

1 Комбинаторные правила произведения и суммы. Число выборок объема k из n элементов.

1.1 Правило произведения

Если $a \in A$ можно выбрать n способами и для каждого такого выбора $b \in B$ можем выбрать m способами, то пару ab мы можем выбрать $n \cdot m$ способами.

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times \cdots \times |A_n|$$

1.2 Правило суммы

Если элемент $a \in A$ может быть выбран n способами и независимо, а элемент $b \in B$ может быть выбран m способами, то выбор "a или b" может быть осуществлён $n + m$ способами.

\forall разбиения конечного множества $A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$

$$|A| = |A_1| + \cdots + |A_n|$$

1.3 Число выборок объема k из n элементов

1.3.1 Упорядоченная выборка объема k из n элементов с повторениями (число кортежей)

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$

1.3.2 Упорядоченная выборка объема k из n элементов без повторений (число k -размещений)

$$[n]_k = n(n - 1) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Доказательство:

Индукция по k :

$$k = 1: [n]_1 = n$$

$$k > 1: [n]_k = [n]_{k-1}(n - k + 1)$$

□

1.3.3 Неупорядоченные выборки объема k из n элементов без повторений (сочетания)

$$\forall n, k \quad 0 \leq k \leq n$$

$${n \choose k} = C_n^k = \frac{[n]_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Доказательство:

Индукция по n

$$n = 1: {1 \choose 0} = 1; {1 \choose 1} = 1$$

$n \geq 2$:

$$\text{Если } k = n, \text{ то } {n \choose n} = 1 = \frac{n!}{n! \cdot 0!}$$

Если $k < n$, то

$${n \choose k} = {n-1 \choose k} + {n-1 \choose k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□

1.3.4 Неупорядоченные выборки объема k из n элементов с повторениями (число мульти множеств)

$$\hat{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m$$

Доказательство:

$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ задаёт наше m -сочетание с повторениями

Сопоставим ему двоичный кортеж

$$\underbrace{(0, \dots, 0)}_{\alpha_1}, \underbrace{1, \underbrace{0, \dots, 0}_n}_{\alpha_2}, \underbrace{1, \dots, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha_n}}$$

Знаем, что $\sum_{i=1}^n \alpha_i = m \Rightarrow$ длина кортежа $m + n - 1$ и в нём $n - 1$ единица. Таких кортежей C_{n+m-1}^{m-1}

□

2 Число выборок объема k из n элементов. Комбинаторные тождества. Бином Ньютона.

2.1 Число выборок объема k из n элементов.

См. пункт 1.3

2.2 Комбинаторные тождества

2.2.1 Тождество Паскаля

$\forall n, k \ 1 \leq k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Доказательство:

M — все k -подмножества n -множества

$$|M| = \binom{n}{k}$$

$M_1 \subseteq M$ — не попал элемент а

$M_2 \subseteq M$ — попал элемент а

↓

$$M = M_1 \sqcup M_2 \Rightarrow |M| = |M_1| + |M_2| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

□

2.2.2

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Доказательство:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

□

2.3 Бином Ньютона

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Доказательство:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \cdots (a+b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

□

2.4 Обобщение бинома Ньютона

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_i \geq 0; \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n} P_n(\alpha_1 \dots \alpha_k) x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$$

$P_n(\alpha_1 \dots \alpha_k)$ — полиномиальный коэффициент

Доказательство:

Упражнение

□

3 Мульти множества, их спецификации. Полиномиальные коэффициенты.

3.1 Мульти множества, их спецификации.

3.1.1 Мульти множество первичной спецификации

Рассмотрим $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

и кортеж $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ на \mathbb{N}_0 т. ч. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$

Совокупность из m элементов множества X , в которой x_i встречается α_i раз $\forall i$ — m -мульти множество первичной спецификации $[x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}]$ порождённое множеством X .

3.1.2 Мульти множество вторичной спецификации

Совокупность из m элементов множества X , в которой в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ β_0 нулей, β_1 единиц...

Запись: $[[0^{\beta_0}, 1^{\beta_1}, \dots, m^{\beta_m}]]$

$$\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + m\beta_m = m$$

3.2 Полиномиальные коэффициенты

$P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — количество m -кортежей из m -мульти множества

$\forall m, \alpha_1 \dots \alpha_n: \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$

$$P_m(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$

Доказательство:

$$(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{\alpha_n})$$

$$\alpha_1! \cdots \alpha_n! P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = m!$$

$$\Downarrow \\ P_m = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$

$P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — полиномиальный коэффициент.

Обозначается: $\binom{m}{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$

4 Комбинаторное правило суммы. Формула включений и исключений.

4.1 Комбинаторное правило суммы.

См. пункт 1.3

4.2 Формула включений и исключений.

Пусть A - конечное конечное множество

$$A_1 \dots A_n \subseteq A$$

Тогда $|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k$,

$$S_0 = |A|$$

$$\forall k < 0 S_k = \sum_{\{i_1 \dots i_k\} \subseteq \{1 \dots n\}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Доказательство:

$$x \in A$$

пусть x попал ровно в t подмножеств A_{j_1}, \dots, A_{j_t}

Вклад "x"

В $S_0 = |A| - 1$ раз

В $S_1 = \sum_{i=1}^n |Ai| - t$ раз

В $S_2 = \binom{t}{2}$ раз

В $S_3 = \binom{t}{3}$ раз

:

В $S_t = \binom{t}{t}$ раз

$$\text{T. о. } 1 - t + \binom{t}{2} - \binom{t}{3} \dots + (-1)^t \binom{t}{t} = \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} = \begin{cases} 0; & t > 0 \\ 1; & t = 0 \end{cases}$$

□

5 Формула включений и исключений. Задача о беспорядках.

5.1 Формула включений и исключений.

См. пункт 4.2

5.2 Задача о беспорядках.

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) — \text{перестановка } (1, \dots, n).$$

Нужно найти число перестановок из n элементов множества, в которых никакой элемент не остался на месте.

Доказательство:

$$(\forall i \quad \pi_i \neq i).$$

A - все перестановки. $\forall i \quad A_i \leftrightarrow \pi_i = i$.

$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ - искомое множество.

$$|A| = n! \Rightarrow S_0 = n!$$

$$|A_i| = (n-1)!$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n |A_i| = n \cdot (n-1)!$$

при $i \neq j$ $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = \binom{n}{2} (n-2)!$$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (n-k)! = \binom{n}{k} (n-k)!$$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

□

6 Функция Эйлера, формула для функции Эйлера. Формула для числа сюръективных отображений.

6.1 Функция Эйлера, формула для функции Эйлера.

$\varphi(m)$ - функция Эйлера, $m \in N$. Кол-во натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m .

$\forall m \geq 2 \quad m = p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_n^{l_n}$ — разложение на простые множители, тогда

$$\varphi(m) = m \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Доказательство:

$$A = \{1 \dots m\}$$

A_i — числа A , которые делятся на p_i , $\forall i = 1 \dots m$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)|$$

$$|A| = m \Rightarrow S_0 = m$$

$$|A_i| = \frac{m}{p_i} (p_i, 2p_i, 3p_i, \dots, \frac{m}{p_i} \cdot p_i)$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \frac{m}{p_i} = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}$$

$$S_k = \sum_{i \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}$$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = m + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k = m + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} = m \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}\right) =$$

$$m \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

□

6.2 Формула для числа сюръективных отображений.

Число сюръективных отображений из m -множества $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ в n -множество $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$

$$\text{равно } (-1)^n \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^m$$

Доказательство:

A — все отображения $X \rightarrow Y$

A_i — все отображения $X \rightarrow Y \mid y_i$ — нет прообраза.

$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)$ — множество всех отображений, у которых 1-й элемент покрыт, ..., k-й элемент покрыт.

$$|A| = n^m = S_0$$

$$|A_i| = (n-1)^m$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n |A_i| = C_n^1 |A_j| = n(n-1)^m$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = C_n^2 |A_i \cap A_j| = C_n^2 (n-2)^m$$

:

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$$

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (n-k)^m = C_n^k (n-k)^m$$

:

$$S_n = 0$$

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^m \stackrel{j=n-k}{=} \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} C_n^{n-j} j^m = (-1)^n \sum_{j=1}^n (-1)^j C_n^j j^m$$

□

7 Число Стирлинга второго рода. Формула для числа Стирлинга второго рода. Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода.

7.1 Число Стирлинга второго рода.

Число стирлинга II рода $S(n, k)$ — количество неупорядоченных разбиений n-множества на k непустых подмножеств

Положим:

$$S(n, 0) = \begin{cases} 0; & n > 0 \\ 1; & n = 0 \end{cases}$$

$$S(n, k) = 0; \quad k > n$$

7.2 Формула для числа Стирлинга второго рода.

$$S(n, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} i^n$$

Доказательство:

Сюръективное отображение из n-множества в k-множество сопоставляется упорядоченному разбиению n-множества на k непустых подмножеств

$$\text{Их } (-1)^k \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^i i^n$$

Делим на $k!$ и получаем число неупорядоченных разбиений.

□

7.3 Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода.

$\forall k, n \in N, \quad 0 < k < n$

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k)$$

Доказательство:

M — все разбиения n -множества на k непересекающихся подмножеств.

