, что $\alpha_1(G) \geq \beta_0(G)$.

Обозначим $\beta_0 = \beta_0(G)$

Удаляем рёбра из G пока не получим некоторый граф G' : $\beta_0(G') = \beta_0$ и $\forall e \in EG' \quad \beta_0(G' - e) = \beta_0 - 1$.

Докажем утверждение, что в G' нет смежных рёбер.

Пусть это гон и в $\exists e, g \in EG'$: e и g смежны в G' , общая вершина v . В графе $G' - e$ существуют вершин. покрытие $S_e \quad |S_e| = \beta_0 - 1$ и концы ребра e не лежат в S_e .

В графе $G' - g$ существует вершинное покрытие S_g и концы ребра g не принадлежат S_g .

Рассмотрим порождённый подграф графа G' : $G'' = G'[\{v\} \cup (S_e \setminus S_g) \cup (S_g \setminus S_e)]$

$|S_e \cap S_g| = t \quad |VG''| = 1 + \beta_0 - 1 - t + \beta_0 - 1 - t = 1 + 2(\beta_0 - 1) - 2t$

G'' подграф графа $G \Rightarrow G''$ — двудольный.

Пусть A — меньшая доля графа G .

$|A| \leq \frac{1}{2}|VG''| = \beta_0 - 1 - t$. A — вершинное покрытие G'' .

Покажем, что $A' = A \cup (S_e \cup S_g)$ — вершинное покрытие G' .

Возьмём произвольное ребро. Пусть $h \in EG'$.

1. $h \in \{e, g\}$

$e, g \in EG'' \Rightarrow e, g$ покрыты мно-ом A , а значит и A' .

2. $h \notin \{e, g\}$

Тогда h покрывается как S_e , так и S_g .

(a) $x \in S_g \quad x \in S_e \Rightarrow x \in S_g \cap S_e \Rightarrow$ покр. A' .

(b) один конец принадлежит $S_e \setminus S_g$, а другой: $S_g \setminus S_e \Rightarrow h \in EG'' \Rightarrow h$ покрывается A .

Следовательно $\beta_0(G') \leq |A'| \leq |A| + |S_e \cap S_g| \leq \beta_0 - 1 - t + t = \beta_0 - 1$ — противоречие с выбором графа G' (противоречие с тем, что существуют 2 смежных ребра).

Граф G' состоит из независимых рёбер. $\beta_0(G') = \alpha_1(G')$ $\beta_0(G) = \beta_0(G') = \alpha_1(G') \leq \alpha_1(G)$.

Из леммы 2.23 ($\forall G \quad \alpha_1(G) \leq \beta_0(G)$), это верно т.к. чтобы покрыть все рёбра, надо покрыть и все рёбра паросочетания) следует, что $\beta_0(G) = \alpha_1(G)$. □

29.2 Теорема Кенига о (0,1)-матрицах.

Для любой (0, 1)-матриц максимальное число единиц, никакие 2 из которых не стоят в одном столбце и в одной строке, равно минимальному числу строк и столбцов, содержащих все единицы.

Доказательство. Пусть G - двудольный граф, с долями $\{v_1, v_2 \dots v_n\}, \{u_1 \dots u_n\}$. Матрица смежности двудольного графа G :

$$A(G) = (a_{ij}) \mid a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i u_j \in EG \\ 0, & \text{else} \end{cases} . \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & A \\ \hline A^T & 0 \\ \hline \end{array}$$

Биекция между двудольным графом с долями мощности n и m и множеством (0,1)-матриц размера $n \times m$.

Максимальное число единиц, никакие две из которых не стоят в одной строке или столбце равно $\alpha_1(G)$ для соотв. графа G .

Минимальное число строк и столбцов, содержащих единицы равно $\beta_0(G)$ для соотв. графа G . □

30 Терема Холла о паросочетаниях.

Пусть $G = (A, B, E)$ - двудольный граф.

В G существует паросочетание, покр. $A \Leftrightarrow \forall X \subseteq A \quad |N(X)| \geq |X|$

Доказательство.

$\Rightarrow)$ Если существует $X \subseteq A : |N(X)| < |X|$, тогда паросоч., покр. X не существует: не хватит рёбер.
А значит нет паросч., покрывающего A .

$\Leftarrow)$ Док-во индукцией по числу вершин в доле A :

Если $|A| = 1$ - очевидно верно

Пусть $|A| \geq 2$. Рассмотрим 2 случая:

1. $\forall X \subset A \quad |X| < |N(X)|$

Выберем ребро $uv \in E \quad v \in A, u \in B$.

Рассмотрим новый граф $G' = G - v - u$. Обозначим $A' = A \setminus \{v\}$.

Пусть $X \subseteq A'$. $|X| < |N_G(X)|$, $|N_{G'}(X)| \geq |N_G(X)| - 1$ (-1 на случай, если y входит в $N(X)$)
 $|X| < |N_{G'}(X)| + 1 \Rightarrow |X| \leq |N_{G'}(X)|$.

По индукционному предположению в графу G' существуют паросчитания, покрывающие $A' \Rightarrow$ объединим его с ребром $vu \Rightarrow$ получаем паросчитание в G покр. A .

2. $\exists A' \subset A \quad |A'| = |N(A')|$

Рассмотрим 2 порождённых подграфа:

$G_1 = G[A' \cup N(A')]$

$G_2 = G - A' - N_G(A')$

Покажем, что G_1 и G_2 удовлетворяют условиям теоремы.

В G_1 : $\forall X \subseteq A' \quad N_G(X) = N_{G'}(X)$

$|X| \leq |N_G(X)| = |N_{G'}(X)| \Rightarrow G_1$ удовлетворяет условию теоремы.

Пусть $X \subseteq A \setminus A'$. Рассмотрим $X \cup A'$ в G .

$|X \cup A'| \leq |N_G(X \cup A')| \leq |N_{G_2}(X)| + |N_G(A')|$

Вспоминаем, что $|A' \cup X| = |X| + |A'|$

$|A'| = |N_G(A')| \Rightarrow |X| \leq |N_{G_2}(X)|$

По индукционному предположению в G_1 существует паросоч., покрывающ. A' , в G_2 существует паросоч., покрывающ. $A \setminus A'$. Следовательно, их объединение - искомое паросоч., покр. A . □

31 Теорема Фробениуса о свадьбах. Системы различных представителей, теорема Холла о СРП.

31.1 Теорема Фробениуса о свадьбах.

Двудольный граф $G = (A, B, E)$ имеет совершенное паросочетание $\Leftrightarrow |A| = |B|$ и для любого $X \subseteq A$ $|N_G(X)| \geq |X|$.

Доказательство:

В G \exists совершенное паросочетание $\Leftrightarrow |A| = |B|$ и \exists паросочетание покр. A \Leftrightarrow
 $|A| = |B|$ и $\forall X \subseteq A$ $|N(X)| \leq |X|$
□

31.2 Системы различных представителей

$A = \{a_1, \dots, a_m\}$ — некоторое множество

$S = \{S_1, \dots, S_n\}; S_i \subseteq A \quad \forall i$; — семейство подмножеств множества A

$x = (x_1, \dots, x_n)$ — система различных представителей для S если:

- 1) $x_i \in S_i \quad \forall i$;
- 2) $x_i \neq x_j; \quad i \neq j$

31.3 теорема Холла о СРП.

$S = (S_1, \dots, S_n)$ имеет СРП $\Leftrightarrow \forall k; \quad 1 \leq k \leq n \quad \forall \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\} \quad |S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}| \leq k$

Доказательство:

\Rightarrow) Если посмотреть на определение, станет очевидно.

\Leftarrow) Рассмотрим граф $G = (A, B, E)$

$A = \{S_1, \dots, S_n\}$

$B = \{a_1, \dots, a_m\}$

$E = \{a_i S_j | a_i \in S_j\}$

Когда \exists паросочетание покрывающее A ?

(по т. Холла) когда $\forall X \subseteq A \quad |N_G(X)| \leq |X| = k$

$|N_G(X)| = |S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}|$

Это условие выполняется $\Rightarrow \exists$ паросочетание покр. $A \Rightarrow$ существующее паросочетание определяет СРП

□

32 Теорема об увеличивающей цепи. Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

32.1 Определения

G — граф; M — паросочетание

цепь x_1, \dots, x_t — M -чередующаяся $\Leftrightarrow x_i x_{i+1} \in M \Leftrightarrow x_{i+1} x_{i+2} \notin M \quad \forall i$

M -чередующаяся цепь x_0, \dots, x_t — M -увеличивающаяся, если x_0 и x_t не покрыты рёбрами из M

32.2 Теорема об увеличивающей цепи.

