1 Комбинаторные правила произведения и суммы. Число выборок объема k из n элементов.

1.1 Правило произведенеия

Если $a \in A$ можно выбрать n способами и для каждого такого выбора $b \in B$ можем выбрать m способами, то пару ab мы можем выбрать $n \cdot m$ способами.
$|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times \cdots \times |A_n|$

1.2 Правило суммы

Если элемент $a \in A$ может быть выбран n способами и независимо, а элемент $b \in B$ может быть выбран m способами, то выбор "a или b"может быть осуществлён $n + m$ способами.
$\forall$ разбиения конечного множества A $= A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$
$|A| = |A_1| + \cdots + |A_n|$

1.3 Число выборок объема k из n элементов

1.3.1 Упорядоченная выборка объема k из n элементов с повторениями (число кортежей)

$\widetilde{A}_n^k = n^k$

1.3.2 Упорядоченная выборка объема k из n элементов без повторений (число k-размещений)

$[n]_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Доказательство:
Индукция по k:
$k = 1$: $[n]_1 = n$
$k > 1$: $[n]_k = [n]_{k-1}(n-k+1)$
$\square$

1.3.3 Неупорядоченные выборки объема k из n элементов без повторений (сочетания)

$\forall\ n, k\ 0 \leqslant k \leqslant n$
$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{[n]_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Доказательство:
Индукция по n
$n = 1$: $\binom{1}{0} = 1$; $\binom{1}{1} = 1$
$n \geqslant 2$:
Если $k = n$, то $\binom{n}{n} = 1 = \frac{n!}{n! \cdot 0!}$
Если $k < n$, то
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\square$

1.3.4 Неупорядоченные выборки объема k из n элементов с повторениями (число мультимножеств)

$\widehat{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m$
Доказательство:
$<\alpha_1, \ldots \alpha_n>$ задаёт наше m-сочетание с повторениями

Сопоставим ему двоичный кортеж
$(\underbrace{0,\ldots,0}_{\alpha_1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{\alpha_2},1,\ldots,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{\alpha_n})$

Знаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = m \Rightarrow$ длина кортежа $m+n-1$ и в нём $n-1$ единица. Таких кортежей C_{n+m-1}^{n-1}

$\square$

2 Число выборок объема k из n элементов. Комбинаторные тождества. Бином Ньютона.

2.1 Число выборок объема k из n элементов.

См. пункт 1.3

2.2 Комбинаторные тождества

2.2.1 Тождество Паскаля

$\forall n,k\ 1 \leqslant k < n$
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
Доказательство:
M — все k-подмножества n-множества
$|M| = \binom{n}{k}$
$M_1 \subseteq M$ — не попал элемент a
$M_2 \subseteq M$ — попал элемент a
$\Downarrow$
$M = M_1 \sqcup M_2 \Rightarrow |M| = |M_1| + |M_2| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
$\square$

2.2.2

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Доказательство:
$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$
$\square$

2.3 Бином Ньютона

$\forall n \in \mathbb{N}$
$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$
Доказательство:
$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b) = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

$\square$

2.4 Обобщение бинома Ньютона

$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum\limits_{\alpha_1,\dots,\alpha_k;\alpha_i \geqslant 0;\alpha_1+\dots+\alpha_k=n} P_n(\alpha_1 \dots \alpha_k) x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$
$P_n(\alpha_1 \dots \alpha_k)$ — полиномиальный коэффициент
Доказательство:
Упражнение
$\square$

3 Мультимножества, их спецификации. Полиномиальные коэффициенты.

3.1 Мультимножества, их спецификации.

3.1.1 Мультимножество первичной спецификации

Рассмотрим X $= \{x_1, \dots, x_n\}$
и кортеж $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ на $\mathbb{N}_0$ т. ч. $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$
Совокупность из m элементов множества x, в которой x_i встречается α_i раз $\forall$ i — m-мультимножество первичной спецификации $[x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}]$ порождённое множеством X.

3.1.2 Мультимножество вторичной спецификации

Совокупность из m элементов множества X, в которой в $< \alpha_1, \dots, \alpha_n > \beta_0$ нулей, β_1 единиц...
Запись: $[[0^{\beta_0}, 1^{\beta_1}, \dots, m^{\beta_m}]]$
$\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m$

3.2 Полиномиальные коэффициенты

$P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — количество m-кортежей из m-мультимножества
$\forall m, \alpha_1 \dots \alpha_n$: $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$
$P_m(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$
Доказательство:
$(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{\alpha_n})$
$\alpha_1! \cdots \alpha_n! P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = m!$
$\Downarrow$
$P_m = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$
$\square$

$P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — полиномиальный коэффициент.
Обозначается: $\binom{m}{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$

4 Комбинаторное правило суммы. Формула включений и исключений.

4.1 Комбинаторное правило суммы.

См. пункт 1.3

4.2 Формула включений и исключений.

Пусть A - конечное конечное множество
$A_1 \dots A_n \subseteq A$
Тогда $|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k S_k,$
$S_0 = |A|$
$\forall k < 0 \; S_k = \sum\limits_{\{i_1 \ldots i_k\} \subseteq \{1 \ldots n\}} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$
Доказательсво:
$x \in A$
пусть x попал ровно в t подмножеств $A_{j_1}, \ldots A_{j_t}$
Вклад "x"
В $S_0 = |A|$ — 1 раз
В $S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |Ai|$ — t раз
В S_2 — $\binom{t}{2}$ раз

В S_3 — $\binom{t}{3}$ раз
$\vdots$
В S_t — $\binom{t}{t}$ раз
Т. о. $1 - t + \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix} \ldots + (-1)^t \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \sum\limits_{k=0}^{t} (-1)^k \begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} 0; & t > 0 \\ 1; & t = 0 \end{cases}$
$\square$

5 Формула включений и исключений. Задача о беспорядках.

5.1 Формула включений и исключений.

См. пункт 4.2

5.2 Задача о беспорядках.