В n -множестве зафиксируем элемент a

M_1 — множество разбиений, в которых есть одноэлементное подмножество $\{a\}$

$M_2 = M \setminus M_1$ — все остальные разбиения

$$|M| = S(n, k)$$

$|M_1| = S(n - 1, k - 1)$ ($n - 1$ т.к. один элемент уже участвует в разбиении, $k - 1$ т.к. одно множество в разбиении уже есть)

$|M_2| = kS(n - 1, k)$ (разбиваем $n - 1$ -множество на k непустых подмножеств, и добавление элемента a в каждое из k подмножеств порождает разбиение изначального n -множества)

$$M = M_1 \sqcup M_2$$

\Downarrow

$$|M| = |M_1| + |M_2|$$

\Downarrow

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$$

\square

8 Числа Бела. Теорема о числе Бела.

8.1 Числа Бела.

Число Бела B_n — количество неупорядоченных разбиений n -множества на непустые подмножества.

$$B_0 = S(0, 0)$$

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$$

8.2 Теорема о числе Бела.

$\forall n \geq 2$

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^n S(n, k) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=k-1}^{n-1} S(i, k - 1) \binom{n-1}{i} \stackrel{\text{поменяем знаки суммы местами}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{i+1} S(i, k - 1) \binom{n-1}{i} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{k=1}^{i+1} S(i, k - 1) \stackrel{k-1=t}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{t=0}^i S(i, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i \end{aligned}$$

\square

На экзамене требуется комбинаторное доказательство, но какое есть.

9 Число Стирлинга первого рода. Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга первого рода. Связь между числами Стирлинга.

9.1 Число Стирлинга первого рода.

Число Стирлинга первого рода — количество неупорядоченных разбиений n -множества на k циклов
Обозначение: $s(n, k)$

9.2 Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга первого рода.

Положим:

$$s(n, 0) = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n > 0 \end{cases}$$

$$s(n, k) = 0; \quad k > n$$

$$\forall n, k \quad 0 < k < n$$

$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) + (n - 1)s(n - 1, k)$$

Доказательство:

Аналогично числам Стирлинга I рода

□

9.3 Связь между числами Стирлинга.

$$\forall n, m \in N \quad \sum_{k=1}^n S(n, k)s(k, m)(-1)^{k-m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

Доказательство:

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)[x]_k = \sum_{k=1}^n S(n, k) \sum_{m=1}^k s(k, m)(-1)^{k-m} x^m = \sum_{m=1}^n x^m \sum_{k=1}^n S(n, k)s(k, m)(-1)^{k-m} x^m$$

Сравниваем степень при x^n : если $n = m$, то вторая сумма равна 1, иначе она должна быть равна 0.

□

10 Разложение x^n в базисе $[x]_k$. Разложение $[x]_k$ в базисе x^n . Связь между числами Стирлинга.

10.1 Разложение x^n в базисе $[x]_k$.

$$\forall n \in N : \quad x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)[x]_k.$$

Доказательство:

$$[x]_{k+1} = [x]_k \cdot (x - k) = [x]_k \cdot x - [x]_k \cdot k$$

↓

$$(*) \quad x \cdot [x]_k = [x]_{k+1} + k \cdot [x]_k$$

Индукция по n : $x^1 = [x]_1$ — очевидно

$$x^n = x \cdot x^{n-1} \stackrel{\text{по индукции}}{=} x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k)[x]_k = \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) \cdot [x]_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) \cdot k \cdot [x]_k \stackrel{t=k+1 \text{ в первой сумме}}{=}$$

$$= \sum_{t=2}^n S(n-1, t-1)[x]_t + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) \cdot k \cdot [x]_k$$

Первая сумма равна 0 при $t=1$, вторая сумма равна 0 при $k=n$. Получается:

$$\sum_{k=1}^n (S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)) [x]_k = \sum_{k=1}^n S(n, k) [x]_k$$

□

10.2 Разложение $[x]_k$ в базисе x^n .

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$[x]_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} s(n, k) x^k$$

Доказательство:

Аналогично пункту 10.1

□

10.3 Связь между числами Стирлинга.

См. пункт 9.3

11 Разбиения чисел. Диаграмма Ферре. Свойства числа разбиений. Равенство числа разбиений на различные слагаемые и на нечетные слагаемые.

11.1 Разбиения чисел.

Разбиение числа n на натуральные слагаемые - это представление n в виде суммы $x_1 + x_2 + \dots + x_k$, $x_i \in \mathbb{Z}_+$. Количество упорядоченных разбиений: $\binom{n-1}{k-1}$

Неупорядоченные разбиения:

$p(n)$ — количество разбиений числа n на слагаемые

$p(n, k)$ — количество разбиений числа n на k слагаемых

11.2 Диаграмма Ферре.

Диаграмма Ферре разбиения $n = x_1 + \dots + x_k$. $x_1 \geq \dots \geq x_k - k$ строк точек, в i -ой строке x_i точек в первых x_i столбцах.

11.3 Свойства числа разбиений.

11.3.1

$$p(0, 0) = p(0)$$

$$p(n, 1) = 1$$

$$p(n, n) = 1$$

$$p(n, k) = 0; \quad k > n$$

11.3.2

1. $p(n, k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, наибольшее из которых равно k .
2. $p(n+k, k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, не превосходящие k .
3. Число разбиений $n-k$ ровно на $m-1$ слагаемое, не превосходящих k равно числу разбиений $n-m$ на $k-1$ слагаемое, не превосходящих m .

Доказательство:

1. Транспозиция диаграммы Ферре.
2. Рассмотреть диаграмму без первого столбца.
3. Тоже через диаграмму Ферре.

□

11.3.3 Рекуррентное соотношение

$$\forall n, k \mid 0 < k < n$$

$$p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n-k, i)$$

Доказательство:

$$(*) \quad (n-k) = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1)$$

$$y_i = x_i - 1$$

$$n-k = y_1 + y_2 + \dots + y_k, \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_k \geq 0$$

Если $s : y_s > 0, y_{s+1} = y_{s+2} = \dots = y_n = 0$, тогда $(*)$ - это разбиение $n-k$ на k слагаемых, которых у нас $p(n-k, s)$.

$$p(n, k) = \sum_{s=1}^k p(n-k, s)$$

□

11.4 Равенство числа разбиений на различные слагаемые и на нечетные слагаемые.

Количество разбиений n на различные слагаемые равно количеству разбиений n на нечётные слагаемые.

Доказательство:

Q_n - множество разбиений n на различные слагаемые, T_n - множество разбиений на нечётные слагаемые.

Докажем, что $|Q_n| = |T_n|$, построим для этого биекцию.

$$f : Q_n \rightarrow T_n$$

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_1 > x_2 > \dots > x_k$$

$$\forall i \quad x_i = 2^{t_i} \cdot y_i, \quad y_i - \text{нечётно}$$

$$n = \underbrace{y_1 + \dots + y_1}_{2^{t_1}} + \underbrace{y_2 + \dots + y_2}_{2^{t_2}} + \dots + \underbrace{y_k + \dots + y_k}_{2^{t_k}}.$$

$$h : T_n \rightarrow Q_n$$

$$n = \underbrace{y_1 + \dots + y_1}_{d_1} + \dots + \underbrace{y_s + \dots + y_s}_{d_s}, \quad y_i \neq y_j, i \neq j.$$

$\forall i \quad d_i$ - однозначно раскладывается в степени двойки.

$$d_i = 2^{\sigma_{i,1}} + 2^{\sigma_{i,2}} + \dots + 2^{\sigma_{i,m_i}}; \quad \sigma_{i,1} > \sigma_{i,2} > \dots > \sigma_{i,m_i}$$

$$n = 2^{\sigma_{1,1}}y_1 + 2^{\sigma_{1,2}}y_1 + \dots + 2^{\sigma_{i,m_i}} + \dots + 2^{\sigma_{s,1}}y_s + \dots + 2^{\sigma_{s,m_s}}y_s.$$

$h = f^{-1}$ — биекция.

□

12 Производящие функции и их свойства. Элементарные производящие функции.

12.1 Производящие функции и их свойства.

12.1.1 Определение

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A(t)$ — производящая функция последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

12.1.2 Свойства

Пусть $A(t)$ и $B(t)$ - производящие функции последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ соответственно. Тогда:

1. $\alpha A(t) + \beta B(t)$ - производящая функция. $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=0}^{\infty}$.
2. $A(t) \cdot B(t)$ - производящая функция последовательности $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$, $d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$
3. $t^m A(t)$ - производящая функция. $\underbrace{0, \dots, 0}_m, a_0, a_1, \dots$
4. $A(ct)$ - производящая функция последовательности $\{c^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$
5. $tA'(t)$ - $\{n \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$
6. $\int_0^t \frac{A(t) - a_0}{t} dt$ - производящая функция последовательности $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$
7. $\frac{A(t)}{1-t}$ - производящая функция последовательности $\left\{ \sum_{i=0}^n a_i \right\}_{n=0}^{\infty}$

12.2 Элементарные производящие функции.

$$1. (1+T)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n; \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$2. e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$3. \ln \left(\frac{1}{1-t} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

$$4. \sin(t) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$5. \cos(t) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

13 Числа Каталана, производящая функция последовательности чисел Каталана, формула для числа Каталана.

13.1 Числа Каталана

$$\{C_n\}_{n=0}^{\infty}: \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \dots + C_{n-1} \cdot C_0 \end{cases}$$

C_n – Количество правильных скобочных последовательностей с n парами скобок.