M — паросочетание в G

M — наибольшее \Leftrightarrow в G нет M -увеличивающей цепи

Доказательство:

\Rightarrow) Пусть в G существует M -увелич. цепь P . Тогда рассмотрим $M' = (M \setminus EP) \cup (EP \setminus M)$ – паросочетание (очевидно)

$|M'| = |M| + 1$ – противоречие с тем, что M наибольшее.

\Leftarrow) Рассмотрим M' – пусть это наибольшее паросочетание в G .

$G' = G[(M \setminus M') \cup (M' \setminus M)]$

$\forall v \in G' \ deg_{G'}(v) \leq 2 \Rightarrow$ каждая компонента связности графа G' – цикл или цепь.

Если в какой-то компоненте связности \exists цепь, в которой рёбер 1-го паросочетания больше рёбер другого

$\Rightarrow \exists$ либо M -увеличивающая цепь (противореч. с нач. усл.), либо $\exists M'$ -увеличивающая цепь (противореч. с M' -наиб.)

$\Rightarrow |M| = |M'| \Rightarrow M$ – наибольшее паросочетание

□

32.3 Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

$G = (A, B, E)$

1. M – паросочетание
2. $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$ – множества непокрытых M вершин; Организуем максимальный лес F в G :
 - (a) $\forall b \in (VF \cap B) \ deg_F(b) = 2$ и одно из этих 2-х рёбер из M
 - (b) \forall компонента связности леса F содержит ровно 1-ну вершину из A_1 . Добавим все оставшиеся вершины из A_1 в качестве одновершинных компонент связности графа F
3. Если \exists ребро между вершинами из B_1 и VF , то есть M -увеличивающая цепь начинающаяся с этого ребра. по пункту 32.2 строим новое паросочетание большей мощности и переходим на шаг 2)
4. Если нет ребра, то M – наибольшее паросочетание

33 Эйлеров цикл, эйлеров граф. Теорема Эйлера. Алгоритм Флёри.

33.1 Эйлеров цикл, эйлеров граф.

Цикл, содержащий все рёбра графа – эйлеров.

Граф, в котором есть эйлеров цикл – эйлеров

33.2 Теорема Эйлера.

Для связного графа порядка $n \leq 2$ следующие условия эквивалентны:

1. G – эйлеров
2. $\forall v \in VG \ deg v$ – чётна
3. Множество рёбер можно разбить на циклы.

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$) Эйлеров цикл проходит через \forall вершину v k раз и содержит все рёбра $\Rightarrow deg_G(v) = 2k$

$2 \Rightarrow 3$) все вершины чётные \Rightarrow нет висячих вершин $\Rightarrow G$ – не дерево \Rightarrow в нём есть циклы

Пусть G_1 – максимальный подграф графа G , удовлетворяющий условию 3. Очевидно, что все вершины в нём имеют чётную степень.

$$G_2 = G - EG_1$$

в G_2 все вершины имеют чётную степень (т.к. чёт–чёт=чёт).

Если G_2 пуст, то всё доказали, иначе в нём есть ребра.

Очевидно, что он не дерево, а значит в нём есть цикл. Противоречие с максимальностью G_1 .

$3 \Rightarrow 1$) Рассмотрим разбиение ребер графа G на наименьшее число циклов: c_1, \dots, c_s .

Покажем, что $s = 1$:

Пусть не так ($s > 1$). $\Rightarrow \exists i \neq j \mid c_i$ и c_j имеют общую вершину, но не имеют общих ребер. Склейм их в один цикл. Противоречие с выбором наименьшего числа циклов $\Rightarrow s = 1$. Это и есть Эйлеров цикл.

□

33.3 Алгоритм Флёри.

Нахождение эйлерова цикла

0. выбираем произвольную вершину δ в графе G ; $G' = G$

1. Выбираем ребро e в графе G' инцидентное δ и не мост (если это возможно).

$G' = G' - e$ и переходим во второй конец e

34 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф. Теорема Оре. Теорема Дирака.

34.1 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф.

Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется **Гамильтоновым циклом**.

Граф, содержащий Гамильтонов цикл, называется **Гамильтоновым**.

34.2 Теорема Оре.

Если для любых двух несмежных вершин v , u верно $\deg(v) + \deg(u) \leq |VG|$, то G – гамильтонов.

Доказательство теоремы:

Утверждение:

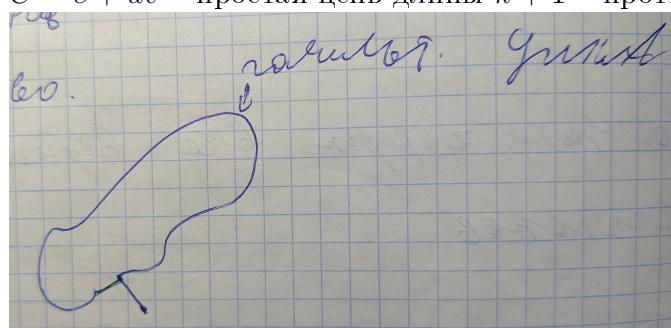
Если в связном графе длина максимальной простой цепи равна k и в нём существует простой цикл длины $k+1$, то этот простой цикл является гамильтоновым.

Доказательство утверждения:

Рассмотрим наш цикл C_{k+1} . Если C – не гамильтонов, G – связный $\Rightarrow \exists u, v: u \in C, v \notin C, uv \in EG$.

Пусть $e \in C$, e инцидентно u .

$C - e + uv$ – простая цепь длины $k+1$ – противоречие с максимальной длиной цепи.



□

Вернёмся к доказательству теоремы

Рассмотрим самую длинную просущую цепь в графе G

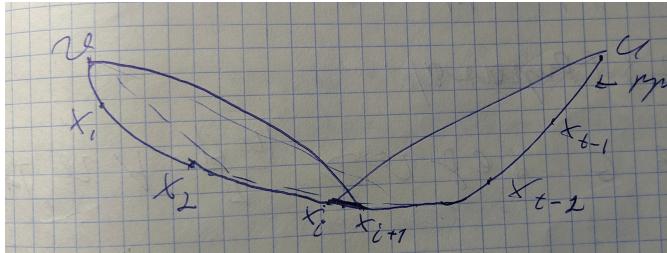
$$v = x_0, \dots, x_t = u$$

Если $ub \in EG$, то получим цикл длины $t + 1$ и он гамильтонов по утверждению

Если $ub \notin EG$

Знаем что $\deg(u) + \deg(v) \geq |VG|$

Необходимо доказать что возможна ситуация как на изображении:



А именно: $\exists x_i, x_{i+1}$ т.ч. x_i — смежна с u и x_{i+1} смежна с v

Поскольку наша цепь длиннейшая, то все вершины, смежные с v и смежные с u лежат на этой цепи

$$I = \{i | x_i v \in EG, 2 \leq i \leq t - 1\}$$

$$|I| = \deg(v) - 1$$

$$Y = \{j | x_{j-1} u \in EG, 2 \leq j \leq t - 1\}$$

$$|Y| = \deg(u) - 1$$

$$|Y \cup I| \leq t - 2$$

$$|Y| + |I| = \deg(v) + \deg(u) - 2 \geq |VG| - 2 \geq t + 1 - 2 = t - 1$$

$$\text{т.е. } |Y \cup I| < |I| + |Y| \Rightarrow Y \cap I \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\exists i: vx_i, ux_{i-1} \in EG$$

Удаляем из цепи ребро между x_{i-1} и x_i , добавляем рёбра vx_i, ux_{i-1} и получаем цикл длины $t + 1$

Согласно утверждению, этот цикл является гамильтоновым.

□

35 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф. Теорема Хватала-Эрдеша

35.1 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф.