$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — перестановка $(1, \ldots, n)$.
Нужно найти число перестановок из n элементов множества, в которых никакой элемент не остался на месте.
Доказательство:
$(\forall i \quad \pi_i \neq i)$.
A - все перестановки. $\forall i \quad A_i \leftrightarrow \pi_i = i$.
$A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ - искомое множество.
$|A| = n! \Rightarrow S_0 = n!$
$|A_i| = (n-1)!$

$S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| = n \cdot (n-1)!$
при $i \neq j$ $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$
$S_2 = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = \binom{n}{2}(n-2)!$
$|A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}| = (n-k)!$
$S_k = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} (n-k)! = \binom{n}{k}(n-k)!$
$|A \setminus (A_i \cup \ldots \cup A_n)| = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k S_k = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!}(n-k)! = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$
$\square$

6 Функция Эйлера, формула для функции Эйлера. Формула для числа сюръективных отображений.

6.1 Функция Эйлера, формула для функции Эйлера.

$\varphi(m)$ - функция Эйлера, $m \in N$. Кол-во натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m.
$\forall m \geq 2 \quad m = p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{l_n}$ — разложение на простые множители, тогда
$\varphi(m) = m \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$
Доказательство:
$A = \{1 \ldots m\}$
A_i — числа A, которые дляется на p_i, $\forall i = 1 \ldots m$
$|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n|$
$|A| = m \quad \Rightarrow \quad S_0 = m$
$|A_i| = \frac{m}{p_i}$ $(p_i, 2p_i, 3p_i, \ldots, \frac{m}{p_i} \cdot p_i)$
$S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{m}{p_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i|$
$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{m}{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}$
$S_k = \sum\limits_{i \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}$
$|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = m + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k S_k = m + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} = m(1 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}) =$
$m \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_n})$
$\square$

6.2 Формула для числа сюръективных отображений.

Число сюръективных отображений из m-множества X = $\{x_1, \ldots, x_m\}$ в n-множество Y=$\{y_1, \ldots, y_n\}$ равно $(-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} k^m$
Доказательство:

A — все отображения $X \to Y$
A_i — все отображения $X \to Y \mid y_i$ — нет прооообраза.
$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)$ — множество всех отображений, у которых 1-й элемент покрыт, ..., k-й элемент покрыт.
$|A| = n^m = S_0$
$|A_i| = (n-1)^m$
$S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| = C_n^1 |A_j| = n(n-1)^m$
$|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$
$S_2 = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| = C_n^2 |A_i \cap A_j| = C_n^2 (n-2)^m$
$\vdots$
$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$
$S_k = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leq n} (n-k)^m = C_n^k (n-k)^m$
$\vdots$
$S_n = 0$
$|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_k)| = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^m \overset{j=n-k}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} C_n^{n-j} j^m = (-1)^n \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^j C_n^j j^m$
$\square$

7 Число Стирлинга второго рода. Формула для числа Стирлинга второго рода. Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода.

7.1 Число Стирлинга второго рода.

Число стирлинга II рода $S(n,k)$ — количество неупорядоченных разбиений n-множества на k непустых подмножеств
Положим:
$S(n,0) = \begin{cases} 0; & n > 0 \\ 1; & n = 0 \end{cases}$
$S(n,k) = 0; \quad k > n$

7.2 Формула для числа Стирлинга второго рода.

$S(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^n$
Доказательство:
Сюръективное отображение из n-множества в k-множество сопоставляется упорядоченному разбиению n-множества на k непустых подмножеств
Их $(-1)^k \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i i^n$
Делим на $k!$ и получаем число неупорядоченных разбиений.
$\square$

7.3 Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода.

$\forall k, n \in N, \quad 0 < k < n$
$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$
Доказательство:
M — все разбиения n-множества на k непересекающихся подмножеств.
В n-множестве зафиксируем элемент a
M_1 — множество разбиений, в котрых есть одноэлементное подмножество {a}
$M_2 = M \setminus M_1$ — все остальные разбиения
$|M| = S(n, k)$
$|M_1| = S(n-1, k-1) \quad$ ($n-1$ т.к. один элемент уже учавствует в разбиении, $k-1$ т.к. одно множество в разбиении уже есть)
$|M_2| = kS(n-1, k) \quad$ (разбиваем $n-1$-множество на k непустых подмножеств, и добавление элемента a в каждое из k подмножеств порождает разбиение изначального n-множества)
$M = M_1 \sqcup M_2$
$\Downarrow$
$|M| = |M_1| + |M_2|$
$\Downarrow$
$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$
$\square$

8 Числа Бела. Теорема о числе Бела.

8.1 Числа Бела.

Число Бела B_n — количество неупорядоченных разбиений n-множества на непустые подмножества.
$B_0 = S(0, 0)$
$B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} S(n, k)$

8.2 Теорема о числе Бела.

$\forall n \geqslant 2$

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$$

Доказательство:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k-1}^{n-1} S(i, k-1) \binom{n-1}{i} \overset{\text{поменяем знаки суммы местами}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{i+1} S(i, k-1) \binom{n-1}{i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{k=1}^{i+1} S(i, k-1) \overset{k-1=t}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{t=0}^{i} S(i, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$$

$\square$
На экзамене требуется комбинаторное доказательство, но какое есть.

9 Число Стирлинга первого рода. Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга первого рода. Связь между числами Стирлинга.

9.1 Число Стирлинга первого рода.

Число Стирлинга первого рода — количество неупорядоченных разбиений n-множества на k циклов
Обозначение: $s(n,k)$

9.2 Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга первого рода.

Положим:
$s(n,0) = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n > 0 \end{cases}$
$s(n,k) = 0; \quad k > n$

$\forall n, k \quad 0 < k < n$
$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)$
Доказательство:
Аналогично числам Стирлинга I рода
□

9.3 Связь между числами Стирлинга.

$$\forall n, m \in N \quad \sum_{k=1}^{n} S(n,k)s(k,m)(-1)^{k-m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} .$$

Доказательство:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)[x]_k = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \sum_{m=1}^{k} s(k,m)(-1)^{k-m}x^m = \sum_{m=1}^{n} x^m \sum_{k=1}^{n} S(n,k)s(k,m)(-1)^{k-m}x^m$$

Сравниваем степень при x^n : если $n = m$, то вторая сумма равна 1, иначе она должна быть равна 0.
□

10 Разложение x^n в базисе $[x]_k$. Разложение $[x]_k$ в базисе x^n. Связь между числами Стирлинга.

