

# 1 Комбинаторные правила произведения и суммы. Число выборок объема $k$ из $n$ элементов.

## 1.1 Правило произведения

Если  $a \in A$  можно выбрать  $n$  способами и для каждого такого выбора  $b \in B$  можем выбрать  $m$  способами, то пару  $ab$  мы можем выбрать  $n \cdot m$  способами.

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times \cdots \times |A_n|$$

## 1.2 Правило суммы

Если элемент  $a \in A$  может быть выбран  $n$  способами и независимо, а элемент  $b \in B$  может быть выбран  $m$  способами, то выбор "a или b" может быть осуществлён  $n + m$  способами.

$\forall$  разбиения конечного множества  $A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$

$$|A| = |A_1| + \cdots + |A_n|$$

## 1.3 Число выборок объема $k$ из $n$ элементов

### 1.3.1 Упорядоченная выборка объема $k$ из $n$ элементов с повторениями (число кортежей)

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$

### 1.3.2 Упорядоченная выборка объема $k$ из $n$ элементов без повторений (число $k$ -размещений)

$$[n]_k = n(n - 1) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Доказательство:

Индукция по  $k$ :

$$k = 1: [n]_1 = n$$

$$k > 1: [n]_k = [n]_{k-1}(n - k + 1)$$

□

### 1.3.3 Неупорядоченные выборки объема $k$ из $n$ элементов без повторений (сочетания)

$$\forall n, k \quad 0 \leq k \leq n$$

$${n \choose k} = C_n^k = \frac{[n]_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Доказательство:

Индукция по  $n$

$$n = 1: {1 \choose 0} = 1; {1 \choose 1} = 1$$

$n \geq 2$ :

$$\text{Если } k = n, \text{ то } {n \choose n} = 1 = \frac{n!}{n! \cdot 0!}$$

Если  $k < n$ , то

$${n \choose k} = {n-1 \choose k} + {n-1 \choose k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□

### 1.3.4 Неупорядоченные выборки объема $k$ из $n$ элементов с повторениями (число мульти множеств)

$$\hat{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m$$

Доказательство:

$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  задаёт наше  $m$ -сочетание с повторениями

Сопоставим ему двоичный кортеж

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha_1}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_n, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha_n})$$

Знаем, что  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = m \Rightarrow$  длина кортежа  $m + n - 1$  и в нём  $n - 1$  единица. Таких кортежей  $C_{n+m-1}^{m-1}$

□

## 2 Число выборок объема $k$ из $n$ элементов. Комбинаторные тождества. Бином Ньютона.

### 2.1 Число выборок объема $k$ из $n$ элементов.

См. пункт 1.3

### 2.2 Комбинаторные тождества

#### 2.2.1 Тождество Паскаля

$\forall n, k \ 1 \leq k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

**Доказательство:**

$M$  — все  $k$ -подмножества  $n$ -множества

$$|M| = \binom{n}{k}$$

$M_1 \subseteq M$  — не попал элемент а

$M_2 \subseteq M$  — попал элемент а

↓

$$M = M_1 \sqcup M_2 \Rightarrow |M| = |M_1| + |M_2| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

□

#### 2.2.2

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

**Доказательство:**

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

□

### 2.3 Бином Ньютона

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**Доказательство:**

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \cdots (a+b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

□

## 2.4 Обобщение бинома Ньютона

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_i \geq 0; \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n} P_n(\alpha_1 \dots \alpha_k) x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$$

$P_n(\alpha_1 \dots \alpha_k)$  — полиномиальный коэффициент

**Доказательство:**

Упражнение

□

## 3 Мульти множества, их спецификации. Полиномиальные коэффициенты.

### 3.1 Мульти множества, их спецификации.

#### 3.1.1 Мульти множество первичной спецификации

Рассмотрим  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

и кортеж  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  на  $\mathbb{N}_0$  т. ч.  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$

Совокупность из  $m$  элементов множества  $X$ , в которой  $x_i$  встречается  $\alpha_i$  раз  $\forall i$  —  $m$ -мульти множество первичной спецификации  $[x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}]$  порождённое множеством  $X$ .

#### 3.1.2 Мульти множество вторичной спецификации

Совокупность из  $m$  элементов множества  $X$ , в которой в  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$   $\beta_0$  нулей,  $\beta_1$  единиц...

Запись:  $[[0^{\beta_0}, 1^{\beta_1}, \dots, m^{\beta_m}]]$

$$\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + m\beta_m = m$$

### 3.2 Полиномиальные коэффициенты

$P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — количество  $m$ -кортежей из  $m$ -мульти множества

$\forall m, \alpha_1 \dots \alpha_n: \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$

$$P_m(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$

**Доказательство:**

$$(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{\alpha_n})$$

$$\alpha_1! \cdots \alpha_n! P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = m!$$

$$\Downarrow \\ P_m = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$

$P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — полиномиальный коэффициент.

Обозначается:  $\binom{m}{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$

## 4 Комбинаторное правило суммы. Формула включений и исключений.

### 4.1 Комбинаторное правило суммы.

См. пункт 1.3

### 4.2 Формула включений и исключений.

Пусть  $A$  - конечное конечное множество

$$A_1 \dots A_n \subseteq A$$

Тогда  $|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k$ ,

$$S_0 = |A|$$

$$\forall k > 0 \quad S_k = \sum_{\{i_1 \dots i_k\} \subseteq \{1 \dots n\}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

**Доказательство:**

$$x \in A$$

пусть  $x$  попал ровно в  $t$  подмножеств  $A_{j_1}, \dots, A_{j_t}$

Вклад "x"

В  $S_0 = |A| - 1$  раз

В  $S_1 = \sum_{i=1}^n |Ai| - t$  раз

В  $S_2 = \binom{t}{2}$  раз

В  $S_3 = \binom{t}{3}$  раз

:

В  $S_t = \binom{t}{t}$  раз

$$\text{T. о. } 1 - t + \binom{t}{2} - \binom{t}{3} \dots + (-1)^t \binom{t}{t} = \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} = \begin{cases} 0; & t > 0 \\ 1; & t = 0 \end{cases}$$

□

## 5 Формула включений и исключений. Задача о беспорядках.

### 5.1 Формула включений и исключений.

См. пункт 4.2

### 5.2 Задача о беспорядках.

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) — \text{перестановка } (1, \dots, n).$$

Нужно найти число перестановок из  $n$  элементов множества, в которых никакой элемент не остался на месте.

**Доказательство:**

$$(\forall i \quad \pi_i \neq i).$$

$A$  - все перестановки.  $\forall i \quad A_i \leftrightarrow \pi_i = i$ .

$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$  - искомое множество.

$$|A| = n! \Rightarrow S_0 = n!$$

$$|A_i| = (n-1)!$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n |A_i| = n \cdot (n-1)!$$

при  $i \neq j$   $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = \binom{n}{2} (n-2)!$$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (n-k)! = \binom{n}{k} (n-k)!$$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

□

## 6 Функция Эйлера, формула для функции Эйлера. Формула для числа сюръективных отображений.

### 6.1 Функция Эйлера, формула для функции Эйлера.

$\varphi(m)$  - функция Эйлера,  $m \in N$ . Кол-во натуральных чисел, не превосходящих  $m$  и взаимно простых с  $m$ .

$\forall m \geq 2 \quad m = p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_n^{l_n}$  — разложение на простые множители, тогда

$$\varphi(m) = m \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

**Доказательство:**

$$A = \{1 \dots m\}$$

$A_i$  — числа  $A$ , которые делятся на  $p_i$ ,  $\forall i = 1 \dots m$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)|$$

$$|A| = m \Rightarrow S_0 = m$$

$$|A_i| = \frac{m}{p_i} (p_i, 2p_i, 3p_i, \dots, \frac{m}{p_i} \cdot p_i)$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \frac{m}{p_i} = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}$$

$$S_k = \sum_{i \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}$$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = m + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k = m + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} = m \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}\right) =$$

$$m \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

□

### 6.2 Формула для числа сюръективных отображений.

Число сюръективных отображений из  $m$ -множества  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$  в  $n$ -множество  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$

$$\text{равно } (-1)^n \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^m$$

**Доказательство:**

$A$  — все отображения  $X \rightarrow Y$

$A_i$  — все отображения  $X \rightarrow Y \mid y_i$  — нет прообраза.

$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)$  — множество всех отображений, у которых 1-й элемент покрыт, ..., k-й элемент покрыт.

$$|A| = n^m = S_0$$

$$|A_i| = (n-1)^m$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n |A_i| = C_n^1 |A_j| = n(n-1)^m$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = C_n^2 |A_i \cap A_j| = C_n^2 (n-2)^m$$

:

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$$

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (n-k)^m = C_n^k (n-k)^m$$

:

$$S_n = 0$$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^m \stackrel{j=n-k}{=} \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} C_n^{n-j} j^m = (-1)^n \sum_{j=1}^n (-1)^j C_n^j j^m$$

□

## 7 Число Стирлинга второго рода. Формула для числа Стирлинга второго рода. Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода.

### 7.1 Число Стирлинга второго рода.

Число стирлинга II рода  $S(n, k)$  — количество неупорядоченных разбиений n-множества на k непустых подмножеств

Положим:

$$S(n, 0) = \begin{cases} 0; & n > 0 \\ 1; & n = 0 \end{cases}$$

$$S(n, k) = 0; \quad k > n$$

### 7.2 Формула для числа Стирлинга второго рода.

$$S(n, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} i^n$$

**Доказательство:**

Сюръективное отображение из n-множества в k-множество сопоставляется упорядоченному разбиению n-множества на k непустых подмножеств

$$\text{Их } (-1)^k \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^i i^n$$

Делим на  $k!$  и получаем число неупорядоченных разбиений.

□

### 7.3 Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода.

$\forall k, n \in N, \quad 0 < k < n$

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k)$$

**Доказательство:**

$M$  — все разбиения  $n$ -множества на  $k$  непересекающихся подмножеств.

В  $n$ -множестве зафиксируем элемент  $a$

$M_1$  — множество разбиений, в которых есть одноэлементное подмножество  $\{a\}$

$M_2 = M \setminus M_1$  — все остальные разбиения

$$|M| = S(n, k)$$

$|M_1| = S(n - 1, k - 1)$  ( $n - 1$  т.к. один элемент уже участвует в разбиении,  $k - 1$  т.к. одно множество в разбиении уже есть)

$|M_2| = kS(n - 1, k)$  (разбиваем  $n - 1$ -множество на  $k$  непустых подмножеств, и добавление элемента  $a$  в каждое из  $k$  подмножеств порождает разбиение изначального  $n$ -множества)

$$M = M_1 \sqcup M_2$$

$\Downarrow$

$$|M| = |M_1| + |M_2|$$

$\Downarrow$

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$$

$\square$

## 8 Числа Бела. Теорема о числе Бела.

### 8.1 Числа Бела.

Число Бела  $B_n$  — количество неупорядоченных разбиений  $n$ -множества на непустые подмножества.

$$B_0 = S(0, 0)$$

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$$

### 8.2 Теорема о числе Бела.

$\forall n \geq 2$

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^n S(n, k) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=k-1}^{n-1} S(i, k - 1) \binom{n-1}{i} \stackrel{\text{поменяем знаки суммы местами}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{i+1} S(i, k - 1) \binom{n-1}{i} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{k=1}^{i+1} S(i, k - 1) \stackrel{k-1=t}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{t=0}^i S(i, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i \end{aligned}$$

$\square$

На экзамене требуется комбинаторное доказательство, но какое есть.

## 9 Число Стирлинга первого рода. Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга первого рода. Связь между числами Стирлинга.

### 9.1 Число Стирлинга первого рода.

Число Стирлинга первого рода — количество неупорядоченных разбиений  $n$ -множества на  $k$  циклов  
Обозначение:  $s(n, k)$

### 9.2 Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга первого рода.

Положим:

$$s(n, 0) = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n > 0 \end{cases}$$

$$s(n, k) = 0; \quad k > n$$

$$\forall n, k \quad 0 < k < n$$

$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) + (n - 1)s(n - 1, k)$$

**Доказательство:**

Аналогично числам Стирлинга I рода

□

### 9.3 Связь между числами Стирлинга.

$$\forall n, m \in N \quad \sum_{k=1}^n S(n, k)s(k, m)(-1)^{k-m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

**Доказательство:**

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)[x]_k = \sum_{k=1}^n S(n, k) \sum_{m=1}^k s(k, m)(-1)^{k-m} x^m = \sum_{m=1}^n x^m \sum_{k=1}^n S(n, k)s(k, m)(-1)^{k-m} x^m$$

Сравниваем степень при  $x^n$ : если  $n = m$ , то вторая сумма равна 1, иначе она должна быть равна 0.

□

## 10 Разложение $x^n$ в базисе $[x]_k$ . Разложение $[x]_k$ в базисе $x^n$ . Связь между числами Стирлинга.

### 10.1 Разложение $x^n$ в базисе $[x]_k$ .

$$\forall n \in N : \quad x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)[x]_k.$$

**Доказательство:**

$$[x]_{k+1} = [x]_k \cdot (x - k) = [x]_k \cdot x - [x]_k \cdot k$$

↓

$$(*) \quad x \cdot [x]_k = [x]_{k+1} + k \cdot [x]_k$$

Индукция по  $n$ :  $x^1 = [x]_1$  — очевидно

$$x^n = x \cdot x^{n-1} \stackrel{\text{по индукции}}{=} x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k)[x]_k = \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) \cdot [x]_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) \cdot k \cdot [x]_k \stackrel{t=k+1 \text{ в первой сумме}}{=}$$

$$= \sum_{t=2}^n S(n-1, t-1)[x]_t + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) \cdot k \cdot [x]_k$$

Первая сумма равна 0 при  $t=1$ , вторая сумма равна 0 при  $k=n$ . Получается:

$$\sum_{k=1}^n (S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)) [x]_k = \sum_{k=1}^n S(n, k) [x]_k$$

□

## 10.2 Разложение $[x]_k$ в базисе $x^n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$[x]_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} s(n, k) x^k$$

**Доказательство:**

Аналогично пункту 10.1

□

## 10.3 Связь между числами Стирлинга.

См. пункт 9.3

# 11 Разбиения чисел. Диаграмма Ферре. Свойства числа разбиений. Равенство числа разбиений на различные слагаемые и на нечетные слагаемые.

## 11.1 Разбиения чисел.

Разбиение числа  $n$  на натуральные слагаемые - это представление  $n$  в виде суммы  $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ ,  $x_i \in \mathbb{Z}_+$ . Количество упорядоченных разбиений:  $\binom{n-1}{k-1}$

**Неупорядоченные разбиения:**

$p(n)$  — количество разбиений числа  $n$  на слагаемые

$p(n, k)$  — количество разбиений числа  $n$  на  $k$  слагаемых

## 11.2 Диаграмма Ферре.

Диаграмма Ферре разбиения  $n = x_1 + \dots + x_k$ .  $x_1 \geq \dots \geq x_k - k$  строк точек, в  $i$ -ой строке  $x_i$  точек в первых  $x_i$  столбцах.

## 11.3 Свойства числа разбиений.

### 11.3.1

$$p(0, 0) = p(0)$$

$$p(n, 1) = 1$$

$$p(n, n) = 1$$

$$p(n, k) = 0; \quad k > n$$

### 11.3.2

1.  $p(n, k)$  равно числу разбиений  $n$  на натуральные слагаемые, наибольшее из которых равно  $k$ .
2.  $p(n+k, k)$  равно числу разбиений  $n$  на натуральные слагаемые, не превосходящие  $k$ .
3. Число разбиений  $n-k$  ровно на  $m-1$  слагаемое, не превосходящих  $k$  равно числу разбиений  $n-m$  на  $k-1$  слагаемое, не превосходящих  $m$ .

**Доказательство:**

1. Транспозиция диаграммы Ферре.
2. Рассмотреть диаграмму без первого столбца.
3. Тоже через диаграмму Ферре.

□

### 11.3.3 Рекуррентное соотношение

$$\forall n, k \mid 0 < k < n$$

$$p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n-k, i)$$

**Доказательство:**

$$(*) \quad (n-k) = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1)$$

$$y_i = x_i - 1$$

$$n-k = y_1 + y_2 + \dots + y_k, \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_k \geq 0$$

Если  $s : y_s > 0, y_{s+1} = y_{s+2} = \dots = y_n = 0$ , тогда  $(*)$  - это разбиение  $n-k$  на  $k$  слагаемых, которых у нас  $p(n-k, s)$ .

$$p(n, k) = \sum_{s=1}^k p(n-k, s)$$

□

## 11.4 Равенство числа разбиений на различные слагаемые и на нечетные слагаемые.

Количество разбиений  $n$  на различные слагаемые равно количеству разбиений  $n$  на нечётные слагаемые.

**Доказательство:**

$Q_n$  - множество разбиений  $n$  на различные слагаемые,  $T_n$  - множество разбиений на нечётные слагаемые.

Докажем, что  $|Q_n| = |T_n|$ , построим для этого биекцию.

$$f : Q_n \rightarrow T_n$$

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 > x_2 > \dots > x_k$$

$$\forall i \quad x_i = 2^{t_i} \cdot y_i, \quad y_i - \text{нечётно}$$

$$n = \underbrace{y_1 + \dots + y_1}_{2^{t_1}} + \underbrace{y_2 + \dots + y_2}_{2^{t_2}} + \dots + \underbrace{y_k + \dots + y_k}_{2^{t_k}}.$$

$$h : T_n \rightarrow Q_n$$

$$n = \underbrace{y_1 + \dots + y_1}_{d_1} + \dots + \underbrace{y_s + \dots + y_s}_{d_s}, \quad y_i \neq y_j, i \neq j.$$

$\forall i \quad d_i$  - однозначно раскладывается в степени двойки.

$$d_i = 2^{\sigma_{i,1}} + 2^{\sigma_{i,2}} + \dots + 2^{\sigma_{i,m_i}}; \quad \sigma_{i,1} > \sigma_{i,2} > \dots > \sigma_{i,m_i}$$

$$n = 2^{\sigma_{1,1}}y_1 + 2^{\sigma_{1,2}}y_1 + \dots + 2^{\sigma_{i,m_i}} + \dots + 2^{\sigma_{s,1}}y_s + \dots + 2^{\sigma_{s,m_s}}y_s.$$

$h = f^{-1}$  — биекция.

□

## 12 Производящие функции и их свойства. Элементарные производящие функции.

### 12.1 Производящие функции и их свойства.

#### 12.1.1 Определение

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A(t)$  — производящая функция последовательности  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

#### 12.1.2 Свойства

Пусть  $A(t)$  и  $B(t)$  - производящие функции последовательности  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  и  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  соответственно. Тогда:

1.  $\alpha A(t) + \beta B(t)$  - производящая функция.  $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=0}^{\infty}$ .
2.  $A(t) \cdot B(t)$  - производящая функция последовательности  $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$
3.  $t^m A(t)$  - производящая функция.  $\underbrace{0, \dots, 0}_m, a_0, a_1, \dots$
4.  $A(ct)$  - производящая функция последовательности  $\{c^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$
5.  $t A'(t)$  -  $\{n \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$
6.  $\int_0^t \frac{A(t) - a_0}{t} dt$  - производящая функция последовательности  $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$
7.  $\frac{A(t)}{1-t}$  - производящая функция последовательности  $\left\{ \sum_{i=0}^n a_i \right\}_{n=0}^{\infty}$

### 12.2 Элементарные производящие функции.

$$1. (1+T)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n; \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$2. e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$3. \ln \left( \frac{1}{1-t} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

$$4. \sin(t) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$5. \cos(t) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

## 13 Числа Каталана, производящая функция последовательности чисел Каталана, формула для числа Каталана.

### 13.1 Числа Каталана

$$\{C_n\}_{n=0}^{\infty}: \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \dots + C_{n-1} \cdot C_0 \end{cases}$$

$C_n$  – Количество правильных скобочных последовательностей с  $n$  парами скобок.

### 13.2 Производящая функция последовательности чисел Каталана

$$C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{k-1} \cdot C_0 + \dots + C_0 \cdot C_{k-1}) t^k = 1 + t \sum_{k=0}^{\infty} (C_k \cdot C_0 + \dots + C_0 \cdot C_k) t^k = 1 + t(C(t))^2 \\ \Downarrow \\ tC^2(t) - C(t) + 1 &= 0 \\ \Downarrow \\ 2tC_{1/2}(t) &= 1 \pm \sqrt{1-4t} \end{aligned}$$

т.к. при  $t = 0$   $C(t) = 1$

$$\Downarrow \\ C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

□

### 13.3 Формула для числа Каталана

$$n\text{-ое число Каталана: } C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} (1-4t)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-4t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-3}{2})}{n!} (-4t)^n = \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot 2^n \cdot t^n}{n!} &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{n!(n-1)!2^{n-1}} 2^n t^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2t^n = \\ \sqrt{1-4t} \end{aligned}$$

$$C(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} t^n$$

$$\text{т.о. } C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

□

# 14 Числа Фибоначчи, производящая функция последовательности чисел Фибоначчи, формула для числа Фибоначчи.

## 14.1 Числа Фибоначчи

$$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}: \begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

## 14.2 Производящая функция последовательности чисел Фибоначчи

Производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  имеет вид  $F(t) = \frac{1}{1-t-t^2}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} t^n = \\ &= 1 + t \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} t^{n-1} + t^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} t^{n-2} = 1 + tF(t) + t^2 F(t) \Rightarrow F(t) = \frac{1}{1-t-t^2} \end{aligned}$$

□

## 14.3 Формула для числа Фибоначчи

$$\forall n \geq 0 \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Доказательство:

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{-1}{t^2 + t - 1} = \frac{-1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{t-t_2} - \frac{1}{t-t_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}t_1} \left( \frac{1}{1-\frac{t}{t_1}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2} \left( \frac{1}{1-\frac{t}{t_2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}t_1} \left( 1 + \frac{t}{t_1} + \frac{t^2}{t_1^2} + \dots \right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2} \left( 1 + \frac{t}{t_2} + \frac{t^2}{t_2^2} + \dots \right) \\ f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{t_1^{n+1}} - \frac{1}{t_2^{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{t_2^{n+1} - t_1^{n+1}}{t_1^{n+1} \cdot t_2^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} (t_2^{n+1} - t_1^{n+1}) = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

□

# 15 Линейная однородная возвратная последовательность, ее производящая функция. Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения.

## 15.1 Линейная однородная возвратная последовательность

Линейное однородное рекуррентное соотношение порядка  $k$  для последовательности  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  выглядит:  
 $(*) \quad a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \dots + p_k a_n = 0, \quad p_k \neq 0.$

Если последовательность  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  удовлетворяет  $(*) \forall n$  она наз-ся однородной возвратной последовательностью порядка  $k$ .

## 15.2 Производящая функция однородной возвратной последовательности

Если последовательность  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  удовлетворяет  $(*) \forall n, n \geq 0$ , то производящая функция  $A(t)$  этой последовательности имеет вид:

$$A(t) = \frac{C(t)}{K(t)}, \text{ где } K(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_k t^k, C(t) - \text{многочлен степени, не превосходящий } k-1.$$

**Доказательство:**

$$\text{Пусть } A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

$$\begin{aligned} C(t) = A(t) \cdot K(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \\ &+ \dots + a_0 p_1 t + a_1 p_1 t^2 + \dots + a_{k-1} p_1 t^k + a_k p_1 t^{k+1} + \\ &+ \dots + a_0 p_2 t^2 + \dots + a_{k-2} p_2 t^k + a_{k-1} p_2 t^{k+1} + \\ &+ \dots + a_0 p_k t^k + a_1 p_k t^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

(Все столбцы после первого многоточия будут зануляться, а до первого в сумме образуют  $C(t)$ .)

□

## 15.3 Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения.

$f(t) = t^k + p_1 t^{k-1} + \dots + p_k$  — характеристический многочлен для  $(*)$ .

$$f(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdots (t - \lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, \sum r_i = k$$

Пусть  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  — линейная однородная возвратная последовательность удовлетворяющая  $(*)$ . Тогда  $a_n = \sum_{i=1}^s Q_i(n) \lambda_i^n$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  — корни характеристического многочлена кратного  $r_1, \dots, r_s$  соответственно.

$Q_i(t)$  — многочлен степени, не превосходящий  $r_i - 1$ , который находится из начальных условий.

**Доказательство:**

$$K(t) = t^k f\left(\frac{1}{t}\right) = t^k \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{t} - \lambda_i\right)^{r_i} = \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{t} - t\lambda_i\right)^{r_i}$$

$$A(t) = \frac{C(t)}{\prod_{i=1}^s (1 - t\lambda_i)^{r_i}} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} \frac{B_{ij}}{(1 - t\lambda_i)^j}$$

$$(1 - t\lambda_i)^{-j} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-j}{n} (-\lambda_i t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-j)(-j-1)\dots(-j-n+1)}{n!} (-1)^n \lambda_i^n t^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j(j+1)\dots(j+n-1)}{n!} \lambda_i^n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{n} \lambda_i^n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{j-1} \lambda_i^n t^n$$

$$A(t) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} B_{ij} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{j-1} \lambda_i^n t^n \right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_i^n \sum_{i=1}^s B_{ij} \binom{j+n-1}{j-1} \right) t^n.$$

При этом  $\binom{j+n-1}{j-1}$  - многочлен степени, не превышающей  $n-j+1$ .