13.2 Производящая функция последовательности чисел Каталана

$$C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{k-1} \cdot C_0 + \dots + C_0 \cdot C_{k-1}) t^k = 1 + t \sum_{k=0}^{\infty} (C_k \cdot C_0 + \dots + C_0 \cdot C_k) t^k = 1 + t(C(t))^2 \\ \Downarrow \\ tC^2(t) - C(t) + 1 &= 0 \\ \Downarrow \\ 2tC_{1/2}(t) &= 1 \pm \sqrt{1-4t} \end{aligned}$$

т.к. при $t = 0$ $C(t) = 1$

$$\Downarrow \\ C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

□

13.3 Формула для числа Каталана

$$n\text{-ое число Каталана: } C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} (1-4t)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-4t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-3}{2})}{n!} (-4t)^n = \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot 2^n \cdot t^n}{n!} &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{n!(n-1)!2^{n-1}} 2^n t^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2t^n = \\ \sqrt{1-4t} \end{aligned}$$

$$C(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} t^n$$

$$\text{т.о. } C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

□

14 Числа Фибоначчи, производящая функция последовательности чисел Фибоначчи, формула для числа Фибоначчи.

14.1 Числа Фибоначчи

$$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}: \begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

14.2 Производящая функция последовательности чисел Фибоначчи

Производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет вид $F(t) = \frac{1}{1-t-t^2}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} t^n = \\ &= 1 + t \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} t^{n-1} + t^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} t^{n-2} = 1 + tF(t) + t^2 F(t) \Rightarrow F(t) = \frac{1}{1-t-t^2} \end{aligned}$$

□

14.3 Формула для числа Фибоначчи

$$\forall n \geq 0 \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Доказательство:

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{-1}{t^2 + t - 1} = \frac{-1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{t-t_2} - \frac{1}{t-t_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}t_1} \left(\frac{1}{1-\frac{t}{t_1}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2} \left(\frac{1}{1-\frac{t}{t_2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}t_1} \left(1 + \frac{t}{t_1} + \frac{t^2}{t_1^2} + \dots \right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2} \left(1 + \frac{t}{t_2} + \frac{t^2}{t_2^2} + \dots \right) \\ f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{t_1^{n+1}} - \frac{1}{t_2^{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{t_2^{n+1} - t_1^{n+1}}{t_1^{n+1} \cdot t_2^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} (t_2^{n+1} - t_1^{n+1}) = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

□

15 Линейная однородная возвратная последовательность, ее производящая функция. Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения.

15.1 Линейная однородная возвратная последовательность

Линейное однородное рекуррентное соотношение порядка k для последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ выглядит:
 $(*) \quad a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \dots + p_k a_n = 0, \quad p_k \neq 0.$

Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет $(*) \forall n$ она называется однородной возвратной последовательностью порядка k .

15.2 Производящая функция однородной возвратной последовательности

Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет $(*) \forall n, n \geq 0$, то производящая функция $A(t)$ этой последовательности имеет вид:

$$A(t) = \frac{C(t)}{K(t)}, \text{ где } K(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_k t^k, C(t) - \text{многочлен степени, не превосходящий } k-1.$$

Доказательство:

$$\text{Пусть } A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

$$\begin{aligned} C(t) = A(t) \cdot K(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \\ &+ \dots + a_0 p_1 t + a_1 p_1 t^2 + \dots + a_{k-1} p_1 t^k + a_k p_1 t^{k+1} + \\ &+ \dots + a_0 p_2 t^2 + \dots + a_{k-2} p_2 t^k + a_{k-1} p_2 t^{k+1} + \\ &+ \dots + a_0 p_k t^k + a_1 p_k t^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

(Все столбцы после первого многоточия будут зануляться, а до первого в сумме образуют $C(t)$.)

□

15.3 Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения.

$f(t) = t^k + p_1 t^{k-1} + \dots + p_k$ — характеристический многочлен для $(*)$.

$$f(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdots (t - \lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, \sum r_i = k$$

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — линейная однородная возвратная последовательность удовлетворяющая $(*)$. Тогда $a_n = \sum_{i=1}^s Q_i(n) \lambda_i^n$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — корни характеристического многочлена кратного r_1, \dots, r_s соответственно.

$Q_i(t)$ — многочлен степени, не превосходящий $r_i - 1$, который находится из начальных условий.

Доказательство:

$$K(t) = t^k f\left(\frac{1}{t}\right) = t^k \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{t} - \lambda_i\right)^{r_i} = \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{t} - t\lambda_i\right)^{r_i}$$

$$A(t) = \frac{C(t)}{\prod_{i=1}^s (1 - t\lambda_i)^{r_i}} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} \frac{B_{ij}}{(1 - t\lambda_i)^j}$$

$$(1 - t\lambda_i)^{-j} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-j}{n} (-\lambda_i t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-j)(-j-1)\dots(-j-n+1)}{n!} (-1)^n \lambda_i^n t^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j(j+1)\dots(j+n-1)}{n!} \lambda_i^n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{n} \lambda_i^n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{j-1} \lambda_i^n t^n$$

$$A(t) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} B_{ij} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{j-1} \lambda_i^n t^n \right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \lambda_i^n \sum_{i=1}^s B_{ij} \binom{j+n-1}{j-1} \right) t^n.$$

При этом $\binom{j+n-1}{j-1}$ - многогранен степени, не превышающей $n-j+1$.

□

16 Формула Стирлинга. Асимптотика биномиальных коэффициентов.

16.1 Формула Стирлинга

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Доказательство:

Без доказательства

□

16.2 Асимптотика биномиальных коэффициентов.

$$1. k^2 = o(n) \Rightarrow C_n^k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

$$2. k^3 = o(n^2) \Rightarrow C_n^k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} e^{\frac{-k(k-1)}{2n}} \text{ т.к. } \frac{k}{2n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 0 \quad \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k^2}{2n}}$$

Доказательство:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{n^k}{k!} e^{\ln(1-\frac{1}{n}) + \ln(1-\frac{2}{n}) + \dots + \ln(1-\frac{k-1}{n})} =$$

$$\frac{n^k}{k!} e^{-\frac{1}{n} + O(\frac{1}{2n^2}) - \frac{2}{n} + O(\frac{4}{2n^2}) + \dots + -\frac{k-1}{n} + O(\frac{(k-1)^2}{2n^2})} = \frac{n^k}{k!} e^{\frac{k(k-1)}{2n} + O(\frac{k^3}{n^2})}$$

Рассмотрим сумму:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(k-1)^2}{n^2} \leq \frac{k(k-1)^2}{n^2} \quad (\text{все слагаемые заменили на последнее})$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(k-1)^2}{n^2} \geq \frac{(\frac{k}{2})^2}{n^2} \frac{k}{2} \quad (\text{половину слагаемых заменили на } \frac{(\frac{k}{2})^2}{n^2})$$

Из доказанного следуют оба пункта

□

17 Граф, мультиграф, псевдограф. Изоморфизм графов, автоморфизм. Лемма о рукопожатиях. Орграф, связный, сильно связный орграф.

17.1 Граф, мультиграф, псевдограф.

V - непустое конечное множество (конечное)

$V^{(2)}$ - множество всех двухэлементных подмножеств множества V .

Графом называется пара множеств $(V, E) = G$, где $E \subseteq V^{(2)}$

Элементы V - вершины,

Элементы E - рёбра.

VG - множество вершин

EG - множество рёбер.

$|VG|$ - порядок графа.

$|G| = |VG| = n \Rightarrow G$ — n -граф

$|G| = n, |EG| = m \Rightarrow G$ — (n, m) - граф.

17.2 Изоморфизм графов, автоморфизм.

$G = (V, E), G' = (V', E')$.

G и G' изоморфны ($G \cong G'$), если \exists биекция $\varphi : V \rightarrow V' : uv \in E \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E'$.

φ - изоморфизм графов G и G' . Если $G = G'$, то φ - автоморфизм графа (V и V' совпадают).

17.3 Лемма о рукопожатиях.

Пусть G - произвольный граф, тогда $\sum_{v \in VG} \deg_G(v) = 2|EG|$.

Доказательство:

Возьмем пустой граф. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер.

□

17.4 Орграф, связный, сильно связный орграф.

Орграф - это пара $G = (V, D)$, где V - непустое множество, а $D \subseteq V \times V$. Элементы V - вершины, элементы D - дуги.

$(v, u) \in D$. vu - выходит из v и входит в u .

$x, y \in VG$ — связные в G , если в $G \exists$ простая (x, y) - цепь.

Граф G — связный, если $\forall 2$ вершины связные.

Вершина v достижима из u , если \exists ориентированная (u, v) -цепь.

Орграф G — сильносвязанный, если любая вершинка достижима из любой другой.

18 Подграф, порожденный подграф, оставший подграф. Объединение, соединение, умножение графов. Связный граф, компонента связности.

18.1 Подграф, порожденный подграф, оставший подграф.

Граф H называется подграфом графа G , если $VH \subseteq VG, EH \subseteq EG$.

Если $VH = VG$, то H - оставший подграф.

18.1.1 Порожденные подграфы

Пусть $U \subseteq VG$, $D = \{uv \mid u, v \in U, uv \in EG\}$.

Тогда $G(U) = (U, D)$ - подграф, порождённый множеством вершин U .

Пусть $D \subseteq EG$, U - множество концов рёбер из D .

Тогда $G[D] = (U, D)$ - подграф, порождённый множеством рёбер D .

18.2 Объединение, соединение, умножение графов.

18.2.1 Объединение графов

Граф H называется объединением графов G и F , если $VH = VG \cup VF$, $EH = EG \cup EF$, будем обозначать $H = G \cup F$.

Если $VG \cap VF \neq \emptyset \Rightarrow G \cup F$ - дизъюнктивное объединение.