10.1 Разложение x^n в базисе $[x]_k$.

$$\forall n \in N : \quad x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)[x]_k.$$

Доказательство:
$[x]_{k+1} = [x]_k \cdot (x-k) = [x]_k \cdot x - [x]_k \cdot k$
$\Downarrow$
$(*) \quad x \cdot [x]_k = [x]_{k+1} + k \cdot [x]_k$
Индукция по n: $x^1 = [x]_1$ — очевидно

$$x^n = x \cdot x^{n-1} \overset{\text{по индукции}}{=} x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)[x]_k = \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k) \cdot [x]_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k) \cdot k \cdot [x]_k \overset{t=k+1 \text{ в первой сумме}}{=}$$

$= \sum_{t=2}^{n} S(n-1,t-1)[x]_t + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)\cdot k \cdot [x]_k$ Первая сумма равна 0 при t=1, вторая сумма равна 0 при k=n. Получается:

$$\sum_{k=1}^{n}(S(n-1,k-1)+kS(n-1,k))[x]_k = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)[x]_k$$

□

10.2 Разложение $[x]_k$ в базисе x^n.

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$[x]_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}s(n,k)x^k$$

Доказательство:

Аналогично пункту 10.1

□

10.3 Связь между числами Стирлинга.

См. пункт 9.3

11 Разбиения чисел. Диаграмма Ферре. Свойства числа разбиений. Равенство числа разбиений на различные слагаемые и на нечетные слагаемые.

11.1 Разбиения чисел.

Разбиение числа n на натуральные слагаемые - это представление n в виде суммы $x_1+x_2+\cdots+x_k, \quad x_i \in \mathbb{Z}_+$ Количество упорядоченных разбиений: $\binom{n-1}{k-1}$

Неупорядоченные разбиения:

$p(n)$ — количество разбиений числа n на слагаемые

$p(n,k)$ — количество разбиений числа n на k слагаемых

11.2 Диаграмма Ферре.

Диаграмма Ферре разбиения $n = x_1 + \cdots + x_k. \quad x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_k$ — k строк точек, в i-ой строке x_i точек в первых x_i столбцах.

11.3 Свойства числа разбиений.

11.3.1

$p(0,0) = p(0)$

$p(n,1) = 1$

$p(n,n) = 1$

$p(n,k) = 0; \quad k > n$

11.3.2

1. $p(n,k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, наибольшее из которых равно k.

2. $p(n+k,k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, не превосходящие k.

3. Число разбиений $n-k$ ровно на $m-1$ слагаемое, не превосходящих k равно числу разбиений $n-m$ на $k-1$ слагаемое, не превосходящих m.

Доказательство:

1. Транспозиция диаграммы Ферре.

2. Рассмотреть диаграмму без первого столбца.

3. Тоже через диаграмму Ферре.

□

11.3.3 Рекуррентное соотношение

$\forall n,k \mid 0<k<n$

$p(n,k)=\sum\limits_{i=1}^{k} p(n-k,i)$

Доказательство:

$(*) \quad (n-k)=(x_1-1)+(x_2-1)+\ldots+(x_k-1)$

$y_i=x_i-1$

$n-k=y_1+y_2+\ldots+y_k, \quad y_1\geq y_2\geq\ldots\geq y_k\geq 0$

Если $s: y_s>0, y_{s+1}=y_{s+2}=\ldots=y_n=0$, тогда (*) - это разбиение $n-k$ на k слагаемых, которых у нас $p(n-k,s)$.

$p(n,k)=\sum\limits_{s=1}^{k} p(n-k,s)$

□

11.4 Равенство числа разбиений на различные слагаемые и на нечетные слагаемые.

Количество разбиений n на различные слагаемые равно количеству разбиений n на нечётные слагаемые.

Доказательство:

Q_n - множество разбиений n на различные слагаемые, T_n - множество разбиений на нечётные слагаемые.

Докажем, что $|Q_n|=|T_n|$, построим для этого биекцию.

$f: Q_n \to T_n$

$n=x_1+x_2+\ldots+x_k, \quad x_1>x_2>\ldots>x_k$

$\forall i \quad x_i=2^{t_i}\cdot y_i, \quad y_i$ - нечётно

$n=\underbrace{y_1+\ldots+y_1}_{2^{t_1}}+\underbrace{y_2+\ldots+y_2}_{2^{t_2}}+\ldots+\underbrace{y_k+\ldots+y_k}_{2^{t_k}}.$

$h: T_n \to Q_n$

$n=\underbrace{y_1+\ldots+y_1}_{d_1}+\ldots+\underbrace{y_s+\ldots+y_s}_{d_s}, \quad y_i\neq y_j, i\neq j.$

$\forall i \quad d_i$ - однозначно раскладывается в степени двойки.

$d_i = 2^{\sigma_{i,1}} + 2^{\sigma_{i,2}} + \ldots + 2^{\sigma_{i,m_i}}; \quad \sigma_{i,1} > \sigma_{i,2} > \ldots > \sigma_{i,m_i}$
$n = 2^{\sigma_{1,1}} y_1 + 2^{\sigma_{1,2}} y_1 + \ldots + 2^{\sigma_{i,m_i}} + \ldots + 2^{\sigma_{s,1}} y_s + \ldots + 2^{\sigma_{s,m_s}} y_s.$

$h = f^{-1}$ — биекция.
□

12 Производящие функции и их свойства. Элементарные производящие функции.

12.1 Производящие функции и их свойства.

12.1.1 Определение

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A(t)$ — производящая функция последовательноси $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

12.1.2 Свойства

Пусть $A(t)$ и $B(t)$ - производящие функции последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ соответственно. Тогда:

1. $\alpha A(t) + \beta B(t)$ - производящая функция. $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=0}^{\infty}$.
2. $A(t) \cdot B(t)$ - производящая функция последовательности $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}, d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$
3. $t^m A(t)$ - производящая функция. $\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, a_0, a_1, \ldots$
4. $A(ct)$ - производящая функция последовательности $\{c^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$
5. $tA'(t)$ - $\{n \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$
6. $\displaystyle\int_0^t \frac{A(t) - a_0}{t} dt$ - производящая функция последовательности $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
7. $\dfrac{A(t)}{1-t}$ - производящая функция последовательности $\left\{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\right\}_{n=0}^{\infty}$

12.2 Элементарные производящие функции.