Простой цикл, содержащий все вершины графа — гамильтонов

Граф, содержащий гамильтонов цикл — гамильтонов

35.2 Теорема Хватала-Эрдеша

Пусть G — связный граф порядка $n \geq 3$. Если $\alpha(G) \geq \alpha_0(G)$, то G — гамильтонов

Доказательство:

Если G нет циклов, то G — дерево $\xrightarrow{n \geq 3} \alpha(G) = 1; \alpha_0(G) \geq 2$. Противоречие. \Rightarrow в G есть циклы

Пусть C — самый длинный простой цикл

Если $VC = VG$ — □

Если $VG \setminus VC \neq \emptyset$

Рассмотрим $G' = G - VC$

Пусть H — компонента связности G'

$$N_G(H) = \{x \in VG \setminus VH | \exists y \in H : xy \in EG\}$$

$$N_G(H) \subseteq C$$

(*) Все вершины из $N_G(H)$ — попарно несмежные по циклу (иначе, есть простой цикл большей длины)

$G - N_G(H)$ — несвязный граф (поскольку есть компонента H и остальное)

↓

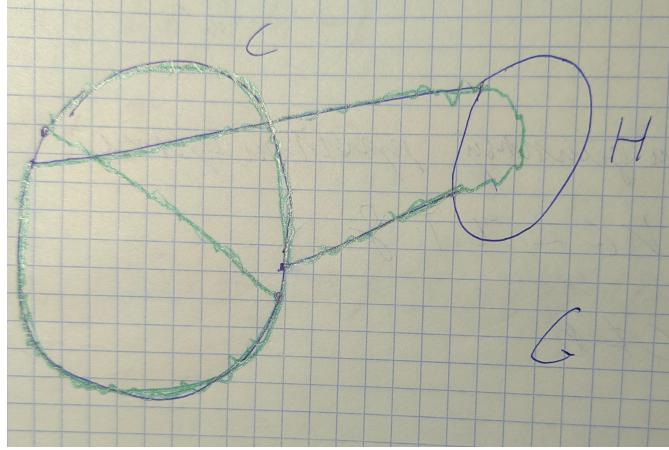
$$\alpha(G) \leq |N_H(H)|$$

S — множество правых соседей по циклу C вершин из $N_G(H)$

$$|S| = |N_G(H)|$$

Покажем что S — независимое множество в G

Допустим что нет \Rightarrow есть ребро между двумя вершинами из $S \Rightarrow$ есть более длинный цикл (см. рисунок)



$(*) \Rightarrow S \cap N_G(H) = \emptyset$ (иначе бы какая-то вершина из $N_G(H)$ являлась бы соседом др. вершине из $N_G(H)$ по циклу) $\Rightarrow S \cup \{x\}$ — независимое множество $\Rightarrow \alpha_0(G) \geq |S \cup \{x\}| = |N_G(H)| + 1 \geq \alpha(G) + 1$

Противоречие с условием теоремы

□

36 Укладка графа в пространство. Планарный граф, плоский граф, укладка на сфере.

36.1 Укладка графа в пространство.

Граф G укладывается в про-во α , если он изоморфен некоторому графу, вершинами которого являются точки этого пространства, а рёбра — кривые без самопересечений, соединяющие соответствующие вершины, при чём выполнены след. усл.:

1. кривая-ребро не содержит др. вершин графа кроме своих концов.
2. 2 кривые-ребра пересекаются только в вершине инцидентной обоим рёбрам

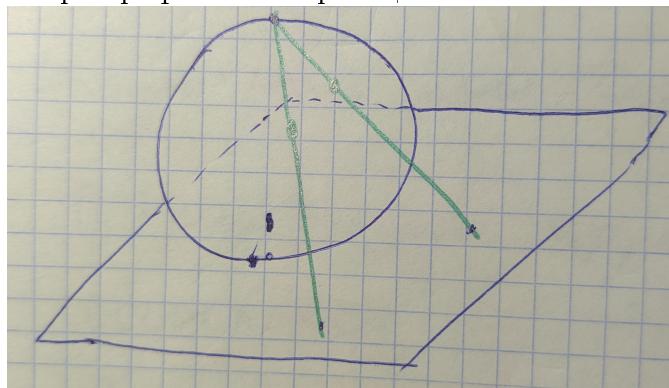
36.2 Планарный граф, плоский граф, укладка на сфере.

Граф укладывающийся на плоскость — планарный
Укладка планарного графа на плоскость — плоский граф

Граф укладывается на плоскость \Leftrightarrow он планарный

Доказательство:

Стереографическая проекция



□

37 Формула Эйлера. Непланарность K_5 и $K_{3,3}$. Критерии планарности.

37.1 Формула Эйлера.

G — связный плоский граф (n, m) -граф с f гранями, тогда $n - m + f = 2$

Доказательство:

Рассмотрим оствное дерево T для G

В T n вершин, $n - 1$ ребро, 1 грань

$$n - (n - 1) + 1 = 2$$

т.е. ф-ла верна

Добавление ребра грань на 2 грани

+1 к грани и граням \Rightarrow ф-лы остаётся верной

т.о. мы можем прийти к графу G и сохранить ф-лу

□

37.2 Непланарность K_5 и $K_{3,3}$.

K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

Доказательство:

1) Непланарность K_5

Для \forall связного планарного (n, m) -графа имеет место неравенство:

$$m \leqslant 3n - 6$$

Для K_5 $m = 10, n = 5$

$10 \leqslant 3 * 5 - 6$ неверно

2) Непланарность $K_{3,3}$

Для $K_{3,3}$ $n = 6; m = 9$

Для связного планарного **двудольного** графа имеет место неравенство:

$$m \leqslant 2n - 4$$

$9 \leqslant 2 * 6 - 4$ неверно

□

37.3 Критерии планарности.

37.3.1 Критерий планарности Понtryгина-Куратовского

Граф планарен \Leftrightarrow в нём нет подграфа гомеоморфного к K_5 или $K_{3,3}$

Доказательство:

\Rightarrow) G — планарен $\Rightarrow \forall$ его подграф планарен \forall гомеоморфные графы для \forall подграфа планарны $\Rightarrow K_5$ и $K_{3,3}$ не могут быть гомеоморфны подграфу

\Leftarrow) б/д

□

37.3.2 Критерий планарности Вагнера

Граф планарен \Leftrightarrow в нём нет подграфа стягиваемого к K_5 или $K_{3,3}$

Доказательство:

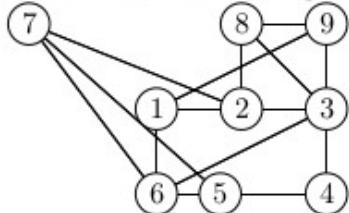
Аналогично критерию Понtryгина-Куратовского

□

38 Алгоритм укладки графа на плоскость.

3.1.4 Алгоритм укладки графа на плоскость

На каждом шаге укладка цепи и образование новой грани. Работает только для двусвязных графов, без вариантов. Возьмём для примера граф:



Сегмент S относительно графа \tilde{G} – подграф графа G одного из видов:

1. ребро $e = uv \in EG : e \notin \tilde{G}, u, v \in V\tilde{G}$
2. каждая компонента связности графа $G - \tilde{G}$, дополненная всеми рёбрами, связывающими \tilde{G} с этой компонентой.

Если G – планарен, следовательно каждый сегмент планарен.

Вершины сегмента S относительно \tilde{G} , принадлежащие \tilde{G} – **контактные** вершины.

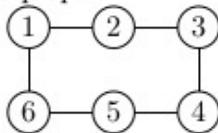
G – двусвязный, следовательно каждый сегмент имеет не менее двух контактных вершин.

У \tilde{G} есть грани. Допустимой гранью для сегмента S относительно \tilde{G} называется грань Γ графа \tilde{G} , содержащая все контактные вершины графа S . Мн-во всех допустимых граней для S : $\Gamma(S)$.

Простую цепь сегмента S , соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин называют **α -цепь**.

3.1.5 Собственно, сам алгоритм

шаг 0. В G выбираем простой цикл C и укладываем на плоскость $\tilde{G} = C$. Напр., для приведённого выше графа:



шаг 1. Берём все грани и сегменты относительно \tilde{G} . Если мн-во сегментов пусто, переходим к 7.

шаг 2. Для каждого сегмента S определим $\Gamma(S)$:

3 Если $\exists S : \Gamma(S) = \emptyset \Rightarrow G$ – не планарный. Идём к шагу 4.

4 Если $\exists S : |\Gamma(S)| = 1 \Rightarrow$ шаг 6. Иначе 5.