□

## 16 Формула Стирлинга. Асимптотика биномиальных коэффициентов.

### 16.1 Формула Стирлинга

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**Доказательство:**

Без доказательства

□

### 16.2 Асимптотика биномиальных коэффициентов.

$$1. k^2 = o(n) \Rightarrow C_n^k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

$$2. k^3 = o(n^2) \Rightarrow C_n^k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k(k-1)}{2n}} \text{ т.к. } \frac{k}{2n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 0 \quad \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k^2}{2n}}$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leqslant \frac{n^k}{k!} \\ C_n^k &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{n^k}{k!} e^{\ln(1-\frac{1}{n}) + \ln(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \ln(1-\frac{k-1}{n})} = \\ &\frac{n^k}{k!} e^{-\frac{1}{n} + O(\frac{1}{2n^2}) - \frac{2}{n} + O(\frac{4}{2n^2}) + \cdots - \frac{k-1}{n} + O(\frac{(k-1)^2}{2n^2})} = \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k(k-1)}{2n} + O(\frac{k^3}{n^2})} \\ (ln(1+x)) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = x + O(\frac{x^2}{2}) \\ (1^2 + 2^2 + \cdots + k^2) &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = O(k^3) \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \cdots + \frac{(k-1)^2}{n^2} \leqslant \frac{k(k-1)^2}{n^2} \quad (\text{все слагаемые заменили на последнее})$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \cdots + \frac{(k-1)^2}{n^2} \geqslant \frac{(\frac{k}{2})^2}{n^2} \frac{k}{2} \quad (\text{половину слагаемых заменили на } \frac{(\frac{k}{2})^2}{n^2})$$

Из доказанного следуют оба пункта

□

## 17 Граф, мультиграф, псевдограф. Изоморфизм графов, автоморфизм. Лемма о рукопожатиях. Орграф, связный, сильно связный орграф.

### 17.1 Граф, мультиграф, псевдограф.

$V$  - непустое конечное множество (конечное)

$V^{(2)}$  - множество всех двухэлементных подмножеств множества  $V$ .

Графом называется пара множеств  $(V, E) = G$ , где  $E \subseteq V^{(2)}$

Элементы  $V$  - вершины,

Элементы  $E$  - рёбра.

$VG$  - множество вершин

$EG$  - множество рёбер.

$|VG|$  - порядок графа.

$|G| = |VG| = n \Rightarrow G$  —  $n$ -граф

$|G| = n, |EG| = m \Rightarrow G$  —  $(n, m)$  - граф.

## 17.2 Изоморфизм графов, автоморфизм.

$G = (V, E), G' = (V', E')$ .

$G$  и  $G'$  изоморфны ( $G \cong G'$ ), если  $\exists$  биекция  $\varphi : V \rightarrow V' : uv \in E \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E'$ .

$\varphi$  - изоморфизм графов  $G$  и  $G'$ . Если  $G = G'$ , то  $\varphi$  - автоморфизм графа ( $V$  и  $V'$  совпадают).

## 17.3 Лемма о рукопожатиях.

Пусть  $G$  - произвольный граф, тогда  $\sum_{v \in VG} \deg_G(v) = 2|EG|$ .

**Доказательство:**

Возьмем пустой граф. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер.

□

## 17.4 Орграф, связный, сильно связный орграф.

Орграф - это пара  $G = (V, D)$ , где  $V$  - непустое множество, а  $D \subseteq V \times V$ . Элементы  $V$  - вершины, элементы  $D$  - дуги.

$(v, u) \in D$ .  $vu$  - выходит из  $v$  и входит в  $u$ .

$x, y \in VG$  — связные в  $G$ , если в  $G \exists$  простая  $(x, y)$  - цепь.

Граф  $G$  — связный, если  $\forall 2$  вершины связные.

Вершина  $v$  достижима из  $u$ , если  $\exists$  ориентированная  $(u, v)$ -цепь.

Орграф  $G$  — сильносвязанный, если любая вершинка достижима из любой другой.

# 18 Подграф, порожденный подграф, оставочный подграф. Объединение, соединение, умножение графов. Связный граф, компонента связности.

## 18.1 Подграф, порожденный подграф, оставочный подграф.

Граф  $H$  называется подграфом графа  $G$ , если  $VH \subseteq VG, EH \subseteq EG$ .

Если  $VH = VG$ , то  $H$  - оставочный подграф.

### 18.1.1 Порожденные подграфы

Пусть  $U \subseteq VG$ ,  $D = \{uv \mid u, v \in U, uv \in EG\}$ .

Тогда  $G(U) = (U, D)$  - подграф, порождённый множеством вершин  $U$ .

Пусть  $D \subseteq EG$ ,  $U$  - множество концов рёбер из  $D$ .

Тогда  $G[D] = (U, D)$  - подграф, порождённый множеством рёбер  $D$ .

## 18.2 Объединение, соединение, умножение графов.

### 18.2.1 Объединение графов

Граф  $H$  называется объединением графов  $G$  и  $F$ , если  $VH = VG \cup VF$ ,  $EH = EG \cup EF$ , будем обозначать  $H = G \cup F$ .

Если  $VG \cap VF \neq \emptyset \Rightarrow G \cup F$  - дизъюнктивное объединение.

### 18.2.2 Соединение графов

Соединение графов  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  ( $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ) — граф  $G_1 + G_2$  — дизъюнктивное объединение  $G_1$  и  $G_2$  и добавление ребёр  $v_1v_2 = v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ .

### 18.2.3 Умножение графов.

Пусть  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$ .

Произведение  $G = G_1 \times G_2$  называется  $G = (V_1 \times V_2, E)$ .

$(v_1, v_2)$  смежные с  $(u_1, u_2) \Leftrightarrow$  или  $(v_1 = u_1, v_2u_2 \in E_2)$  или  $(v_2 = u_2, v_1u_1 \in E_1)$ .

## 18.3 Связный график, компонента связности.

$x, y \in VG$  — связные в  $G$ , если в  $G$   $\exists$  простая  $(x, y)$  - цепь.

Граф  $G$  — связный, если  $\forall$  2 вершины связные.

Максимальный по включению вершин и рёбер связный подграф графа  $G$  называется компонентой связности графа  $G$ .

## 19 Дополнение к графу, реберный график. Двудольность, критерий двудольности.

### 19.1 Дополнение к графу, реберный график.

Дополнение к графу  $G = (V, E)$  есть  $\bar{Q} = (V, \bar{E})$ , где  $\bar{E} = \{uv \mid uv \notin E, u, v \in V\}$ .

Для графа  $G = (V, E)$  реберным графиком называется  $L(G)$ ,  $VL(G) = EG$ ,  $e_1e_2 \in EL(G) \Leftrightarrow e_1$  и  $e_2$  смежные в  $G$ .

### 19.2 Двудольность, критерий двудольности.

### 19.3 Двудольность

Граф  $G = (V, E)$  — двудольный, если  $\exists$  разбиение  $V = A \sqcup B : G[A]$  и  $G[B]$  — пустые

## 19.4 Критерий двудольности Кенига

$G$  - двудольный  $\Leftrightarrow$  в  $G$  нет циклов нечётной длины.

Доказательство:

$\Rightarrow)$   $C$  - цикл в  $G$ .  $C = v_1v_2v_3v_4\dots v_e, v_{e+1} = v_1$ .  $V = A \cup B$ ,  $v_1, v_3, v_5 \dots \in A$ ,  $v_2, v_4, v_6 \in B$ , т.е. все нечётные в  $A$ , все чётные в  $B$ .

$\Leftarrow)$  Пусть  $G$  - связный

$$v \in VG$$

Разбиваем множество  $VG = A \sqcup B$

$$A = \{u \in VG | d(v, u) - \text{чётно}\}$$

$$B = \{u \in VG | d(v, u) - \text{нечётно}\}$$

Надо показать что в  $A$  и  $B$  нет рёбер.

От противного.  $e = uw \in EG$ ,  $u, w \in$  одному мно-ву ( $A$  или  $B$ ). По построение  $u, w \neq v$ . Рассмотрим кратчайшие цепи:  $U$  - кратчайшая  $(u, v)$ -цепь,  $W$  - кратчайшая  $(w, v)$ -цепь. Длины этих цепей имеют одинаковую чётность. Пусть  $v_1$  - последняя, начиная с  $v$ , общая вершина цепей  $U, W$ .

$(v, v_1)$  - подцепи цепей  $U$  и  $W$  имеют одинаковую длину  $\Rightarrow (v_1, u)$ -подцепь цепи  $U$  и  $(v_1, w)$ -подцепь цепи  $W$  имеют одинаковую чётность длины. Их объединение с ребром  $uw$  даёт цикл нечётной длины. Противоречие. Следовательно, граф является двудольным.

□

## 20 Оценки числа ребер графа. Эксцентризитет, радиус, диаметр, центр графа.

### 20.1 Оценки числа ребер графа.

$\forall (n, m)$ -графа с  $k$  компонентами связности верны два неравенства:  $n - k \leq m \leq \binom{n - k + 1}{2}$ , причём обе оценки достижими.

Доказательство.

**верхняя)** Пусть  $G$  -  $n$ -граф с  $k$  компонентами связности с максимальным числом рёбер. Очевидно, что  $G$  - дизъюнктное объединение полных графов ( $G = K_{n_1} \cup \dots \cup K_{n_k}$ ). Пусть  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ .

Покажем, что  $n_2 = n_3 = \dots = n_k = 1$ .

Пусть не так ( $n_2 > 1$ ). Рассмотрим  $v \in K_{n_2}$ . Рассмотрим граф  $G' = (K_{n_1} + v) \cup (K_{n_2} - v) \cup K_{n_3} \cup \dots \cup K_{n_k}$  - удалили  $n_2 - 1$  рёбёр. Добавили  $n_1$  ребёр. Получили, что в  $G'$  добавили больше, чем удалили. Противоречие к предположению в самом начале.

В  $G$  у нас  $\binom{n - k + 1}{2}$  рёбер.

**нижняя)** Индукция по числу рёбер:

$m = 0$  - всё очевидно, равенство есть.

Пусть  $m > 0$  и для всех графов с меньшим числом рёбер наше неравенство верно.

Рассмотрим  $(n, m)$ -граф  $G$  с  $k$  комп. связности. Возьмём некоторое  $e \in EG$  и безжалостно удалим его:  $G_1 = G - e$ .  $G_1$  -  $(n, m - 1)$ -граф с  $k_1$  компонентами связности. По лемме 2.7 из лекций (пункт 70) имеет, что  $k_1 \leq k + 1$ . По индукционному предположению  $n - k_1 \leq m - 1 \Rightarrow m \geq n - k_1 + 1 \geq n - k + 1 - 1 = n - k$ .

Пример такого графа:  $G = O_{k-1} \cup P_{n-k}$ .

□

## 20.2 Эксцентризитет, радиус, диаметр, центр графа.

Эксцентризитет вершины  $v$ :  $e(v) = \max_{u \in VG} d(v, u)$ .

Радиус графа  $G$ :  $r(G) = \min_{v \in VG} e(v)$ .

Диаметр графа  $G$ :  $d(G) = \max_{v \in VG} e(v)$ .

Вершина  $v \in VG$  |  $e(v) = r(G)$  называется **центральной** вершиной.

Множество всех центральных вершин - **центр** графа.

## 21 Лес, дерево, характеристизация деревьев.

### 21.1 Определения

Ациклический граф — **лес**

Ациклический связный граф — **дерево**.

### 21.2 Характеризация деревьев

$(n, m)$ -граф  $G$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $G$  — дерево.
2.  $G$  — связный,  $m = n - 1$
3.  $G$  — ациклический,  $m = n - 1$
4. В графе  $G$  любые 2 вершины связаны единственной простой цепью.
5.  $G$  — ациклический и добавление одного нового ребра приводит к появлению ровно одного простого цикла.

*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$ ) Докажем, что в любом  $(n, m)$ -дереве  $m = n - 1$ . Индукцией по  $m$ :

$$m = 0 \Rightarrow n = 1.$$

Пусть  $G$  - произвольное  $(n, m)$ -дерево и для всех деревьев с меньшим числом рёбер наше равенство выполняется.

Возьмём некоторое ребро  $e \in EG$ .  $e$  не принадлежит никакому циклу, т.к. в нашем графе их нет лемма 2.7 из лекций (пункт 70)  $\Rightarrow$  в  $G - e$  ровно 2 компоненты связности  $G_1$  и  $G_2$  - деревья  $(n_1, m_1)$  и  $(n_2, m_2)$ . По индукционному предположению  $m_1 = n_1 - 1$ ,  $m_2 = n_2 - 1$ . Тогда для нашего графа имеем  $m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$ .

$2 \Rightarrow 3$ ) Пусть в графе  $G$  есть цикл, рассмотрим некоторое ребро  $e$  из этого цикла лемма 2.7 из лекций (пункт 70)  $\Rightarrow$   $G - e$  — связный и является  $(n, n - 2)$ -графом, что противоречит оценке числа рёбер (пункт 20.1).

$3 \Rightarrow 4$ ) Докажем, что  $G$  — связный

$G$  — ациклический  $\Rightarrow G$  — лес.

Пусть в  $G$   $k$  компонент связности

Каждая компонента связности  $G_1, \dots, G_k$  — дерево

$G_i$  —  $(n_i, m_i)$ -дерево

Т.к. доказано, что из  $1 \Rightarrow 2$ , то  $m_i = n_i - 1$

$n - 1 = m = m_1 + \dots + m_k = n_1 + \dots + n_k - k = n - k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$  граф связен

$\Rightarrow \forall u, v \exists (u, v)$  — цепь.

Пусть  $\exists u, v$  т.ч. в  $G$  есть две различные  $(u, v)$ -простые цепи  $L_1$  и  $L_2$

Пусть  $x$  — последняя вершина общего начала путей  $L_1$  и  $L_2$  начиная с  $u$ ,  $y$  - следующая на цепи  $L_1 \Rightarrow G - xy$  - остается связным  $\xrightarrow{\text{лемма 2.7 из лекций (пункт 70)}}$   $xy$  принадлежит некоторому циклу  $\Rightarrow$  противоречие с ацикличностью.

4  $\Rightarrow$  5) В любом цикле 2 вершины соединены не менее 2 различными путями  $\Rightarrow$  в  $G$  нет циклов.

Пусть  $u, v \in VG$  и  $uv \notin EG$ , тогда единственная  $(u, v)$ -цепь в  $G$  вместе с ребром  $uv$  даёт единственный простой цикл

5  $\Rightarrow$  1) Докажем, что  $G$  связный.

От противного: пусть  $G$  не связен. Пусть  $u$  и  $v$  в разных компонентах связности  $\Rightarrow G + uv$  не имеет циклов (по лемме 2.7 из лекций (пункт 70)). Противоречие.

□

## 22 Центр дерева. Остовное дерево, остов.

### 22.1 Центр дерева.

Центр любого дерева состоит из одной или двух смежных вершин.

*Доказательство.*

$n = 1$  — очевидно.

$n = 2$  — аналогично.

Пусть  $T$  - дерево порядка  $n \geq 2$ . Рассмотрим дерево  $T'$ , которое получается из  $T$  удалением всех висячих вершин.

$\forall v \in T' \quad e_{T'}(v) = e_T(v) - 1 \Rightarrow$  центры  $T$  и  $T'$  совпадли.

Продолжаем, пока порядок дерева  $> 2$ .

□

### 22.2 Остовное дерево, остов.

$G$  — связный. Оставной подграф графа  $G$ , являясь деревом, называется, как ни странно, оставным деревом графа  $G$ .

Оставной подграф графа  $G$ , являющийся дизъюнктным объединением оставных деревьев его компонент связности - **остов** графа  $G$ .

## 23 Код Прюфера помеченного дерева. Теорема Кэли.

### 23.1 Код Прюфера помеченного дерева.

Пусть  $T$  - помеченное дерево  $VT = \{1, \dots, n\}$ . Сопоставим ему  $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ :

1. Полагаем  $T_0 = T$
2.  $\forall i \quad 1 \leq i \leq n-1$  в  $T_{i-1}$  находим висячую вершину  $x_i$  с наименьшим номером.  $a_i$  — номер её соседа  
 $T_i = T_{i-1} - x_i$   
 $(a_1, \dots, a_{n-1})$  — код Прюфера

## 23.2 Теорема Прюфера

Если  $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \{1, 2, \dots, n\}^{n-1}$ ,  $a_{n-1} = n$ , то  $\exists!$  помеченное дерево  $T$ , для которого  $a$  — код Прюфера.

**Доказательство:**

Построим  $b = (b_1, \dots, b_{n-1})$

$b_i = \min\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1}\}$

рассмотрим граф  $T$  т.ч.

$VT = \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$ET = \{(a_i, b_i) | 1 \leq i \leq n-1\}$

Докажем, что:

1)  $T$  — дерево

2)  $a$  — код Прюфера дерева  $T$

1) Рассмотрим последовательность  $T_0 = T, T_1, \dots, T_{n-1}$

$T_i = T_{i-1} - b_i; 1 \leq i \leq n-1$

$T_{n-1} = K_1$  — дерево

По построению  $\{1, 2, \dots, n\} = \{b_1, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\}$

$\forall i \quad VT_{i-1} = \{b_i, b_{i+1}, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\}$

(\*)  $ET_{i-1} \subseteq \{a_i b_i, a_{i+1} b_{i+1}, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$

$b_i \neq b_j; \quad i \neq j$

$b_i \notin \{a_i, \dots, a_{n-1}\}$

$b_i$  — висячая в  $T_{i-1}$

$T_i = T_{i-1} - b_i$

Если  $T_i$  дерево, то  $T_{i-1}$  тоже дерево

$T_n$  дерево  $\Rightarrow T_0$  дерево  $\Rightarrow T$  дерево

Т.к.  $T_{i-1}$  дерево, то из (\*) следует, что

$ET_{i-1} = \{a_i b_i, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$

Получается  $\forall x \in VT_{i-1} \quad deg_{T_{i-1}} x$  — количество появлений  $x$  в  $b_i, \dots, b_{n-1}, a_i, \dots, a_{n-1}$

$deg_{T_{i-1}} x > 1 \Leftrightarrow x \in \{a_i, \dots, a_{n-1}\}$

$\Downarrow$

$\{b_i, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{a_i, \dots, a_{n-2}\}$  — множество висячих вершин в  $T_{i-1}$

$a_i = \min\{1, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-2}\} = \min\{b_1, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-2}\} = \min\{b_i, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{a_i, \dots, a_{n-2}\}$

$b_i$  — висячая вершина в  $T_{i-1}$  с наименьшим номером  $\Rightarrow$  Декодирование даёт исходное дерево

□

## 23.3 Теорема Кэли.

Число помеченных деревьев на  $n$  вершинах равно  $n^{n-2}$

**Доказательство:** Следствие из теоремы Прюфера

□

## 24 Числа вершинной и реберной связности, их связь. Точка сочленения, характеристика точек сочленения. Мост, характеристика мостов.

### 24.1 Числа вершинной и реберной связности, их связь.

Число вершинной связности  $\alpha(G)$  — наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу, либо одновершинному.

Число реберной связности  $\lambda(G)$  графа  $G$  порядка  $n > 1$  — минимальное количество ребер, удаление которых делает граф несвязным.

$$\delta(G) = \min_{v \in VG} (\deg(v)).$$

$$\forall G \quad \alpha(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

**Доказательство:**

оценка сверху: берём нашу вершинку с минимальной степенью и удаляем все смежные ей ребра.

оценка снизу:

для несвязного графа  $0 \leq 0$

для графа с мостом:  $\lambda(G) = 1$ . и хотя бы одна вершина соединённая с мостом является точкой сочленения (если  $e$  — мост в связном графе, то его концы — либо точки сочленения, либо висячая вершина)

Если  $\lambda(G) > 1$ :

$$E_1 \subseteq EG, |E_1| = \lambda, G - E_1 \text{ — не связен.}$$

$$\text{Пусть } e \in E_1, E'_1 = E_1 - \{e\}$$

Для каждого ребра из  $E'_1$  выберем один конец не инцидентный  $e$  и удалим его.

$$\text{Получим множество } V_1 = \{h \mid h \in E_1 \setminus \{e\} \text{ и } h \text{ не инц. } e\}$$

$$|V_1| \leq |E_1| - 1$$

$$G' = G - V_1$$

$$1) G' = G - V_1 \text{ — не связный} \Rightarrow \alpha(G) \leq |V_1| \leq |E_1| - 1 = \lambda(G) - 1$$

$$2) G' = G - V_1 \text{ — связный} \Rightarrow e \text{ — мост в } G' \Rightarrow \alpha(G') = \lambda(G') = 1 \Rightarrow \exists \text{ точка сочленения } x \text{ в } G'.$$

$$V_1 \cup \{x\}: G - (V_1 \cup \{x\}) \text{ — несвязный}$$

$$\alpha(G) \leq |V_1 \cup \{x\}| = |V_1| + 1 \leq |E_1| = \lambda(G)$$

□

### 24.2 Точка сочленения, характеристика точек сочленения.

$x \in VG$  — точка сочленения, если в  $G - x$  больше компонент связности чем в  $G$

Характеризация точек сочленения. В связном графе следующие утверждения эквивалентны:

1.  $x$  — точка сочленения графа  $G$
2.  $\exists$  разбиение  $VG \setminus \{x\} = U \sqcup W : \forall a \in U, \forall b \in W \forall$  простая  $(a, b)$ -цепь содержит  $x$ .
3.  $\exists a, b \in VG \setminus \{x\}$ : любая простая  $(a, b)$ -цепь содержит  $x$ .

**Доказательство:**

1  $\Rightarrow$  2)  $G - v$  — не связный. А — одна компонента, В — остальные. значит, для любой пары вершин из эти множеств не существует простой цепи, следовательно в  $G$  любая цепь проходит через  $v$

2  $\Rightarrow$  3) Очевидно

3  $\Rightarrow$  1) Если удалить  $x$ , то все простые цепи  $(a, b)$ -цепи исчезнут и  $a, b$  никак не будут связаны  $\Rightarrow$  граф будет несвязным  $\Rightarrow x$  — точка сочленения

□

### 24.3 Мост, характеристика мостов.

$e \in EG$  — мост, если  $G - e$  имеет больше компонент связности чем  $G$

Характеризация мостов. В связном графе следующие утверждения эквивалентны:

1.  $e$  — мост в  $G$
2.  $\exists$  разбиение  $VG = U \sqcup W : \forall a \in U, \forall b \in W \forall$  простая  $(a, b)$ -цепь содержит  $e$ .
3.  $\exists a, b \in VG \setminus \{x\}$ : любая простая  $(a, b)$ -цепь содержит  $e$ .
4. ребро  $e$  не принадлежит простому циклу

**Доказательство:**

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$  — аналогично характеристики точек сочленения

$1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$  — лемма 2.7 из лекций (пункт 70)

□

## 25 Характеризация двусвязных графов. Блок, bc-дерево графа.

### 25.1 Характеризация двусвязных графов.

Для связного графа порядка  $n > 2$  эквивалентны:

1.  $G$  — двусвязный
2.  $\forall 2$  вершины принадлежат простому циклу
3.  $\forall$  вершина и  $\forall$  ребро принадлежат простому циклу
4.  $\forall 2$  ребра принадлежат простому циклу
5.  $\forall$  двух вершин  $x, y \in VG, \forall e \in EG$  существует простая  $(x, y)$ -цепь содержащая  $e$
6.  $\forall x, y, z \in VG \exists$  простая  $(x, y)$ -цепь содержащая  $z$

**Доказательство:**

$1 \Rightarrow 2$ )

Пусть  $x, y \in VG$ ;

$u$  — множество всех вершин графа  $G$ , принадлежащих хотя бы одному простому циклу проходящему через  $x$

Если  $y \in u \Rightarrow \square$

Если  $y \notin u \Rightarrow u \subset VG \Rightarrow VG \setminus u \neq \emptyset$

Но т.к.  $G$  — связный  $\Rightarrow \exists a \in u$  и  $b \in VG \setminus u$  т.ч.  $ab \in EG$

По лемме 2.14 из лекций.  $\exists$  простая  $(x, b)$ -цепь не содержащая  $a$

По построению  $\exists$  простой цикл  $C$  проходящий через  $x, a$

Пусть  $z$  — 1-я, начиная от  $b$  общая вершина  $(b, x)$ -цепи из цикла  $C$

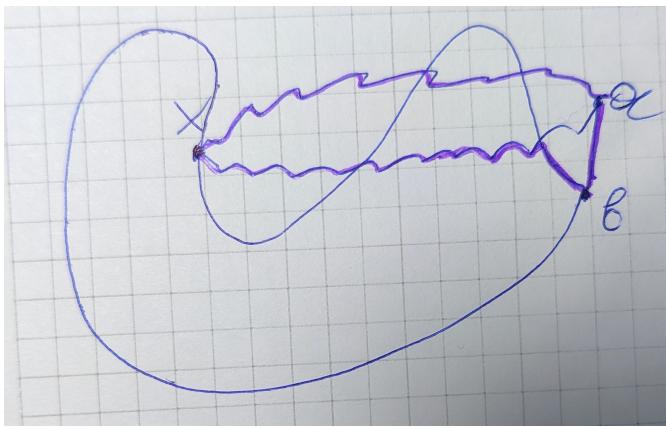
Тогда  $(b, z)$  — подцепь, ребро  $(a, b)$  и часть цикла  $C$  между вершинами  $z$  и  $a$ , содержащая  $x$  образуют простой цикл  $\Rightarrow b \in u$ . Противоречие.  $\Rightarrow y$  обязан принадлежать  $u$

$2 \Rightarrow 3$ )

Есть вершина  $x$  и ребро  $ab$

Если цикл содержащий  $a$  и  $x$  содержит и  $b$ , то доказано

Если цикл содержащий  $a$  и  $x$  не содержит  $b$ , то см. рисунок



Остальное в качестве упражнения.