18.2.2 Соединение графов

Соединение графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$) — граф $G_1 + G_2$ — дизъюнктивное объединение G_1 и G_2 и добавление ребёр $v_1v_2 = v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.

18.2.3 Умножение графов.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.

Произведение $G = G_1 \times G_2$ называется $G = (V_1 \times V_2, E)$.

(v_1, v_2) смежные с $(u_1, u_2) \Leftrightarrow$ или $(v_1 = u_1, v_2u_2 \in E_2)$ или $(v_2 = u_2, v_1u_1 \in E_1)$.

18.3 Связный график, компонента связности.

$x, y \in VG$ — связные в G , если в G \exists простая (x, y) - цепь.

Граф G — связный, если \forall 2 вершины связные.

Максимальный по включению вершин и рёбер связный подграф графа G называется компонентой связности графа G .

19 Дополнение к графу, реберный график. Двудольность, критерий двудольности.

19.1 Дополнение к графу, реберный график.

Дополнение к графу $G = (V, E)$ есть $\bar{Q} = (V, \bar{E})$, где $\bar{E} = \{uv \mid uv \notin E, u, v \in V\}$.

Для графа $G = (V, E)$ реберным графиком называется $L(G)$, $VL(G) = EG$, $e_1e_2 \in EL(G) \Leftrightarrow e_1$ и e_2 смежные в G .

19.2 Двудольность, критерий двудольности.

19.3 Двудольность

Граф $G = (V, E)$ — двудольный, если \exists разбиение $V = A \sqcup B : G[A]$ и $G[B]$ — пустые

19.4 Критерий двудольности Кенига

G - двудольный \Leftrightarrow в G нет циклов нечётной длины.

Доказательство:

$\Rightarrow)$ C - цикл в G . $C = v_1v_2v_3v_4\dots v_e, v_{e+1} = v_1$. $V = A \cup B$, $v_1, v_3, v_5 \dots \in A$, $v_2, v_4, v_6 \in B$, т.е. все нечётные в A , все чётные в B .

$\Leftarrow)$ Пусть G - связный

$$v \in VG$$

Разбиваем множество $VG = A \sqcup B$

$$A = \{u \in VG | d(v, u) - \text{чётно}\}$$

$$B = \{u \in VG | d(v, u) - \text{нечётно}\}$$

Надо показать что в A и B нет рёбер.

От противного. $e = uw \in EG$, $u, w \in$ одному мно-ву (A или B). По построение $u, w \neq v$. Рассмотрим кратчайшие цепи: U - кратчайшая (u, v) -цепь, W - кратчайшая (w, v) -цепь. Длины этих цепей имеют одинаковую чётность. Пусть v_1 - последняя, начиная с v , общая вершина цепей U, W . (v, v_1) - подцепи цепей U и W имеют одинаковую длину $\Rightarrow (v_1, u)$ -подцепь цепи U и (v_1, w) -подцепь цепи W имеют одинаковую чётность длины. Их объединение с ребром uw даёт цикл нечётной длины. Противоречие. Следовательно, граф является двудольным.

□

20 Оценки числа ребер графа. Эксцентризитет, радиус, диаметр, центр графа.

20.1 Оценки числа ребер графа.

$\forall (n, m)$ -графа с k компонентами связности верны два неравенства: $n - k \leq m \leq \binom{n - k + 1}{2}$, причём обе оценки достижими.

Доказательство.

верхняя) Пусть G - n -граф с k компонентами связности с максимальным числом рёбер. Очевидно, что G - дизъюнктное объединение полных графов ($G = K_{n_1} \cup \dots \cup K_{n_k}$). Пусть $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$.

Покажем, что $n_2 = n_3 = \dots = n_k = 1$.

Пусть не так ($n_2 > 1$). Рассмотрим $v \in K_{n_2}$. Рассмотрим граф $G' = (K_{n_1} + v) \cup (K_{n_2} - v) \cup K_{n_3} \cup \dots \cup K_{n_k}$ - удалили $n_2 - 1$ рёбёр. Добавили n_1 ребёр. Получили, что в G' добавили больше, чем удалили. Противоречие к предположению в самом начале.

В G у нас $\binom{n - k + 1}{2}$ рёбер.

нижняя) Индукция по числу рёбер:

$m = 0$ - всё очевидно, равенство есть.

Пусть $m > 0$ и для всех графов с меньшим числом рёбер наше неравенство верно.

Рассмотрим (n, m) -граф G с k комп. связности. Возьмём некоторое $e \in EG$ и безжалостно удалим его: $G_1 = G - e$. G_1 - $(n, m-1)$ -граф с k_1 компонентами связности. По лемме 2.7 из лекций имеет, что $k_1 \leq k+1$.

По индукционному предположению $n - k_1 \leq m - 1 \Rightarrow m \geq n - k_1 + 1 \geq n - k + 1 - 1 = n - k$.

Пример такого графа: $G = O_{k-1} \cup P_{n-k}$.

□

20.2 Эксцентризитет, радиус, диаметр, центр графа.

Эксцентризитет вершины v : $e(v) = \max_{u \in VG} d(v, u)$.

Радиус графа G : $r(G) = \min_{v \in VG} e(v)$.

Диаметр графа G : $d(G) = \max_{v \in VG} e(v)$.

Вершина $v \in VG$ | $e(v) = r(G)$ называется **центральной** вершиной.

Множество всех центральных вершин - **центр** графа.

21 Лес, дерево, характеристизация деревьев.

21.1 Определения

Ациклический граф — **лес**

Ациклический связный граф — **дерево**.

21.2 Характеризация деревьев

(n, m) -граф G . Следующие условия эквивалентны:

1. G — дерево.
2. G — связный, $m = n - 1$
3. G — ациклический, $m = n - 1$
4. В графе G любые 2 вершины связаны единственной простой цепью.
5. G — ациклический и добавление одного нового ребра приводит к появлению ровно одного простого цикла.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$) Докажем, что в любом (n, m) -дереве $m = n - 1$. Индукцией по m :

$m = 0 \Rightarrow n = 1$.

Пусть G - произвольное (n, m) -дерево и для всех деревьев с меньшим числом рёбер наше равенство выполняется.

Возьмём некоторое ребро $e \in EG$. e не принадлежит никакому циклу, т.к. в нашем графе их нет лемма 2.7 из лекций \Rightarrow в $G - e$ ровно 2 компоненты связности G_1 и G_2 - деревья (n_1, m_1) и (n_2, m_2) .

По индукционному предположению $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$. Тогда для нашего графа имеем $m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$.

$2 \Rightarrow 3$) Пусть в графе G есть цикл, рассмотрим некоторое ребро e из этого цикла лемма 2.7 из лекций $\Rightarrow G - e$ — связный и является $(n, n - 2)$ -графом, что противоречит оценке числа рёбер (пункт 20.1).

$3 \Rightarrow 4$) Докажем, что G — связный

G — ациклический $\Rightarrow G$ — лес.

Пусть в G k компонент связности

Каждая компонента связности G_1, \dots, G_k — дерево

G_i — (n_i, m_i) -дерево

Т.к. доказано, что из $1 \Rightarrow 2$, то $m_i = n_i - 1$

$n - 1 = m = m_1 + \dots + m_k = n_1 + \dots + n_k - k = n - k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ граф связан

$\Rightarrow \forall u, v \exists(u, v)$ — цепь.

Пусть $\exists u, v$ т.ч. в G есть две различные (u, v) -простые цепи L_1 и L_2

Пусть x — последняя вершина общего начала путей L_1 и L_2 начиная с u , y - следующая на цепи L_1
 $\Rightarrow G - xy$ - остаётся связным $\xrightarrow{\text{лемма 2.7 из лекций}}$ xy принадлежит некоторому циклу \Rightarrow противоречие с ацикличностью.

4 \Rightarrow 5) В любом цикле 2 вершины соединены не менее 2 различными путями \Rightarrow в G нет циклов.

Пусть $u, v \in VG$ и $uv \notin EG$, тогда единственная (u, v) -цепь в G вместе с ребром uv даёт единственный простой цикл

5 \Rightarrow 1) Докажем, что G связный.

От противного: пусть G не связен. Пусть u и v в разных компонентах связности $\Rightarrow G + uv$ не имеет циклов (по лемме 2.7 из лекций). Противоречие.

□

22 Центр дерева. Остовное дерево, остов.

22.1 Центр дерева.

Центр любого дерева состоит из одной или двух смежных вершин.

Доказательство.

$n = 1$ — очевидно.

$n = 2$ — аналогично.

Пусть T - дерево порядка $n \geq 2$. Рассмотрим дерево T' , которое получается из T удалением всех висячих вершин.

$\forall v \in T' \quad e_{T'}(v) = e_T(v) - 1 \Rightarrow$ центры T и T' совпали.

Продолжаем, пока порядок дерева > 2 .

□

22.2 Остовное дерево, остов.

G — связный. Оставной подграф графа G , являясь деревом, называется, как ни странно, оставным деревом графа G .

Оставной подграф графа G , являющийся дизъюнктным объединением оставных деревьев его компонент связности - **остов** графа G .

23 Код Прюфера помеченного дерева. Теорема Кэли.

23.1 Код Прюфера помеченного дерева.

Пусть T - помеченное дерево $VT = \{1, \dots, n\}$. Сопоставим ему $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$:

1. Полагаем $T_0 = T$
2. $\forall i \quad 1 \leq i \leq n-1$ в T_{i-1} находим висячую вершину x_i с наименьшим номером. a_i — номер её соседа
 $T_i = T_{i-1} - x_i$
 (a_1, \dots, a_{n-1}) — код Прюфера

23.2 Теорема Прюфера

(не знаю, нужна ли она в этом билете)

Если $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \{1, 2, \dots, n\}^{n-1}$, $a_{n-1} = n$, то $\exists!$ помеченное дерево T , для которого a — код Прюфера.