5 Для некоторого сегмента S выбираем произвольную допустимую грань Γ .

6 Помещаем α -цепь $L \in S$ в грань $\Gamma\tilde{G}$ на $\tilde{G} \cup L$. К шагу 1.

7 Построена укладка \tilde{G} – укладка G .

3.1.6 Основание?

Два сегмента S_1 и S_2 называются **конфликтующими**, если:

1. $\Theta = \Gamma(S_1) \cap \Gamma(S_2) \neq \emptyset$.
2. Существуют 2 α -цепи $L_1 \in S_1$ и $L_2 \in S_2$. Нельзя одновременно уложить ни в какую грань $\Gamma \in \Theta$.

Пример конфликтующих сегментов: 

3.1.7 Лемма 33

Если S_1 и S_2 конфликтуют, $|\Gamma(S_1)| \geq 2$, $|\Gamma(S_2)| \geq 2$, тогда $\Gamma(S_1) = \Gamma(S_2)$ и $|\Gamma(S_1)| = 2$.

Доказательство.

Докажем, что $\Gamma(S_1) = \Gamma(S_2)$.

Пусть нет, тогда существует 3 различных грани: $\Gamma_1 \in \Gamma(S_1)$, $\Gamma_2 \in \Gamma(S_2)$, $\Gamma_3 \in (\Gamma(S_1) \cap \Gamma(S_2))$.

Каждую α -цепь L_1 сегмента S_1 можно уложить в Γ_1 . Каждую α -цепь L_2 сегмента S_2 можно уложить в Γ_2 .

Следовательно каждую пару цепей $L_1 \in S_1$ и $L_2 \in S_2$ можно одновременно уложить вне грани $\Gamma_3 \Rightarrow$ внутрь грани Γ_3 противоречие с конфликтностью. \square

Построим граф сегментов $S(\tilde{G})$: $VS(\tilde{G})$ и две вершинки смежны, если сегменты конфликтуют.

Частичной укладкой планарного графа G называется такой граф, который можно получить из укладки графа G на плоскость удалением некоторых вершин.

3.1.8 Лемма 34

Если после очередного шага алгоритма получили частичную укладку \tilde{G} планарного графа G такую, что $\forall S \quad |\Gamma(S)| \geq 2$, то $S(\tilde{G})$ – двудольный.

Доказательство.

От противного. По критерию двудольности в $S(\tilde{G})$ есть цикл нечётной длины S_1, \dots, S_r, S_1 .

По лемме 33: $\forall i = 1, \dots, r \quad \Gamma(S_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$.

\tilde{G} – частичная укладка \Rightarrow все сегменты могут быть уложены в Γ_1 или в Γ_2 .

S_1 и S_r укладываются в Γ_1 и Γ_2 по очереди \Rightarrow противоречие с нечётной длиной цикла. \square

3.1.9 Теорема 37

Если G – планарный, то результатом каждого шага алгоритма является частичная укладка \tilde{G} графа G .

Доказательство.

инд. по числу шагов:

Шаг 0 – укладка цикла

...

...

Шаг n – \tilde{G} – частичная укладка; если $\exists \Gamma(S) = \emptyset \Rightarrow G$ не планарен

Если $\exists S : |\Gamma(S)| = 1$

В исходной укладке G S уложен в $\Gamma : \Gamma(S) = \{\Gamma\}$

\Rightarrow укладка α -цепи из S в $\Gamma \Rightarrow$ получим частичную укладку

Теперь пусть $\Gamma(S) \geq 2 \forall S$

Рассм. $S(\tilde{G})$ – он двудольный. Берём произвольную вершину S . Если S изолированная вершина, то S ни с кем не конфликтует \Rightarrow укладка α -цепи из S не мешает частичной укладке \Rightarrow всё хорошо

Если S не изолированная вершина $\Rightarrow S$ лежит в непустой компоненте связности графа $S(\tilde{G})$. В этой

к.с. все сегменты содержат 2 одинаковые грани.

S_1, \dots, S_t — вершины этой к.с.

По лемме 33 $\forall i \Gamma(S) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$

По лемме 34 $S(\tilde{G})$ — двудольный

И получается в исходной укладке G на плоскость сегменты из 1-ой доли уложены в Γ_1 , из др. доли в Γ_2

И если в ней поменять местами Γ_1 и Γ_2 то получим укладку G на плоскости

□

39 Правильная раскраска вершин графа. Верхние оценки хроматического числа. Теорема Брукса

39.1 Правильная раскраска вершин графа.

$G = (V, E)$

$\varphi : V \rightarrow \{c_1, \dots, c_t\}$ — раскраска вершин разбиения $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_t$; V_i — мн-во вершин цвета c_i

Раскраска φ правильная, если:

$xy \in E \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \forall i \quad V_i$ — независимое мн-во

39.2 Верхние оценки хроматического числа.

39.2.1 Оценка 1

G — (n, m) -граф $\Rightarrow \chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$

Доказательство:

\forall пары цветов \exists ребро на концах которого вершины этих цветов (из леммы о том, что в правильной раскраске для \forall цвета \exists вершина этого цвета, в окружении которой есть вершины всех остальных цветов) $\Rightarrow m \geq \binom{\chi(G)}{2}$

□

39.2.2 Оценка 2

$X(G) \leq \Delta(G) + 1$ ($\Delta(G)$ — максимальная степень графа G).

Доказательство.

Индукция по кол-ву вершин графа G :

G — граф порядка $n \geq 2$, $v \in VG$.

$G' = G - v$. По индукционному предположению $X(G') \leq \Delta(G) + 1$.

$\deg(v) \leq \Delta(G) \Rightarrow$ в окр. v не использовали какой-то цвет, окрасим её в этот цвет $\Rightarrow X(G) \leq \Delta(G) + 1$.

□

39.3 Теорема Брукса

\forall связного графа, не явл. $K_n, C_{2n+1} \quad \chi(G) \leq \Delta(G)$

Доказательство:

3.2.10 Теорема 38 (Брукс, 1941)

Пусть G – связный граф, не являющийся ни полным, ни циклом нечётной длины. Тогда $X(G) \leq \Delta(G)$.

3.2.11 Алгоритм последовательной раскраски

1. Упорядочим v_1, \dots, v_n – все вершины графа G .
2. $\varphi(v_1) = c_1$
3. $r = 2, \dots, n$: $v_1 \dots v_r$ – раскрашены. Берём $\varphi(v_{r+1}) = c_m$, где m – минимальный индекс цвета, которого нету в окружении вершинки v_{r+1} .

3.2.12 Лемма 43

Пусть G – двусвязный, не является ни полным, ни циклом. Тогда существует 2 вершины $u, v \in VG$, $d(v, u) = 2$. $G - u - v$ – связный.

Доказательство.

a – доминирующая вершина, если $\deg(a) = |V| - 1$.

D – множество всех доминирующих вершин графа G .

1. $D \neq \emptyset$. G – не полный $\Rightarrow VG \setminus D \neq \emptyset$.
Пусть $u, v \in VG$: $uv \notin EG \Rightarrow d(u, v) = 2 \Rightarrow G - u - v$ – связен.
2. $D = \emptyset$. По условию G – не цикл \Rightarrow в $G \exists z : \deg(z) \geq 3$.
Рассмотрим граф $G - z = G'$.
 - (a) G' – двусвязный. Т.к. $D = \emptyset \Rightarrow \exists v : d(v, z) = 2$. Полагаем $u = z$. v, u – искомые.
 - (b) G' имеет точки сочленения. \Rightarrow существует два висячих блока B_1 и B_2 .
 $\exists u \in B_1$: не точка сочленения и смежная с z в G , иначе т. сочленения блока B_1 явл. т. сочленения, но G – двусвязен.
Аналогично $\exists v \in B_2$ – не точка сочленения и смежная с z в G .
 $G' - u - v$ – связен $\Rightarrow G - u - v$ – связен?.

3.2.13 Лемма 44

Пусть G – связный, n -вершинный граф. $w \in VG$.

Тогда вершины графа G можно упорядочить так, чтобы w_1, w, w_2, \dots, w_n , что любая вершинка w_i , $i \geq 2$ смежна по крайней мере с одной вершиной с меньшим номером.

Доказательство т. Бруssa.