□

## 26 Теорема Менгера

Минимальное число вершин ( $m$ ), разделяющих две несмежные вершины  $x$  и  $y$  равно максимальному ( $M$ ) числу попарно непересекающихся простых  $(x, y)$ -цепей

*Доказательство.* Наибольшее число попарно непересекающихся простых  $(x, y)$ -цепей не больше минимального числа вершин, разделяющих  $x$  и  $y$  (поскольку для разделения  $x$  и  $y$  необходимо удалить по вершине в каждой из этих  $(x, y)$ -цепей)

Теперь докажем что  $m \leq M$  (Если наименьшее число вершин, разделяющих  $x$  и  $y$  в графе равно  $m$ , то существует  $m$  попарно непересекающихся простых  $(x, y)$ -цепей)

При  $m = 1$  — очевидно.

Пусть для некоторого  $m > 1$  — неверно (т. е. минимальное разделяющее  $x$  и  $y$  мн-во вершин  $S$  имеет мощность  $m$ , и не  $\exists m$  попарно непересек.  $(x, y)$ -цепей (\*)). И пусть это  $m$  наименьшее.  $G$  — граф с наименьшим числом вершин, для которого выполнено (\*)

Будем удалять из  $G$  рёбра до тех пор, пока не получим некоторый граф  $H$  такой, что  $\forall e \in EG$  для разделения  $x$  и  $y$  в графе  $H$  надо  $m$  вершин, а в графе  $H - e$  надо  $m - 1$  вершину.

Т.о. имеется  $H$  и  $m$  такие, что теорема верна для

1.  $\forall m' < m$
2.  $\forall$  графа порядка  $n < |VH|$
3.  $\forall$  графа  $H - e \forall e \in EH$

(док-во ниже) □

### 26.1 Утверждение 1

В гарфе  $H$  нет вершин, которые одновременно смежны с  $x$  и  $y$

*Доказательство.* Пусть  $w$  смежно с  $x$  и  $y$ . Тогда в  $H - w$  для разделения  $x$  и  $y$  достаточно  $m - 1$  вершины по пункту 2 в  $H - w$  существует  $m - 1$  попарно непересекающихся простых  $(x, y)$ -цепей. Добавляем цепь  $x, w, y \Rightarrow m$  попарно непересекающихся простых  $(x, y)$  цепей в графе  $H$ . Противоречие с выбором графа  $H$  □

## 26.2 Утверждение 2

Мн-во вершин  $S$  разделяет  $x, y$  и  $|S| = m \Rightarrow S$  смежно с  $x$  или с  $y$

*Доказательство.*  $\forall$  простая цепь между  $x$  и  $z \in S$ , не проходящая через др. вершины из  $S - (x, S)$ -цепь  
 $\forall$  простая цепь между  $z \in S$  и  $y$ , не проходящая через др. вершины из  $S - (S, y)$ -цепь

$P_x$  — мн-во  $(x, S)$ -цепей

$P_y$  — мн-во  $(S, y)$ -цепей

$\forall$  простая  $(x, y)$ -цепь начинается с цепи из  $P_x$  и заканчивается цепью из  $P_y$

$P_x$  и  $P_y$  пересек. по вершинам из  $S$  (точнее, мн-во вершин из  $P_x$  и мн-во вершин из  $P_y$ )

Заменим цепи из  $P_x$  на рёбра. Кол-во вершин уменьшилось  $\Rightarrow \exists m$  попарно непересек. цепей  $\Rightarrow$  в  $P_y$  цепи не пересекаются

Заменим цепи из  $P_y$  на рёбра. Кол-во вершин уменьшилось  $\Rightarrow \exists m$  попарно непересек. цепей  $\Rightarrow$  в  $P_x$  цепи не пересекаются

Противоречие

Если рассуждать более формально:

Пусть мн-во  $VP_x \setminus S \neq \{x\}; VP_y \setminus S \neq \{y\}$

$G_1 = (H - (VP_x \setminus (S \cup \{x\})) - EP_x + xs_1 + xs_2 + \dots + xs_m)$

$|VG_1| < |VH|$

$|S| = m \Rightarrow \exists m$  попарно непересек. прост.  $(x, y)$ -цепей в  $G_1$

Все они начинаются с ребра  $xs_i$  и заканчиваются цепью  $R_i^y$  — простой  $(S, y)$  — цепью

$R_i^y \in P_y$  попарно не пересекаются

Аналогично с др. стороны

Рассм.  $G_2 = (H - (VP_y \setminus (S \cup \{y\})) - EP_y + s_1y + s_2y + \dots + s_my)$

$|VG_2| < |VH| \Rightarrow \exists m$  попарно непересек.  $(x, y)$ -цепей в  $G_2$

Они начинаются с  $R_i^x$  и заканчиваются ребром  $s_iy$

$R_i^x \in P_x$  попарно не пересекаются

$\{R_i^x\}$  и  $\{R_i^y\}$  пересекаются только по  $S$

$\forall i R_i^x \cup R_i^y = m$  попарно непересекающихся  $(x, y)$ -цепей в  $H$

Противоречие

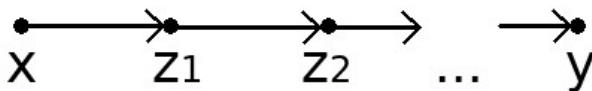
□

*Доказательство. (продолжение)*

рассм. цепь наим. длины м/у  $x$  и  $y$ :

1. по утв. 1 её длина не меньше 3

2. по утв. 2  $S$  смежно с  $x$



Вершина  $z_1 \in S$

С др. стороны,  $z_2 \neq y$  и  $z_2 \notin S$

Объединим вершины  $z_1$  и  $z_2$  в одну  $\Rightarrow$  получаем граф  $G'$  с меньшим числом вершин, также  $S'$  — разделяющее мн-во мощности  $m \Rightarrow$  в  $G'$   $\exists m$  попарно непересек.  $(x, y)$ -цепей. Разделим  $z_1$  и  $z_2$  обратно, и получим  $m$  попарно непересек. цепей в графе  $H$

Противоречие

□

□

## 27 Независимое множество. Оценки числа независимости. Вершинное покрытие. Связь чисел покрытия и независимости.

### 27.1 Независимое множество.

Мн-во вершин  $W \subseteq VG$  называется **независимым**, если  $\forall w, u \in W \quad uw \notin EG$ .

Независимое мно-во **тупиковое (максимальное)**, если оно не является собственным подмножеством другого независимого мно-ва.

Независимое мно-во наибольшей мощности - **наибольшее** независимое мно-во. Мощность такого мно-ва называется **числом независимости**  $\alpha_0(G)$

### 27.2 Оценки числа независимости.

$$\forall G \quad \alpha_0(G) \geq \sum_{v \in VG} (1 + \deg(v))^{-1}$$

*Доказательство.* Пусть  $G = K_n$ . Тогда  $\alpha_0(K_n) = 1$ .

$$\sum_{v \in VG} n^{-1} = \frac{n}{n} = 1.$$

Индукция по числу вершин для  $G \neq K_n$ :

$|VG| \leq 2$  - всё очевидно.

Пусть  $|VG| = n \geq 3$ , для любого графа с меньшим числом вершин теорема верна,  $G \neq K_n$ .

Выбираем  $x$  - вершинка  $G$  наименьшей степени. Т.к.  $G \neq K_n$ , то  $x \cup N(x) \neq VG$ .

$$G' = G - x - N(x). \text{ По индукционному предположению в } G': \alpha_0(G') \geq \sum_{v \in VG'} (1 + \deg(v))^{-1}.$$

Пусть  $M' \subseteq VG'$ ,  $M'$  - независимо в  $G'$ ,  $|M'| = \alpha_0(G')$ .

$$v \cup M' \text{ - независимо в } G \Rightarrow \alpha_0(G) \geq |x \cup M'| = \alpha_0(G') + 1.$$

$$\forall v \in VG' \quad \deg_{G'}(v) \geq \deg_G(v)$$

$$\sum_{v \in VG'} (1 + \deg_{G'}(v))^{-1} \geq \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1}$$

$\forall v \in N(x) \quad \deg_G(v) \geq \deg_G(x)$  (т.к.  $x$  — вершина с наименьшей степенью в  $G$ )

$$\sum_{v \in N(x)} (1 + \deg_G(v))^{-1} \leq \sum_{v \in N(x)} (\deg_G(x) + 1)^{-1} = \frac{\deg_G(x)}{\deg_G(x) + 1}$$

Берём неравенства 1 и 3 строчками выше и подставляем их куда-то в начало:

$$\alpha_0(G) \geq 1 + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} \geq \frac{\deg_G(x) + 1}{\deg_G(x) + 1} + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} = \frac{\deg_G(x)}{1 + \deg_G(x)} + (1 + \deg_G(x))^{-1} +$$

$$\sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} \geq \sum_{v \in N(x)} (\deg_G(v) + 1)^{-1} + (1 + \deg_G(x))^{-1} + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} = \sum_{v \in VG} (1 + \deg_G(v))^{-1} \quad \square$$

### 27.3 Вершинное покрытие.

Вершина покрывает рёбра, инцидентные ей. Мно-во вершин, покрывающих все рёбра - **покрытие** (вершинное покрытие).

Покрытие  $W$  - тупиковое (минимальное), если  $\forall V \subset W, V$  - не покрытие. Покрытие наименьшей мощности - наименьшее покрытие и его мощность Обозначается  $\beta_0(G)$  - число покрытия графа  $G$ .

### 27.4 Связь чисел покрытия и независимости.

Для  $\forall G$ :  $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |VG|$

*Доказательство:*

Берём  $S$  — независимое:  $|S| = \alpha_0(G)$

По лемме 2.19 из лекций ( $S \subseteq VG$  — независимое  $\Leftrightarrow VG \setminus S$  — вершинное покрытие)

$VG \setminus S$  — вершинное покрытие

$$\beta_0(G) \leq |VG \setminus S| = |VG| - \alpha_0(G) \Rightarrow \alpha_0(G) + \beta_0(G) \leq |VG|$$

Теперь, пусть  $P$  — вершинное покрытие:  $|P| = \beta_0(G)$

По лемме 2.19  $VG \setminus P$  — независимое множество

$$\alpha_0(G) \geq |VG \setminus P| = |VG| - \beta_0(G) \Rightarrow \alpha_0(G) + \beta_0(G) \geq |VG|$$

$\Downarrow$

$$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |VG|$$

□

## 28 Паросочетание, реберное покрытие. Теорема о связи чисел паросочетания и реберного покрытия. Совершенное паросочетание.

### 28.1 Паросочетание, реберное покрытие.

$M \subseteq EG$  — паросочетание, если  $\forall e, h \in M$   $e, h$  — не смежны.

Наибольшее по мощности паросочетание — наибольшее паросочетание. Его мощность — число паросочетания  $\alpha_1(G)$

$Q \subseteq EG$  — рёберное покрытие, если оно покрывает все вершины

Наименьшее по мощности рёберное покрытие — мин. рёберное покрытие. Его мощность — число рёберного покрытия  $\beta_1(G)$

### 28.2 Теорема о связи чисел паросочетания и реберного покрытия.

$\forall G$  без изолированных вершин

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) = |VG|$$

**Доказательство:**

Пусть  $\alpha_1 = \alpha_1(G)$ ,  $\beta_1 = \beta_1(G)$ ,  $|VG| = n$

Докажем:  $\alpha_1 + \beta_1 \leq n$     $\alpha_1 + \beta_1 \geq n$

1. Пусть  $M$  — наибольшее паросочетание в  $G$ . Пусть  $V'$  — мно-во вершин, не покрытых  $M$ .

Либо  $V'$  — пусто, либо  $V'$  — независимое мно-во вершин (т.к. иначе  $M$  — не наибольшее паросочетание). Для каждой вершины из  $V'$  выберем ребро, инцидентне ей. получаем  $E'$ . (если  $V' = \emptyset \Rightarrow E' = \emptyset$ ).

Поскольку  $V'$  — независимо, то  $|E'| = |V'|$ .

По построению  $V'$ :  $|V'| = n - 2 \cdot \alpha_1$

$E' \cup M$  — рёберное покрытие  $\beta_1 \leq |E' \cup M| = |E'| + |M| = n - 2\alpha_1 + \alpha_1 = n - \alpha_1$ .

2. Пусть  $P$  — наименьшее рёберное покрытие графа  $G$ .  $G' = G[P]$ . В  $G'$  нет циклов (были бы, могли бы убрать одно ребро)

Получаем, что  $G'$  — ациклический граф, т.е.  $G'$  — лес

Каждая компонента связности графа  $G'$  — дерево. Пусть  $t$  компонент связности и число рёбер  $k_1, k_2, \dots, k_t$ .

В каждой компоненте выберем по одному ребру  $\Rightarrow$  получим паросочетания  $M$ .  $|M| = t$ .

Имеем,  $t \leq \alpha_1$ . Получаем, что  $n = \sum_{i=1}^t (k_i + 1) = t + \sum_{i=1}^t k_i = t + \beta_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$ .

□

### 28.3 Совершенное паросочетание.

Совершенное паросочтание — паросочтание, являющееся рёберным покрытием.

## 29 Терема Кенига о числе паросочетания для двудольных графов. Теорема Кенига о $(0,1)$ -матрицах.

### 29.1 Терема Кенига о числе паросочетания для двудольных графов.

Для любого двудольного графа  $G$ :  $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$ .

*Доказательство.* Пусть  $G$  — граф. Докажем, что  $\alpha_1(G) \geq \beta_0(G)$ .

Обозначим  $\beta_0 = \beta_0(G)$

Удаляем рёбра из  $G$  пока не получим некоторый граф  $G'$ :  $\beta_0(G') = \beta_0$  и  $\forall e \in EG' \quad \beta_0(G' - e) = \beta_0 - 1$ .

Докажем утверждение, что в  $G'$  нет смежных рёбер.

Пусть это гон и в  $\exists e, g \in EG'$ :  $e$  и  $g$  смежны в  $G'$ , общая вершина  $v$ . В графе  $G' - e$  существуют вершини покрытие  $S_e \quad |S_e| = \beta_0 - 1$  и концы ребра  $e$  не лежат в  $S_e$ .

В графе  $G' - g$  существует вершинное покрытие  $S_g$  и концы ребра  $g$  не принадлежат  $S_g$ .

Рассмотрим порождённый подграф графа  $G'$ :  $G'' = G'[\{v\} \cup (S_e \setminus S_g) \cup (S_g \setminus S_e)]$

$|S_e \cap S_g| = t \quad |VG''| = 1 + \beta_0 - 1 - t + \beta_0 - 1 - t = 1 + 2(\beta_0 - 1) - 2t$

$G''$  подграф графа  $G \Rightarrow G''$  - двудольный.

Пусть  $A$  - меньшая доля графа  $G$ .

$|A| \leq \frac{1}{2}|VG''| = \beta_0 - 1 - t$ .  $A$  - вершинное покрытие  $G''$ .

Покажем, что  $A' = A \cup (S_e \cup S_g)$  - вершинное покрытие  $G'$ .

Возьмём произвольное ребро. Пусть  $h \in EG'$ .

1.  $h \in \{e, g\}$

$e, g \in EG'' \Rightarrow e, g$  покрыты мно-ом  $A$ , а значит и  $A'$ .

2.  $h \notin \{e, g\}$

Тогда  $h$  покрывается как  $S_e$ , так и  $S_g$ .

(a)  $x \in S_g \quad x \in S_e \Rightarrow x \in S_g \cap S_e \Rightarrow$  покр.  $A'$ .

(b) один конец принадлежит  $S_e \setminus S_g$ , а другой:  $S_g \setminus S_e \Rightarrow h \in EG'' \Rightarrow h$  покрывается  $A$ .

Следовательно  $\beta_0(G') \leq |A'| \leq |A| + |S_e \cap S_g| \leq \beta_0 - 1 - t + t = \beta_0 - 1$  - противоречие с выбором графа  $G'$  (противоречие с тем, что существуют 2 смежных ребра).

Граф  $G'$  состоит из независимых рёбер.  $\beta_0(G') = \alpha_1(G')$   $\beta_0(G) = \beta_0(G') = \alpha_1(G') \leq \alpha_1(G)$ .

Из леммы 2.23( $\forall G \quad \alpha_1(G) \leq \beta_0(G)$ ), это верно т.к. чтобы покрыть все рёбра, надо покрыть и все рёбра паросочетания) следует, что  $\beta_0(G) = \alpha_1(G)$ .  $\square$

### 29.2 Теорема Кенига о $(0,1)$ -матрицах.

Для любой  $(0, 1)$ -матриц максимальное число единиц, никакие 2 из которых не стоят в одном столбце и в одной строке, равно минимальному числу строк и столбцов, содержащих все единицы.

*Доказательство.* Пусть  $G$  - двудольный граф, с долями  $\{v_1, v_2 \dots v_n\}, \{u_1 \dots u_n\}$ . Матрица смежности двудольного графа  $G$ :

$$A(G) = (a_{ij}) \mid a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i u_j \in EG \\ 0, & \text{else} \end{cases} . \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & A \\ \hline A^T & 0 \\ \hline \end{array}$$

Биекция между двудольным графом с долями мощности  $n$  и  $m$  и множеством  $(0,1)$ -матриц размера  $n \times m$ .

Максимальное число единиц, никакие две из которых не стоят в одной строке или столбце равно  $\alpha_1(G)$  для соотв. графа  $G$ .

Минимальное число строк и столбцов, содержащих единицы равно  $\beta_0(G)$  для соотв. графа  $G$ .  $\square$

## 30 Терема Холла о паросочетаниях.

Пусть  $G = (A, B, E)$  - двудольный граф.

В  $G$  существует паросочетание, покр.  $A \Leftrightarrow \forall X \subseteq A \mid N(X) \geq |X|$

*Доказательство.*

$\Rightarrow)$  Если существует  $X \subseteq A : |N(X)| < |X|$ , тогда паросоч., покр.  $X$  не существует: не хватит рёбер.  
А значит нет паросч., покрывающего  $A$ .

$\Leftarrow)$  Док-во индукцией по числу вершин в доле  $A$ :

Если  $|A| = 1$  - очевидно верно

Пусть  $|A| \geq 2$ . Рассмотрим 2 случая:

1.  $\forall X \subset A \mid |X| < |N(X)|$

Выберем ребро  $uv \in E \mid v \in A, u \in B$ .

Рассмотрим новый граф  $G' = G - v - u$ . Обозначим  $A' = A \setminus \{v\}$ .

Пусть  $X \subseteq A'$ .  $|X| < |N_G(X)|$ ,  $|N_{G'}(X)| \geq |N_G(X)| - 1$  ( $-1$  на случай, если  $y$  входит в  $N(X)$ )  
 $|X| < |N_{G'}(X)| + 1 \Rightarrow |X| \leq |N_{G'}(X)|$ .

По индукционному предположению в графу  $G'$  существуют паросчитания, покрывающие  $A' \Rightarrow$  объединим его с ребром  $vu \Rightarrow$  получаем паросчитание в  $G$  покр.  $A$ .

2.  $\exists A' \subset A \mid |A'| = |N(A')|$

Рассмотрим 2 порождённых подграфа:

$G_1 = G[A' \cup N(A')]$

$G_2 = G - A' - N_G(A')$

Покажем, что  $G_1$  и  $G_2$  удовлетворяют условиям теоремы.

В  $G_1$ :  $\forall X \subseteq A' \mid N_G(X) = N_{G'}(X)$

$|X| \leq |N_G(X)| = |N_{G'}(X)| \Rightarrow G_1$  удовлетворяет условию теоремы.

Пусть  $X \subseteq A \setminus A'$ . Рассмотрим  $X \cup A'$  в  $G$ .

$|X \cup A'| \leq |N_G(X \cup A')| \leq |N_{G_2}(X)| + |N_G(A')|$

Вспоминаем, что  $|A' \cup X| = |X| + |A'|$

$|A'| = |N_G(A')| \Rightarrow |X| \leq |N_{G_2}(X)|$

По индукционному предположению в  $G_1$  существует паросоч., покрывающ.  $A'$ , в  $G_2$  существует паросоч., покрывающ.  $A \setminus A'$ . Следовательно, их объединение - искомое паросоч., покр.  $A$ .  $\square$

## 31 Теорема Фробениуса о свадьбах. Системы различных представителей, теорема Холла о СРП.

### 31.1 Теорема Фробениуса о свадьбах.

Двудольный граф  $G = (A, B, E)$  имеет совершенное паросочетание  $\Leftrightarrow |A| = |B|$  и для любого  $X \subseteq A$   $|N_G(X)| \geq |X|$ .

**Доказательство:**

В  $G$   $\exists$  совершенное паросочетание  $\Leftrightarrow |A| = |B|$  и  $\exists$  паросочетание покр.  $A$   $\Leftrightarrow$  по т. Холла  $|A| = |B|$  и  $\forall X \subseteq A$   $|N(X)| \leq |X|$

□

### 31.2 Системы различных представителей

$A = \{a_1, \dots, a_m\}$  — некоторое множество

$S = \{S_1, \dots, S_n\}; S_i \subseteq A \quad \forall i$ ; — семейство подмножеств множества  $A$

$x = (x_1, \dots, x_n)$  — система различных представителей для  $S$  если:

- 1)  $x_i \in S_i \quad \forall i$ ;
- 2)  $x_i \neq x_j; \quad i \neq j$

### 31.3 теорема Холла о СРП.

$S = (S_1, \dots, S_n)$  имеет СРП  $\Leftrightarrow \forall k; \quad 1 \leq k \leq n \quad \forall \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\} \quad |S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}| \leq k$

**Доказательство:**

$\Rightarrow$ ) Если посмотреть на определение, станет очевидно.

$\Leftarrow$ ) Рассмотрим граф  $G = (A, B, E)$

$A = \{S_1, \dots, S_n\}$

$B = \{a_1, \dots, a_m\}$

$E = \{a_i S_j | a_i \in S_j\}$

Когда  $\exists$  паросочетание покрывающее  $A$ ?

(по т. Холла) когда  $\forall X \subseteq A \quad |N_G(X)| \leq |X| = k$

$|N_G(X)| = |S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}|$

Это условие выполняется  $\Rightarrow \exists$  паросочетание покр.  $A \Rightarrow$  существующее паросочетание определяет СРП

□

## 32 Теорема об увеличивающей цепи. Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

### 32.1 Определения

$G$  — граф;  $M$  — паросочетание

цепь  $x_1, \dots, x_t$  —  $M$ -чередующаяся  $\Leftrightarrow x_i x_{i+1} \in M \Leftrightarrow x_{i+1} x_{i+2} \notin M \quad \forall i$

$M$ -чередующаяся цепь  $x_0, \dots, x_t$  —  $M$ -увеличивающаяся, если  $x_0$  и  $x_t$  не покрыты рёбрами из  $M$

### 32.2 Теорема об увеличивающей цепи.

$M$  — паросочетание в  $G$

$M$  — наибольшее  $\Leftrightarrow$  в  $G$  нет  $M$ -увеличивающей цепи

**Доказательство:**

$\Rightarrow$ ) Пусть в  $G$  существует  $M$ -увелич. цепь  $P$ . Тогда рассмотрим  $M' = (M \setminus EP) \cup (EP \setminus M)$  – паросочетание (очевидно)

$|M'| = |M| + 1$  – противоречие с тем, что  $M$  наибольшее.

$\Leftarrow$ ) Рассмотрим  $M'$  – пусть это наибольшее паросочетание в  $G$ .

$G' = G[(M \setminus M') \cup (M' \setminus M)]$

$\forall v \in G' \ deg_{G'}(v) \leq 2 \Rightarrow$  каждая компонента связности графа  $G'$  – цикл или цепь.

Если в какой-то компоненте связности  $\exists$  цепь, в которой рёбер 1-го паросочетания больше рёбер другого

$\Rightarrow \exists$  либо  $M$ -увеличивающая цепь (противореч. с нач. усл.), либо  $\exists M'$ -увеличивающая цепь (противореч. с  $M'$ -наиб.)