1. $(1+T)^{\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n; \quad \alpha \in \mathbb{C}$
2. $e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!}$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{1-t}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^n}{n}$
4. $\sin(t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{f^{2n+1}}{(2n+1)!}$

5. $\cos(t)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{f^{2n}}{(2n)!}$

13 Числа Каталана, производящая функция последовательности чисел Каталана, формула для числа Каталана.

13.1 Числа Каталана

$\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$: $\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_0 \end{cases}$
C_n — Количество правильных скобочных последовательностей с n парами скобок.

13.2 Производящая функция последовательности чисел Каталана

$C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$
Доказательство:
$$C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(C_{k-1} \cdot C_0 + \ldots + C_0 \cdot C_{k-1})t^k = 1 + t\sum_{k=0}^{\infty}(C_k \cdot C_0 + \ldots + C_0 \cdot C_k)t^k = 1 + t(C(t))^2$$
$\Downarrow$
$tC^2(t) - C(t) + 1 = 0$
$\Downarrow$
$2tC_{1/2}(t) = 1 \pm \sqrt{1-4t}$

т.к. при $t = 0$ $C(t) = 1$
$\Downarrow$
$C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$
$\square$

13.3 Формула для числа Каталана

n-ое число Каталана: $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$
Доказательство:
$$(1-4t)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4t)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4t)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-3}{2})}{n!}(-4t)^n =$$
$$1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot 2^n \cdot t^n}{n!} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot 2\cdot 4\cdots(2n-2)}{n!(n-1)!2^{n-1}}2^n t^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}2t^n =$$
$\sqrt{1-4t}$

$$C(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}t^n$$
т.о. $C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
$\square$

14 Числа Фибоначчи, производящая функция последовательности чисел Фибоначчи, формула для числа Фибоначчи.

14.1 Числа Фибоначчи

$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$: $\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; \quad n \geqslant 2 \end{cases}$

14.2 Производящая функция последовательности чисел Фибоначчи

Производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет вид $F(t) = \dfrac{1}{1-t-t^2}$

Доказательство:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} t^n =$$

$$= 1 + t \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} t^{n-1} + t^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} t^{n-2} = 1 + tF(t) + t^2 F(t) \Rightarrow F(t) = \frac{1}{1-t-t^2}$$

□

14.3 Формула для числа Фибоначчи

$$\forall n \geq 0 \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Доказательство:

$t^2 + t - 1 = 0$

$t_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$t_2 = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$

$$F(t) = \frac{-1}{t^2+t-1} = \frac{-1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{t-t_2} - \frac{1}{t-t_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}t_1} \left(\frac{1}{1-\frac{t}{t_1}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2} \left(\frac{1}{1-\frac{t}{t_2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}t_1} \left(1 + \frac{t}{t_1} + \frac{t^2}{t_1^2} + \dots \right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2} \left(1 + \frac{t}{t_2} + \frac{t^2}{t_2^2} + \dots \right)$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{t_1^{n+1}} - \frac{1}{t_2^{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{t_2^{n+1} - t_1^{n+1}}{t_1^{n+1} \cdot t_2^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} (t_2^{n+1} - t_1^{n+1}) =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

□

15 Линейная однородная возвратная последовательность, ее производящая функция. Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения.

15.1 Линейная однородная возвратная последовательность

Линейное однородное рекуррентное соотношение порядка k для последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ выглядит:
$(*)\quad a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = 0, \quad p_k \neq 0.$
Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет $(*)\,\forall n$ она наз-ся однородной возвратной последовательностью порядка k.

15.2 Производящая функция однородной возвратной последовательности

Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет (*) $\forall n$, $n \geq 0$, то производящая функция $A(t)$ этой последовательности имеет вид:
$A(t) = \dfrac{C(t)}{K(t)}$, где $K(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots + p_k t^k$, $C(t)$ - многочлен степени, не превосходящей $k-1$.
Доказательство:
Пусть $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

$$\begin{aligned} C(t) = A(t)\cdot K(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \quad \ldots \quad &+ a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \\ + \ldots + a_0 p_1 t + a_1 p_1 t^2 + \quad \ldots \quad &+ a_{k-1} p_1 t^k + a_k p_1 t^{k+1} + \\ + \ldots + a_0 p_2 t^2 + \quad \ldots \quad &+ a_{k-2} p_2 t^k + a_{k-1} p_2 t^{k+1} + \\ + \quad \ldots \quad &+ a_0 p_k t^k + a_1 p_k t^{k+1} + \ldots \end{aligned}$$

(Все столбцы после первого многоточия будут зануляться, а до первого в сумме образуют $C(t)$.)
□

15.3 Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения.

$f(t) = t^k + p_1 t^{k-1} + \ldots + p_k$ — характеристический многочлен для (*).
$f(t) = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, \sum r_i = k$

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ - линейная однородная возвратная последовательность удовлетворяющая (*). Тогда $a_n = \sum\limits_{i=1}^{s} Q_i(n)\lambda_i^n$, где $\lambda_1, \ldots \lambda_s$ — корни характеристического многчлена кратного $r_1, \ldots, r_s$ соответственно.
$Q_i(t)$ - многочлен степени, не превосходящей $r_i - 1$, который находится из начальных условий.
Доказательство:
$K(t) = t^k f\left(\dfrac{1}{t}\right) = t^k \prod\limits_{i=1}^{s}\left(\dfrac{1}{t} - \lambda_i\right)^{r_i} = \prod\limits_{i=1}^{s}\left(\dfrac{1}{t} - t\lambda_i\right)^{r_i}$
$A(t) = \dfrac{C(t)}{\prod\limits_{i=1}^{s}(1-t\lambda_i)^{r_i}} = \sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{r_i} \dfrac{B_{ij}}{(1-t\lambda_i)^j}$
$(1-t\lambda_i)^{-j} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{-j}{n}(-\lambda_i t)^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-j)(-j-1)\ldots(-j-n+1)}{n!}(-1)^n\lambda_i^n t^n =$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j(j+1)\dots(j+n-1)}{n!}\lambda_i^n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{n}\lambda_i^n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{j-1}\lambda_i^n t^n$$

$$A(t) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r_i} B_{ij}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{j+n-1}{j-1}\lambda_i^n t^n\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{r_i}\lambda_i^n \sum_{i=1}^{s} B_{ij}\binom{j+n-1}{j-1}\right) t^n.$$

При этом $\binom{j+n-1}{j-1}$ - многолчен степени, не превышающей $n-j+1$.