1. G - двусвязный, без циклов, $|V| = n$. По л. 43 $\exists u, v : d(u, v) = 2$ $G - u - v$ – связный.

По лемме 44 вершины графа $G - u - v$ можно упорядочить так, что w, \dots, w_{n-1}

$\forall i, 2 \leq i \leq n-2$, w_i смежна с вершиной с меньшим номером.

Упорядочим вершины графа G : $u, v, w_{n-2}, \dots, w_1 = w$ и применим алгоритм последовательной раскраски $\varphi(u) = \varphi(v) = c_1$.

Пусть уже покрашены $u, v, w_{n-2} \dots, w_{s+1}$ в $\Delta(G)$ цветов.

w_s смежна с вершиной с меньшим номером - не покрашенные вершины \Rightarrow в окружении w_s используется

не более $\Delta(G) - 1$ цветов \Rightarrow покрасим её в один из $\Delta(G)$ цветов.

$w_1 = w$ – смежна с v и u : $\varphi(v) = \varphi(u)$.

2. Пусть $\Delta = \Delta(G)$, G – не связен. Покажем, что любой блок графа G является Δ -раскрашиваем.

- (a) Блок является K_m \Rightarrow точка сочленения этого блока имеет степень не меньше $m \leq \Delta$. Но K_m m -раскрашиваем \Rightarrow он является Δ -раскрашиваем.
- (b) Блок является циклом. Точка сочленения этого блока имеет степень не меньше 3. Цикл 3-раскрашиваем \Rightarrow Δ -раскрашиваем.
- (c) Блок не полный и не цикл \Rightarrow по доказанному.

□

40 Правильная раскраска вершин графа. Нижние оценки хроматического числа. Теорема о существовании графов без треугольников с большим хроматическим числом.

40.1 Правильная раскраска вершин графа.

$$G = (V, E)$$

$\varphi : V \rightarrow \{c_1, \dots, c_t\}$ – раскраска вершин разбиения $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_t$; V_i – мн-во вершин цвета c_i

Раскраска φ правильная, если:

$xy \in E \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \forall i \quad V_i$ – независимое мн-во

40.2 Нижние оценки хроматического числа.

$$1) \chi(G) = \chi$$

$$G = (V, E)$$

$$V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi$$

V_i – независимое мн-во $\forall i$

$$|V_i| < \alpha_0(G) \quad \forall i$$

$$|VG| = \sum |V_i| \leq \alpha_0(G) * \chi(G)$$

↓

$$\chi(G) \geq \frac{|VG|}{\alpha_0(G)}$$

2) $\chi(G) \geq \alpha_0(\bar{G})$

3) $\chi(G) \geq t$

t — мощность наиб. клики в G

40.3 Теорема о существовании графов без треугольников с большим хроматическим числом.

3.2.14 Теорема 39 (Зыкова, 1949)

Существуют графы без треугольников с произвольно большим хроматическим числом.

3.2.15 Лемма 45

Любой минимальной, правильной раскраске графа G для любого цвета c_i существуют вершины этого цвета, смежные с вершинами всех остальных цветов.

Доказательство т. Зыкова.

Построим последовательность графов $G_2 \dots G_i \dots$, так, что:

1. G_i без треугольников.

2. $X(G_i) = i$

$G_2 = K_2$

Пусть G_i построено, $VG_i = \{v_1 \dots v_n\}$. Построим G_{i+1} :

$VG_{i+1} = VG_i \cup V' \cup \{v\}$, где $V' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$, $VG_i \cap V' = \emptyset$.

$v \notin VG_i \cup V'$.

Определяем мно-во рёбер: на вершинках VG_i строим граф G_i .

Любую вершинку $v'_i \in V'$ соединяем со всеми вершинами из VG_i , смежными с v_i . v смежна со всеми вершинами из V' . Имеем: G_i — без тре-ов и $X(G_i) = i$. Докажем, что G_{i+1} без треугольников.

Пусть в G_{i+1} есть треугольник. Тогда $a, b, c : a, b \in VG_i, c \in V'$ (единственный вариант, который остался). Но $c = v'_j \Rightarrow a, b, v_j$ — треугольник. Противоречие.

Рассмотрим теперь хроматическое число.

G_{i+1} в $i + 1$. $G_i - i$ - раскр. φ, φ' графа G_{i+1} : \forall верш. из $V'G$.

Почему нельзя меньше? Пусть G_{i+1} правильно раскрашен в i цветов. Но $X(G_i) = i \Rightarrow$ эта раскраска порождает правильную минимальную раскраску графа G_i . Тогда по лемме 45 есть вершина, смежная с вершинами всех остальных цветов, тогда её дубликат раскрашен в тот же цвет, следовательно в V' существуют вершины всех цветов, а значит для вершины v нет цвета.

Следовательно, $X(G_{i+1}) = i + 1$. □

41 Раскраски планарных графов. Теорема о четырех красках. Теорема Хивуда.

41.1 Теорема о четырех красках.

\forall планарный граф 4-раскрашиваем

Доказательство:

б/д

□

41.2 Теорема Хивуда.

\forall планарный граф 5-раскрашиваем

Доказательство:

Индукция по числу вершин $n = |VG|$

При $n \leq 5$ теор. верна

переход

G — планарный граф на $n > 5$ вершинах

В G \exists вершина x т.ч. $\deg x \leq 5$ (иначе, в графе был бы подграф $K_{3,3}$)

$G' = G - x$; по инд. предположению \exists прав. раскр. φ в 5 цветов

Возвращаем вершину x

Если $\deg x < 5$, то всё хорошо, перекрашиваем в свободный цвет

Если $\deg x = 5$ и в окр. x есть одинаковые цвета, то всё хорошо

Если $\deg x = 5$ и в окр. x есть все 5 цветов

c_i, c_j — 2 цвета. рассмотрим вершины этих цветов

$G_{i,j}$ — подграф графа G порождённый вершинами c_i и c_j

Рассмотрим $G_{1,3}$. Если y_1 и y_3 в разных к. с. $G_{1,3}$, то 1 к. с. графа $G_{1,3}$ перекрашиваем и освобождаем цвет для x

Если y_1 и y_3 в одной к.с. графа $G_{1,3}$, то $\exists (y_1, y_3)$ -цепь из вершин цвета c_1 и c_3 . Тогда рассмотрим вершины y_2 и y_4 . Они в разных к.с. графа $G_{2,4}$ т.к. график G плоский и (y_2, y_4) -цепь должна пересекать (y_1, y_3) -цепь

□

42 Правильная раскраска ребер графа. Хроматический индекс. Теорема Кёнига о хроматическом индексе двудольных графов.

42.1 Правильная раскраска ребер графа.

$\varphi : EG \rightarrow \{c_1, \dots, c_t\}$ — раскраска рёбер в t цветов

φ — правильная рёберная раскраска, если e и h смежны $\Rightarrow \varphi(e) \neq \varphi(h)$

42.2 Хроматический индекс.

G — рёберно t -хроматический, если G рёберно t -раскрашиваемый и не является рёберно $(t-1)$ -раскрашиваемым.

G — рёберно t -хроматический $\Rightarrow t$ — рёберное хроматическое число (хроматический индекс) $\chi'(G)$

42.3 Теорема Кёнига о хроматическом индексе двудольных графов.

Всегда для двудольного графа G : $\chi'(G) = \Delta(G)$

Доказательство. Индукцией по числу ребер q при заданном числе вершин p построим раскраску ребер двудольного графа G в $\Delta(G)$ цветов из $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$.

Базис индукции: $q = 0$ верен.

Индуктивный переход. Рассмотрим двудольный граф $G = (V, E)$, в котором $|V| = p$, $|E| = q + 1 \geq 1$.

Пусть $e = (u, w) \in E$ — произвольное ребро графа G .

Рассмотрим граф $G' = G - e$. Граф G' является двудольным, содержит p вершин и q ребер. Значит, для него верно предположение индукции.

Окрасим ребра графа G' в $\Delta(G') \leq \Delta(G)$ цветов из множества C .

1. Если найдется цвет $i \in C$, одновременно отсутствующий среди ребер из вершин u, w графа G' , то припишем ребру (u, w) графа G цвет i .

2. Иначе заметим, что найдется некоторый цвет $i \in C$, отсутствующий среди ребер из вершины u , и некоторый цвет $j \in C$, отсутствующий среди ребер из вершины w , $i \neq j$, т. к. $d_{G'}(u) \leq \Delta(G) - 1$, $d_{G'}(w) \leq \Delta(G) - 1$.