$\Rightarrow |M| = |M'| \Rightarrow M$  – наибольшее паросочетание

□

### 32.3 Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

$G = (A, B, E)$

1.  $M$  – паросочетание
2.  $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$  – множества непокрытых  $M$  вершин; Организуем максимальный лес  $F$  в  $G$ :
  - (a)  $\forall b \in (VF \cap B) \ deg_F(b) = 2$  и одно из этих 2-х рёбер из  $M$
  - (b)  $\forall$  компонента связности леса  $F$  содержит ровно 1-ну вершину из  $A_1$ . Добавим все оставшиеся вершины из  $A_1$  в качестве одновершинных компонент связности графа  $F$
3. Если  $\exists$  ребро между вершинами из  $B_1$  и  $VF$ , то есть  $M$ -увеличивающая цепь начинающаяся с этого ребра. по пункту 32.2 строим новое паросочетание большей мощности и переходим на шаг 2)
4. Если нет ребра, то  $M$  – наибольшее паросочетание

## 33 Эйлеров цикл, эйлеров граф. Теорема Эйлера. Алгоритм Флёри.

### 33.1 Эйлеров цикл, эйлеров граф.

Цикл, содержащий все рёбра графа – эйлеров.

Граф, в котором есть эйлеров цикл – эйлеров

### 33.2 Теорема Эйлера.

Для связного графа порядка  $n \leq 2$  следующие условия эквивалентны:

1.  $G$  – эйлеров
2.  $\forall v \in VG \ deg v$  – чётна
3. Множество рёбер можно разбить на циклы.

**Доказательство:**

$1 \Rightarrow 2$ ) Эйлеров цикл проходит через  $\forall$  вершину  $v$   $k$  раз и содержит все рёбра  $\Rightarrow deg_G(v) = 2k$

$2 \Rightarrow 3$ ) все вершины чётные  $\Rightarrow$  нет висячих вершин  $\Rightarrow G$  – не дерево  $\Rightarrow$  в нём есть циклы

Пусть  $G_1$  – максимальный подграф графа  $G$ , удовлетворяющий условию 3. Очевидно, что все вершины в нём имеют чётную степень.

$$G_2 = G - EG_1$$

в  $G_2$  все вершины имеют чётную степень (т.к. чёт–чёт=чёт).

Если  $G_2$  пуст, то всё доказали, иначе в нём есть ребра.

Очевидно, что он не дерево, а значит в нём есть цикл. Противоречие с максимальностью  $G_1$ .

$3 \Rightarrow 1)$  Рассмотрим разбиение ребер графа  $G$  на наименьшее число циклов:  $c_1, \dots, c_s$ .

Покажем, что  $s = 1$ :

Пусть не так ( $s > 1$ ).  $\Rightarrow \exists i \neq j \mid c_i$  и  $c_j$  имеют общую вершину, но не имеют общих ребер. Склейм их в один цикл. Противоречие с выбором наименьшего числа циклов  $\Rightarrow s = 1$ . Это и есть Эйлеров цикл.

□

### 33.3 Алгоритм Флёри.

Нахождение эйлерова цикла

0. выбираем произвольную вершину  $\delta$  в графе  $G$ ;  $G' = G$

1. Выбираем ребро  $e$  в графе  $G'$  инцидентное  $\delta$  и не мост (если это возможно).

$G' = G' - e$  и переходим во второй конец  $e$

## 34 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф. Теорема Оре. Теорема Дирака.

### 34.1 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф.

Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется **Гамильтоновым циклом**.

Граф, содержащий Гамильтонов цикл, называется **Гамильтоновым**.

### 34.2 Теорема Оре.

Если для любых двух несмежных вершин  $v, u$  верно  $\deg(v) + \deg(u) \geq |VG|$ , то  $G$  – гамильтонов.

**Доказательство теоремы:**

*Утверждение:*

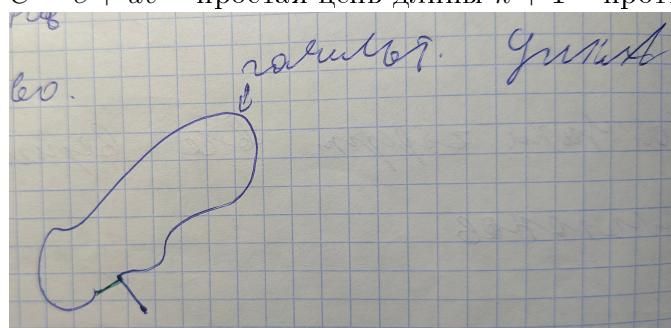
Если в связном графе длина максимальной простой цепи равна  $k$  и в нём существует простой цикл длины  $k+1$ , то этот простой цикл является гамильтоновым.

*Доказательство утверждения:*

Рассмотрим наш цикл  $C_{k+1}$ . Если  $C$  – не гамильтонов,  $G$  – связный  $\Rightarrow \exists u, v: u \in C, v \notin C, uv \in EG$ .

Пусть  $e \in C$ ,  $e$  инцидентно  $u$ .

$C - e + uv$  – простая цепь длины  $k+1$  – противоречие с максимальной длиной цепи.



□

Вернёмся к доказательству теоремы

Рассмотрим самую длинную просущую цепь в графе  $G$

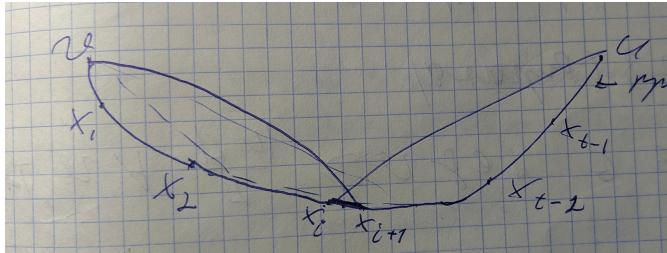
$$v = x_0, \dots, x_t = u$$

Если  $ub \in EG$ , то получим цикл длины  $t + 1$  и он гамильтонов по утверждению

Если  $ub \notin EG$

Знаем что  $\deg(u) + \deg(v) \geq |VG|$

Необходимо доказать что возможна ситуация как на изображении:



А именно:  $\exists x_i, x_{i+1}$  т.ч.  $x_i$  — смежна с  $u$  и  $x_{i+1}$  смежна с  $v$

Поскольку наша цепь длиннейшая, то все вершины, смежные с  $v$  и смежные с  $u$  лежат на этой цепи

$$I = \{i | x_i v \in EG, \quad 2 \leq i \leq t - 1\}$$

$$|I| = \deg(v) - 1$$

$$Y = \{j | x_{j-1} u \in EG, \quad 2 \leq j \leq t - 1\}$$

$$|Y| = \deg(u) - 1$$

$$|Y \cup I| \leq t - 2$$

$$|Y| + |I| = \deg(v) + \deg(u) - 2 \geq |VG| - 2 \geq t + 1 - 2 = t - 1$$

$$\text{т.е. } |Y \cup I| < |I| + |Y| \Rightarrow Y \cap I \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\exists i: vx_i, ux_{i-1} \in EG$$

Удаляем из цепи ребро между  $x_{i-1}$  и  $x_i$ , добавляем рёбра  $vx_i, ux_{i-1}$  и получаем цикл длины  $t + 1$

Согласно утверждению, этот цикл является гамильтоновым.

□

## 35 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф. Теорема Хватала-Эрдеша

### 35.1 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф.

Простой цикл, содержащий все вершины графа — гамильтонов

Граф, содержащий гамильтонов цикл — гамильтонов

### 35.2 Теорема Хватала-Эрдеша

Пусть  $G$  — связный граф порядка  $n \geq 3$ . Если  $\alpha(G) \geq \alpha_0(G)$ , то  $G$  — гамильтонов

**Доказательство:**

Если  $G$  нет циклов, то  $G$  — дерево  $\xrightarrow{n \geq 3} \alpha(G) = 1; \alpha_0(G) \geq 2$ . Противоречие.  $\Rightarrow$  в  $G$  есть циклы

Пусть  $C$  — самый длинный простой цикл

Если  $VC = VG$  — □

Если  $VG \setminus VC \neq \emptyset$

Рассмотрим  $G' = G - VC$

Пусть  $H$  — компонента связности  $G'$

$$N_G(H) = \{x \in VG \setminus VH | \exists y \in H : xy \in EG\}$$

$$N_G(H) \subseteq C$$

(\*) Все вершины из  $N_G(H)$  — попарно несмежные по циклу (иначе, есть простой цикл большей длины)

$G - N_G(H)$  — несвязный граф (поскольку есть компонента  $H$  и остальное)

↓

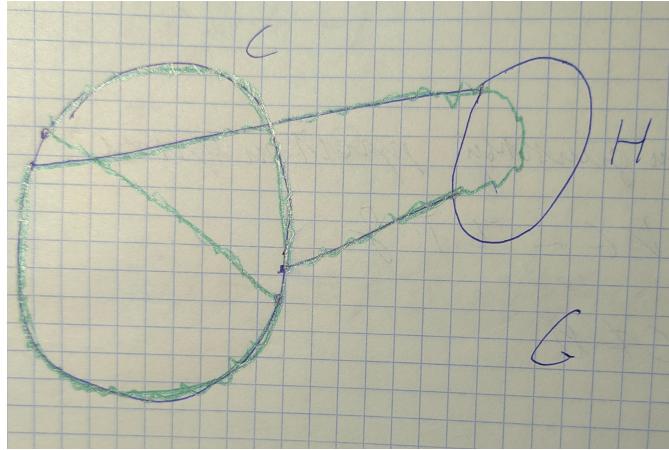
$$\alpha(G) \leq |N_H(H)|$$

$S$  — множество правых соседей по циклу  $C$  вершин из  $N_G(H)$

$$|S| = |N_G(H)|$$

Покажем что  $S$  — независимое множество в  $G$

Допустим что нет  $\Rightarrow$  есть ребро между двумя вершинами из  $S \Rightarrow$  есть более длинный цикл (см. рисунок)



$(*) \Rightarrow S \cap N_G(H) = \emptyset$  (иначе бы какая-то вершина из  $N_G(H)$  являлась бы соседом др. вершине из  $N_G(H)$  по циклу)  $\Rightarrow S \cup \{x\}$  — независимое множество  $\Rightarrow \alpha_0(G) \geq |S \cup \{x\}| = |N_G(H)| + 1 \geq \alpha(G) + 1$

Противоречие с условием теоремы

□

## 36 Укладка графа в пространство. Планарный граф, плоский граф, укладка на сфере.

### 36.1 Укладка графа в пространство.

Граф  $G$  укладывается в про-во  $\alpha$ , если он изоморфен некоторому графу, вершинами которого являются точки этого пространства, а рёбра — кривые без самопересечений, соединяющие соответствующие вершины, при чём выполнены след. усл.:

1. кривая-ребро не содержит др. вершин графа кроме своих концов.
2. 2 кривые-ребра пересекаются только в вершине инцидентной обоим рёбрам

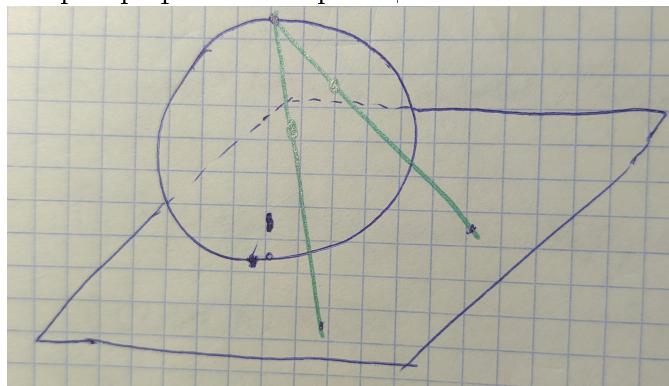
### 36.2 Планарный граф, плоский граф, укладка на сфере.

Граф укладывающийся на плоскость — планарный  
Укладка планарного графа на плоскость — плоский граф

Граф укладывается на плоскость  $\Leftrightarrow$  он планарный

**Доказательство:**

Стереографическая проекция



*Доказательство.*  $\Rightarrow$ ) Пусть граф  $G = (V, E)$  уложен на сферу.

Возьмем точку  $N$  на сфере, не являющуюся вершиной и не принадлежащей никакому ребру. Назовем ее *северным полюсом*. Противоположную  $N$  точку обозначим  $S$  и назовем *южным полюсом*.

Проведем качательную плоскость в южном полюсе. Через любую точку сферы и  $N$  проводим прямую до пересечения с плоскостью, т.е. строим *стереографическую проекцию*.

Таким образом стереографическая укладка графа на сфере — укладка графа на плоскости.

$\Leftarrow$ ) аналогично. □

□

## 37 Формула Эйлера. Непланарность $K_5$ и $K_{3,3}$ . Критерии планарности.

### 37.1 Формула Эйлера.

$G$  — связный плоский граф  $(n, m)$ -граф с  $f$  гранями, тогда  $n - m + f = 2$

**Доказательство:**

Рассмотрим оствное дерево  $T$  для  $G$

В  $T$   $n$  вершин,  $n - 1$  ребро, 1 грань

$$n - (n - 1) + 1 = 2$$

т.е. ф-ла верна

Добавление ребра грань на 2 грани

+1 к грани и граням  $\Rightarrow$  ф-лы остаётся верной

т.о. мы можем прийти к графу  $G$  и сохранить ф-лу

□

### 37.2 Непланарность $K_5$ и $K_{3,3}$ .

$K_5$  и  $K_{3,3}$  не планарны.

**Доказательство:**

1) Непланарность  $K_5$

Для  $\forall$  связного планарного  $(n, m)$ -графа имеет место неравенство:

$$m \leqslant 3n - 6$$

Для  $K_5$   $m = 10, n = 5$

$$10 \leqslant 3 * 5 - 6 \text{ неверно}$$

2) Непланарность  $K_{3,3}$

Для  $K_{3,3}$   $n = 6; m = 9$

Для связного планарного **двудольного** графа имеет место неравенство:

$$m \leqslant 2n - 4$$

$$9 \leqslant 2 * 6 - 4 \text{ неверно}$$

□

### 37.3 Критерии планарности.

#### 37.3.1 Критерий планарности Понtryгина-Куратовского

Граф планарен  $\Leftrightarrow$  в нём нет подграфа гомеоморфного к  $K_5$  или  $K_{3,3}$

**Доказательство:**

$\Rightarrow$ )  $G$  — планарен  $\Rightarrow \forall$  его подграф планарен  $\forall$  гомеоморфные графы для  $\forall$  подграфа планарны  $\Rightarrow K_5$

и  $K_{3,3}$  не могут быть гомеоморфны подграфу

$\Leftrightarrow$  б/д

□

### 37.3.2 Критерий планарности Вагнера

Граф планарен  $\Leftrightarrow$  в нём нет подграфа стягиваемого к  $K_5$  или  $K_{3,3}$

**Доказательство:**

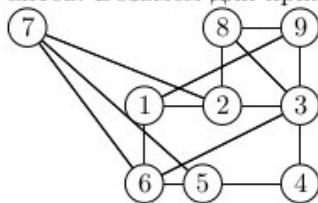
Аналогично критерию Понтрягина-Куратовского

□

## 38 Алгоритм укладки графа на плоскость.

### 3.1.4 Алгоритм укладки графа на плоскость

На каждом шаге укладка цепи и образование новой грани. Работает только для двусвязных графов, без вариантов. Возьмём для примера граф:



Сегмент  $S$  относительно графа  $\tilde{G}$  – подграф графа  $G$  одного из видов:

1. ребро  $e = uv \in EG : e \notin \tilde{G}, u, v \in V\tilde{G}$
2. каждая компонента связности графа  $G - \tilde{G}$ , дополненная всеми рёбрами, связывающими  $\tilde{G}$  с этой компонентой.

Если  $G$  – планарен, следовательно каждый сегмент планарен.

Вершины сегмента  $S$  относительно  $\tilde{G}$ , принадлежащие  $\tilde{G}$  – **контактные** вершины.

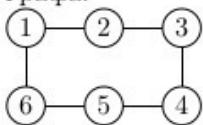
$G$  – двусвязный, следовательно каждый сегмент имеет не менее двух контактных вершин.

У  $\tilde{G}$  есть грани. Допустимой гранью для сегмента  $S$  относительно  $\tilde{G}$  называется грань  $\Gamma$  графа  $\tilde{G}$ , содержащая все контактные вершины графа  $S$ . Множество всех допустимых граней для  $S$ :  $\Gamma(S)$ .

Простую цепь сегмента  $S$ , соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин называют  **$\alpha$ -цепь**.

### 3.1.5 Собственно, сам алгоритм

**шаг 0.** В  $G$  выбираем простой цикл  $C$  и укладываем на плоскость  $\tilde{G} = C$ . Напр., для приведённого выше графа:



**шаг 1.** Берём все грани и сегменты относительно  $\tilde{G}$ . Если много сегментов пусто, переходим к 7.

**шаг 2.** Для каждого сегмента  $S$  определим  $\Gamma(S)$ :

**3** Если  $\exists S : \Gamma(S) = \emptyset \Rightarrow G$  – не планарный. Идём к шагу 4.

**4** Если  $\exists S : |\Gamma(S)| = 1 \Rightarrow$  шаг 6. Иначе 5.

**5** Для некоторого сегмента  $S$  выбираем произвольную допустимую грань  $\Gamma$ .

**6** Помещаем  $\alpha$ -цепь  $L \in S$  в грань  $\Gamma\tilde{G}$  на  $\tilde{G} \cup L$ . К шагу 1.

**7** Построена укладка  $\tilde{G}$  – укладка  $G$ .

### 3.1.6 Основание?

Два сегмента  $S_1$  и  $S_2$  называются **конфликтующими**, если:

1.  $\Theta = \Gamma(S_1) \cap \Gamma(S_2) \neq \emptyset$ .
2. Существуют 2  $\alpha$ -цепи  $L_1 \in S_1$  и  $L_2 \in S_2$ . Нельзя одновременно уложить ни в какую грань  $\Gamma \in \Theta$ .

Пример конфликтующих сегментов:

### 3.1.7 Лемма 33

Если  $S_1$  и  $S_2$  конфликтуют,  $|\Gamma(S_1)| \geq 2$ ,  $|\Gamma(S_2)| \geq 2$ , тогда  $\Gamma(S_1) = \Gamma(S_2)$  и  $|\Gamma(S_1)| = 2$ .

*Доказательство.*

Докажем, что  $\Gamma(S_1) = \Gamma(S_2)$ .

Пусть нет, тогда существует 3 различных грани:  $\Gamma_1 \in \Gamma(S_1)$ ,  $\Gamma_2 \in \Gamma(S_2)$ ,  $\Gamma_3 \in (\Gamma(S_1) \cap \Gamma(S_2))$ .

Каждую  $\alpha$ -цепь  $L_1$  сегмента  $S_1$  можно уложить в  $\Gamma_1$ . Каждую  $\alpha$ -цепь  $L_2$  сегмента  $S_2$  можно уложить в  $\Gamma_2$ . Следовательно каждую пару цепей  $L_1 \in S_1$  и  $L_2 \in S_2$  можно одновременно уложить вне грани  $\Gamma_3 \Rightarrow$  внутри грани  $\Gamma_3$  противоречие с конфликтностью.

□

Построим граф сегментов  $S(\tilde{G})$ :  $VS(\tilde{G})$  и две вершины смежны, если сегменты конфликтуют.

**Частичной укладкой** планарного графа  $G$  называется такой граф, который можно получить из укладки графа  $G$  на плоскость удалением некоторых вершин.

### 3.1.8 Лемма 34

Если после очередного шага алгоритма получили частичную укладку  $\tilde{G}$  планарного графа  $G$  такую, что  $\forall S : |\Gamma(S)| \geq 2$ , то  $S(\tilde{G})$  – двудольный.

*Доказательство.*

От противного. По критерию двудольности в  $S(\tilde{G})$  есть цикл нечётной длины  $S_1, \dots, S_r, S_1$ .

По лемме 33:  $\forall i = 1, \dots, r : \Gamma(S_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ .

$\tilde{G}$  – частичная укладка  $\Rightarrow$  все сегменты могут быть уложены в  $\Gamma_1$  или в  $\Gamma_2$ .

$S_1$  и  $S_r$  укладываются в  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  по очереди  $\Rightarrow$  противоречие с нечётной длиной цикла.

□

### 3.1.9 Теорема 37

Если  $G$  – планарный, то результатом каждого шага алгоритма является частичная укладка  $\tilde{G}$  графа  $G$ .

*Доказательство.*

инд. по числу шагов:

Шаг 0 – укладка цикла

...

Шаг  $n$  –  $\tilde{G}$  – частичная укладка; если  $\exists \Gamma(S) = \emptyset \Rightarrow G$  не планарен

Если  $\exists S : |\Gamma(S)| = 1$

В исходной укладке  $G$   $S$  уложен в  $\Gamma : \Gamma(S) = \{\Gamma\}$

$\Rightarrow$  укладка  $\alpha$ -цепи из  $S$  в  $\Gamma \Rightarrow$  получим частичную укладку

Теперь пусть  $\Gamma(S) \geq 2 \forall S$

Рассм.  $S(\tilde{G})$  – он двудольный. Берём произвольную вершину  $S$ . Если  $S$  изолированная вершина, то  $S$  ни с кем не конфликтует  $\Rightarrow$  укладка  $\alpha$ -цепи из  $S$  не мешает частичной укладке  $\Rightarrow$  всё хорошо

Если  $S$  не изолированная вершина  $\Rightarrow S$  лежит в непустой компоненте связности графа  $S(\tilde{G})$ . В этой к.с. все сегменты содержат 2 одинаковые грани.

$S_1, \dots, S_t$  – вершины этой к.с.

По лемме 33  $\forall i \Gamma(S_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$

По лемме 34  $S(\tilde{G})$  – двудольный

И получается в исходной укладке  $G$  на плоскость сегменты из 1-ой доли уложены в  $\Gamma_1$ , из др. доли в  $\Gamma_2$   
 И если в ней поменять местами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  то получим укладку  $G$  на плоскости

□

## 39 Правильная раскраска вершин графа. Верхние оценки хроматического числа. Теорема Брукса

### 39.1 Правильная раскраска вершин графа.

$$G = (V, E)$$

$\varphi : V \rightarrow \{c_1, \dots, c_t\}$  — раскраска вершин разбиения  $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_t$ ;  $V_i$  — мн-во вершин цвета  $c_i$

Раскраска  $\varphi$  правильная, если:

$xy \in E \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \forall i \quad V_i$  — независимое мн-во

### 39.2 Верхние оценки хроматического числа.

#### 39.2.1 Оценка 1

$$G — (n, m)-граф \Rightarrow \chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

**Доказательство:**

$\forall$  пары цветов  $\exists$  ребро на концах которого вершины этих цветов (из леммы о том, что в правильной раскраске для  $\forall$  цвета  $\exists$  вершина этого цвета, в окружении которой есть вершины всех остальных цветов)  $\Rightarrow m \geq \binom{\chi(G)}{2}$

□

#### 39.2.2 Оценка 2

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad (\Delta(G) — максимальная степень графа G).$$

**Доказательство.**

Индукция по кол-ву вершин графа  $G$ :

$G$  — граф порядка  $n \geq 2$ ,  $v \in VG$ .

$G' = G - v$ . По индукционному предположению  $\chi(G') \leq \Delta(G) + 1$ .

$\deg(v) \leq \Delta(G) \Rightarrow$  в окр.  $v$  не использовали какой-то цвет, окрасим её в этот цвет  $\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

□

### 39.3 Теорема Брукса

$\forall$  связного графа, не явл.  $K_n, C_{2n+1}$   $\chi(G) \leq \Delta(G)$

**Доказательство:**

### 3.2.10 Теорема 38 (Брукс, 1941)

Пусть  $G$  – связный граф, не являющийся ни полным, ни циклом нечётной длины. Тогда  $X(G) \leq \Delta(G)$ .

### 3.2.11 Алгоритм последовательной раскраски

1. Упорядочим  $v_1, \dots, v_n$  – все вершины графа  $G$ .
2.  $\varphi(v_1) = c_1$
3.  $r = 2, \dots, n$ :  $v_1 \dots v_r$  – раскрашены. Берём  $\varphi(v_{r+1}) = c_m$ , где  $m$  – минимальный индекс цвета, которого нету в окружении вершинки  $v_{r+1}$ .

### 3.2.12 Лемма 43

Пусть  $G$  – двусвязный, не является ни полным, ни циклом. Тогда существует 2 вершины  $u, v \in VG$ ,  $d(v, u) = 2$ .  $G - u - v$  – связный.

*Доказательство.*

$a$  – доминирующая вершина, если  $\deg(a) = |V| - 1$ .

$D$  – множество всех доминирующих вершин графа  $G$ .