□

16 Формула Стирлинга. Асимптотика биномиальных коэффициентов.

16.1 Формула Стирлинга

$n! \underset{n\to\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

Доказательство:

Без доказательства

□

16.2 Асимптотика биномиальных коэффициентов.

1. $k^2 = o(n) \Rightarrow C_n^k \underset{n\to\infty}{\backsim} \frac{n^k}{k!}$

2. $k^3 = o(n^2) \Rightarrow C_n^k \underset{n\to\infty}{\backsim} \frac{n^k}{k!}e^{\frac{-k(k-1)}{2n}} \overset{\text{т.к. } \frac{k}{2n}\to 0}{\backsim} \frac{n^k}{k!}e^{-\frac{k^2}{2n}}$

Доказательство:

$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leqslant \frac{n^k}{k!}$

$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) = \frac{n^k}{k!}e^{\ln(1-\frac{1}{n})+\ln(1-\frac{2}{n})+\dots+\ln(1-\frac{k-1}{n})} =$
$\frac{n^k}{k!}e^{-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{2n^2})-\frac{2}{n}+O(\frac{4}{2n^2})+\dots+-\frac{k-1}{n}+O(\frac{(k-1)^2}{2n^2})} = \frac{n^k}{k!}e^{\frac{k(k-1)}{2n}+O(\frac{k^3}{n^2})}$

Расмотрим сумму:

$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(k-1)^2}{n^2} \leqslant \frac{k(k-1)^2}{n^2}$ (все слагаемые заменили на последнее)

$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(k-1)^2}{n^2} \geqslant \frac{(\frac{k}{2})^2}{n^2}\frac{k}{2}$ (половину слагаемых заменили на $\frac{(\frac{k}{2})^2}{n^2}$)

Из доказанного следуют оба пункта

□

17 Граф, мультиграф, псевдограф. Изоморфизм графов, автоморфизм. Лемма о рукопожатиях. Орграф, связный, сильно связный орграф.

17.1 Граф, мультиграф, псевдограф.

V - непустое конечное множество (конечное)

$V^{(2)}$ - множество всех двухэлементных подмножеств множества V.

Графом называется пара множеств $(V, E) = G$, где $E \subseteq V^{(2)}$

Элементы V - вершины,
Элементы E - рёбра.
VG - множество вершин
EG - множество рёбер.
$|VG|$ - порядок графа.
$|G| = |VG| = n \Rightarrow G - n$-граф
$|G| = n, \quad |EG| = m \Rightarrow G -$ (n, m) - граф.

17.2 Изоморфизм графов, автоморфизм.

$G = (V, E), \quad G' = (V', E')$.
G и G' изоморфны ($G \cong G'$), если $\exists$ биекция $\varphi : V \to V' : \quad uv \in E \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E'$.
φ - изоморфизм графов G и G'. Если $G = G'$, то φ - автоморфизм графа (V и V' совпадают).

17.3 Лемма о рукопожатиях.

Пусть G - произвольный граф, тогда $\sum\limits_{v \in VG} \deg_G(v) = 2|EG|$.

Доказательство:
Возьмем пустой граф. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер.
□

17.4 Орграф, связный, сильно связный орграф.

Орграф - это пара $G = (V, D)$, где V - непустое множество, а $D \subseteq V \times V$. Элементы V - вершины, элементы D - дуги.
$(v, u) \in D$. vu - выходит из v и входит в u.

$x, y \in VG$ — связные в G, если в G $\exists$ простая (x, y) - цепь.
Граф G — связный, если $\forall$ 2 вершины связные.

Вершина v достижима из u, если $\exists$ ориентированная (u, v)-цепь.
Орграф G — сильносвязанный, если любая вершинка достижима из любой другой.

18 Подграф, порожденный подграф, остовный подграф. Объединение, соединение, умножение графов. Связный граф, компонента связности.

18.1 Подграф, порожденный подграф, остовный подграф.

Граф H называется подграфом графа G, если $VH \subseteq VG$, $EG \subseteq EG$.
Если $VH = VG$, то H - остовный подграф.

18.1.1 Порожденные подграфы

Пусть $U \subseteq VG \quad D = \{uv \mid u, v \in U, \quad uv \in EG\ \}$.
Тогда $G(U) = (U, D)$ - подграф, порождённый мно-вом вершин U.

Пусть $D \subseteq EG, \quad U$ - множество концов рёбер из D.
Тогда $G[D] = (U, D)$ - подргаф, порождённый мно-вом рёбер D.

18.2 Объединение, соединение, умножение графов.

18.2.1 Объединение графов

Граф H называется объединением графов G и F, если $VH = VG \cup VF$, $EH = EG \cup EF$, будем обозначать $H = G \cup F$.
Если $VG \cap VG \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad G \cup F$ - дизъюнктивное объедиение.

18.2.2 Соединение графов

Соединение графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ $(V_1 \cap V_2 = \varnothing)$ — граф $G_1 + G_2$ — дизъюнктивное объединения G_1 и G_2 и добавление ребёр $v_1v_2 = v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.

18.2.3 Умножение графов.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.
Произведение $G = G_1 \times G_2$ называется $G = (V_1 \times V_2, E)$.
(v_1, v_2) смежные с $(u_1, u_2) \quad \Leftrightarrow \quad$ или $(v_1 = u_1, \quad v_2u_2 \in E_2)$ или $(v_2 = u_2, \quad v_1u_1 \in E_1)$.