Рассмотрим неудлиняемую цепь P с ребрами чередующихся цветов i и j , начинающуюся из вершины w .

Эта цепь не может достигнуть вершины u . В самом деле, если цепь P приходит в вершину u , то в графе G существует цикл $C = u(u, w)wPw$ нечетной длины, чего не может быть.

Перекрасим на цепи P ребра: цвет i заменим на цвет j , цвет j заменим на цвет i .

Затем припишем ребру (u, w) в графе G цвет i .

□

43 Теорема Визинга о хроматическом индексе графа (без доказательства). Хроматический индекс полного графа.

43.1 Теорема Визинга о хроматическом индексе графа (без доказательства).

Всегда для графа G : $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

43.2 Хроматический индекс полного графа.

Справедливы равенства $\chi'(K_n) = n$, если n — нечетное число,
 $\chi'(K_n) = n - 1$, если n — четное число.

Доказательство.

1. Пусть n — нечетное число. Предположим, что $\chi'(K_n) = n - 1$. Тогда из каждой вершины графа K_n исходит ровно одно ребро каждого цвета.

Поэтому число ребер одного цвета равно $n/2$, т. к. каждое ребро имеет два конца.

Но n — нечетное число, получаем противоречие.

Получим раскраску ребер графа K_n в n цветов

$C = \{1, 2, \dots, n\}$: ребро (i, j) графа K_n , где $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ окрасим в цвет $((i + j)(\text{mod } n)) + 1$.

2. Пусть n — четное число. Удалим из графа K_n произвольную вершину v и раскрасим ребра оставшегося графа K_{n-1} в $(n - 1)$ цветов.

Рассмотрим в этом графе K_{n-1} все ребра одного цвета i . Их концами являются $(n - 2)$ вершины, т. к. $(n - 1)$ — нечетное число. Поэтому в этом графе K_{n-1} найдется некоторая вершина v_i , из которой не исходит ребро цвета i . Окрасим в исходном графе K_n ребро (v, v_i) в цвет i .

Т. к. в каждой вершине графа K_{n-1} отсутствует ребро только одного цвета, все ребра графа K_n , исходящие из вершины v , окрасим в разные цвета.

□

44 Теорема Рамсея для графов.

3.4.6 Теорема 51 (Рамсея для графов)

$\forall p, q \quad p \geq 2, q \geq 2 \quad \exists$ минимальное число $N(p, q) : \quad \forall n \geq N(p, q), \forall$ раскраси ребёр графа K_n в два цвета c_1 и c_2 выполнено хотя бы одно из двух условий:

1. \exists монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на p вершинах.
2. \exists монохроматический порождённый подграф цвета c_2 на q вершинах.

$N(p, q)$ – **число Рамсея** для графов.

3.4.7 Лемма 48

$\forall p, q \geq 2$ верны:

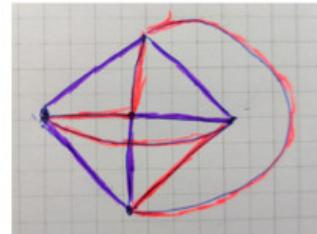
1. $N(2, q) = q$
2. $N(p, 2) = p$
3. $N(3, 3) = 6$.

Доказательство.

1, 2 – упражнение.

3. Докажем (1) $N(3, 3) > 5$ и (2) $N(3, 3) \leq 6$.

1. привести пример раскраски ребёр K_5 , где нет монохроматических тре-ков.
2. рассмотрим произвольную раскраску ребёр графа K_6 , $x \in VK_6$.
Есть 3 ребра, инцидентных x и раскрашенных в один цвет.



□

Доказательство (Теорема Рамсея).

Индукция по $m = p + q$. Докажем неравенство $N(p, q) \leq N(p - 1, q) + N(p, q - 1)$, $\forall p > 2, q > 2$. Сама индукция доказывает граничность числа $N(p, q)$.

База индукции: $N(p, 2) = p$, $N(2, q) = q$ (лемма 48).

$n = N(p - 1, q) + N(p, q - 1)$. Надо доказать, что для K_n выполнено условие теоремы.

Пусть φ – произвольная раскраска рёбра графа K_n в два цвета c_1 и c_2 .

$x \in VK_n$. $V_1 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_1\}$, $V_2 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_2\}$. $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$.

$n_1 + n_2 + 1 = n = N(p - 1, q) + N(p, q - 1)$ (возможно, числа чётные?) \Rightarrow выполнено одно из условий:

1. $n_1 \geq N(p - 1, q)$
2. $n_2 \geq N(p, q - 1)$

Пусть (1). Рёбра графа $G(V_1)$ раскрашены раскраской φ . По индукционному предположению выполнено хотя бы одно из условий:

1. \exists монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на $p - 1$ вершине.
2. \exists монохроматический порождённый подграф цвета c_2 на q вершинах.

Если выполняется второе, то всё доказано. А если первое???

Если первое, то добавим вершину x и получим монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на p вершинах. Иными словами, док-во чем-то похоже на док-во предыдущей леммы.

Случай (2) рассматривается аналогично.

□

45 Правильная раскраска ребер графа. Хроматический индекс. Теорема о хроматическом индексе полного графа.

45.1 Правильная раскраска ребер графа.

$\varphi : EG \rightarrow \{c_1, \dots, c_t\}$ – раскраска рёбер в t цветов

φ – правильная рёберная раскраска, если e и h смежны $\Rightarrow \varphi(e) \neq \varphi(h)$

45.2 Хроматический индекс.

G — рёберно t -хроматический, если G рёберно t -раскрашиваемый и не является рёберно $(t-1)$ -раскрашиваемым.

G — рёберно t -хроматический $\Rightarrow t$ — рёберное хроматическое число (хроматический индекс) $\chi'(G)$

45.3 Теорема о хроматическом индексе полного графа.

Справедливы равенства $\chi'(K_n) = n$, если n — нечетное число,
 $\chi'(K_n) = n - 1$, если n — четное число.

Доказательство.

1. Пусть n — нечетное число. Предположим, что $\chi'(K_n) = n - 1$.

Тогда из каждой вершины графа K_n исходит ровно одно ребро каждого цвета.

Поэтому число ребер одного цвета равно $n/2$, т. к. каждое ребро имеет два конца.

Но n — нечетное число, получаем противоречие.

Получим раскраску ребер графа K_n в n цветов

$C = \{1, 2, \dots, n\}$: ребро (i, j) графа K_n , где $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$
окрасим в цвет $((i + j)(\text{mod } n)) + 1$.

2. Пусть n — четное число. Удалим из графа K_n произвольную вершину v и раскрасим ребра оставшегося графа K_{n-1} в $(n-1)$ цветов.

Рассмотрим в этом графе K_{n-1} все ребра одного цвета i . Их концами являются $(n-2)$ вершины, т. к. $(n-1)$ — нечетное число. Поэтому в этом графе K_{n-1} найдется некоторая вершина v_i , из которой не исходит ребро цвета i . Окрасим в исходном графе K_n ребро (v, v_i) в цвет i .

Т. к. в каждой вершине графа K_{n-1} отсутствует ребро только одного цвета, все ребра графа K_n , исходящие из вершины v , окрасим в разные цвета.

□

46 Булева функция. Существенные и фиктивные переменные. Теорема о числе булевых функций, существенно зависящих от n переменных.

46.1 Булева функция.

Функция вида $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ — булева

46.2 Существенные и фиктивные переменные.

Переменная x_i функции $f(x_1, \dots, x_n)$ — существенная, если \exists набор переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ т.ч. $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_i, \dots, \alpha_n)$

иначе — фиктивная

46.3 Теорема о числе булевых функций, существенно зависящих от n переменных.

Число булевых ф-ий $f(x_1 \dots x_n)$, существенно зависящих от $x_1 \dots x_n$ равно $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$

Доказательство.

Формула включений-исключений: $|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot S_k, \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}|.$

A_i — формулы, существенно не зависящие от переменной x_i .

$$|A| = 2^{2^n}, |S_0| = |A| = 2^{2^n}.$$

$$|A_i| = 2^{2^{n-1}}, |S_1| = n \cdot 2^{2^{n-1}}.$$

$$|A_i \cap A_j| = 2^{2^{n-2}}, |S_2| = \binom{n}{2} \cdot 2^{2^{n-2}}.$$

$$\vdots \\ |S_k| = \binom{n}{k} \cdot 2^{2^{n-k}}.$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}.$$

□

47 Формула. Функция, которую реализует формула. Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности.