1.  $D \neq \emptyset$ .  $G$  – не полный  $\Rightarrow VG \setminus D \neq \emptyset$ .  
Пусть  $u, v \in VG$ :  $uv \notin EG \Rightarrow d(u, v) = 2 \Rightarrow G - u - v$  – связен.
2.  $D = \emptyset$ . По условию  $G$  – не цикл  $\Rightarrow$  в  $G \exists z : \deg(z) \geq 3$ .  
Рассмотрим граф  $G - z = G'$ .
  - (a)  $G'$  – двусвязный. Т.к.  $D = \emptyset \Rightarrow \exists v : d(v, z) = 2$ . Полагаем  $u = z$ .  $v, u$  – искомые.
  - (b)  $G'$  имеет точки сочленения.  $\Rightarrow$  существует два висячих блока  $B_1$  и  $B_2$ .  
 $\exists u \in B_1$ : не точка сочленения и смежная с  $z$  в  $G$ , иначе т. сочленения блока  $B_1$  явл. т. сочленения, но  $G$  – двусвязен.  
Аналогично  $\exists v \in B_2$  – не точка сочленения и смежная с  $z$  в  $G$ .  
 $G' - u - v$  – связен  $\Rightarrow G - u - v$  – связен?.

### 3.2.13 Лемма 44

Пусть  $G$  – связный,  $n$ -вершинный граф.  $w \in VG$ .

Тогда вершины графа  $G$  можно упорядочить так, чтобы  $w_1, w, w_2, \dots, w_n$ , что любая вершинка  $w_i$ ,  $i \geq 2$  смежна по крайней мере с одной вершиной с меньшим номером.

*Доказательство т. Бруssa.*

1.  $G$  - двусвязный, без циклов,  $|V| = n$ . По л. 43  $\exists u, v : d(u, v) = 2$   $G - u - v$  – связный.

По лемме 44 вершины графа  $G - u - v$  можно упорядочить так, что  $w, \dots, w_{n-1}$

$\forall i, 2 \leq i \leq n-2$ ,  $w_i$  смежна с вершиной с меньшим номером.

Упорядочим вершины графа  $G$ :  $u, v, w_{n-2}, \dots, w_1 = w$  и применим алгоритм последовательной раскраски  $\varphi(u) = \varphi(v) = c_1$ .

Пусть уже покрашены  $u, v, w_{n-2} \dots, w_{s+1}$  в  $\Delta(G)$  цветов.

$w_s$  смежна с вершиной с меньшим номером - не покрашенные вершины  $\Rightarrow$  в окружении  $w_s$  используется

не более  $\Delta(G) - 1$  цветов  $\Rightarrow$  покрасим её в один из  $\Delta(G)$  цветов.

$w_1 = w$  – смежна с  $v$  и  $u$ :  $\varphi(v) = \varphi(u)$ .

2. Пусть  $\Delta = \Delta(G)$ ,  $G$  – не связен. Покажем, что любой блок графа  $G$  является  $\Delta$ -раскрашиваем.

- (a) Блок является  $K_m$   $\Rightarrow$  точка сочленения этого блока имеет степень не меньше  $m \leq \Delta$ . Но  $K_m$   $m$ -раскрашиваем  $\Rightarrow$  он является  $\Delta$ -раскрашиваем.
- (b) Блок является циклом. Точка сочленения этого блока имеет степень не меньше 3. Цикл 3-раскрашиваем  $\Rightarrow$   $\Delta$ -раскрашиваем.
- (c) Блок не полный и не цикл  $\Rightarrow$  по доказанному.

□

## 40 Правильная раскраска вершин графа. Нижние оценки хроматического числа. Теорема о существовании графов без треугольников с большим хроматическим числом.

### 40.1 Правильная раскраска вершин графа.

$$G = (V, E)$$

$\varphi : V \rightarrow \{c_1, \dots, c_t\}$  – раскраска вершин разбиения  $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_t$ ;  $V_i$  – мн-во вершин цвета  $c_i$

Раскраска  $\varphi$  правильная, если:

$xy \in E \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \forall i \quad V_i$  – независимое мн-во

### 40.2 Нижние оценки хроматического числа.

$$1) \chi(G) = \chi$$

$$G = (V, E)$$

$$V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi$$

$V_i$  – независимое мн-во  $\forall i$

$$|V_i| < \alpha_0(G) \quad \forall i$$

$$|VG| = \sum |V_i| \leq \alpha_0(G) * \chi(G)$$

↓

$$\chi(G) \geq \frac{|VG|}{\alpha_0(G)}$$

2)  $\chi(G) \geq \alpha_0(\bar{G})$

3)  $\chi(G) \geq t$

$t$  — мощность наиб. клики в  $G$

### 40.3 Теорема о существовании графов без треугольников с большим хроматическим числом.

#### 3.2.14 Теорема 39 (Зыкова, 1949)

Существуют графы без треугольников с произвольно большим хроматическим числом.

#### 3.2.15 Лемма 45

Любой минимальной, правильной раскраске графа  $G$  для любого цвета  $c_i$  существуют вершины этого цвета, смежные с вершинами всех остальных цветов.

*Доказательство т. Зыкова.*

Построим последовательность графов  $G_2 \dots G_i \dots$ , так, что:

1.  $G_i$  без треугольников.

2.  $X(G_i) = i$

$G_2 = K_2$

Пусть  $G_i$  построено,  $VG_i = \{v_1 \dots v_n\}$ . Построим  $G_{i+1}$ :

$VG_{i+1} = VG_i \cup V' \cup \{v\}$ , где  $V' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ ,  $VG_i \cap V' = \emptyset$ .

$v \notin VG_i \cup V'$ .

Определяем мно-во рёбер: на вершинках  $VG_i$  строим граф  $G_i$ .

Любую вершинку  $v'_i \in V'$  соединяем со всеми вершинами из  $VG_i$ , смежными с  $v_i$ .  $v$  смежна со всеми вершинами из  $V'$ . Имеем:  $G_i$  — без тре-ов и  $X(G_i) = i$ . Докажем, что  $G_{i+1}$  без треугольников.

Пусть в  $G_{i+1}$  есть треугольник. Тогда  $a, b, c : a, b \in VG_i, c \in V'$  (единственный вариант, который остался). Но  $c = v'_j \Rightarrow a, b, v_j$  — треугольник. Противоречие.

Рассмотрим теперь хроматическое число.

$G_{i+1}$  в  $i + 1$ .  $G_i - i$  - раскр.  $\varphi, \varphi'$  графа  $G_{i+1}$ :  $\forall$  верш. из  $V'G$ .

Почему нельзя меньше? Пусть  $G_{i+1}$  правильно раскрашен в  $i$  цветов. Но  $X(G_i) = i \Rightarrow$  эта раскраска порождает правильную минимальную раскраску графа  $G_i$ . Тогда по лемме 45 есть вершина, смежная с вершинами всех остальных цветов, тогда её дубликат раскрашен в тот же цвет, следовательно в  $V'$  существуют вершины всех цветов, а значит для вершины  $v$ ? нет цвета.

Следовательно,  $X(G_{i+1}) = i + 1$ . □

## 41 Раскраски планарных графов. Теорема о четырех красках. Теорема Хивуда.

### 41.1 Теорема о четырех красках.

$\forall$  планарный граф 4-раскрашиваем

*Доказательство:*

б/д

□

## 41.2 Теорема Хивуда.

$\forall$  планарный граф 5-раскрашиваем

**Доказательство:**

Индукция по числу вершин  $n = |VG|$

При  $n \leq 5$  теор. верна

переход

$G$  — планарный граф на  $n > 5$  вершинах

В  $G$   $\exists$  вершина  $x$  т.ч.  $\deg x \leq 5$  (иначе, в графе был бы подграф  $K_{3,3}$ )

$G' = G - x$ ; по инд. предположению  $\exists$  прав. раскр.  $\varphi$  в 5 цветов

Возвращаем вершину  $x$

Если  $\deg x < 5$ , то всё хорошо, перекрашиваем в свободный цвет

Если  $\deg x = 5$  и в окр.  $x$  есть одинаковые цвета, то всё хорошо

Если  $\deg x = 5$  и в окр.  $x$  есть все 5 цветов

$c_i, c_j$  — 2 цвета. рассмотрим вершины этих цветов

$G_{i,j}$  — подграф графа  $G$  порождённый вершинами  $c_i$  и  $c_j$

Рассмотрим  $G_{1,3}$ . Если  $y_1$  и  $y_3$  в разных к. с.  $G_{1,3}$ , то 1 к. с. графа  $G_{1,3}$  перекрашиваем и освобождаем цвет для  $x$

Если  $y_1$  и  $y_3$  в одной к.с. графа  $G_{1,3}$ , то  $\exists (y_1, y_3)$ -цепь из вершин цвета  $c_1$  и  $c_3$ . Тогда рассмотрим вершины  $y_2$  и  $y_4$ . Они в разных к.с. графа  $G_{2,4}$  т.к. график  $G$  плоский и  $(y_2, y_4)$ -цепь должна пересекать  $(y_1, y_3)$ -цепь

□

## 42 Правильная раскраска ребер графа. Хроматический индекс. Теорема Кёнига о хроматическом индексе двудольных графов.

### 42.1 Правильная раскраска ребер графа.

$\varphi : EG \rightarrow \{c_1, \dots, c_t\}$  — раскраска рёбер в  $t$  цветов

$\varphi$  — правильная рёберная раскраска, если  $e$  и  $h$  смежны  $\Rightarrow \varphi(e) \neq \varphi(h)$

### 42.2 Хроматический индекс.

$G$  — рёберно  $t$ -хроматический, если  $G$  рёберно  $t$ -раскрашиваемый и не является рёберно  $(t-1)$ -раскрашиваемым.

$G$  — рёберно  $t$ -хроматический  $\Rightarrow t$  — рёберное хроматическое число (хроматический индекс)  $\chi'(G)$

### 42.3 Теорема Кёнига о хроматическом индексе двудольных графов.

Всегда для двудольного графа  $G$ :  $\chi'(G) = \Delta(G)$

**Доказательство.** Индукцией по числу ребер  $q$  при заданном числе вершин  $p$  построим раскраску ребер двудольного графа  $G$  в  $\Delta(G)$  цветов из  $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$ .

**Базис индукции:**  $q = 0$  верен.

**Индуктивный переход.** Рассмотрим двудольный граф  $G = (V, E)$ , в котором  $|V| = p$ ,  $|E| = q + 1 \geq 1$ .

Пусть  $e = (u, w) \in E$  — произвольное ребро графа  $G$ .

Рассмотрим граф  $G' = G - e$ . Граф  $G'$  является двудольным, содержит  $p$  вершин и  $q$  ребер. Значит, для него верно предположение индукции.

Окрасим ребра графа  $G'$  в  $\Delta(G') \leq \Delta(G)$  цветов из множества  $C$ .

1. Если найдется цвет  $i \in C$ , одновременно отсутствующий среди ребер из вершин  $u, w$  графа  $G'$ , то припишем ребру  $(u, w)$  графа  $G$  цвет  $i$ .

2. Иначе заметим, что найдется некоторый цвет  $i \in C$ , отсутствующий среди ребер из вершины  $u$ , и некоторый цвет  $j \in C$ , отсутствующий среди ребер из вершины  $w$ ,  $i \neq j$ , т. к.  $d_{G'}(u) \leq \Delta(G) - 1$ ,  $d_{G'}(w) \leq \Delta(G) - 1$ .

Рассмотрим неудлиняемую цепь  $P$  с ребрами чередующихся цветов  $i$  и  $j$ , начинающуюся из вершины  $w$ .

Эта цепь не может достигнуть вершины  $u$ . В самом деле, если цепь  $P$  приходит в вершину  $u$ , то в графе  $G$  существует цикл  $C = u(u, w)wPw$  нечетной длины, чего не может быть.

Перекрасим на цепи  $P$  ребра: цвет  $i$  заменим на цвет  $j$ , цвет  $j$  заменим на цвет  $i$ .

Затем припишем ребру  $(u, w)$  в графе  $G$  цвет  $i$ .

□

## 43 Теорема Визинга о хроматическом индексе графа (без доказательства). Хроматический индекс полного графа.

### 43.1 Теорема Визинга о хроматическом индексе графа (без доказательства).

Всегда для графа  $G$ :  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

## 43.2 Хроматический индекс полного графа.

Справедливы равенства  $\chi'(K_n) = n$ , если  $n$  — нечетное число,  
 $\chi'(K_n) = n - 1$ , если  $n$  — четное число.

**Доказательство.**

1. Пусть  $n$  — нечетное число. Предположим, что  $\chi'(K_n) = n - 1$ . Тогда из каждой вершины графа  $K_n$  исходит ровно одно ребро каждого цвета.

Поэтому число ребер одного цвета равно  $n/2$ , т. к. каждое ребро имеет два конца.

Но  $n$  — нечетное число, получаем противоречие.

Получим раскраску ребер графа  $K_n$  в  $n$  цветов

$C = \{1, 2, \dots, n\}$ : ребро  $(i, j)$  графа  $K_n$ , где  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  окрасим в цвет  $((i + j)(\text{mod } n)) + 1$ .

2. Пусть  $n$  — четное число. Удалим из графа  $K_n$  произвольную вершину  $v$  и раскрасим ребра оставшегося графа  $K_{n-1}$  в  $(n - 1)$  цветов.

Рассмотрим в этом графе  $K_{n-1}$  все ребра одного цвета  $i$ . Их концами являются  $(n - 2)$  вершины, т. к.  $(n - 1)$  — нечетное число. Поэтому в этом графе  $K_{n-1}$  найдется некоторая вершина  $v_i$ , из которой не исходит ребро цвета  $i$ . Окрасим в исходном графе  $K_n$  ребро  $(v, v_i)$  в цвет  $i$ .

Т. к. в каждой вершине графа  $K_{n-1}$  отсутствует ребро только одного цвета, все ребра графа  $K_n$ , исходящие из вершины  $v$ , окрасим в разные цвета.

□

## 44 Теорема Рамсея для графов.

### 3.4.6 Теорема 51 (Рамсея для графов)

$\forall p, q \quad p \geq 2, q \geq 2 \quad \exists$  минимальное число  $N(p, q) : \quad \forall n \geq N(p, q), \forall$  раскраси ребёр графа  $K_n$  в два цвета  $c_1$  и  $c_2$  выполнено хотя бы одно из двух условий:

1.  $\exists$  монохроматический порождённый подграф цвета  $c_1$  на  $p$  вершинах.
2.  $\exists$  монохроматический порождённый подграф цвета  $c_2$  на  $q$  вершинах.

$N(p, q)$  – **число Рамсея** для графов.

### 3.4.7 Лемма 48

$\forall p, q \geq 2$  верны:

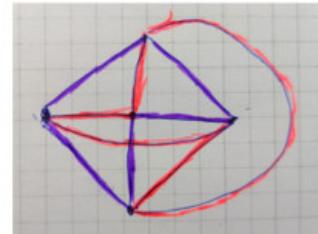
1.  $N(2, q) = q$
2.  $N(p, 2) = p$
3.  $N(3, 3) = 6$ .

*Доказательство.*

1, 2 – упражнение.

3. Докажем (1)  $N(3, 3) > 5$  и (2)  $N(3, 3) \leq 6$ .

1. привести пример раскраски ребёр  $K_5$ , где нет монохроматических тре-ков.
2. рассмотрим произвольную раскраску ребёр графа  $K_6$ ,  $x \in VK_6$ .  
Есть 3 ребра, инцидентных  $x$  и раскрашенных в один цвет.



□

*Доказательство (Теорема Рамсея).*

Индукция по  $m = p + q$ . Докажем неравенство  $N(p, q) \leq N(p - 1, q) + N(p, q - 1)$ ,  $\forall p > 2, q > 2$ . Сама индукция доказывает граничность числа  $N(p, q)$ .

База индукции:  $N(p, 2) = p$ ,  $N(2, q) = q$  (лемма 48).

$n = N(p - 1, q) + N(p, q - 1)$ . Надо доказать, что для  $K_n$  выполнено условие теоремы.

Пусть  $\varphi$  – произвольная раскраска рёбра графа  $K_n$  в два цвета  $c_1$  и  $c_2$ .

$x \in VK_n$ .  $V_1 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_1\}$ ,  $V_2 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_2\}$ .  $|V_1| = n_1$ ,  $|V_2| = n_2$ .

$n_1 + n_2 + 1 = n = N(p - 1, q) + N(p, q - 1)$  (возможно, числа чётные?)  $\Rightarrow$  выполнено одно из условий:

1.  $n_1 \geq N(p - 1, q)$
2.  $n_2 \geq N(p, q - 1)$

Пусть (1). Рёбра графа  $G(V_1)$  раскрашены раскраской  $\varphi$ . По индукционному предположению выполнено хотя бы одно из условий:

1.  $\exists$  монохроматический порождённый подграф цвета  $c_1$  на  $p - 1$  вершине.
2.  $\exists$  монохроматический порождённый подграф цвета  $c_2$  на  $q$  вершинах.

Если выполняется второе, то всё доказано. А если первое???

Если первое, то добавим вершину  $x$  и получим монохроматический порождённый подграф цвета  $c_1$  на  $p$  вершинах. Иными словами, док-во чем-то похоже на док-во предыдущей леммы.

Случай (2) рассматривается аналогично.

□

## 45 Правильная раскраска ребер графа. Хроматический индекс. Теорема о хроматическом индексе полного графа.

### 45.1 Правильная раскраска ребер графа.

$\varphi : EG \rightarrow \{c_1, \dots, c_t\}$  – раскраска рёбер в  $t$  цветов

$\varphi$  – правильная рёберная раскраска, если  $e$  и  $h$  смежны  $\Rightarrow \varphi(e) \neq \varphi(h)$

## 45.2 Хроматический индекс.

$G$  — рёберно  $t$ -хроматический, если  $G$  рёберно  $t$ -раскрашиваемый и не является рёберно  $(t-1)$ -раскрашиваемым.

$G$  — рёберно  $t$ -хроматический  $\Rightarrow t$  — рёберное хроматическое число (хроматический индекс)  $\chi'(G)$

## 45.3 Теорема о хроматическом индексе полного графа.

Справедливы равенства  $\chi'(K_n) = n$ , если  $n$  — нечетное число,  
 $\chi'(K_n) = n - 1$ , если  $n$  — четное число.

**Доказательство.**

1. Пусть  $n$  — нечетное число. Предположим, что  $\chi'(K_n) = n - 1$ .

Тогда из каждой вершины графа  $K_n$  исходит ровно одно ребро каждого цвета.

Поэтому число ребер одного цвета равно  $n/2$ , т. к. каждое ребро имеет два конца.

Но  $n$  — нечетное число, получаем противоречие.

Получим раскраску ребер графа  $K_n$  в  $n$  цветов

$C = \{1, 2, \dots, n\}$ : ребро  $(i, j)$  графа  $K_n$ , где  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$   
окрасим в цвет  $((i + j)(\text{mod } n)) + 1$ .

2. Пусть  $n$  — четное число. Удалим из графа  $K_n$  произвольную вершину  $v$  и раскрасим ребра оставшегося графа  $K_{n-1}$  в  $(n-1)$  цветов.

Рассмотрим в этом графе  $K_{n-1}$  все ребра одного цвета  $i$ . Их концами являются  $(n-2)$  вершины, т. к.  $(n-1)$  — нечетное число. Поэтому в этом графе  $K_{n-1}$  найдется некоторая вершина  $v_i$ , из которой не исходит ребро цвета  $i$ . Окрасим в исходном графе  $K_n$  ребро  $(v, v_i)$  в цвет  $i$ .

Т. к. в каждой вершине графа  $K_{n-1}$  отсутствует ребро только одного цвета, все ребра графа  $K_n$ , исходящие из вершины  $v$ , окрасим в разные цвета.

□

## 46 Булева функция. Существенные и фиктивные переменные. Теорема о числе булевых функций, существенно зависящих от $n$ переменных.

### 46.1 Булева функция.

Функция вида  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  — булева

### 46.2 Существенные и фиктивные переменные.

Переменная  $x_i$  функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  — существенная, если  $\exists$  набор переменных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  т.ч.  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_i, \dots, \alpha_n)$

иначе — фиктивная

### 46.3 Теорема о числе булевых функций, существенно зависящих от $n$ переменных.

Число булевых ф-ий  $f(x_1 \dots x_n)$ , существенно зависящих от  $x_1 \dots x_n$  равно  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$

*Доказательство.*

Формула включений-исключений:  $|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot S_k, \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}|.$

$A_i$  — формулы, существенно не зависящие от переменной  $x_i$ .

$$|A| = 2^{2^n}, |S_0| = |A| = 2^{2^n}.$$

$$|A_i| = 2^{2^{n-1}}, |S_1| = n \cdot 2^{2^{n-1}}.$$

$$|A_i \cap A_j| = 2^{2^{n-2}}, |S_2| = \binom{n}{2} \cdot 2^{2^{n-2}}.$$

$$\vdots \\ |S_k| = \binom{n}{k} \cdot 2^{2^{n-k}}.$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}.$$

□

## 47 Формула. Функция, которую реализует формула. Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности.

### 47.1 Формула.

Пусть  $\Omega \subseteq P_2$ .

- 1) Если  $f \in \Omega$ , то  $f$  — формула над  $\Omega$ .
- 2) Если  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  — формулы над  $\Omega$ , либо символьные переменные,  $f(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ , то  $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  — формула над  $\Omega$ .

## 47.2 Функция, которую реализует формула.

Формуле  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  над  $\Omega$  сопоставим  $f(x_1, \dots, x_n)$ , которую реализует данная формула.

1) Если  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  совпадает с  $f(x_1, \dots, x_n)$ , то

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n).$$

2) Если  $\Phi(x_1, \dots, x_n) = f_0(A_1, \dots, A_m)$ , где  $A_i$  — символьные переменные, либо формулы над  $\Omega$ , то  $\Phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f_0(f_1, \dots, f_m)$ , где  $f_i$  реализуется  $A_i$ .

## 47.3 Эквивалентные формулы.

Формулы эквивалентны, если они реализуют равные функции

## 47.4 Основные эквивалентности.

$x_1 \circ x_2$  — любая из ф-ций  $x_1 x_2$ ;  $x_1 \vee x_2$ ;  $x_1 \oplus x_2$

1.  $x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$

2.  $x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3$

3.  $(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3)$

4.  $(x_1 \& x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \& (x_2 \vee x_3)$

5.  $(x_1 \oplus x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \oplus (x_2 \& x_3)$

6.  $\bar{x} = x$

7.  $x_1 \bar{\&} x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

8.  $x_1 \bar{\vee} x_2 = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2$

9.  $x_1 \& (x_1 \vee x_2) = x_1$

10.  $x_1 \vee (x_1 \& x_2) = x_1$

11.  $x \& \bar{x} = 0$

12.  $x \vee \bar{x} = 1$

13.  $x \& x = x$

14.  $x \vee x = x$

15.  $x \oplus x = 0$

16.  $x \oplus 1 = \bar{x}$

17.  $x \oplus \bar{x} = 1$

18.  $x \oplus 0 = x$

$$19. x \& 0 = 0$$

$$20. x \vee 0 = x$$

$$21. x \& 1 = x$$

$$22. x \vee 1 = 1$$

**Доказательство:**

Нарисовать таблицы для левых и правых частей

□

## 48 Теорема о разложении функций по переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Совершенная конъюнктивная нормальная форма. Двойственная функция. Принцип двойственности.

### 48.1 Теорема о разложении функций по переменным.

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ ,  $1 \leq k \leq n$

$$\text{Тогда } f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \{0,1\}^k} x_1^{\sigma_1} \cdots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n) (*)$$

**Доказательство:**

Если подставить конкретные значения, то в правой части останется только одна конъюнкция, и оставшаяся конъюнкция совпадёт с левой частью

□

### 48.2 Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

Разложение ф-ции отличной от 0 вида (\*) при  $k = n$  называется СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма)

### 48.3 Совершенная конъюнктивная нормальная форма.

Разложение вида  $\bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$  – СКНФ.

### 48.4 Двойственная функция.

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})} \text{ – двойственная к } f.$$

## 48.5 Принцип двойственности.

Пусть  $F(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ .

Тогда  $F^*(x_1, \dots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^*(x_1, \dots, x_n))$ .

## 49 Замкнутое, полное множества булевых функций. Теорема о полноте двух систем.

### 49.1 Замкнутое, полное множества булевых функций.

Пусть  $\Omega \subseteq P_2$ .

$[\Omega]$  (замыкание) — все функции, выражаемые формулами над  $\Omega$ .

$\Omega$  замкнута, если  $[\Omega] = \Omega$ .

$\Omega$  полна, если  $[\Omega] = P_2$ .

### 49.2 Теорема о полноте двух систем.

$\Omega_1, \Omega_2 \subseteq P_2$

$\Omega_1$  — полна, и  $\forall \phi$ -я из  $\Omega_1$  выражается  $\phi$ -лой над  $\Omega_2$ , тогда  $\Omega_2$  — полна

**Доказательство:**

$$[\Omega_1] = P_2 \quad \Omega_1 \subset [\Omega_2]$$

$$P_2 = [\Omega_1] \subseteq [[\Omega_2]] = [\Omega_2] \subseteq P_2$$

↓

$$[\Omega_2] = P_2$$

□

## 50 Полином Жегалкина. Теорема Жегалкина. Способы построения полинома Жегалкина.

### 50.1 Полином Жегалкина.

$K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_l$ , где  $K_i \neq K_j \ \forall i \neq j$  и  $K_i$  — монотонные элементарные конъюнкции  $\forall i$  — полином Жегалкина.

## 50.2 Теорема Жегалкина.

Для любой БФ  $f \in P_2$   $\exists!$  полином Жегалкина, реализующий эту ф-ию.