18.3 Связный граф, компонента связности.

$x, y \in VG$ — связные в G, если в G $\exists$ простая (x, y) - цепь.
Граф G — связный, если $\forall$ 2 вершины связные.
Максимальный по включению вершин и рёбер связный подграф графа G назывется компонентной связности графа G.

19 Дополнение к графу, реберный граф. Двудольность, критерий двудольности.

19.1 Дополнение к графу, реберный граф.

Дополнение к графу $G = (V, E)$ есть $\overline{Q} = (V, \overline{E})$, где $\overline{E} = \{uv \mid uv \notin E, \quad u, v \in V\}$.
Для графа $G = (V, E)$ рёберным графом называется $L(G), \quad VL(G) = EG$, $e_1e_2 \in EL(G) \Leftrightarrow e_1$ и e_2 смежные в G.

19.2 Двудольность, критерий двудольности.

19.3 Двудольность

Граф $G = (V, E)$ - двудольный, если $\exists$ разбиение $V = A \sqcup B : G[A]$ и $G[B]$ — пустые

19.4 Критерий двудольности Кенига

G - двудольный $\Leftrightarrow$ в G нет циклов нечётной длины.
Доказательство:

$\Rightarrow$) C - цикл в G. $C = v_1v_2v_3v_4...v_e, v_{e+1} = v_1$. $V = A \cup B$, $v_1, v_3, v_5... \in A$, $v_2, v_4, v_6 \in B$, т.е. все нечётные в A, все чётные B.

$\Leftarrow$) Пусть G — связный
$v \in VG$
Разбиваем множество $VG = A \sqcup B$
$A = \{u \in VG | d(v, u)$—чётно$\}$
$B = \{u \in VG | d(v, u)$—нечётно$\}$
Надо показать что в A и B нет рёбер.
От противного. $e = uw \in EG$, $u, w \in$ одному мно-ву (A или B). По построение $u, w \neq v$. Рассмотрим кратчаяшие цепи: U - кратчайшая (u, v)-цепь, W - кратчайшая (w, v)-цепь. Длины этих цепей имеют одинаковую чётность. Пусть v_1 - последняя, начиная с v, общая вершина цепей U, W. (v, v_1) - подцепи цепей U и W имеют одинаковую длину $\Rightarrow$ (v_1, u)-подцепь цепи U и (v_1, w)-подцепь цепи W имеют одинаковую чётность длины. Их объединение с ребром uw даёт цикл нечётной длины. Противоречие. Следовательно, граф является двудольным.

□

20 Оценки числа ребер графа. Эксцентриситет, радиус, диаметр, центр графа.

20.1 Оценки числа ребер графа.

$\forall (n, m)$-графа с k компонентами связности верны два неравенства: $n - k \leq m \leq \binom{n-k+1}{2}$, причём обе оценки достижимы.

Доказательство.

верхняя) Пусть G - n-граф с k компонентами связности с максимальным число рёбер. Очевидно, что G - дизъюнктное объединение полных графов ($G = K_{n_1} \cup ... \cup K_{n_k}$). Пусть $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_k$. Покажем, что $n_2 = n_3 = ... = n_k = 1$.
Пусть не так ($n_2 > 1$). Рассмотрим $v \in K_{n_2}$. Рассмотрим граф $G' = (K_{n_1} + v) \cup (K_{n_2} - v) \cup K_{n_3} \cup ... \cup K_{n_k}$ - удалили $n_2 - 1$ рёбёр. Добавили n_1 ребёр. Получили, что в G' добавили больше, чем удалили. Противоречие к предположению в самом начале.
В G у нас $\binom{n-k+1}{2}$ рёбер.

нижняя) Индукция по числу рёбер:
$m = 0$ - всё очевидно, равенство есть.
Пусть $m > 0$ и для всех графов с меньшим число рёбер наше неравенство верно.
Рассмотрим (n, m)-граф G с k комп. связности. Возьмём некоторое $e \in EG$ и безжалостно удалим его: $G_1 = G - e$. G_1 - $(n, m-1)$-граф с k_1 компонентами связности. По лемме 2.7 из лекций имеет, что $k_1 \leq k+1$. По индукционному предположению $n - k_1 \leq m - 1 \Rightarrow m \geq n - k_1 + 1 \geq n - k + 1 - 1 = n - k$.
Пример такого графа: $G = O_{k-1} \cup P_{n-k}$.

□

20.2 Эксцентриситет, радиус, диаметр, центр графа.

Эксцентриситет вершины v: $e(v) = \max\limits_{u \in VG} d(v, u)$.
Радиус графа G: $r(G) = \min\limits_{v \in VG} e(v)$.
Диаметр графа G: $d(G) = \max\limits_{v \in VG} e(v)$.
Вершина $v \in VG \mid e(v) = r(G)$ называется **центральной** вершиной.
Множество всех центральных вершин - **центр графа**.

21 Лес, дерево, характеризация деревьев.

21.1 Определения

Ациклический граф — **лес**
Ациклический связный граф — **дерево**.

21.2 Характеризация деревьев

(n, m)-граф G. Следующие условия эквивалентны:

1. G — дерево.
2. G — связный, $m = n - 1$
3. G — ациклический, $m = n - 1$
4. В графе G любые 2 вершины связаны единственной простой цепью.
5. G — ациклический и добавление одного нового ребра приводит к появлению ровно одного простого цикла.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2)$ Докажем, что в любом (n, m)-дереве $m = n - 1$. Индукцией по m:
$m = 0 \Rightarrow n = 1$.
Пусть G - произвольное (n, m)-дерево и для всех деревьев с меньшим числом рёбер наше равенство выполняется.
Возьмём некоторое ребро $e \in EG$. e не принадлежит никакому циклу, т.к. в нашем графе их нет $\overset{\text{лемма 2.7 из лекций}}{\Rightarrow}$ в $G - e$ ровно 2 компонентны связности G_1 и G_2 - деревья (n_1, m_1) и (n_2, m_2). По индукционному предположению $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$. Тогда для нашего графа имеем $m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$.