47.1 Формула.

Пусть $\Omega \subseteq P_2$.

- 1) Если $f \in \Omega$, то f — формула над Ω .
- 2) Если Φ_1, \dots, Φ_n — формулы над Ω , либо символьные переменные, $f(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, то $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ — формула над Ω .

47.2 Функция, которую реализует формула.

Формуле $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ над Ω сопоставим $f(x_1, \dots, x_n)$, которую реализует данная формула.

1) Если $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ совпадает с $f(x_1, \dots, x_n)$, то

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n).$$

2) Если $\Phi(x_1, \dots, x_n) = f_0(A_1, \dots, A_m)$, где A_i — символьные переменные, либо формулы над Ω , то $\Phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f_0(f_1, \dots, f_m)$, где f_i реализуется A_i .

47.3 Эквивалентные формулы.

Формулы эквивалентны, если они реализуют равные функции

47.4 Основные эквивалентности.

$x_1 \circ x_2$ — любая из ф-ций $x_1 x_2$; $x_1 \vee x_2$; $x_1 \oplus x_2$

1. $x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$

2. $x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3$

3. $(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3)$

4. $(x_1 \& x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \& (x_2 \vee x_3)$

5. $(x_1 \oplus x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \oplus (x_2 \& x_3)$

6. $\bar{x} = x$

7. $x_1 \bar{\&} x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

8. $x_1 \bar{\vee} x_2 = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2$

9. $x_1 \& (x_1 \vee x_2) = x_1$

10. $x_1 \vee (x_1 \& x_2) = x_1$

11. $x \& \bar{x} = 0$

12. $x \vee \bar{x} = 1$

13. $x \& x = x$

14. $x \vee x = x$

15. $x \oplus x = 0$

16. $x \oplus 1 = \bar{x}$

17. $x \oplus \bar{x} = 1$

18. $x \oplus 0 = x$

$$19. x \& 0 = 0$$

$$20. x \vee 0 = x$$

$$21. x \& 1 = x$$

$$22. x \vee 1 = 1$$

Доказательство:

Нарисовать таблицы для левых и правых частей

□

48 Теорема о разложении функций по переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Совершенная конъюнктивная нормальная форма. Двойственная функция. Принцип двойственности.

48.1 Теорема о разложении функций по переменным.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, $1 \leq k \leq n$

$$\text{Тогда } f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \{0,1\}^k} x_1^{\sigma_1} \cdots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n) (*)$$

Доказательство:

Если подставить конкретные значения, то в правой части останется только одна конъюнкция, и оставшаяся конъюнкция совпадёт с левой частью

□

48.2 Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

Разложение ф-ции отличной от 0 вида (*) при $k = n$ называется СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма)

48.3 Совершенная конъюнктивная нормальная форма.

Разложение вида $\bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$ – СКНФ.

48.4 Двойственная функция.

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})} \text{ – двойственная к } f.$$

48.5 Принцип двойственности.

Пусть $F(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$.

Тогда $F^*(x_1, \dots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^*(x_1, \dots, x_n))$.

49 Замкнутое, полное множества булевых функций. Теорема о полноте двух систем.

49.1 Замкнутое, полное множества булевых функций.

Пусть $\Omega \subseteq P_2$.

$[\Omega]$ (замыкание) — все функции, выражаемые формулами над Ω .

Ω замкнута, если $[\Omega] = \Omega$.

Ω полна, если $[\Omega] = P_2$.

49.2 Теорема о полноте двух систем.

$\Omega_1, \Omega_2 \subseteq P_2$

Ω_1 — полна, и $\forall \phi$ -я из Ω_1 выражается ϕ -лой над Ω_2 , тогда Ω_2 — полна

Доказательство:

$$[\Omega_1] = P_2 \quad \Omega_1 \subset [\Omega_2]$$

$$P_2 = [\Omega_1] \subseteq [[\Omega_2]] = [\Omega_2] \subseteq P_2$$

↓

$$[\Omega_2] = P_2$$

□

50 Полином Жегалкина. Теорема Жегалкина. Способы построения полинома Жегалкина.

50.1 Полином Жегалкина.

$K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_l$, где $K_i \neq K_j \ \forall i \neq j$ и K_i — монотонные элементарные конъюнкции $\forall i$ — полином Жегалкина.

50.2 Теорема Жегалкина.

Для любой БФ $f \in P_2$ $\exists!$ полином Жегалкина, реализующий эту ф-ию.

Доказательство.

существование) $\{\&, \oplus, 1\}$ – полная. $\Rightarrow f(x_1 \dots x_n) \in P_2$, то f выражается ф-лой над $\{\&, \oplus, 1\}$.

Преобразуем ее:

1. Раскроим скобки по законам дистрибутивности \oplus относительно $\&$. Получаем ф-лу $A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где A_i – ф-ла над $\{\&, 1\}$.
2. По законам $x\&x = x$, $x\&1 = x$ преобразуем все A_i в ЭМК.
3. По закону $A \oplus A = 0$ получаем полином Ж, который эквивалентен исходной ф-ле.

единственность) Кол-во БФ от n переменных $= 2^{2^n}$.

Кол-во МЭК от n переменных $x_1 \dots x_n = 2^n$.

\Rightarrow ПЖ от n переменных $= 2^{2^n}$.

Каждый полином реализует единственную ф-ию \Rightarrow для каждой ф-ии ПЖ – единственный.

□

50.3 Способы построения полинома Жегалкина.

4.3.3 3 способа построения ПЖ для ф-ии f

Введём нумерацию МЭК над мно-ом переменных $\{x_1 \dots x_n\}$.

$K \leftrightarrow$ набор $(\sigma_1 \dots \sigma_n) \mid \sigma_i = 1 \Leftrightarrow x_i$ входит в K .

Номер $K = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot 2^{n-1}$. Константа 1 имеет номер 0.

K	v	x_1	x_2
1	0	0	0
x_2	1	0	1
x_1	2	1	0
x_1x_2	3	1	1

4.3.4 Способ первый (обыкновенный, ничем не примечательный)

$f(x_1 \dots x_n)$ представим в виде СДНФ или СКНФ. По закону Де Моргана изб-ся от \vee , все отрицания заменим на $\oplus 1$. Получим ф-лу над $\{\&, \oplus, 1\}$. Далее по алгоритму из док-ва.

Пример $f(xy) = x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = \overline{x \& y} = x \& (y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus 1$.

4.3.5 Способ второй (метод неопределённых коэффициентов)

$P(x_1 \dots x_n)$ – ПЖ для $f(x_1 \dots x_n)$.

$P(x_1 \dots x_n) = C_0 \oplus C_1 K_1 \oplus C_2 K_2 \oplus \dots \oplus C_{2^n-1} K_{2^n-1}$, где K_i – ЭМК с номером i , $C_i \in \{0, 1\}$.

$(C_0 \dots C_{2^n-1})$ – набор коэффициентов в ПЖ.

$\forall \tilde{\alpha} \in \{0, 1\}^n$ сопоставим ур-ие $P(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha})$. Это система из 2^n ур-ий и 2^n неизвестных. По т. Жегалкина она имеет единственное решение.

Пример $x \rightarrow y = C_0 \oplus C_1 y \oplus C_2 x \oplus C_3 xy$.

$$\begin{cases} f(0, 0) = 1 = C_0 \\ f(0, 1) = 1 = C_0 \oplus C_1 \\ f(1, 0) = 0 = C_0 \oplus C_2 \\ f(1, 1) = 1 = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x \rightarrow y = 1 \oplus x \oplus xy$$

4.3.6 Способ третий (преобразование кортежа значений ф-ии)

$$\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1}) \Rightarrow (C_0, C_1, \dots, C_{2^n-1}) = \tilde{C}_f.$$

Если $\tilde{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1 \dots \beta_n)$, то $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \dots, \alpha_n \oplus \beta_n)$.