*Доказательство.*

**существование)**  $\{\&, \oplus, 1\}$  – полная.  $\Rightarrow f(x_1 \dots x_n) \in P_2$ , то  $f$  выражается ф-лой над  $\{\&, \oplus, 1\}$ .

Преобразуем ее:

1. Раскроим скобки по законам дистрибутивности  $\oplus$  относительно  $\&$ . Получаем ф-лу  $A_1 \oplus \dots \oplus A_m$ , где  $A_i$  – ф-ла над  $\{\&, 1\}$ .
2. По законам  $x\&x = x$ ,  $x\&1 = x$  преобразуем все  $A_i$  в ЭМК.
3. По закону  $A \oplus A = 0$  получаем полином Ж, который эквивалентен исходной ф-ле.

**единственность)** Кол-во БФ от  $n$  переменных  $= 2^{2^n}$ .

Кол-во МЭК от  $n$  переменных  $x_1 \dots x_n = 2^n$ .

$\Rightarrow$  ПЖ от  $n$  переменных  $= 2^{2^n}$ .

Каждый полином реализует единственную ф-ию  $\Rightarrow$  для каждой ф-ии ПЖ – единственный.

□

## 50.3 Способы построения полинома Жегалкина.

### 4.3.3 3 способа построения ПЖ для ф-ии $f$

Введём нумерацию МЭК над мно-ом переменных  $\{x_1 \dots x_n\}$ .

$K \leftrightarrow$  набор  $(\sigma_1 \dots \sigma_n) | \sigma_i = 1 \Leftrightarrow x_i$  входит в  $K$ .

Номер  $K = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot 2^{n-1}$ . Константа 1 имеет номер 0.

$K$	$v$	$x_1$	$x_2$
1	0	0	0
$x_2$	1	0	1
$x_1$	2	1	0
$x_1x_2$	3	1	1

### 4.3.4 Способ первый (обыкновенный, ничем не примечательный)

$f(x_1 \dots x_n)$  представим в виде СДНФ или СКНФ. По закону Де Моргана изб-ся от  $\vee$ , все отрицания заменим на  $\oplus 1$ . Получим ф-лу над  $\{\&, \oplus, 1\}$ . Далее по алгоритму из док-ва.

Пример  $f(xy) = x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = \overline{x \& y} = x \& (y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus 1$ .

### 4.3.5 Способ второй (метод неопределённых коэффициентов)

$P(x_1 \dots x_n)$  – ПЖ для  $f(x_1 \dots x_n)$ .

$P(x_1 \dots x_n) = C_0 \oplus C_1 K_1 \oplus C_2 K_2 \oplus \dots \oplus C_{2^n-1} K_{2^n-1}$ , где  $K_i$  – ЭМК с номером  $i$ ,  $C_i \in \{0, 1\}$ .

$(C_0 \dots C_{2^n-1})$  – набор коэффициентов в ПЖ.

$\forall \tilde{\alpha} \in \{0, 1\}^n$  сопоставим ур-ие  $P(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha})$ . Это система из  $2^n$  ур-ий и  $2^n$  неизвестных. По т. Жегалкина она имеет единственное решение.

Пример  $x \rightarrow y = C_0 \oplus C_1 y \oplus C_2 x \oplus C_3 xy$ .

$$\begin{cases} f(0, 0) = 1 = C_0 \\ f(0, 1) = 1 = C_0 \oplus C_1 \\ f(1, 0) = 0 = C_0 \oplus C_2 \\ f(1, 1) = 1 = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x \rightarrow y = 1 \oplus x \oplus xy$$

### 4.3.6 Способ третий (преобразование кортежа значений ф-ии)

$$\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1}) \Rightarrow (C_0, C_1, \dots, C_{2^n-1}) = \tilde{C}_f.$$

Если  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$  и  $\tilde{\beta} = (\beta_1 \dots \beta_n)$ , то  $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \dots, \alpha_n \oplus \beta_n)$ .

$\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0 \dots \alpha_{2^n-1})$  – кортеж значений ф-ии  $f(x_1 \dots x_n)$ .

$$\alpha_i = f(\sigma_1 \dots \sigma_n), \text{ где } (\sigma_1 \dots \sigma_n) | i = \sum_{k=1}^n \sigma_k \cdot 2^{n-k}.$$

Преобразованиями в  $\tilde{C}_f$  иднукцией по  $n$ :

$$n = 1. \quad \tilde{\alpha}_f = (\alpha_0 \alpha_1) \Rightarrow \tilde{C}_f = (\alpha_0, \alpha_0 + \alpha_1)$$

$$n \rightarrow n+1 \quad f(y, x_1, \dots, x_n) :$$

$$f_0(x_1 \dots x_n) := f(0, x_1 \dots x_n)$$

$$f_1(x_1 \dots x_n) := f(1, x_1 \dots x_n)$$

$\tilde{C}_{f_0}$  и  $\tilde{C}_{f_1}$  – известны по предположению индукции, тогда  $\tilde{C}_f = (\tilde{C}_{f_0} | \tilde{C}_{f_0} \oplus \tilde{C}_{f_1})$ .

## 51 Основные замкнутые классы булевых функций. Предполные классы.

### 51.1 Основные замкнутые классы булевых функций.

$T_0 = \{f \in P_2 \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$  — сохраняющие 0.

$T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$  — сохраняющие 1.

$S = \{f \in P_2 \mid f^* = f\}$  — самодвойственные.

$L = \{f \in P_2 \mid f = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n, \alpha_i \in \{0, 1\}\}$  — линейные.

$M = \{f \in P_2 \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n) \Rightarrow f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \dots, \beta_n)\}$  — монотонные.

$T_0, T_1, S, L, M$  — замкнуты

**Доказательство:**

1.  $f_0, \dots, f_m \in T_0$

Рассм.  $F(0, \dots, 0) = f_0(f_1(0, \dots, 0), \dots, f_m(0, \dots, 0)) = f_0(0, \dots, 0) = 0$

2.  $f_0, \dots, f_m \in T_1$

Аналогично

3.  $f_0, \dots, f_m \in S$

$F^*(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{принцип двойственности}}{=} f_0^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^*(x_1, \dots, x_n)) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = F(x_1, \dots, x_n)$

4.  $f_0, \dots, f_m \in L$

$L = [\{\oplus, 1\}] \Rightarrow L$  замкнуто

5.  $f_0, \dots, f_m \in M$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n) \quad 1 \leq i \leq m$

↓

$(f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, f_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \leq (f_1(\beta_1, \dots, \beta_n), \dots, f_m(\beta_1, \dots, \beta_n))$

↓ ( $f_0 \in M$ )

$f_0(f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, f_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \leq f_0(f_1(\beta_1, \dots, \beta_n), \dots, f_m(\beta_1, \dots, \beta_n))$

↓

$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq F(\beta_1, \dots, \beta_n)$

□

### 51.2 Предполные классы.

$\Omega$  — предполный класс, если:

- 1)  $\Omega \neq P_2$ ,
- 2)  $\Omega$  — замкнутый,
- 3)  $\forall f \in P_2 \setminus \Omega : \Omega \cup \{f\}$  — полна.

## 52 Теорема Поста.

Леммы, необходимые для доказательства теоремы:

## 52.1 Лемма о несамодвойственной ф-ции

$$f \notin S \Leftrightarrow 0, 1 \in [\{f, \bar{x}\}]$$

**Доказательство:**

$$\Rightarrow) f \in S \Leftrightarrow \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \overline{f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)}$$

$$g(x) = f(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n})$$

$$g(0) = f(0^{\alpha_1}, \dots, 0^{\alpha_n}) = f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(1^{\alpha_1}, \dots, 1^{\alpha_n}) = g(1)$$

↓

$$g(x) = \text{const}$$

$$\Leftarrow) \text{ Дано } 0, 1 \in [\{f, \bar{x}\}]$$

От противного

$$\text{Пусть } f \in S \Rightarrow \{f, \bar{x}\} \subseteq S \stackrel{S - \text{замкнут}}{\Rightarrow} [\{f, \bar{x}\}] \subseteq S$$

Но  $0, 1 \notin S$

Противоречие

□

## 52.2 Лемма о немонотонной ф-ции

$$f \notin M \Leftrightarrow \bar{x} \in [\{f, 0, 1\}]$$

**Доказательство:**

$\Leftarrow)$  Аналогично прошлой лемме

$$\Rightarrow) \text{ Пусть } f(x_1, \dots, x_n) \notin M$$

↓

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n) \text{ т.ч. } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > f(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

↓

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$$

$$f(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$$

$$\text{Рассм. } g(x) \text{ получаемая из } f(x_1, \dots, x_n) \text{ подстановлением на место } x_i: \begin{cases} 0; & \text{если } \alpha_i = \beta_i = 0 \\ 1; & \text{если } \alpha_i = \beta_i = 1 \\ x_i; & \text{если } \alpha_i \neq \beta_i = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1 \end{cases}$$

$$g(0) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$$

$$g(1) = f(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$$

↓

$$g(x) = \bar{x}$$

□

## 52.3 Лемма о нелинейной ф-ции

$$f \notin L \Leftrightarrow x \& y \in [\{f, \bar{x}, 0, 1\}]$$

**Доказательство:**

$\Leftarrow)$  Аналогично прошлой лемме

$$\Rightarrow) \text{ Пусть } f(x_1, \dots, x_n) \notin L$$

$$K = x_1 \cdots x_r$$

Если что, переменные перенумеруем. Но выберем такое  $r$ , что у  $f(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$  в полиноме Жегалкина ровно одно слагаемое имеет ранг больше 1

$$f(x_1, x_2, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = x_1 x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma$$

$$f(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = (x_1 \oplus \beta)(x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha(x_1 \oplus \beta) \oplus \beta(x_2 \oplus \alpha) \oplus \gamma = x_1 x_2 \oplus \alpha \beta \oplus \gamma \in \{x_1 x_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2\}$$

Если получили  $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ , то  $\bar{x}_1 \bar{x}_2 = x_1 x_2$

□

## 52.4 Теорема Поста.

Сист. б.ф.  $\Omega \subseteq P_2$  полна  $\Leftrightarrow$  она не лежит целиком ни в из классов  $T_0, T_1, S, L, M$

**Доказательство:**

$\Rightarrow$ )  $\Omega$  — полна  $\Rightarrow$  функциями из  $\Omega$  можно выразить штрих Шеффера.

Т. к. классы  $T_0, T_1, L, S, M$  замкнуты и штрих шеффера не принадлежит ни одному из этих классов. То Штрих шеффера выражается функциями не из этих классов  $\Rightarrow \Omega$  не может лежать целиком ни в одном из этих классов

$\Leftarrow$ )  $\Omega \not\subseteq T_0 \Rightarrow \exists f_0 \in \Omega \setminus T_0$

аналогично:

$$\exists f_1 \in \Omega \setminus T_1$$

$$\exists f_S \in \Omega \setminus S$$

$$\exists f_L \in \Omega \setminus L$$

$$\exists f_M \in \Omega \setminus M$$

Рассм.  $\Omega' = \{f_0, f_1, f_S, f_L, f_M\}$

Хотим показать, что  $x \& y, \bar{x} \in [\Omega']$

Шаг 1. Покажем что  $0, 1, \bar{x} \in [\Omega']$

$$\varphi_1(x) = f_0(x, \dots, x)$$

$$\varphi_2(x) = f_1(x, \dots, x)$$

$$\varphi_1(0) = f_0(0, \dots, 0) = 1 \Rightarrow \varphi_1 \in \{1, \bar{x}\}$$

$$\varphi_2(1) = f_1(1, \dots, 1) = 0 \Rightarrow \varphi_2 \in \{0, \bar{x}\}$$

Если  $\varphi_1(x) \neq \bar{x}$  и  $\varphi_2(x) \neq \bar{x}$ . Тогда  $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = 0$

Тогда по лемме о немонотонной ф-ции  $\bar{x} \in [f_m, 0, 1]$

В противном случае  $\bar{x} \in \{\varphi_1, \varphi_2\}$

Т.о.  $\bar{x}$  получили

По лемме о несамодвойственной ф-ции  $0, 1 \in [\{f_s, \bar{x}\}]$

Показали

Шаг 2

По лемме о нелинейной ф-ции

$$x_1, x_2 \in [\{f_L, 0, 1, \bar{x}\}]$$

В итоге мы получили

$$x \& y \in [\Omega']$$

$\Downarrow$  по теореме о полноте двух систем

$\Omega'$  полна  $\Rightarrow \Omega$  полна

□

## 53 Минимизация ДНФ. Способы построения сокращенной ДНФ.

### 53.1 Минимизация ДНФ.

#### 53.1.1 Элементарная конъюнкция

элементарная конъюнкция ранга  $r$

$$K = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \cdots x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$$

Эл. конъюнкция ранга 0 —  $K = 1$

#### 53.1.2 ДНФ

$$K_1 \vee \cdots \vee K_s, K_i \neq K_j \quad i \neq j$$

$\forall 1 \leq i \leq s$   $K_i$  — элементарная конъюнкция

## 53.2 Мин. ДНФ

ДНФ  $D$  наз-ся минимальным ДНФ ф-ции  $f$ , если она имеет мин. сумму рангов вход. в неё эл. конъюнкций среди всех ДНФ реализующих ф-цию  $f$

## 53.3 Теорема

Сокращённая ДНФ монотонной ф-ции  $f$  не содержит отрицаний переменных и явл. её ед. мин. ДНФ

**Доказательство:**

$f \in M$

$f = K_1 \vee \dots \vee K_s$  — сокр. ДНФ

$K_i = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_t}\overline{x_{i_{t+1}}} \dots \overline{x_{i_r}}$

$f$  принимает значение 1 на всех кортежах (наборах):  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \dots = \alpha_{i_t} = 1$

$\alpha_{i_{t+1}} = \dots = \alpha_{i_r} = 1$

из монотонности

$\Rightarrow$  и на всех кортежах  $(\beta_1, \dots, \beta_n) : \beta_{i_1} = \dots = \beta_{i_t} = 1$

$K' = x_{i_1} \dots x_{i_t}$  — импликанта ф-ции

$K < K' \leq f \Rightarrow K$  не простая

Противоречие

□

## 53.4 Способы построения сокращенной ДНФ.

3 операции:

1. склеивание  $xK \vee \bar{x}K = K$
2. поглощение  $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$
3. обобщ. склеивание  $xK_1 \vee \bar{x}K_2 = xK_1 \vee \bar{x}K_2 \vee K_1K_2$

Алгоритмы: **метод Нельсона** (из КНФ)

раскрываем все скобки, поглощение, убираем дублирование

**Метод Квайна** (из СДНФ)

все пары проверяем на склейк  $\Rightarrow$  все пары рёбер проверяем на склейку  $\Rightarrow$  получаем грани размерности 2 и т.д. пока можем  $\Rightarrow$  Поглощение

**Метод Блейка**

Пока можем обобщ. склеивание, потом поглощение

# 54 Схема из функциональных элементов. Система функций, реализуемая схемой из функциональных элементов.

## 54.1 Схема из функциональных элементов.

СФЭ в базисе  $\{\&, \vee, \bar{x}\}$  — орграф без контуров (оп. циклов)  $G = (V, A); V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3$

$V_1 = \{v \in V \mid \deg v = 0\}$

$V_2 = \{v \in V \mid \deg v = 1\}$

$V_3 = \{v \in V \mid \deg v = 2\}$

$\forall v \in V_1$  приписана переменна  $x_i$ ; разным — разные

$\forall v \in V_2$  приписано  $\bar{x}$

$\forall v \in V_3$  приписано  $\vee$  или  $\&$

Выделено  $V^* \subseteq V$

$V_1$  — выходы схемы;  $V_2 \cup V_3$  — функциональные элементы

$v \in V_2$  — инвертор

$v \in V_3$  — конъюнктор или дизъюнктор

$v \in V^*$  — выход схемы

нумерация вершин — монотонная, если  $\forall \overrightarrow{xy} \in A$  номер  $x$  меньше номера  $y$

упорядочиваем монотонно вершины схемы

$v_1, v_2, \dots, v_t \quad v_i \in V_1 \Rightarrow v_i \leftrightarrow$  переменная

$v_i \in V_2 \Rightarrow$  есть дуга из  $y$  в  $v_i$

$y \leftrightarrow f \Rightarrow v_i \leftrightarrow \overline{f}$

$v_i \in V_3 \Rightarrow$  есть две дуги  $\overrightarrow{yv_i}, \overrightarrow{zv_i}$

$y \leftrightarrow f, z \leftrightarrow g$

$v_i \leftrightarrow$  либо  $f \& g$ , либо  $f \vee g$

## 54.2 Система функций, реализуемая схемой из функциональных элементов.

СФЭ реализует систему б. ф., сопоставляет  $x$  выходам схемы

Булевые ф-ции, реализуемые в вершинах схемы не зависят от выбора монотонной нумерации

**Доказательство:**

инд. по числу функциональн. элементов в графе  $G$

$n = 1$

1 функциональный элемент реализует 1-ну ф-ю независимо от нумерации

$n > 1$

$S_1, S_2$  — разные нумерации

Возьмём 1-ый функциональный элемент из  $S_1$ . Вместо него вставим новый вход  $y$ . По инд. предположению нумерации  $S_1$  и  $S_2$  реализуют одинаковые булевые ф-ции. И если обратно вернуть вместо  $y$  функциональный элемент, ничего не изменится

□

## 55 Сложность схемы из функциональных элементов. Реализация сумматора. Функция Шеннона для СФЭ. Метод Шеннона.

### 55.1 Сложность схемы из функциональных элементов.

$L(S)$  — сложность схемы, число функциональных элементов в ней

### 55.2 Реализация сумматора.

$l_n = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$

$L(l_n) \leq 4n - 4$

**Доказательство:**

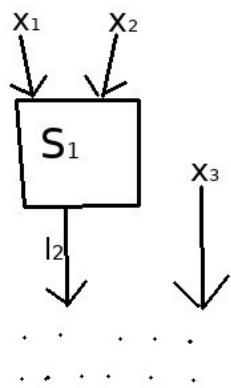
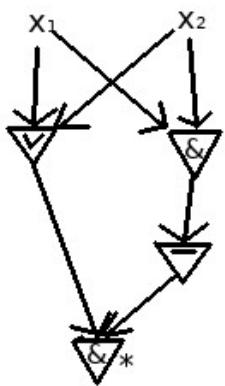
$l_2 = x_1 \oplus x_2 = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_1 x_2}) = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$

$l_3 = l_2 \oplus x_3$

...

...

$l_n = l_{n-1} \oplus x_n$



### 55.3 Функция Шеннона для СФЭ.

$$L(n) = \max_{f(x_1, \dots, x_n) \in P_2} (L(f)) - \text{ф-я Шеннона}$$

### 55.4 Метод Шеннона.

$\rightarrow K_n(x_1 \dots x_n)$  - счисло всех  $2^n$  коньюнктивных видов  $x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$

ЛЕММА:  $L(K_n) \leq 2^{n+1} + n - 4$

доказательство:

индукция по  $n$ :

$n=1$ :  $x_1$        $\bar{x}_1 \wedge x_1$       сомножитель '1'

есть два  $K_1, K_2 \dots K_k$  - верно

рассмотрим  $K_{k+1}(x_1 \dots x_{k+1})$ , по предпол. инд:

$\exists$  схема  $S_1$  из  $2^{k+1} + k - 4$  лог-объектов

$K_k(x_1 \dots x_n)$        $L(S) = L(S_1) + \underbrace{2 \cdot 2^k}_{2} + \underbrace{1}_{7} =$

$S$ :

$= 2^{k+1} + k - 4 + 2 \cdot 2^k + 1 =$   
 $= 2^{k+2} + (k+1) - 4 \text{ - д.п.}$

Теорема:  $L(n) \leq 3 \cdot 2^n + n - 5$

Доказательство:  $f(x_1 \dots x_n) \in P_2$  если  $f \equiv 0 \Rightarrow$  моральны  
 $f$  содержит из  $\{x\}$  м-ов

Иначе  $f(x_1 \dots x_n) \neq 0$ , предположим  
 $f$  & лиже симметрична

$$f(x_1 \dots x_n) = \bigvee_{(\delta_1 \dots \delta_n)} x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n} \quad (*)$$

$$f(\delta_1^* \dots \delta_n^*) = 1$$



Пусть  $S_1$  - единичная реализация  $K_n(x_1 \dots x_n)$

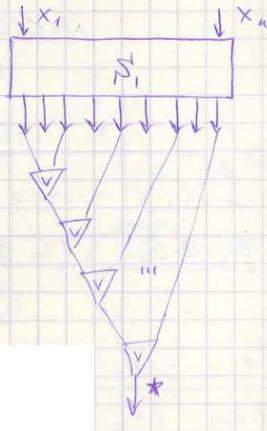
доказательство реализации  $f$  из  $S_1$

$$L(S) \leq L(S_1) + 2^n - 1 \leq$$

$$\leq 2^{n+1} + n - 4 + 2^n - 1 = \\ = 3 \cdot 2^{n+2} + n - 5$$

$$\forall f \quad (L(f) \leq 3 \cdot 2^n + n - 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(n) \leq 3 \cdot 2^n + n - 5$$



## МЕТОД СЧАСТИВОЙ

Теорема 12  $L(n) \leq 8 \cdot 2^n$

$$a(n) \leq b(n) \Rightarrow$$

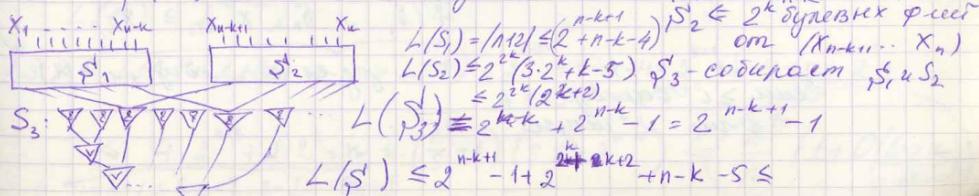
доказателем: Пусть  $f(x_1 \dots x_n) \in P_2$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} \leq 1$

параллельно  $f$  и  $n-k$  параллельно

$$f(x_1 \dots x_n) = \bigvee_{(\delta_1 \dots \delta_n)} x_1^{\delta_1} \dots x_{n-k}^{\delta_{n-k}} f(\delta_1^* \dots \delta_{n-k}^*, x_{n-k+1} \dots x_n) \quad (1)$$

реализация  
без  $x_{n-k+1} \dots x_n$   
от  $k$  параллельно

$\Rightarrow S(f)$  содержит из  $\{x\}$  единиц:  $S_1^f = K_{n-k}$



последний при  $n \rightarrow \infty$   $k = \lfloor \log_2(n - 3 \log n) \rfloor$

$$\log(n - 3 \log n) - 1 < k \leq \log(n - 3 \log n)$$

$$\frac{n - 3 \log n}{2} < 2^k \leq n - 3 \log n ; 2^{2^k} \leq \frac{2^k}{n^3}$$

$$L(S) \leq 4 \cdot \frac{2^n \cdot 2}{n - 3 \log n} + 4(n - 3 \log n) \frac{2^n}{n^3} + R \leq$$

$$\leq \frac{8 \cdot 2^n}{n} + 4 \cdot \frac{2^n}{n^2} \approx \frac{8 \cdot 2^n}{n}$$

## 56 Лемма о нижней оценке сложности схем.

$$N(k, n) \leq (32(n+k))^{n+k+3}$$

**Доказательство:**

(в доказательстве ниже у функции N аргументы на других местах)

ЛЕММА 14

$$N(n, k) \leq (32(n+k))^{n+k+3}$$

доказательство:

схема  $n'$  входов ( $n' \leq n$ )  $k$  <sup>известных</sup>  $k_1$  <sup>известных</sup>  $k_2$ -г-ов и кон-ов

1) Вершина  $n'+k_1+k_2$  вершина

$$\{x_1 \dots x_{n'}\} - \text{принадлежит вершина} \subseteq \{x_1 \dots x_n\}$$

оставшиеся присоединяются к ней, и, следовательно, а вершины с конусами двух о присоединяют \*

2) вершина  $k_1+2k_2$  в извергарии изнутри  
в извергарии/изнутри/извне

3) где  $\forall$  вершины  $\exists$  извергарии есть из неё 2 вершины  
одной извергарии

$S(n, n', k_1, k_2)$  все схемы с этими вершинами извне,

а  $N(n, n', k_1, k_2)$  - все схемы (максимум схем)

$$\Rightarrow N(n, k) \leq \sum_{\substack{n' \leq n \\ k_1+k_2=k}} N(n, n', k_1, k_2)$$

Очевидно  $N(n, n', k_1, k_2)$

$S \in S(n, n', k_1, k_2)$

Рассмотрим  $G$ -граф, на котором и ср. скелет  $S$

Рассмотрим основание графа (без оголовков)  
таки могут быть чеки  $\Rightarrow$  рассмотрим  
в нем основное дерево

Задача из  $S$  берется \* корень  $\Rightarrow$  это основное  
корневое дерево

т.о. скелет из  $S(n, n', k_1, k_2)$  можно построить  
изл. алгоритмом!