Доказательство:

Построим $b = (b_1, \dots, b_{n-1})$

$b_i = \min\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1}\}$

рассмотрим граф T т.ч.

$VT = \{1, 2, \dots, n\}$,

$ET = \{(a_i, b_i) | 1 \leq i \leq n-1\}$

Докажем, что:

1) T — дерево

2) a — код Прюфера дерева T

1) Рассмотрим последовательность $T_0 = T, T_1, \dots, T_{n-1}$

$T_i = T_{i-1} - b_i; 1 \leq i \leq n-1$

$T_{n-1} = K_1$ — дерево

По построению $\{1, 2, \dots, n\} = \{b_1, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\}$

$\forall i \quad VT_{i-1} = \{b_i, b_{i+1}, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\}$

(*) $ET_{i-1} \subseteq \{a_i b_i, a_{i+1} b_{i+1}, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$

$b_i \neq b_j; \quad i \neq j$

$b_i \notin \{a_i, \dots, a_{n-1}\}$

b_i — висячая в T_{i-1}

$T_i = T_{i-1} - b_i$

Если T_i дерево, то T_{i-1} тоже дерево

T_n дерево $\Rightarrow T_0$ дерево $\Rightarrow T$ дерево

Т.к. T_{i-1} дерево, то из (*) следует, что

$ET_{i-1} = \{a_i b_i, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$

Получается $\forall x \in VT_{i-1} \quad deg_{T_{i-1}} x$ — количество появлений x в $b_i, \dots, b_{n-1}, a_i, \dots, a_{n-1}$

$deg_{T_{i-1}} x > 1 \Leftrightarrow x \in \{a_i, \dots, a_{n-1}\}$

\Downarrow

$\{b_i, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{a_i, \dots, a_{n-2}\}$ — множество висячих вершин в T_{i-1}

$a_i = \min\{1, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-2}\} = \min\{b_1, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-2}\} =$

$\min\{b_i, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{a_i, \dots, a_{n-2}\}$

b_i — висячая вершина в T_{i-1} с наименьшим номером \Rightarrow Декодирование даёт исходное дерево

□

23.3 Теорема Кэли.

Число помеченных деревьев на n вершинах равно n^{n-2}

24 Числа вершинной и реберной связности, их связь. Точка сочленения, характеристизация точек сочленения. Мост, характеристизация мостов.

24.1 Числа вершинной и реберной связности, их связь.

Число вершинной связности $\alpha(G)$ — наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу, либо одновершинному.

Число рёберной связности $\lambda(G)$ графа G порядка $n > 1$ — минимальное количество рёбер, удаление которых делает граф несвязным.

$$\delta(G) = \min_{v \in VG} (\deg(v)).$$

$$\forall G \quad \alpha(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Доказательство:

оценка сверху: берём нашу вершинку с минимальной степенью и удаляем все смежные ей рёбра.

оценка снизу:

для несвязного графа $0 \leq 0$

для графа с мостом: $\lambda(G) = 1$. и хотя бы одна вершина соединённая с мостом является точкой сочленения (если e — мост в связном графе, то его концы — либо точки сочленения, либо висячая вершина)
Если $\lambda(G) > 1$:

$$E_1 \subseteq EG, |E_1| = \lambda, G - E_1 \text{ — не связен.}$$

$$\text{Пусть } e \in E_1, E'_1 = E_1 - \{e\}$$

Для каждого ребра из E'_1 выберем один конец не инцидентный e и удалим его.

$$\text{Получим множество } V_1 = \{h \mid h \in E_1 \setminus \{e\} \text{ и } h \text{ не инц. } e\}$$

$$|V_1| \leq |E_1| - 1$$

$$G' = G - V_1$$

$$1) G' = G - V_1 \text{ — не связный} \Rightarrow \alpha(G) \leq |V_1| \leq |E_1| - 1 = \lambda(G) - 1$$

$$2) G' = G - V_1 \text{ — связный} \Rightarrow e \text{ — мост в } G' \Rightarrow \alpha(G') = \lambda(G') = 1 \Rightarrow \exists \text{ точка сочленения } x \text{ в } G'.$$

$$V_1 \cup \{x\}: G - (V_1 \cup \{x\}) \text{ — несвязный}$$

$$\alpha(G) \leq |V_1 \cup \{x\}| = |V_1| + 1 \leq |E_1| = \lambda(G)$$

□

24.2 Точка сочленения, характеристика точек сочленения.

$x \in VG$ — точка сочленения, если в $G - x$ больше компонент связности чем в G

Характеризация точек сочленения. В связном графе следующие утверждения эквивалентны:

1. x — точка сочленения графа G
2. \exists разбиение $VG \setminus \{x\} = U \sqcup W : \forall a \in U, \forall b \in W \forall$ простая (a, b) -цепь содержит x .
3. $\exists a, b \in VG \setminus \{x\}$: любая простая (a, b) -цепь содержит x .

Доказательство:

1 \Rightarrow 2) $G - v$ — не связный. А — одна компонента, В — остальные. значит, для любой пары вершин из эти множеств не существует простой цепи, следовательно в G любая цепь проходит через v

2 \Rightarrow 3) Очевидно

3 \Rightarrow 1) Если удалить x , то все простые цепи (a, b) -цепи исчезнут и a, b никак не будут связаны \Rightarrow граф будет несвязным $\Rightarrow x$ — точка сочленения

□

24.3 Мост, характеристика мостов.

$e \in EG$ — мост, если $G - e$ имеет больше компонент связности чем G

Характеризация мостов. В связном графе следующие утверждения эквивалентны:

1. e — мост в G
2. \exists разбиение $VG = U \sqcup W : \forall a \in U, \forall b \in W \forall$ простая (a, b) -цепь содержит e .
3. $\exists a, b \in VG \setminus \{e\}$: любая простая (a, b) -цепь содержит e .

4. ребро e не принадлежит простому циклу

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ — аналогично характеристики точек сочленения

$1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ — лемма 2.7 из лекций

□

25 Характеризация двусвязных графов. Блок, bc-дерево графа.

25.1 Характеризация двусвязных графов.

Для связного графа порядка $n > 2$ эквивалентны:

1. G — двусвязный
2. $\forall 2$ вершины принадлежат простому циклу
3. \forall вершина и \forall ребро принадлежат простому циклу
4. $\forall 2$ ребра принадлежат простому циклу
5. \forall двух вершин $x, y \in VG$, $\forall e \in EG$ существует простая (x, y) -цепь содержащая e
6. $\forall x, y, z \in VG \exists$ простая (x, y) -цепь содержащая z

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$)

Пусть $x, y \in VG$;

u — множество всех вершин графа G , принадлежащих хотя бы одному простому циклу проходящему через x

Если $y \in u \Rightarrow \square$

Если $y \notin u \Rightarrow u \subset VG \Rightarrow VG \setminus u \neq \emptyset$

Но т.к. G — связный $\Rightarrow \exists a \in u$ и $b \in VG \setminus u$ т.ч. $ab \in EG$

По лемме 2.14 из лекций. \exists простая (x, b) -цепь не содержащая a

По построению \exists простой цикл C проходящий через x, a

Пусть z — 1-я, начиная от b общая вершина (b, x) -цепи из цикла C

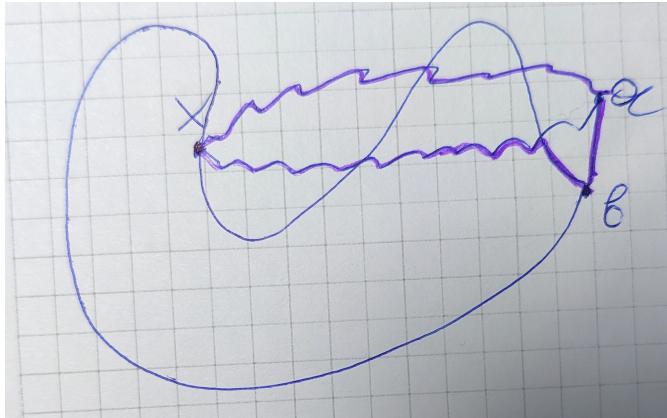
Тогда (b, z) — подцепь, ребро (a, b) и часть цикла C между вершинами z и a , содержащая x образуют простой цикл $\Rightarrow b \in u$. Противоречие. $\Rightarrow y$ обязан принадлежать u

$2 \Rightarrow 3$)

Есть вершина x и ребро ab

Если цикл содержащий a и x содержит и b , то доказано

Если цикл содержащий a и x не содержит b , то см. рисунок



Остальное в качестве упражнения.

□

26 Теорема Менгера

Минимальное число вершин, разделяющих две несмежные вершины u и v равно максимальному числу попарно непересекающихся простых (u, v) -цепей.

Доказательство. (не вникал в доказательство, но идеино оно такое же как и на лекциях)

Наибольшее число попарно непересекающихся простых (u, v) -цепей не больше минимального числа вершин, разделяющих u и v (поскольку можем удалить по вершине в каждой из этих (u, v) -цепей и разделить т.о. вершины u и v).

Докажем, что если наименьшее число вершин, разделяющих u и v в графе G равно k , то существует k попарно непересекающихся простых цепей.

При $k = 1$ — очевидно.

Пусть для некоторого $k > 1$ — неверно. Пусть t — наименьшее такое k . F — граф с наименьшим числом вершин, для которого не выполнено условие (которое после слова “доказать”) для t .