$\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0 \dots \alpha_{2^n-1})$ – кортеж значений ф-ии $f(x_1 \dots x_n)$.

$$\alpha_i = f(\sigma_1 \dots \sigma_n), \text{ где } (\sigma_1 \dots \sigma_n) \mid i = \sum_{k=1}^n \sigma_k \cdot 2^{n-k}.$$

Преобразованиями в \tilde{C}_f иднукцией по n :

$$n = 1. \quad \tilde{\alpha}_f = (\alpha_0 \alpha_1) \Rightarrow \tilde{C}_f = (\alpha_0, \alpha_0 + \alpha_1)$$

$$n \rightarrow n+1 \quad f(y, x_1, \dots, x_n) :$$

$$f_0(x_1 \dots x_n) := f(0, x_1 \dots x_n)$$

$$f_1(x_1 \dots x_n) := f(1, x_1 \dots x_n)$$

\tilde{C}_{f_0} и \tilde{C}_{f_1} – известны по предположению индукции, тогда $\tilde{C}_f = (\tilde{C}_{f_0} \mid \tilde{C}_{f_0} \oplus \tilde{C}_{f_1})$.

51 Основные замкнутые классы булевых функций. Предполные классы.

51.1 Основные замкнутые классы булевых функций.

$T_0 = \{f \in P_2 \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$ — сохраняющие 0.

$T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$ — сохраняющие 1.

$S = \{f \in P_2 \mid f^* = f\}$ — самодвойственные.

$L = \{f \in P_2 \mid f = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n, \alpha_i \in \{0, 1\}\}$ — линейные.

$M = \{f \in P_2 \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n) \Rightarrow f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \dots, \beta_n)\}$ — монотонные.

T_0, T_1, S, L, M — замкнуты

Доказательство:

1. $f_0, \dots, f_m \in T_0$

Рассм. $F(0, \dots, 0) = f_0(f_1(0, \dots, 0), \dots, f_m(0, \dots, 0)) = f_0(0, \dots, 0) = 0$

2. $f_0, \dots, f_m \in T_1$

Аналогично

3. $f_0, \dots, f_m \in S$

$F^*(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{принцип двойственности}}{=} f_0^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^*(x_1, \dots, x_n)) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = F(x_1, \dots, x_n)$

4. $f_0, \dots, f_m \in L$

$L = [\{\oplus, 1\}] \Rightarrow L$ замкнуто

5. $f_0, \dots, f_m \in M$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n) \quad 1 \leq i \leq m$

↓

$(f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, f_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \leq (f_1(\beta_1, \dots, \beta_n), \dots, f_m(\beta_1, \dots, \beta_n))$

↓ ($f_0 \in M$)

$f_0(f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, f_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \leq f_0(f_1(\beta_1, \dots, \beta_n), \dots, f_m(\beta_1, \dots, \beta_n))$

↓

$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq F(\beta_1, \dots, \beta_n)$

□

51.2 Предполные классы.

Ω — предполный класс, если:

- 1) $\Omega \neq P_2$,
- 2) Ω — замкнутый,
- 3) $\forall f \in P_2 \setminus \Omega : \Omega \cup \{f\}$ — полна.

52 Теорема Поста.

Леммы, необходимые для доказательства теоремы:

52.1 Лемма о несамодвойственной ф-ции

$$f \notin S \Leftrightarrow 0, 1 \in [\{f, \bar{x}\}]$$

Доказательство:

$$\Rightarrow) f \in S \Leftrightarrow \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \overline{f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)}$$

$$g(x) = f(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n})$$

$$g(0) = f(0^{\alpha_1}, \dots, 0^{\alpha_n}) = f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(1^{\alpha_1}, \dots, 1^{\alpha_n}) = g(1)$$

↓

$$g(x) = \text{const}$$

$$\Leftarrow) \text{ Дано } 0, 1 \in [\{f, \bar{x}\}]$$

От противного

$$\text{Пусть } f \in S \Rightarrow \{f, \bar{x}\} \subseteq S \stackrel{S - \text{замкнут}}{\Rightarrow} [\{f, \bar{x}\}] \subseteq S$$

Но $0, 1 \notin S$

Противоречие

□

52.2 Лемма о немонотонной ф-ции

$$f \notin M \Leftrightarrow \bar{x} \in [\{f, 0, 1\}]$$

Доказательство:

$\Leftarrow)$ Аналогично прошлой лемме

$$\Rightarrow) \text{ Пусть } f(x_1, \dots, x_n) \notin M$$

↓

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n) \text{ т.ч. } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > f(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

↓

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$$

$$f(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$$

$$\text{Рассм. } g(x) \text{ получаемая из } f(x_1, \dots, x_n) \text{ подстановлением на место } x_i: \begin{cases} 0; & \text{если } \alpha_i = \beta_i = 0 \\ 1; & \text{если } \alpha_i = \beta_i = 1 \\ x_i; & \text{если } \alpha_i \neq \beta_i = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1 \end{cases}$$

$$g(0) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$$

$$g(1) = f(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$$

↓

$$g(x) = \bar{x}$$

□

52.3 Лемма о нелинейной ф-ции

$$f \notin L \Leftrightarrow x \& y \in [\{f, \bar{x}, 0, 1\}]$$

Доказательство:

$\Leftarrow)$ Аналогично прошлой лемме

$$\Rightarrow) \text{ Пусть } f(x_1, \dots, x_n) \notin L$$

$$K = x_1 \cdots x_r$$

Если что, переменные перенумеруем. Но выберем такое r , что у $f(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ в полиноме Жегалкина ровно одно слагаемое имеет ранг больше 1

$$f(x_1, x_2, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = x_1 x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma$$

$$f(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = (x_1 \oplus \beta)(x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha(x_1 \oplus \beta) \oplus \beta(x_2 \oplus \alpha) \oplus \gamma = x_1 x_2 \oplus \alpha \beta \oplus \gamma \in \{x_1 x_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2\}$$

Если получили $\bar{x}_1 \bar{x}_2$, то $\bar{x}_1 \bar{x}_2 = x_1 x_2$

□

52.4 Теорема Поста.

Сист. б.ф. $\Omega \subseteq P_2$ полна \Leftrightarrow она не лежит целиком ни в из классов T_0, T_1, S, L, M

Доказательство:

$\Rightarrow)$ Ω — полна \Rightarrow функциями из Ω можно выразить штрих Шеффера.

Т. к. классы T_0, T_1, L, S, M замкнуты и штрих шеффера не принадлежит ни одному из этих классов.

То Штрих шеффера выражается функциями не из этих классов $\Rightarrow \Omega$ не может лежать целиком ни в одном из этих классов

$\Leftarrow)$ $\Omega \not\subseteq T_0 \Rightarrow \exists f_0 \in \Omega \setminus T_0$

аналогично:

$$\exists f_1 \in \Omega \setminus T_1$$

$$\exists f_S \in \Omega \setminus S$$

$$\exists f_L \in \Omega \setminus L$$

$$\exists f_M \in \Omega \setminus M$$

Рассм. $\Omega' = \{f_0, f_1, f_S, f_L, f_M\}$

Хотим показать, что $x \& y, \bar{x} \in [\Omega']$

Шаг 1. Покажем что $0, 1, \bar{x} \in [\Omega']$

$$\varphi_1(x) = f_0(x, \dots, x)$$

$$\varphi_2(x) = f_1(x, \dots, x)$$

$$\varphi_1(0) = f_0(0, \dots, 0) = 1 \Rightarrow \varphi_1 \in \{1, \bar{x}\}$$

$$\varphi_2(1) = f_1(1, \dots, 1) = 0 \Rightarrow \varphi_2 \in \{0, \bar{x}\}$$

Если $\varphi_1(x) \neq \bar{x}$ и $\varphi_2(x) \neq \bar{x}$. Тогда $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = 0$

Тогда по лемме о немонотонной ф-ции $\bar{x} \in [f_m, 0, 1]$

В противном случае $\bar{x} \in \{\varphi_1, \varphi_2\}$

Т.о. \bar{x} получили

По лемме о несамодвойственной ф-ции $0, 1 \in [\{f_s, \bar{x}\}]$

Показали

Шаг 2

По лемме о нелинейной ф-ции

$$x_1, x_2 \in [\{f_L, 0, 1, \bar{x}\}]$$

В итоге мы получили

$$x \& y \in [\Omega']$$

\Downarrow по теореме о полноте двух систем

Ω' полна $\Rightarrow \Omega$ полна

□