1) Выбираем основное корневое дерево из  
 $n+k_1+k_2-1$  ребрах

ах число - число комбинаций  $\frac{1}{n+k_1+k_2} \binom{2(n+k_1+k_2)-1}{n+k_1+k_2-1} \leqslant$   
 $\leqslant 2^{n+k_1+k_2-1} < 4^{n+k_1+k_2}$

2) Корни присоединяются \* и <sup>множ</sup> -   
число таких способов  $\leq 2^{n+k_1+k_2}$

3) выбираем  $x_i, \dots x_{i_n}$  из  $x_1 \dots x_n$

$$\text{их } \binom{n}{n'} \leq 2^n$$

4) один из вершин символом

$x_i, \dots$  другую  $x_{i_2}$  и т.д.  $x_{i_n'}$

способов это сделать  $\leq (n-k_1+k_2)^{n'} \leq (n+k_1+k_2)^{n'}$

5)  $k_1+k_2$  вершин основного надо спреди всех  
выбранных  $k_1$  вершине поместить оголовки,  
а корни решить как  $\emptyset \cup \emptyset$

$$7: \binom{k_1+k_2}{k_1} \leq 2^{k_1+k_2}$$

$$\& 8: 2^{k_2}$$

6)  $(n+k_1+k_2-1)$  дер., а нужно  $(k_1+k_2 \cdot 2)$  дер / из 2)

$k_1+2k_2-n-k_1-k_2+1 \leq k_2$  - надо еще 1 дерево,  
или удалил 1 корень.  
еще дер

максимальное значение веса дерева  $\Rightarrow$  вес дерева  $\leq (n+k_1+k_2)^{k_2}$

$$\begin{aligned}
 (16) \Rightarrow N(n, n', k_1, k_2) &\leq 4^{n+k_1+k_2} \cdot 2^{n+k_1+k_2} \cdot 2^n \cdot (n+k_1+k_2)^{n+k_1+k_2} \cdot 2^{k_1+k_2} \cdot 2^{k_2} \cdot (n+k_1+k_2)^{k_2} \\
 &\leq 32^{n+k_1+k_2} (n+k_1+k_2)^{n+k_1+k_2} \\
 N(n, k) &\leq \sum_{\substack{n' \leq n \\ k_1+k_2 \leq k}} 32^{n+k_1+k_2} (n+k_1+k_2)^{n+k_1+k_2} \leq \\
 &\leq \underbrace{n(k+1)^2}_{m \in \mathbb{N}} 32^{n+k} (n+k)^{n+k} \leq \\
 &< (32(n+k))^{n+k+3}
 \end{aligned}$$

□

## 57 Мощностной метод получения нижней оценки функции Шенона для СФЭ

?

Для достаточно больших  $n$

$L(n) > \frac{2^n}{n}$  и доля тех, ф-ций  $f(x_1, \dots, x_n)$ , для которых  $L(f) \leq \frac{2^n}{n}$  стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$

**Доказательство:**

Надо показать:

$$\frac{N(\frac{2^n}{n}, n)}{2^{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Из леммы о нижней оценке

$$\log_2 N(\frac{2^n}{n}, n) - 2^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$(n + \frac{2^n}{n} + 3) \log_2(32(n + \frac{2^n}{n})) - 2^n \leq (n + \frac{2^n}{n} + 3)(5 + \log_2(\frac{2^{n+2}}{n})) - 2^n = (n + \frac{2^n}{n} + 3)(7 + n - \log_2 n) - 2^n = 7n + n^2 - n \log_2 n + 7 \cdot \frac{2^n}{n} + 2^n - \frac{2^n}{n} \log_2 n + 21 + 3n - 3 \log_2 n - 2^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$$

□

## 58 Ограниченно-детерминированные функции. Способы их задания.

### 58.1 Ограниченно-детерминированные функции

Информационные деревья эквивалентны, если они задают одинаковую функцию

$f(x)$  — ограниченно детерминированная ф-я, если в её информационном дереве конечное число попарно не эквивалентных поддеревьев

### 58.2 Способы их задания.

#### 58.2.1 Определение

Рассмотрим  $f(x)$  — о.д.ф веса  $r$ ;  $v_0, \dots, v_{r-1:T_{v_0}, \dots, T_{v_{r-1}}}$  попарно неэквивалентны

Пометим все вершины дерева  $T_{v_0}$  числами  $q_0, \dots, q_{r-1}$

Т.о. дерево  $T_u$  имеет метку  $q_j \Leftrightarrow T_u T_{v_j}$

### 58.2.2 Определение

$\{q_0, \dots, q_{r-1}\} = Q$  — мн-во состояний о.д.ф.  $f$

### 58.2.3 1. Усечённое информационное дерево

Усечённое информационное дерево — поддерево  $T_{v_0}$  т. ч.  $\forall$  орцепь из  $v_0$  в лист содержит ровно 2 вершины с 1-ой меткой никакое поддерево этим св-вом не обладает

### 58.2.4 2. Диаграмма Мура

Отождествим все вершины с одинаковыми метками в усечённом информационном дереве, получим диаграмму о.д.ф.

Также необходимо задать начальную вершину

### 58.2.5 3. Канонические уравнения

$\delta : Q \times A \rightarrow Q$  — ф-я переходов

$\lambda : Q \times A \rightarrow B$  — ф-я выходов

$$\begin{cases} y(t) = \lambda(q(t), x(t)) \\ q(t+1) = \delta(q(t), x(t)) \\ q(0) = q_0 \end{cases}$$

## 59 Конечный детерминированный автомат с выходом. Автоматные функции, связь с ограниченно-детерминированными функциями. Лемма о периодической функции.

### 59.1 Конечный детерминированный автомат с выходом.

Он же автомат Мили: система  $V = (A, B, Q, \delta, \lambda)$ :

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$  — входной алфавит

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$  — выходной алфавит

$Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  — выходной алфавит

$\delta : Q \times A \rightarrow Q$  — ф-я переходов

$\lambda : Q \times A \rightarrow B$  — ф-я выходов

### 59.2 Автоматные функции, связь с ограниченно-детерминированными функциями.

Ф-я  $f : A^{\text{inf}} \rightarrow B^{\text{inf}}$  — автоматная, если  $\exists$  конечн. детерм. автомат её реализующий

**Лемма:**

ф-я автоматная  $\Leftrightarrow$  она ограниченно детерминированная

### 59.3 Лемма о периодической функции

Опред.: под-ср  $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \dots) \in A$  - периодическая, если с перIODом  
она перод. в некотором итervале

$$\exists N \mid \forall t \geq N \quad \alpha(t+d) = \alpha(t)$$

Лемма 25) (о перодич. под-срн)

коэф. отв с к коэф. од-ст перод. под-ср с перод. од  
 & перод. под-ср с перодическим  $k_1 \cdot d$   $k_1$ -перод. членом

з-до: Определение аддитивн  $V_{g_0} = (A, B, Q, \delta, A)$

$$|Q| = k, g_0 \in Q$$

путь он получается  $\phi$ -из  $f_V(x)$

распределение  $\alpha = f_V(t)$ .  $\exists \gamma \in A^\infty$  и перод. ( $T=d$ )

$$\Rightarrow \exists n \mid \forall t \geq n \quad \alpha(t+d) = \alpha(t)$$

$$\Rightarrow \alpha(N) = \alpha(N+d) = \dots = \alpha(N+k \cdot d)$$

$g(N), g(N+d), \dots, g(N+k \cdot d)$  - коэф.  
коэф.

$(1+k)$ -коэф.  $\rightarrow$  но ип. доказ-ие  $\exists i \leq j \quad 0 \leq i \leq j \leq k$

$$g(N+id) = g(N+jd) \quad (1)$$

$$\text{Пусть } k_1 = j-i$$

$$f_{V_{g_0}}(\alpha) = \beta = (\beta(1), \beta(2), \dots) \in B^\infty$$

получаем одн-ст по  $t$ , т.к. для  $\forall t \geq N+id$

$$\begin{cases} \beta(t) = \beta(t+id) \\ g(t) = g(t+id) \end{cases} \quad (2) \text{ надо доказать} \Rightarrow$$

$$\text{Доказ.) } t = N + id$$

$$\begin{aligned} g(t) &= g(N+id) \stackrel{(1)}{=} g(N+jd) = \\ &= g(t - id + jd) = g(t+id) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \beta(g(t), \alpha(t)) = \beta(g(t+id), \alpha(t+id)) = \\ &= \beta(t+id) \end{aligned}$$

ищущий) и (2) верно для некоторого  $t \geq N + id$   
рассматривая "тут"

$$\begin{aligned} g(t+1) &= \delta(g(t), d(t)) = \\ &= \delta(g(t+kd), d(t+kd)) = \\ &= g(t+k, d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta(t+1) &= \beta(g(t+1), d(t+1)) = \\ &= \beta(g(t+1+kd), d(t+1+kd)) = \\ &= \beta(t+1+k, d) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \beta(t)$  - переходящая с периодом  $k+d$  инициализированная  $T$

## 60 Схема из автоматных элементов. Теорема о не существовании конечных полных систем автоматных функций.

### 60.1 Схема из автоматных элементов.

Опред.:  $P_A$  - множество всех автоматах функций от  $A$  генерируемых

с входом и выходом  $A$

рассматривая схем. авт. функций  $F = \{f_1^{(n)}(x_1 \dots x_n), \dots, f_k^{(m)}(x_1 \dots x_m)\}$   
- под-бо  $\theta P_A$

схема из общ. элементов в форме  $F$

$\rightarrow$  конечность схемы доказана наконец-редукцией,  
 $A$  берется из всех общих предложений

с  $n_i$  общ. узелами пропись  $f_i$

(\*)

## 60.2 Теорема о не существовании конечных полных систем автоматных функций.

**Теорема 19:** Если  $|A| \geq 2$  то в  $P_A$  не существует конечных полных систем автом. ф-ций

доказательство:

**Лемма 21:** Пусть  $k \in \mathbb{N}$ ,  $F$ -конеч. система ф-ций из  $P_A$ , причём конфл. из этих ф-ций имеет не более, чем  $k$  состояний

$S'$ -схема из автом. элем в базисе  $F$  и пусть

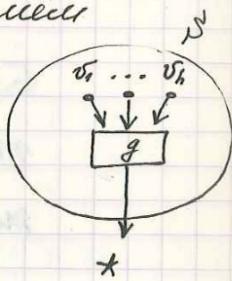
$f(x_1, \dots, x_n)$  — авт. ф-ция, реализуемая в  $S'$   
 $d_1, \dots, d_n \in A_k$  — конс. числа (запущенных)

$$\text{тогда } f(d_1, \dots, d_n) = \beta \in A_k$$

доказать: что по числу  $n$ -значений в схеме  $S'$

$N=0$  — очевидно

Пусть  $S'$  с  $N$  автомата з-значений, единичный



— схема собл. с блоком-реализатором  
— если нет, то это блок  $g$ -типа  $g \in F$

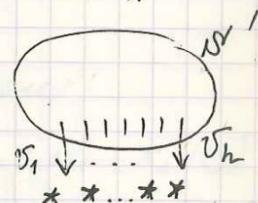
Пусть  $g$   $n$  входов и  $\tau$  состояний

На  $v_1, \dots, v_n$  реализуем ф-ции  $\varphi_1(x_1, \dots, x_n)$  и ...

Схемы  $S'$  ( $n-1$ ) з-значений, значит для неё можно привести инд. предпол

$$\Rightarrow \exists d_1, \dots, d_n \in A_k \quad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1(d_1, \dots, d_n) \\ \vdots \\ \varphi_n = \varphi_n(d_1, \dots, d_n) \end{cases}$$

?  $\left\{ \begin{array}{l} \text{не все они} \\ \text{делятся на } k \end{array} \right.$   $\xrightarrow{\text{расширение}}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{и не все} \\ \text{делятся на } k \end{array} \right.$

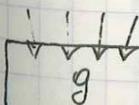


но инд. предпол  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in A_k$ . Пусть  $m$  — период

$d_1, \dots, d_n$  соответственно, что на него под-ся

$(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in A_k$ , период этого конс.

$$\text{так как } \text{НОК}(d_1, \dots, d_n) = m$$



но не имеет о первом кол.

$\beta = g(\bar{\gamma})$  имеет период  $\Sigma_1 d$  где  $\Sigma_1 \leq \bar{\gamma} \leq k$

мы знаем, что  $d, \dots, d_k$  не имеют общих делителей, бессильных  $k$   
 $\Rightarrow d$  не имеет общих делителей  $k \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma_1 d$  тоже не имеет делителей  $k$

$\Rightarrow \beta \in A_k$

т.т.з.

доказательство теоремы:

У  $F$ -коэф. коли имеется автоморфные функции  
Образующие из  $k$ -тих чисел соотв. функц из  $F$

У  $p$ -простое и  $p > k$ , построим такое кол.

$\beta \in A^\infty \mid (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{p\text{-пер}}, a_2, \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{p\text{-пер}}, a_2, \dots) - \text{периодиче-} \\ \text{кая}, \\ a_1 \neq a_2 \quad a_1, a_2 \in A \\ \min \text{период} = p$

$\Rightarrow \beta \notin A_k$

$f \in P_A \quad f: A^\infty \rightarrow A^\infty$ , заданна

$\forall \alpha \in A^\infty \quad f(\alpha) = \beta \quad / \text{общий разб...} /$

$F$ -коэф  $\Rightarrow \exists S$  в форме  $F$ , получающей  $f$

тогда на выходе  $S$  поданна  $\gamma = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$

тогда по условию 21:  $\gamma \in A_k \Rightarrow$  на выходе будет  
коэф-сы из  $A_k$ , т.е.

$f(\gamma) \in A_k$ , но это не имеет, тако

$f(\gamma) = \beta \notin A_k \not\models$

т.т.з.

# 61 Схемы из автоматных элементов с использованием операции обратной связи. Реализация произвольной автоматной функции.

## 61.1 Схемы из автоматных элементов с использованием операции обратной связи.

*СХЕМЫ ИЗ  $\Phi$ -БИХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЭМИ ЗАДЕРЖКИ  
так)  $A = E = \{0, 1\}$*

*функция  
единиц - это функции, значение которых есть*

$$\begin{array}{c} x_1(t) \quad x_2(t) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{V} \\ \downarrow \\ y(t) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(t) = x_1(t) \vee x_2(t) \\ q(t+1) = q(t) \\ q(1) = 0 \end{array} \right. \quad f_V(x_1, x_2) \in P_E$$

$$\begin{array}{c} x_1(t) \quad x_2(t) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{S} \\ \downarrow \\ y(t) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(t) = x_1(t) \wedge x_2(t) \\ q(t+1) = q(t) \\ q(1) = 0 \end{array} \right. \quad f_S(x_1, x_2) \in P_E$$

$$\begin{array}{c} x(t) \\ \downarrow \\ \text{-} \\ \downarrow \\ y(t) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(t) = \overline{x(t)} \\ q(t+1) = q(t) \\ q(1) = 0 \end{array} \right. \quad f_{-}(x) \in P_E$$

*единиц задержки:*

$$\begin{array}{c} \vec{f}(x) \in P_E \\ \vec{f}(x) = \left\{ \begin{array}{l} y(t) = q(t) \\ q(t+1) = x(t) \\ q(1) = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

*Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_E$  ищущий авт., дост. для ф-ии*

$$V_{q_0} = (A, B, Q, \delta, \lambda)$$

$$B = E = \{0, 1\} \quad A = E^n = \{0, 1\}^E$$

$$Q = \{q_1, \dots, q_r\} \quad q_0 \in Q$$

*Ф-ия перехода:*

$$\delta: Q \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{q_1\}$$

*Ф-ия выхода:*

$$\lambda: Q \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

*Пусть  $\ell = \lceil \log_2 r \rceil$*

*Тогда получившийся состояния  $q_1, \dots, q_r$  наборами из  $0$  и  $1$  длины  $\ell$  приведены в  $q_0 \rightarrow (0, 0, \dots, 0)$*

*качущие уравнения:*

$$\begin{cases} y(t) = \lambda(q(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ q(t+1) = \delta(q(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ q(1) = 0 \end{cases}$$

тогда  $q(t)$  распадается на  $\ell$ -ф-ки  $q_1(t) \dots q_\ell(t)$   
 где  $\ell < n$ , а  $q_i$ -и

тогда мы можем записать

$$\begin{cases} y(t) = \lambda^1(q_1(t) \dots q_\ell(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ (q_1(t), \dots, q_\ell(t+1)) = \tilde{\delta}^1(q_1(t) \dots q_\ell(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ (q_1(1) \dots q_\ell(1)) = (0, \dots, 0) \end{cases}$$

Функции  $\lambda^1, \tilde{\delta}_1^1, \dots, \tilde{\delta}_\ell^1$  —

$$/\tilde{\delta}^1 = (\tilde{\delta}_1^1 \dots \tilde{\delta}_\ell^1) *$$

- определение на под-мн-ве  $\{0, 1\}^{l+n}$   
 и шаблоне  $\{0, 1\}^n$  на мн-ве  $\{0, 1\}^l$

→ 'нашествие' функций

Дополнительно ук  $y$  по  $\tilde{\delta}^1$ .  $\lambda^2, \tilde{\delta}_1^2 \dots \tilde{\delta}_\ell^2$

$$\begin{cases} y(t) = \lambda^2(q_1(t) \dots q_\ell(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ q_1(t+1) = \tilde{\delta}_1^2(q_1(t) \dots q_\ell(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ \dots \\ q_\ell(t+1) = \tilde{\delta}_\ell^2(q_1(t) \dots q_\ell(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ q_1(1) = 0, \dots, q_\ell(1) = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}^2 = (\tilde{\delta}_1^2 \dots \tilde{\delta}_\ell^2)$$

Что же является конечным?

- исчезающий образ

$$V_{q_0}^2 = \left\{ \{0, 1\}^n, \{0, 1\}; \{0, 1\}^\ell, \lambda^2, \tilde{\delta}^2 \right\}$$

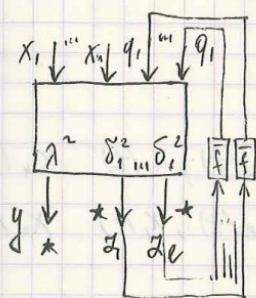
$$\text{т.е. } \lambda^2 \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\tilde{\delta}^2 \in \{0, 1\}^\ell \times \{0, 1\}^\ell \rightarrow \{0, 1\}^\ell$$

$$\tilde{q}_0 = (0 \dots 0)$$

По истр. этом автомаг  $V_{Q_0}^2$  реализует  $f(x_1 \dots x_n)$

Получим схему  $S'$  из тех же самых базисе  $\{f_\&, f_V, f_T\}$   
у неё  $(n+1)$ -й вход с подключением  $x_1 \dots x_n, q_1 \dots q_e$   
и  $(l+1)$ -ый  $\rightarrow y, x_i \dots x_l$  при этом на  $y$  та же  
схема реализует  $\tilde{\lambda}^2(q_1 \dots q_e, x_1 \dots x_n)$ , а на выходе  
 $\tilde{x}_i$  реализ.  $\tilde{\alpha}_i(q_1 \dots q_e, x_1 \dots x_n)$



входящие в элемениты базиса задержки  
и i-ый элемент  $\begin{cases} \text{вход} - \tilde{x}_i \\ \text{выход} - \tilde{q}_i \end{cases}$

т.е. в схеме  $S'$  все элем.  $f_\&, f_V, f_T$  на  
 $f_\&, f_V, f_T$

и.е. в схеме теперь все элем. автомагов

$\Rightarrow$  Получим обобщ. схему  $S'$  из авт. элем в базисе  $\{f_\&, f_V, f_T, \tilde{f}\}$

Доп: Построение в схеме конгрубов пр-х 2/3 элеменов задер-  
жки - операции обратной схемы

Если на входах появят  $x_1(t) \dots x_n(t)$ , то блоки бр т  
их будущи получают  $y(t), f_1(x_1 \dots x_n)$

- это надо дать индекс  $t$  ... (ii) синтез.

Теорема 20:  $\forall$  авт. фунц из  $P_E$  можно реал. схему из  
авт. элем в базисе  $\{f_\&, f_V, f_T, \tilde{f}\}$  с использ. операц. обр. связь.

(обратное: заменение по всем машинам схемы  
дает  $P_E$ )

## 61.2 Реализация произвольной автоматной функции.

Для  $\forall$  автоматной ф-ции  $f \in P_A$  можно построить схему из автоматных элементов в базисе  $f_\&, f_V, f_T, \tilde{f}$  с использованием операц. обр. связь, реализующую систему б.ф.  $f_1, \dots, f_m \in P_E$  ( $m = \lceil \log_2 |B| \rceil$ ) значения которых однозначно опр. значение  $f$

## 62 Конечные автоматы Мили и Мура, их эквивалентность.

### 62.1 Конечный автоматы Мили

Система  $V = (A, B, Q, \delta, \lambda)$ :

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$  — входной алфавит

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$  — выходной алфавит

$Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  — выходной алфавит

$\delta : Q \times A \rightarrow Q$  — ф-я переходов

$\lambda : Q \times A \rightarrow B$  — ф-я выходов

## 62.2 Конечный автомат Мура

Конечный детерминированный автомат — автомат Мура, если  $\forall$  состояния  $q$  значение выходного символа на всех входящих в  $q$  дугах одинаково

## 62.3 Эквивалентность автоматов Мили и Мура

$\forall$  автомата Мили,  $\exists$  эквивалентный ему автомат Мура

**Доказательство:**

Дан произвольный автомат Мили:  $(A, B, Q, \delta, \lambda)$

$A = (a_1, \dots, a_n)$

$Q = (q_1, \dots, q_k)$

Определим автомат Мура:  $V_M = (A, B, Q_M, \delta_M, \mu)$

$Q_M = \{q_{ij} | i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n\} \cup \{q_{i0} | i = 1, \dots, k\}$

$q_{i0}$  — исх. состояния

$q_{ij} (j > 1)$  — исх. дуги

$\delta_M : \delta_M(q_{i0}, a_r) = q_{ir}; i = 1, \dots, k$

$\delta_M(q_{ij}, a_r) = q_{lr}; l : \delta(q_i, a_j) = q_l$

$\mu : \mu(q_{i0})$  — произвольные значения

$\mu : \mu(q_{ij}) = \lambda(q_i, a_j)$

Автомат построили, теперь необходимо обосновать:

1)  $\forall i = 1, \dots, k \quad q_i \in Q$  автомата  $V$  неотличимо от  $q_{i0} \in Q_M$  автомата  $V_M$

2)  $\forall i = 1, \dots, k; \forall j = 1, \dots, n \quad q_{ij} \in Q_M$  неотличимо от  $q_{r0} \in Q_M \quad r : \delta(q_i, a_j) = q_r$

Обоснование:

1) В автомате  $V$  при состоянии  $q_i$  подадим на вход  $a_r$ , на выходе получим  $\lambda(q_i, a_r)$

В автомате  $V_M$  при состоянии  $q_{i0}$  подадим на вход  $a_r$

$\lambda_M(q_{i0}, a_r) = \mu(\delta_M(q_{i0}, a_r)) = \mu(q_{ir}) = \lambda(q_i, a_r)$

2) б/д

□

## 63 Конечный детерминированный инициальный автомат без выходов. Пример языка, не распознаваемого конечным автоматом.

### 63.1 Конечный детерминированный инициальный автомат без выходов.

$V = (A, Q, \delta, q_0, F)$

$A$  — входной алфавит

$Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  — мн-во состояний

$\delta : Q \times A \rightarrow Q$  — ф-я переходов

$q_0$  — нач. состояние

$F \subset Q$  — мн-во конечных состояний

## 63.2 Пример языка, не распознаваемого конечным автоматом.

**ОПР 8.15.1** (События, элементарного события).

Событие — это слово в алфавите  $A$ , оно элементарное, если это буква из алфавита  $A$  или пустое слово  $e$ .

**Теорема 8.15.4** (Не представимые конечном автомате события).

▷ Существуют события не представимые в конечном автомате, точнее: любая непериодическая последовательность — не представима в конечном автомате.

▷ Доказательство.