Будем удалять из F рёбра до тех пор, пока не получим некоторый граф G такой, что $\forall e \in EG$ для разделения u и v в графе G надо t вершин, а в графе $G - e$ надо $t - 1$ вершину.

Т.о. имеется G и t такие, что теорема верна для

1. $\forall k < t$.
2. \forall графа с числом вершин, меньшим, чем $|VG|$.
3. \forall графа $G - e \forall e \in EG$.

(док-во ниже) □

26.1 Утверждение 1

В графе G нет вершин, которые одновременно смежны с u и v .

Доказательство. Пусть w смежно с u и v . Тогда в $G - w$ для разделения u и v достаточно $t - 1$ вершины по пункту 2 в $G - w$ существует $t - 1$ попарно непересекающихся простых (u, v) -цепей. Добавляем цепь $u, w, v \Rightarrow t$ попарно непересекающихся простых (u, v) цепей в графе G . Противоречие с выбором графа G . □

26.2 Утверждение 2

Любое множество вершин W , разделяющих u и v , $|W| = t$ смежно либо с u , либо с v .

Доказательство. Цепь, соединяющую u с нек...

Доказательство. (продолжение)

Рассмотрим некоторое $e = xy \in EG$. По условию 3 в $G - e$ существует $t - 1$ вершина, разделяющая u и v .

В $(G - S_e)$ существует (u, v) -цепь и каждая точка цепи содержит ребро e .

(**) $\forall e = xy \Rightarrow 1) x, y \notin S_e$

2) если $x \neq u, x \neq v$, то $S_e \cup \{x\}$ разделяет u и v в G .

Рассмотрим кратчайшую (u, v) -цепь в графе G . $P = u, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, v$.

Рассмотрим $e = x_1x_2$. Из утверждения 1 $x_2 \neq v$.

$$S_e = \{y_1, \dots, y_{t-1}\}$$

$W_1 = S_e \cup \{x_1\}$ по (***) разделяет u и v . По утверждению 1, $x_1, v \notin EG$. По утверждению 2, W_1 смежно с u . $\{y_1, \dots, y_{t-1}\}$ смежно с u и не смежно с v .

$W_2 = S_e \cup \{x_2\}$ по (***) разделяет u и v . По утверждению 2 x_2 смежно с u . Противоречие с выбором кратчайшей цепи \square

27 Независимое множество. Оценки числа независимости. Вершинное покрытие. Связь чисел покрытия и независимости.

27.1 Независимое множество.

Мн-во вершин $W \subseteq VG$ называется **независимым**, если $\forall w, u \in W \quad uw \notin EG$.

Независимое мно-во **тупиковое (максимальное)**, если оно не является собственным подмножеством другого независимого мно-ва.

Независимое мно-во наибольшей мощности - **наибольшее** независимое мно-во. Мощность такого мно-ва называется **числом независимости** $\alpha_0(G)$

27.2 Оценки числа независимости.

$$\forall G \quad \alpha_0(G) \geq \sum_{v \in VG} (1 + \deg(v))^{-1}$$

Доказательство. Пусть $G = K_n$. Тогда $\alpha_0(K_n) = 1$.

$$\sum_{v \in VG} n^{-1} = \frac{n}{n} = 1.$$

Индукция по числу вершин для $G \neq K_n$:

$|VG| \leq 2$ - всё очевидно.

Пусть $|VG| = n \geq 3$, для любого графа с меньшим числом вершин теорема верна, $G \neq K_n$.

Выбираем x - вершинка G наименьшей степени. Т.к. $G \neq K_n$, то $x \cup N(x) \neq VG$.

$$G' = G - x - N(x). \text{ По индукционному предположению в } G': \alpha_0(G') \geq \sum_{v \in VG'} (1 + \deg(v))^{-1}.$$

Пусть $M' \subseteq VG'$, M' - независимо в G' , $|M'| = \alpha_0(G')$.

$$v \cup M' \text{ - независимо в } G \Rightarrow \alpha_0(G) \geq |x \cup M'| = \alpha_0(G') + 1.$$

$$\forall v \in VG' \quad \deg_G(v) \geq \deg_{G'}(v)$$

$$\sum_{v \in VG'} (1 + \deg_{G'}(v))^{-1} \geq \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1}$$

$\forall v \in N(x) \quad \deg_G(v) \geq \deg_G(x)$ (т.к. x - вершина с наименьшей степенью в G)

$$\sum_{v \in N(x)} (1 + \deg_G(v))^{-1} \leq \sum_{v \in N(x)} (\deg_G(x) + 1)^{-1} = \frac{\deg_G(x)}{\deg_G(x) + 1}$$

Берём неравенства 1 и 3 строчками выше и подставляем их куда-то в начало:

$$\alpha_0(G) \geq 1 + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} \geq \frac{\deg_G(x) + 1}{\deg_G(x) + 1} + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} = \frac{\deg_G(x)}{1 + \deg_G(x)} + (1 + \deg_G(x))^{-1} +$$

$$\sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} \geq \sum_{v \in N(x)} (\deg_G(v) + 1)^{-1} + (1 + \deg_G(x))^{-1} + \sum_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} = \sum_{v \in VG} (1 + \deg_G(v))^{-1} \quad \square$$

27.3 Вершинное покрытие.

Вершина покрывает вёбра, инцидентные ей. Мно-во вершин, покрывающих все рёбра - **покрытие** (вершинное покрытие).

Покрытие W - тупиковое (минимальное), если $\forall V \subset W, V$ - не покрытие. Покрытие наименьшей мощности - наименьшее покрытие и его мощность Обозначается $\beta_0(G)$ - число покрытия графа G .

27.4 Связь чисел покрытия и независимости.

Для $\forall G: \alpha_0(G) + \beta_0(G) = |VG|$

Доказательство:

Берём S — независимое: $|S| = \alpha_0(G)$

По лемме 2.19 из лекций ($S \subseteq VG$ — независимое $\Leftrightarrow VG \setminus S$ — вершинное покрытие)

$VG \setminus S$ — вершинное покрытие

$$\beta_0(G) \leq |VG \setminus S| = |VG| - \alpha_0(G) \Rightarrow \alpha_0(G) + \beta_0(G) \leq |VG|$$

Теперь, пусть P — вершинное покрытие: $|P| = \beta_0(G)$

По лемме 2.19 $VG \setminus P$ — независимое множество

$$\alpha_0(G) \geq |VG \setminus P| = |VG| - \beta_0(G) \Rightarrow \alpha_0(G) + \beta_0(G) \geq |VG|$$

↓

$$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |VG|$$

□

28 Паросочетание, реберное покрытие. Теорема о связи чисел паросочетания и реберного покрытия. Совершенное паросочетание.

28.1 Паросочетание, реберное покрытие.

$M \subseteq EG$ — паросочетание, если $\forall e, h \in M$ e, h — не смежны.

Наибольшее по мощности паросочетание — наибольшее паросочетание. Его мощность — число паросочетания $\alpha_1(G)$

$Q \subseteq EG$ — рёберное покрытие, если оно покрывает все вершины

Наименьшее по мощности рёберное покрытие — мин. рёберное покрытие. Его мощность — число рёберного покрытия $\beta_1(G)$

28.2 Теорема о связи чисел паросочетания и реберного покрытия.

$\forall G$ без изолированных вершин

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) = |VG|$$

Доказательство:

Пусть $\alpha_1 = \alpha_1(G)$, $\beta_1 = \beta_1(G)$, $|VG| = n$

Докажем: $\alpha_1 + \beta_1 \leq n$ $\alpha_1 + \beta_1 \geq n$

1. Пусть M - наибольшее паросочетание в G . Пусть V' - мно-во вершин, не покрытых M .

Либо V' - пусто, либо V' - независимое мно-во вершин (т.к. иначе M — не наибольшее паросочетание). Для каждой вершины из V' выберем ребро, инцидентне ей. получаем E' . (если $V' = \emptyset \Rightarrow E' = \emptyset$).

Поскольку V' - независимо, то $|E'| = |V'|$.

По построению V' : $|V'| = n - 2 \cdot \alpha_1$

$E' \cup M$ - рёберное покрытие $\beta_1 \leq |E' \cup M| = |E'| + |M| = n - 2\alpha_1 + \alpha_1 = n - \alpha_1$.

2. Пусть P - наименьшее рёберное покрытие графа G . $G' = G[P]$. В G' нет циклов (были бы, могли бы убрать одно ребро)

Получаем, что G' — ациклический граф, т.е. G' — лес

Каждая компонента связности графа G' — дерево. Пусть t компонент связности и число рёбер k_1, k_2, \dots, k_t .

В каждой компоненте выберем по одному ребру \Rightarrow получим паросочетания M . $|M| = t$.

Имеем, $t \leq \alpha_1$. Получаем, что $n = \sum_{i=1}^t (k_i + 1) = t + \sum_{i=1}^t k_i = t + \beta_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$.

□

28.3 Совершенное паросочетание.

Совершенное паросочтание — паросочтание, являющееся рёберным покрытием.

29 Терема Кенига о числе паросочетания для двудольных графов. Теорема Кенига о $(0,1)$ -матрицах.

29.1 Терема Кенига о числе паросочетания для двудольных графов.

Для любого двудольного графа G : $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$.

Доказательство. Пусть G — граф. Докажем, что $\alpha_1(G) \geq \beta_0(G)$.