$2 \Rightarrow 3)$ Пусть в графе G есть цикл, рассмотрим некоторе ребро e из этого цикла $\overset{\text{лемма 2.7 из лекций}}{\Rightarrow}$ $G - e$ — связный и является $(n, n-2)$-графом, что противоречит оценке числа рёбер (пункт 20.1).

$3 \Rightarrow 4)$ Докажем, что G — связный
G — ациклический $\Rightarrow G$ — лес.
Пусть в G k компонент связности
Каждая компонента связности $G_1, ..., G_k$ — дерево
G_i — (n_i, m_i)-дерево
Т.к. доказано, что из $1 \Rightarrow 2$, то $m_i = n_i - 1$
$n - 1 = m = m_1 + \cdots + m_k = n_1 + ... + n_k - k = n - k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ граф связен
$\Rightarrow \forall u, v \quad \exists (u, v)$ — цепь.
Пусть $\exists u, v$ т.ч. в G есть две различные (u, v)-простые цепи L_1 и L_2

Пусть x — последняя вершина общего начала путей L_1 и L_2 начиная с u, y - следующая на цепи L_1 $\Rightarrow G - xy$ - остаётся связным $\overset{\text{лемма 2.7 из лекций}}{\Rightarrow}$ xy принадлежит некоторому циклу $\Rightarrow$ противоречие с ацикличностью.

$4 \Rightarrow 5$) В любом цикле 2 вершины соединены не менее 2 различными путями $\Rightarrow$ в G нет циклов.
Пусть $u, v \in VG$ и $uv \notin EG$, тогда единственная (u, v)-цепь в G вместе с ребром uv даёт единственный простой цикл

$5 \Rightarrow 1$) Докажем, что G связный.
От противного: пусть G не связен. Пусть u и v в разных компонентах связности $\Rightarrow G + uv$ не имеет циклов (по лемме 2.7 из лекций). Противоречие.

□

22 Центр дерева. Остовное дерево, остов.

22.1 Центр дерева.

Центр любого дерева состоит из одной или двух смежных вершин.

Доказательство.
$n = 1$ — очевидно.
$n = 2$ — аналогично.
Пусть T - дерево порядка $n \geq 2$. Рассмотрим дерево T', которое получается из T удалением всех висячих вершин.
$\forall v \in T' \quad \mathrm{e}_{T'}(v) = \mathrm{e}_T(v) - 1 \Rightarrow$ центры T и T' совпали.
Продолжаем, пока порядок дерева > 2. □

22.2 Остовное дерево, остов.

G — связный. Оставной подрграф графа G, явля-ся деревом, называется, как ни странно, оставным деревом графа G.
Оставной подграф графа G, являющийся дизъюнктным объединением оставным деревьев его компонент связности - **остов** графа G.

23 Код Прюфера помеченного дерева. Теорема Кэли.

23.1 Код Прюфера помеченного дерева.

Пусть T - помеченное дерево $VT = \{1, ..., n\}$. Сопоставим ему $a = (a_1, ..., a_{n-1})$:

1. Полагаем $T_0 = T$

2. $\forall i \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$ в T_{i-1} находим висячую вершину x_i с наименьшим номером. a_i — номер её соседа
$T_i = T_{i-1} - x_i$
$(a_1, \ldots, a_{n-1})$ — код Прюфера

23.2 Теорема Прюфера

Если $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \{1, 2, \dots, n\}^{n-1}$, $a_{n-1} = n$, то $\exists!$ помеченное дерево Т, для которого а — код Прюфера.
Доказательство:
Построим $b = (b_1, \dots, b_{n-1})$
$b_i = \min\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1}\}$
рассмотрим граф Т т.ч.
$VT = \{1, 2, \dots, n\}$,
$ET = \{(a_i, b_i) | 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$
Докажем, что:
1) Т — дерево
2) а — код Прюфера дерева Т

1) Рассмотрим последовательность $T_0 = T, T_1, \dots, T_{n-1}$
$T_i = T_{i-1} - b_i$; $1 \leqslant i \leqslant n-1$
$T_{n-1} = K_1$ — дерево
По построению $\{1, 2, \dots, n\} = \{b_1, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\}$
$\forall i \quad VT_{i-1} = \{b_i, b_{i+1}, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\}$
(*) $ET_{i-1} \subseteq \{a_i b_i, a_{i+1} b_{i+1}, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$
$b_i \neq b_j; \quad i \neq j$
$b_i \notin \{a_i, \dots, a_{n-1}\}$
b_i — висячая в T_{i-1}
$T_i = T_{i-1} - b_i$
Если T_i дерево, то T_{i-1} тоже дерево
T_n дерево $\Rightarrow T_0$ дерево $\Rightarrow T$ дерево
Т.к. T_{i-1} дерево, то из (*) следует, что
$ET_{i-1} = \{a_i b_i, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$
Получается $\forall x \in VT_{i-1} \quad deg_{T_{i-1}} x$ — количество появлений x в $b_i, \dots, b_{n-1}, a_i, \dots, a_{n-1}$
$deg_{T_{i-1}} x > 1 \Leftrightarrow x \in \{a_i, \dots, a_{n-1}\}$
$\Downarrow$
$\{b_i, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{a_i, \dots, a_{n-2}\}$ — множество висячих вершин в T_{i-1}
$a_i = \min\{1, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-2}\} = \min\{b_1, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-2}\} = \min\{b_i, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{a_i, \dots, a_{n-2}\}$
b_i — висячая вершина в T_{i-1} с наименьшим номером $\Rightarrow$ Декодирование даёт исходное дерево
$\square$

23.3 Теорема Кэли.

Число помеченных деревьев на n вершинах равно n^{n-2}
Доказательство: Следствие из теоремы Прюфера
$\square$

24 Числа вершинной и реберной связности, их связь. Точка сочленения, характеризация точек сочленения. Мост, характеризация мостов.

24.1 Числа вершинной и реберной связности, их связь.