1. Существует событие, не представимое в конечном автомате: множество конечных автоматов — счётно, таким образом множество всех конечных автоматов — счётно (можно занумеровать все автоматы с  $n$  состояниями), но множество событий — несчётно, таким образом всех автоматов не хватит на все события, следовательно есть не представимые события.
2. Возьмём не периодическую последовательность  $\alpha$ , состоящую из букв  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}, \dots$  — бесконечная (например  $\alpha = 10110111011110\dots$ ) и пусть  $\alpha$  — распознаётся некоторым автоматом  $S$  с  $n$  состояниями.
  - ✓ Если событие  $E$  состоит из всех начальных отрезков некоторой бесконечной последовательности, то будем говорить, что  $E$  — эта последовательность, тогда любой начальный кусок должен переводить в конечное состояние  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_j}$ ;  $\delta(q_1, a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j}) = q_{i_j} \in F$ . То есть при „переработке“ слова  $\alpha$  — автомат проходит последовательность финальных состояний. Но множество финальных состояний — конечно, следовательно некоторые состояния автомат будет проходить повторно, то есть существует  $j$  (длина начального отрезка) и  $k$ , что  $q_{i_j} = q_{i_{j+k}}$ , то есть  $\delta(q_{i_j}, a_{i_{j+1}} a_{i_{j+2}} \dots a_{i_{j+k}}) = q_{i_{j+k}}$  и притом все промежуточные состояния автомата  $S$  тоже лежат в  $F$ .
  - ✓ Тогда при входном слове  $\alpha' = a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_j}(a_{i_{j+1}}, a_{i_{j+2}}, \dots, a_{i_{j+k}})$  (часть в скобочках повторяется периодически) — бесконечное периодическое слово. Автомат  $S$  на нём проходит последовательность заключительных состояний, а это значит, что  $S$  распознаёт слово  $\alpha'$ . Но один автомат не может распознавать два события, таким образом  $S$  не различает  $\alpha$  и  $\alpha'$ , следовательно  $S$  не распознаёт  $\alpha$ , но мы предполагали, что распознаёт — противоречие  $\Rightarrow \alpha$  не представимо в конечном автомате.

□

## 64 Конечные автоматы без выходов. Регулярные языки. Теорема о детерминизации.

### 64.1 Конечные автоматы без выходов.

#### 64.1.1 Конечный детерминированный инициальный автомат без выходов

$$V = (A, Q, \delta, q_0, F)$$

$A$  — входной алфавит

$Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  — мн-во состояний

$\delta : Q \times A \rightarrow Q$  — ф-я переходов

$q_0$  — нач. состояние

$F \subseteq Q$  — мн-во конечных состояний

#### 64.1.2 Конечный недетерминированный автомат без выходов

$$V = (A, Q, \delta, q_0, F)$$

$$\delta : Q \times (A \cup \{e\}) \rightarrow 2^Q$$

$$2^Q = \{S | S \subseteq Q\} — множество всех подмножеств Q$$

### 64.2 Регулярные языки.

1.  $E_1 + E_2 = E_1 \cup E_2$  — объединение
2.  $E_1 \cdot E_2 = \{\alpha_1 \alpha_2 | \alpha_1 \in E_1; \alpha_2 \in E_2\}$  — конкатенация

$$3. E^* = \{e\} \cup E \cup E^2 \cup \dots = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^i - \text{итерация}$$

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$   
 языки  $\{e\}, \{a_1\}, \dots, \{a_n\}$  — элементарные языки

Язык  $E \subseteq A^*$  — регулярный, если он может быть получен из элементарных языков конечным числом операций объединения, конкатенации и итерации

### 64.3 Теорема о детерминизации.

Введём подобные обозначения

**Конечным недетерминированным автоматом без выхода называется пятерка**

$$\mathcal{A} = (A, Q, \Psi, q_1, F),$$

в которой

$A = \{a_1, \dots, a_n\}, n \geq 1,$	— входной алфавит;
$Q = \{q_1, \dots, q_r\}, r \geq 1,$	— множество состояний;
$\Psi : A \times Q \rightarrow 2^Q \setminus \emptyset$	— функция переходов;
$q_1 \in Q$	— начальное состояние;
$F \subseteq Q$	— множество заключительных состояний.

Напомним, что  $2^Q = \{S \mid S \subseteq Q\}$  — множество всех подмножеств множества  $Q$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A$  — конечный алфавит. Если множество  $L$ ,  $L \subseteq A^*$ , принимается некоторым недетерминированным конечным автоматом без выхода  $\mathcal{A}$ , то найдется такой детерминированный конечный автомат без выхода  $\mathcal{A}'$ , который принимает это же множество  $L$ , т.е.  $L = L(\mathcal{A}')$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{A} = (A, Q, \Psi, q_1, F)$  — недетерминированный автомат, который принимает множество  $L$ .

Построим такой детерминированный автомат  $\mathcal{A}' = (A, Q', \psi, q'_1, F')$ , что  $L = L(\mathcal{A}')$ .

**Доказательство** (продолжение). Положим, что

$Q' = 2^Q \setminus \emptyset$ , т.е. множество состояний детерминированного автомата — множество непустых подмножеств множества состояний  $Q$  недетерминированного автомата;

$q'_1 = \{q_1\}$ , т.е. начальное состояние детерминированного автомата — множество, состоящее из одного элемента  $q_1$ , начального состояния недетерминированного автомата;

$F' = \{S \subseteq 2^Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$  — множество заключительных состояний детерминированного автомата — множество тех подмножеств состояний недетерминированного автомата, которые содержат хотя бы одно его заключительное состояние.

**Доказательство** (продолжение). Теперь нам надо определить функцию переходов  $\psi$ .

Положим, что

$$\psi(a, S) = \bigcup_{q \in S} \Psi(a, q),$$

т.е. считывая букву  $a \in A$  и находясь в состоянии  $S \subseteq Q$ , детерминированный автомат однозначно переходит в свое состояние  $S'$ , которое есть объединение тех состояний, в которые может перейти недетерминированный автомат, считывая букву  $a \in A$  и находясь в каждом из состояний  $q \in S$

**Доказательство** (продолжение). Получаем, что если  $\alpha \in A^*$ , то после «прочтения» этого слова детерминированный автомат  $\mathcal{A}'$  переходит в состояние, которое является множеством всех тех состояний, в которые может перейти недетерминированный автомат  $\mathcal{A}$ , после «прочтения» этого же слова  $\alpha$ .

А когда недетерминированный автомат принимает слово  $\alpha$ ?

Тогда и только тогда, когда он после «прочтения» слова  $\alpha$  может перейти в одно из заключительных состояний из  $F$ .

А мы положили все такие множества состояний и только их заключительными состояниями нашего детерминированного автомата.

Т.е.  $L(\mathcal{A}') = L$ .

# 65 Конечные автоматы без выходов. Регулярные языки. Теорема анализа автоматов

## 65.1 Конечные автоматы без выходов.

См. пункт 64.1

## 65.2 Регулярные языки.

См. пункт 64.2

## 65.3 Теорема анализа автоматов

Событие = слово

**Теорема 8.16.5** (Клини о регулярности представимого в конечном автомате события).

- ▷ Любое событие, представимое в конечном автомате, является регулярным.
- ▷ Доказательство.
  - Определим по индукции событие  $E_{ij}^k$ :
    - ✓  $E_{ij}^0 = \{a \in A \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$ ;
    - ✓  $E_{ij}^k = E_{ij}^{k-1} \vee E_{ik}^{k-1} (E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1}$ ;
  - а так же определим и множество  $M_{ij}^k = \{\alpha \in A^* \mid \delta(q_i, \alpha) = q_j\}$  и при переходе из  $q_i$  в  $q_j$  под действием  $\alpha$ , автомат не проходит через состояния с номерами большими  $k$ . По доказываемой ниже лемме 8.16.5.1  $M_{ij}^k = E_{ij}^k$ , таким образом событие  $M_{ij}^k$  — регулярное.
  - Пусть у автомата  $n$  состояний и  $q_1$  — начальное, а  $q_{m_1}, q_{m_2}, \dots, q_{m_p}$  — конечные состояния, тогда наш автомат представляет событие  $M_{1m_1}^n \vee \dots \vee M_{1m_p}^n$ , которое является регулярным.

□

**Лемма 8.16.5.1** (Соотношение в теореме Клини).

- ▷  $M_{ij}^k = E_{ij}^k$ , то есть любое  $M_{ij}^k$  — регулярное, где  $M_{ij}^k$  и  $E_{ij}^k$  — определяемые в предыдущей теореме события.
- ▷ Доказательство.
  - Докажем это равенство индукцией по  $k$ :
    - ✓ При  $k = 0$  равенство очевидно;
    - ✓ Переход  $k = r - 1 \rightarrow k = r$ : пусть  $M_{ij}^k = M_{ij}^{k-1} \vee \widetilde{M}_{ij}^k$ , где  $\widetilde{M}_{ij}^k$  — это те слова из  $M_{ij}^k$ , под действием которых автомат обязательно проходит через состояние  $q_k$ . По индукционному предположению  $M_{ij}^{k-1} = E_{ij}^{k-1}$ , тогда  $M_{ij}^k = E_{ij}^{k-1} \vee \widetilde{M}_{ij}^k$  и осталось доказать, что  $\widetilde{M}_{ij}^k = E_{ik}^{k-1} (E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1}$ :
      - ★ Докажем, что  $\widetilde{M}_{ij}^k \subseteq E_{ik}^{k-1} (E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1}$ : пусть  $\alpha \in \widetilde{M}_{ij}^k$ , тогда  $\alpha$  переводит автомат из состояния  $q_i$  в состояние  $q_j$  и при этом  $s$  раз ( $s > 0$ ) проходит состояние  $q_k$ , таким образом  $\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_s$ , где все  $\alpha_i$  заканчиваются на состоянии  $q_k$ , при этом  $\alpha_0 \in E_{ik}^{k-1}$ ,  $\alpha_s \in E_{kj}^{k-1}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1} \in (E_{kk}^{k-1})^*$   $\rightarrow \alpha \in E_{ik}^{k-1} (E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1}$ .
      - ★ Осталось доказать, что  $E_{ik}^{k-1} (E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1} \subseteq \widetilde{M}_{ij}^k$ : выберем  $\alpha \in E_{ik}^{k-1} (E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1}$ , тогда должно выполняться  $\alpha \in M_{ik}^{k-1} (M_{kk}^{k-1})^* M_{kj}^{k-1}$ ; из определения  $M_{uv}^{k-1}$  следует, что автомат на слове  $\alpha$  не должен проходить через состояния с номером большим чем  $(k - 1)$  и должен будет пройти через состояния с номером  $(k - 1)$ , так как в событии  $M_{ik}^{k-1} (M_{kk}^{k-1})^* M_{kj}^{k-1}$  есть событие  $(M_{kk}^{k-1})^*$ .

□

□

## 66 Конечные автоматы без выходов. Регулярные языки. Теорема синтеза автоматов

### 66.1 Конечные автоматы без выходов.

См. пункт 64.1

### 66.2 Регулярные языки.

См. пункт 64.2

### 66.3 Теорема, необходимая для доказательства

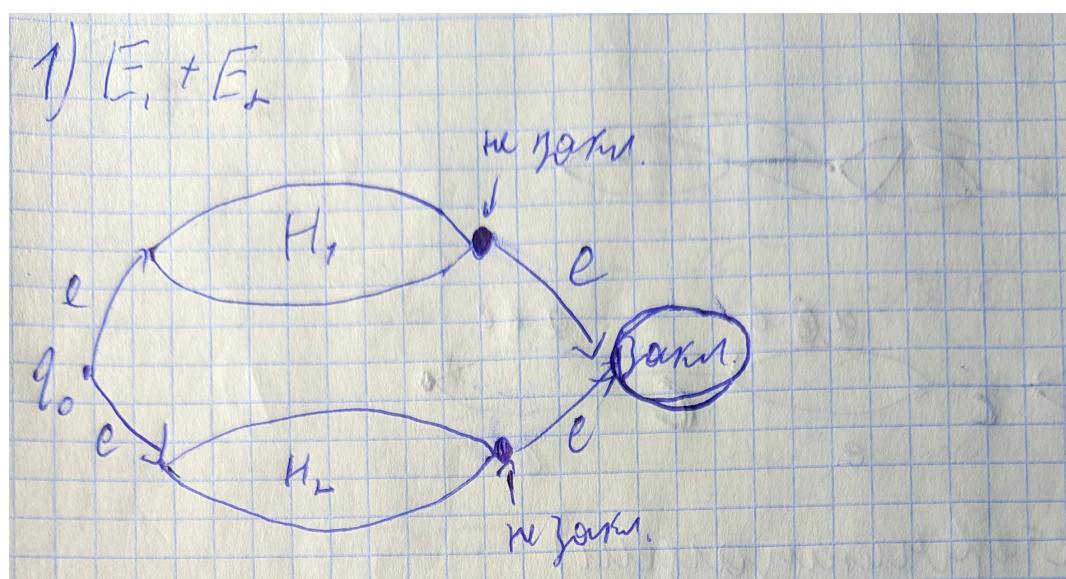
$\forall$  регулярного языка  $\exists$  недетерминированный конечный автомат с одним закл. состоянием распознающий его

**Доказательство:**

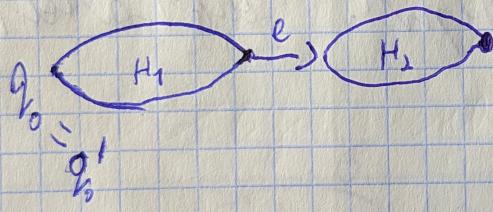
База: элементарный язык

Операции:

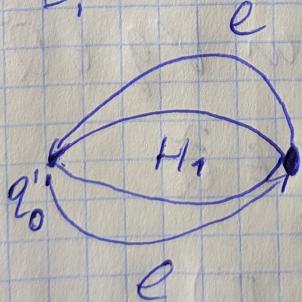
$E_1, E_2$  — языки, распознаваемые автоматом с одним закл. сост.



2.)  $E_1 \cdot E_2$



3.)  $A_1^* \cup E_1^*$



□

## 66.4 Теорема синтеза автоматов

$\forall$  регулярного языка  $E$  существует конечный автомат, распознающий этот язык

**Доказательство:**

Для регулярного языка  $E$  строим недетерминированный конечный автомат по доказанной выше теореме

Строим для полученного автомата эквивалентный ему детерминированный конечный автомат (по теореме о детерминизации)

□

## 67 Классы Р и NP. Полиномиальная сводимость. NP-полные задачи. Теорема Кука (без доказательства)

### 67.1 Классы Р и NP.

$L[\Pi, \varepsilon]$  — коды задач из  $Y_\Pi$

$\Pi \in P \Leftrightarrow \exists$  полиномиальный алгоритм её распознающий  $\Leftrightarrow \exists$  детерминированная машина Тьюринга распознающая  $L[\Pi, \varepsilon]$

$\Pi \in NP \Leftrightarrow \exists$  недетерм. машина Тьюринга распознающая  $L[\Pi, \varepsilon] \Leftrightarrow$  за полиномиальное время можно проверить ответ "да"

$P \subseteq NP$

## 67.2 Полиномиальная сводимость.

Задача  $\Pi_1$  полиномиально сводится к задаче  $\Pi_2$  ( $\Pi_1 \propto \Pi_2$ ), если  $\exists$  ф-я  $f : D_{\Pi_1} \rightarrow D_{\Pi_2}$  т.ч.:

1.  $\exists$  полиномиальный алгоритм  $A$  вычисляющий  $f$
2.  $I \in Y_{\Pi_1} \Leftrightarrow f(I) \in Y_{\Pi_2}$

## 67.3 Теорема Кука (без доказательства)

Задача ВЫП(выполнимость) NP-полная

# 68 Полиномиальная сводимость. Доказательство NP-полноты задачи 3-выполнимость.

## 68.1 Полиномиальная сводимость.

Задача  $\Pi_1$  полиномиально сводится к задаче  $\Pi_2$  ( $\Pi_1 \propto \Pi_2$ ), если  $\exists$  ф-я  $f : D_{\Pi_1} \rightarrow D_{\Pi_2}$  т.ч.:

1.  $\exists$  полиномиальный алгоритм  $A$  вычисляющий  $f$
2.  $I \in Y_{\Pi_1} \Leftrightarrow f(I) \in Y_{\Pi_2}$

## 68.2 Доказательство NP-полноты задачи 3-выполнимость.

3-выполнимость — NP-полная

**Доказательство:** По теореме Кука задача ВЫП — NP-полная

Также по лемме с лекций:

$\Pi_1, \Pi_2 \in NP, \Pi_1 \in NPC$

$\Pi_1 \propto \Pi_2 \Rightarrow \Pi_2 \in NPC$

$\Pi_1$  — выполнимость

$\Pi_2$  — 3-выполнимость

Т.о. необходимо доказать что 3-выполнимость  $\in NP$ . И что выполнимость сводится к 3-выполнимости

Обозначения:

3SAT — 3-выполнимость

CNFSAT — выполнимость

Для того, чтобы доказать NP-полноту задачи, необходимо установить следующие факты:

1.  $3SAT \in NP$ .
2.  $3SAT \in NPH$ ;

### Доказательство принадлежности 3SAT классу NP [править]

Возьмем в качестве сертификата набор  $x_1 \dots x_n$ , где  $x_i \in \{0, 1\}$ . Верификатор подставляет  $x_1 \dots x_n$  в формулу и проверяет её на равенство единице. Время работы верификатора и длина сертификата, очевидно, полиномиальны. Итак,  $3SAT \in NP$ .

### Доказательство принадлежности CNFSAT классу NPH [править]

Покажем, что  $CNFSAT \leq 3SAT$ , то есть  $CNFSAT$  сводится по Куку к  $3SAT$ .

Рассмотрим один дизъюнкт булевой формулы в форме 3-КНФ. Он должен иметь вид  $(x \vee y \vee z)$ . Научимся приводить члены вида  $(x)$ ,  $(x \vee y)$ ,  $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_m)$  к нужному виду.

- $(x \vee y)$  заменим на  $(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \wedge \neg z)$ . Ясно, что последняя формула выполнима тогда и только тогда, когда выполнима исходная, при любых  $z$ ;
- $(x)$  заменим на  $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$  - свели задачу к предыдущей;
- Если встречается дизъюнкт вида  $(x_1 \dots x_k)$ ,  $k \geq 3$ , введем  $k - 3$  новых переменных и заменим наш дизъюнкт на  $k - 2$  дизъюнкта:  
 $(x_1 \vee x_2 \vee z_1) \wedge (x_3 \vee \neg z_1 \vee z_2) \wedge (x_4 \vee \neg z_2 \vee z_3) \wedge \dots \wedge (x_{k-1} \vee x_k \vee \neg z_{k-3})$ . Покажем, что эта замена корректна.

Для этого, сделаем утверждение:

Если  $(x_1^* \dots x_k^*)$  — набор значений  $x_i$ , удовлетворяющий дизъюнкт  $(x_1 \vee \dots \vee x_k)$ , то существует такой набор значений  $z_1^* \dots z_{k-3}^*$ , что каждый из  $k - 2$  новых дизъюнктов также удовлетворен.

Действительно, среди значений  $(x_1^* \dots x_k^*)$  хотя бы одно должно равняться *true*. Не умоляя общности, пусть для некоторого  $r : 1 \leq r \leq k$ ,  $x_r = true$ . Тогда, пусть  $z_s^* = true$  для  $s \leq r - 2$  и  $z_s^* = false$  для  $s > r - 2$ . Тогда, все новые дизъюнкты также будут удовлетворены.

Наоборот, пусть все новые дизъюнкты удовлетворяются некоторым набором значений  $x_i$  и  $z_i$ . Покажем, что тогда хотя бы один из  $x_i$  должен равняться *true*.

Предположим, что это не так, и  $x_i = false$ ,  $i = 1..k$ . Тогда, первые  $k - 3$  дизъюнкта в  $3SAT$  удовлетворены только если  $z_i = true$ ,  $i = 1..k - 3$ . Однако, если  $z_{k-3} = true$ , то последний дизъюнкт  $(x_{k-1} \vee x_k \vee \neg z_{k-3})$  не может быть удовлетворен. Пришли к противоречию, следовательно хотя бы один из  $x_i$  должен равняться *true*.

Таким образом, мы свели  $CNFSAT$  к  $3SAT$ , следовательно  $3SAT \in NPH$ . Теорема доказана.



## 69 Полиномиальная сводимость. Доказательство NP-полноты задачи о раскраске.

### 69.1 Полиномиальная сводимость.

Задача  $\Pi_1$  полиномиально сводится к задаче  $\Pi_2$  ( $\Pi_1 \propto \Pi_2$ ), если  $\exists$  ф-я  $f : D_{\Pi_1} \rightarrow D_{\Pi_2}$  т.ч.:

1.  $\exists$  полиномиальный алгоритм  $A$  вычисляющий  $f$
2.  $I \in Y_{\Pi_1} \Leftrightarrow f(I) \in Y_{\Pi_2}$

### 69.2 Доказательство NP-полноты задачи о раскраске.

Задача Раскраска — NP-полнная

Дан граф  $G$  и дано число  $\chi \in \mathbb{Z}^+$   $\exists$  ли правильная вершинная раскраска в  $\chi$  цветов?

**Доказательство:**

3-ВЫП  $\propto$  раскр.

$K = D_1 \& \dots \& D_s$  — КНФ над  $\{x_1, \dots, x_n\}$

$\chi = n + 1$

$G : V = \{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \dots, x_n, \bar{x}_n, c_0, \dots, c_n, D_1, \dots, D_s\}$

$E_G = E_1 \cup \dots \cup E_5$

$E_1 = \{c_i c_j | \forall i \neq j\}$

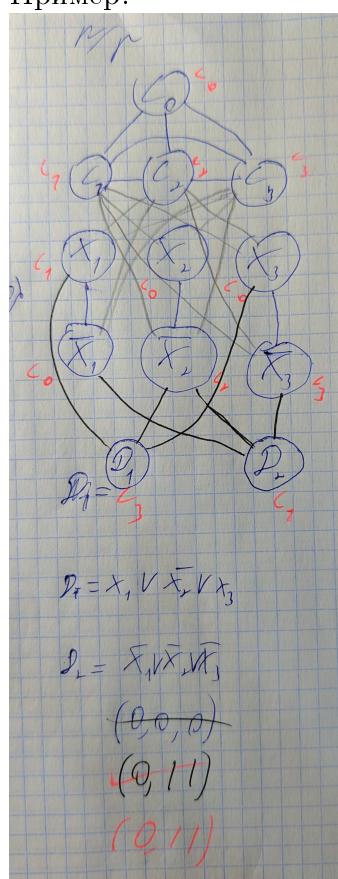
$E_2 = \{x_i \bar{x}_i \forall i\}$

$E_3 = \{x_i c_j, \bar{x}_i c_j | j \neq i, j \neq 0\}$

$E_4 = \{D_j u_i, D_j u_k, D_j u_l | D_j = u_i \vee u_k \vee u_l\}$

$E_5 = \{D_j c_p | D_j = u_i \vee u_k \vee u_l; p \notin \{i, k, l\}\}$

Пример:



Пусть дан вектор значений  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$  на котором истинна КНФ

Вершины  $c_i$  красим в цвет  $c_i$

Если  $x_i^* = 1$ , то окрашиваем вершину  $x_i$  в  $c_0$ , а вершину  $\bar{x}_i$  в  $c_i$

Если  $x_i^* = 0$ , то окрашиваем вершину  $\bar{x}_i$  в  $c_0$ , а вершину  $x_i$  в  $c_i$

Т.к. КНФ истинна, то  $\forall D_i \exists x_j^*$  за счёт которой  $D_i$  истинна  $\Rightarrow \exists$  вершина соединённая с  $D_i$  и окрашенная в цвет  $c_0$ . Красим  $D_i$  в цвет  $c_j$

Пусть дана раскраска графа  $G$  строим по этой раскраске вектор значений на котором КНФ будет истинна

$\forall i$  одна из вершин  $x_i, \bar{x}_i$  окрашена в цвет  $c_0$ , а другая в цвет  $c_i$ . Если в цвет  $c_0$  окрашена вершина  $x_i$ , то на  $i$ -ом месте в векторе стоит 1. Если же в цвет  $c_0$  окрашена вершина  $\bar{x}_i$ , то на  $i$ -ом месте стоит 0

Понятно что для каждой вершины  $D_j \exists$  вершина  $x_k$  или  $\bar{x}_k$  которая окрашена в цвет  $c_0$  (иначе  $D_j$  не во что было бы покрасить). И за счёт переменной, которая покрашена в  $c_0$ , элементарная дизъюнкция  $D_j$  становится истинной

□

## 70 Лемма 2.7 из лекций

$G$  — связный,  $e \in EG$ . Тогда вып. 1 из усл:

1. Если  $e$  лежит в цикле графа  $G$ , то  $(G - e)$  связный граф
2. Иначе, граф  $(G - e)$  имеет ровно 2 компоненты связности

**Доказательство:**

1) Пусть  $e = xy \in C$  ( $C$  — цикл);  $u, v \in VG$

Т.к.  $G$  — связный  $\Rightarrow \exists$  простая  $(u, v)$ -цепь

$G' = G - e$

Если она не содержит  $xy$ , она явл. простой  $(u, v)$ -цепью в  $G'$

Если она содержит  $xy$ , то заменим подцепь  $hey$  на  $(x, y)$ -цепь  $C - e \Rightarrow (u, v)$ -маршрут в графе  $G'$  не содержит  $e \Rightarrow \exists$  простая  $(u, v)$ -цепь не содержит  $e \Rightarrow G'$  — связный

2)  $e = xy \notin$  никакому циклу

$G - e$  не явл. связным и  $x, y$  лежат в разн. комп. связности

$G_x, G_y$  — комп. связности графа  $G - e$ ;  $x \in G_x, y \in G_y$

Надо док. что др. комп. связности нет

$\forall v \in VG \quad \exists$  простая  $(v, x)$ -цепь в  $G$

Если она содержит  $e \Rightarrow v \in G_y$

Если она не содержит  $e \Rightarrow v \in G_x$

□