Обозначим $\beta_0 = \beta_0(G)$

Удаляем рёбра из G пока не получим некоторый граф G' : $\beta_0(G') = \beta_0$ и $\forall e \in EG' \quad \beta_0(G' - e) = \beta_0 - 1$.

Докажем утверждение, что в G' нет смежных рёбер.

Пусть это гон и в $\exists e, g \in EG'$: e и g смежны в G' , общая вершина v . В графе $G' - e$ существуют вершин. покрытие $S_e \quad |S_e| = \beta_0 - 1$ и концы ребра e не лежат в S_e .

В графе $G' - g$ существует вершинное покрытие S_g и концы ребра g не принадлежат S_g .

Рассмотрим порождённый подграф графа G' : $G'' = G'[\{v\} \cup (S_e \setminus S_g) \cup (S_g \setminus S_e)]$

$|S_e \cap S_g| = t \quad |VG''| = 1 + \beta_0 - 1 - t + \beta_0 - 1 - t = 1 + 2(\beta_0 - 1) - 2t$

G'' подграф графа $G \Rightarrow G''$ — двудольный.

Пусть A — меньшая доля графа G .

$|A| \leq \frac{1}{2}|VG''| = \beta_0 - 1 - t$. A — вершинное покрытие G'' .

Покажем, что $A' = A \cup (S_e \cup S_g)$ — вершинное покрытие G' .

Возьмём произвольное ребро. Пусть $h \in EG'$.

1. $h \in \{e, g\}$

$e, g \in EG'' \Rightarrow e, g$ покрыты мно-ом A , а значит и A' .

2. $h \notin \{e, g\}$

Тогда h покрывается как S_e , так и S_g .

(a) $x \in S_g \quad x \in S_e \Rightarrow x \in S_g \cap S_e \Rightarrow$ покр. A' .

(b) один конец принадлежит $S_e \setminus S_g$, а другой: $S_g \setminus S_e \Rightarrow h \in EG'' \Rightarrow h$ покрывается A .

Следовательно $\beta_0(G') \leq |A'| \leq |A| + |S_e \cap S_g| \leq \beta_0 - 1 - t + t = \beta_0 - 1$ — противоречие с выбором графа G' (противоречие с тем, что существуют 2 смежных ребра).

Граф G' состоит из независимых рёбер. $\beta_0(G') = \alpha_1(G')$ $\beta_0(G) = \beta_0(G') = \alpha_1(G') \leq \alpha_1(G)$.

Из леммы 2.23 ($\forall G \quad \alpha_1(G) \leq \beta_0(G)$), это верно т.к. чтобы покрыть все рёбра, надо покрыть и все рёбра паросочетания) следует, что $\beta_0(G) = \alpha_1(G)$. □

29.2 Теорема Кенига о $(0,1)$ -матрицах.

Для любой $(0, 1)$ -матриц максимальное число единиц, никакие 2 из которых не стоят в одном столбце и в одной строке, равно минимальному числу строк и столбцов, содержащих все единицы.

Доказательство. Пусть G - двудольный граф, с долями $\{v_1, v_2 \dots v_n\}, \{u_1 \dots u_n\}$. Матрица смежности двудольного графа G :

$$A(G) = (a_{ij}) \mid a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i u_j \in EG \\ 0, & \text{else} \end{cases} . \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & A \\ \hline A^T & 0 \\ \hline \end{array}$$

Биекция между двудольным графом с долями мощности n и m и множеством $(0,1)$ -матриц размера $n \times m$.

Максимальное число единиц, никакие две из которых не стоят в одной строке или столбце равно $\alpha_1(G)$ для соотв. графа G .

Минимальное число строк и столбцов, содержащих единицы равно $\beta_0(G)$ для соотв. графа G . \square

30 Терема Холла о паросочетаниях.

Пусть $G = (A, B, E)$ - двудольный граф.

В G существует паросочетание, покр. $A \Leftrightarrow \forall X \subseteq A \quad |N(X)| \geq |X|$

Доказательство.

$\Rightarrow)$ Если существует $X \subseteq A : |N(X)| < |X|$, тогда паросоч., покр. X не существует: не хватит рёбер.
А значит нет паросч., покрывающего A .

$\Leftarrow)$ Док-во индукцией по числу вершин в доле A :

Если $|A| = 1$ - очевидно верно

Пусть $|A| \geq 2$. Рассмотрим 2 случая:

1. $\forall X \subset A \quad |X| < |N(X)|$

Выберем ребро $uv \in E \quad v \in A, u \in B$.

Рассмотрим новый граф $G' = G - v - u$. Обозначим $A' = A \setminus \{v\}$.

Пусть $X \subseteq A'$. $|X| < |N_G(X)|$, $|N_{G'}(X)| \geq |N_G(X)| - 1$ (-1 на случай, если y входит в $N(X)$)
 $|X| < |N_{G'}(X)| + 1 \Rightarrow |X| \leq |N_{G'}(X)|$.

По индукционному предположению в графу G' существуют паросчитания, покрывающие $A' \Rightarrow$ объединим его с ребром $vu \Rightarrow$ получаем паросчитание в G покр. A .

2. $\exists A' \subset A \quad |A'| = |N(A')|$

Рассмотрим 2 порождённых подграфа:

$G_1 = G[A' \cup N(A')]$

$G_2 = G - A' - N_G(A')$

Покажем, что G_1 и G_2 удовлетворяют условиям теоремы.

В G_1 : $\forall X \subseteq A' \quad N_G(X) = N_{G'}(X)$

$|X| \leq |N_G(X)| = |N_{G'}(X)| \Rightarrow G_1$ удовлетворяет условию теоремы.

Пусть $X \subseteq A \setminus A'$. Рассмотрим $X \cup A'$ в G .

$|X \cup A'| \leq |N_G(X \cup A')| \leq |N_{G_2}(X)| + |N_G(A')|$

Вспоминаем, что $|A' \cup X| = |X| + |A'|$

$|A'| = |N_G(A')| \Rightarrow |X| \leq |N_{G_2}(X)|$

По индукционному предположению в G_1 существует паросоч., покрывающ. A' , в G_2 существует паросоч., покрывающ. $A \setminus A'$. Следовательно, их объединение - искомое паросоч., покр. A . \square

31 Теорема Фробениуса о свадьбах. Системы различных представителей, теорема Холла о СРП.

31.1 Теорема Фробениуса о свадьбах.

Двудольный граф $G = (A, B, E)$ имеет совершенное паросочетание $\Leftrightarrow |A| = |B|$ и для любого $X \subseteq A$ $|N_G(X)| \geq |X|$.

Доказательство:

В G \exists совершенное паросочетание $\Leftrightarrow |A| = |B|$ и \exists паросочетание покр. A \Leftrightarrow
 $|A| = |B|$ и $\forall X \subseteq A$ $|N(X)| \leq |X|$
□

31.2 Системы различных представителей

$A = \{a_1, \dots, a_m\}$ — некоторое множество

$S = \{S_1, \dots, S_n\}; S_i \subseteq A \quad \forall i$; — семейство подмножеств множества A

$x = (x_1, \dots, x_n)$ — система различных представителей для S если:

- 1) $x_i \in S_i \quad \forall i$;
- 2) $x_i \neq x_j; \quad i \neq j$

31.3 теорема Холла о СРП.

$S = (S_1, \dots, S_n)$ имеет СРП $\Leftrightarrow \forall k; \quad 1 \leq k \leq n \quad \forall \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\} \quad |S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}| \leq k$

Доказательство:

\Rightarrow) Если посмотреть на определение, станет очевидно.

\Leftarrow) Рассмотрим граф $G = (A, B, E)$

$A = \{S_1, \dots, S_n\}$

$B = \{a_1, \dots, a_m\}$

$E = \{a_i S_j | a_i \in S_j\}$

Когда \exists паросочетание покрывающее A ?

(по т. Холла) когда $\forall X \subseteq A \quad |N_G(X)| \leq |X| = k$

$|N_G(X)| = |S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}|$

Это условие выполняется $\Rightarrow \exists$ паросочетание покр. $A \Rightarrow$ существующее паросочетание определяет СРП

□

32 Теорема об увеличивающей цепи. Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

32.1 Определения

G — граф; M — паросочетание

цепь x_1, \dots, x_t — M -чередующаяся $\Leftrightarrow x_i x_{i+1} \in M \Leftrightarrow x_{i+1} x_{i+2} \notin M \quad \forall i$

M -чередующаяся цепь x_0, \dots, x_t — M -увеличивающаяся, если x_0 и x_t не покрыты рёбрами из M

32.2 Теорема об увеличивающей цепи.

M — паросочетание в G

M — наибольшее \Leftrightarrow в G нет M -увеличивающей цепи

Доказательство:

\Rightarrow) Пусть в G существует M -увелич. цепь P . Тогда рассмотрим $M' = (M \setminus EP) \cup (EP \setminus M)$ – паросочетание (очевидно)

$|M'| = |M| + 1$ – противоречие с тем, что M наибольшее.

\Leftarrow) Рассмотрим M' – пусть это наибольшее паросочетание в G .

$G' = G[(M \setminus M') \cup (M' \setminus M)]$

$\forall v \in G' \ deg_{G'}(v) \leq 2 \Rightarrow$ каждая компонента связности графа G' – цикл или цепь.

Если в какой-то компоненте связности \exists цепь, в которой рёбер 1-го паросочетания больше рёбер другого

$\Rightarrow \exists$ либо M -увеличивающая цепь (противореч. с нач. усл.), либо $\exists M'$ -увеличивающая цепь (противореч. с M' -наиб.)

$\Rightarrow |M| = |M'| \Rightarrow M$ – наибольшее паросочетание

□

32.3 Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

$G = (A, B, E)$

1. M – паросочетание
2. $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$ – множества непокрытых M вершин; Организуем максимальный лес F в G :
 - (a) $\forall b \in (VF \cap B) \ deg_F(b) = 2$ и одно из этих 2-х рёбер из M
 - (b) \forall компонента связности леса F содержит ровно 1-ну вершину из A_1 . Добавим все оставшиеся вершины из A_1 в качестве одновершинных компонент связности графа F
3. Если \exists ребро между вершинами из B_1 и VF , то есть M -увеличивающая цепь начинающаяся с этого ребра. по пункту 32.2 строим новое паросочетание большей мощности и переходим на шаг 2)
4. Если нет ребра, то M – наибольшее паросочетание

33 Эйлеров цикл, эйлеров граф. Теорема Эйлера. Алгоритм Флёри.

33.1 Эйлеров цикл, эйлеров граф.

Цикл, содержащий все рёбра графа – эйлеров.

Граф, в котором есть эйлеров цикл – эйлеров

33.2 Теорема Эйлера.

Для связного графа порядка $n \leq 2$ следующие условия эквивалентны:

1. G – эйлеров
2. $\forall v \in VG \ deg v$ – чётна
3. Множество рёбер можно разбить на циклы.

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$) Эйлеров цикл проходит через \forall вершину $v k$ раз и содержит все рёбра $\Rightarrow deg_G(v) = 2k$

$2 \Rightarrow 3$) все вершины чётные \Rightarrow нет висячих вершин $\Rightarrow G$ – не дерево \Rightarrow в нём есть циклы

Пусть G_1 – максимальный подграф графа G , удовлетворяющий условию 3. Очевидно, что все вершины в нём имеют чётную степень.

$$G_2 = G - EG_1$$

в G_2 все вершины имеют чётную степень (т.к. чёт–чёт=чёт).

Если G_2 пуст, то всё доказали, иначе в нём есть ребра.

Очевидно, что он не дерево, а значит в нём есть цикл. Противоречие с максимальностью G_1 .

$3 \Rightarrow 1$) Рассмотрим разбиение ребер графа G на наименьшее число циклов: c_1, \dots, c_s .

Покажем, что $s = 1$:

Пусть не так ($s > 1$). $\Rightarrow \exists i \neq j \mid c_i$ и c_j имеют общую вершину, но не имеют общих ребер. Склейм их в один цикл. Противоречие с выбором наименьшего числа циклов $\Rightarrow s = 1$. Это и есть Эйлеров цикл.

□

33.3 Алгоритм Флёри.

Нахождение эйлерова цикла

0. выбираем произвольную вершину δ в графе G ; $G' = G$

1. Выбираем ребро e в графе G' инцидентное δ и не мост (если это возможно).

$G' = G' - e$ и переходим во второй конец e

34 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф. Теорема Оре. Теорема Дирака.

34.1 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф.

Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется **Гамильтоновым циклом**.

Граф, содержащий Гамильтонов цикл, называется **Гамильтоновым**.

34.2 Теорема Оре.

Если для любых двух несмежных вершин v, u верно $\deg(v) + \deg(u) \leq |VG|$, то G – гамильтонов.

Доказательство теоремы:

Утверждение:

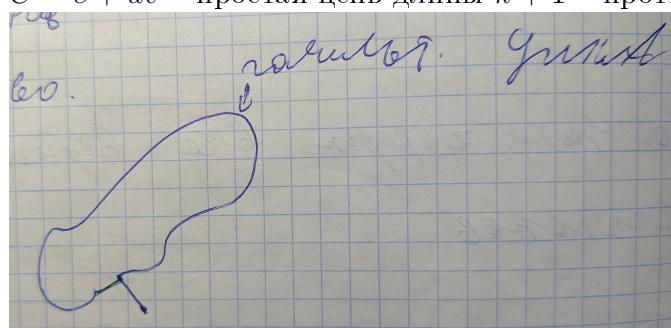
Если в связном графе длина максимальной простой цепи равна k и в нём существует простой цикл длины $k+1$, то этот простой цикл является гамильтоновым.

Доказательство утверждения:

Рассмотрим наш цикл C_{k+1} . Если C – не гамильтонов, G – связный $\Rightarrow \exists u, v: u \in C, v \notin C, uv \in EG$.

Пусть $e \in C$, e инцидентно u .

$C - e + uv$ – простая цепь длины $k+1$ – противоречие с максимальной длиной цепи.



□

Вернёмся к доказательству теоремы

Рассмотрим самую длинную просущую цепь в графе G

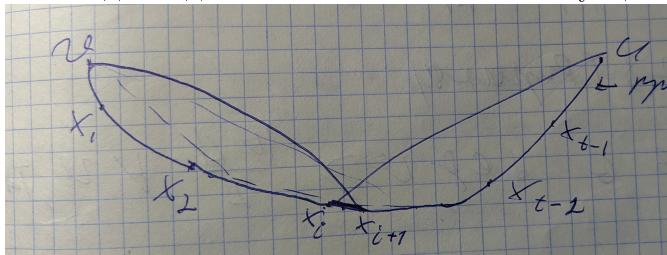
$$v = x_0, \dots, x_t = u$$

Если $ub \in EG$, то получим цикл длины $t + 1$ и он гамильтонов по утверждению

Если $ub \notin EG$

Знаем что $\deg(u) + \deg(v) \geq |VG|$

Необходимо доказать что возможна ситуация как на изображении:



А именно: $\exists x_i, x_{i+1}$ т.ч. x_i — смежна с u и x_{i+1} смежна с v

Поскольку наша цепь длиннейшая, то все вершины, смежные с v и смежные с u лежат на этой цепи

$$I = \{i | x_i v \in EG, \quad 2 \leq i \leq t - 1\}$$

$$|I| = \deg(v) - 1$$

$$Y = \{j | x_{j-1} u \in EG, \quad 2 \leq j \leq t - 1\}$$

$$|Y| = \deg(u) - 1$$

$$|Y \cup I| \leq t - 2$$

$$|Y| + |I| = \deg(v) + \deg(u) - 2 \geq |VG| - 2 \geq t + 1 - 2 = t - 1$$

$$\text{т.е. } |Y \cup I| < |I| + |Y| \Rightarrow Y \cap I \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\exists i: vx_i, ux_{i-1} \in EG$$

Удаляем из цепи ребро между x_{i-1} и x_i , добавляем рёбра vx_i, ux_{i-1} и получаем цикл длины $t + 1$

Согласно утверждению, этот цикл является гамильтоновым.

□

35 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф. Теорема Хватала-Эрдеша

35.1 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф.

Простой цикл, содержащий все вершины графа — гамильтонов

Граф, содержащий гамильтонов цикл — гамильтонов

35.2 Теорема Хватала-Эрдеша

Пусть G — связный граф порядка $n \geq 3$. Если $\alpha(G) \geq \alpha_0(G)$, то G — гамильтонов

Доказательство:

Если G нет циклов, то G — дерево $\xrightarrow{n \geq 3} \alpha(G) = 1; \alpha_0(G) \geq 2$. Противоречие. \Rightarrow в G есть циклы

Пусть C — самый длинный простой цикл

Если $VC = VG$ — □

Если $VG \setminus VC \neq \emptyset$

Рассмотрим $G' = G - VC$

Пусть H — компонента связности G'

$$N_G(H) = \{x \in VG \setminus VH | \exists y \in H : xy \in EG\}$$

$$N_G(H) \subseteq C$$

(*) Все вершины из $N_G(H)$ — попарно несмежные по циклу (иначе, есть простой цикл большей длины)

$G - N_G(H)$ — несвязный граф (поскольку есть компонента H и остальное)

↓

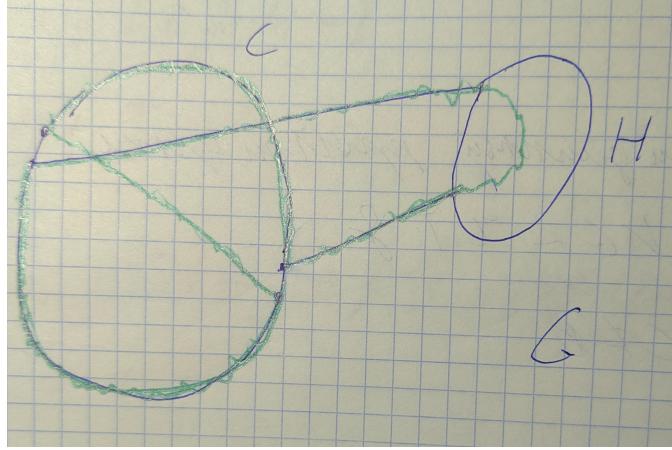
$$\alpha(G) \leq |N_H(H)|$$

S — множество правых соседей по циклу C вершин из $N_G(H)$

$$|S| = |N_G(H)|$$

Покажем что S — независимое множество в G

Допустим что нет \Rightarrow есть ребро между двумя вершинами из $S \Rightarrow$ есть более длинный цикл (см. рисунок)



$(*) \Rightarrow S \cap N_G(H) = \emptyset$ (иначе бы какая-то вершина из $N_G(H)$ являлась бы соседом др. вершине из $N_G(H)$ по циклу) $\Rightarrow S \cup \{x\}$ — независимое множество $\Rightarrow \alpha_0(G) \geq |S \cup \{x\}| = |N_G(H)| + 1 \geq \alpha(G) + 1$

Противоречие с условием теоремы

□