Число вершинной связности $æ(G)$ — наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу, либо одновершинному.
Число рёберной связности $\lambda(G)$ графа G порядка $n > 1$ — минимальное количество рёбер, удаление которых делает граф несвязным.
$\delta(G) = \min\limits_{v \in VG}(deg(v)$.
$\forall G \quad æ(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)\$$
Доказательство:
оценка сверху: берём нашу вершинку с минимальной степенью и удаляем все смежные ей рёбра.
оценка снизу:
для несвязного графа $0 \leqslant 0$
для графа с мостом: $\lambda(G) = 1$. и хотя бы одна вершина соединённая с мостом является точкой сочленения (если e — мост в связном графе, то его концы — либо точки сочленения, либо висячая вершина)
Если $\lambda(G) > 1$:
$E_1 \subseteq EG, |E_1| = \lambda,\ G - E_1$ – не связен.
Пусть $e \in E_1,\ E_1' = E_1 - \{e\}$
Для каждого ребра из E_1' выберем один конец не инцедентный e и удалим его.
Получим множество $V_1 = \{h | h \in E_1 \setminus \{e\}$ и h не инц. e$\}$
$|V_1| \leqslant |E_1| - 1$
$G' = G - V_1$
1) $G' = G - V_1$ — не связный $\Rightarrow æ(G) \leqslant |V_1| \leqslant |E_1| - 1 = \lambda(G) - 1$
2) $G' = G - V_1$ — связный $\Rightarrow e$ — мост в $G' \Rightarrow æ(G') = \lambda(G') = 1 \Rightarrow \exists$ точка сочленения x в G'.
$V_1 \cup \{x\}$: $G - (V_1 \cup \{x\})$ — несвязный
$æ(G) \leqslant |V_1 \cup \{x\}| = |V_1| + 1 \leqslant |E_1| = \lambda(G)$
□

24.2 Точка сочленения, характеризация точек сочленения.

$x \in VG$ — точка сочленения, если в $G - x$ больше компонент связности чемв G
Характеризация точек сочленения. В связном графе следующие утверждения эквивалентны:

1. x — точка сочленения графа G
2. $\exists$ разбиение $VG \setminus \{x\} = U \sqcup W : \forall a \in U, \forall b \in W \forall$ простая (a, b)-цепь содержит x.
3. $\exists a, b \in VG \setminus \{x\}$: любая простая (a, b)-цепь содержит x.

Доказательство:
$1 \Rightarrow 2$) $G - v$ – не свзяный. A – одна компонента, B – остальные. значит, для любой пары вершин из эти множеств не существует простой цепи, следовательно в G любая цепь проходит через v
$2 \Rightarrow 3$) Очевидно
$3 \Rightarrow 1$) Если удалить x, то все простые цепи (a, b)-цепи исчезнут и a,b никак не будут связаны $\Rightarrow$ граф будет несвязным $\Rightarrow x$ — точка сочленения
□

24.3 Мост, характеризация мостов.

$e \in EG$ — мост, если $G - e$ имеет больше компонент связности чем G
Характеризация мостов. В связном графе следующие утверждения эквивалентны:

1. e — мост в G
2. $\exists$ разбиение $VG = U \sqcup W$: $\forall a \in U, \forall b \in W \forall$ простая (a, b)-цепь содержит e.
3. $\exists a, b \in VG \setminus \{x\}$: любая простая (a, b)-цепь содержит e.
4. ребро e не принадлежит простому циклу

Доказательство:
$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ — аналогично характеризации точек сочленения
$1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ — лемма 2.7 из лекций
$\square$

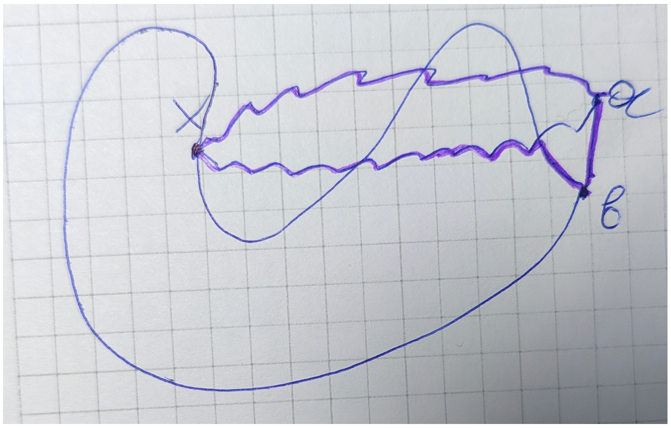
25 Характеризация двусвязных графов. Блок, bc-дерево графа.

25.1 Характеризация двусвязных графов.

Для связного графа порядка $n > 2$ эквивалентны:

1. G — двусвязный
2. $\forall$ 2 вершины принадлежат простому циклу
3. $\forall$ вершина и $\forall$ ребро принадлежат простому циклу
4. $\forall$ 2 ребра принадлежат простому циклу
5. $\forall$ двух вершин $x, y \in VG$, $\forall e \in EG$ существует простая (x, y)-цепь содержащая e
6. $\forall$ $x, y, z \in VG$ $\exists$ простая (x, y)-цепь содержащая z

Доказательство:
$1 \Rightarrow 2$)
Пусть $x, y \in VG$;
u — множество всех вершин графа G, принадлежащих хотя бы одному простому циклу проходящему через x
Если $y \in u \Rightarrow \square$
Если $y \notin u \Rightarrow u \subset VG \Rightarrow VG \setminus u \neq \emptyset$
Но т.к. G — связный $\Rightarrow \exists \quad a \in u$ и $b \in VG \setminus u$ т.ч. $ab \in EG$
По лемме 2.14 из лекций. $\exists$ простая (x, b)-цепь не содержащая a
По построению $\exists$ простой цикл C проходящий через x, a
Пусть z — 1-я, начиная от b общая вершина (b, x)-цепи из цикла C
Тогда (b, z) — подцепь, ребро (a, b) и часть цикла C между вершинами z и a, содержащая xm образуют простой цикл $\Rightarrow b \in u$. Противоречие. $\Rightarrow$ y обязан принадлежать u
$2 \Rightarrow 3$)
Есть вершина x и ребро ab
Если цикл содержащий a и x содержит и b, то доказано
Если цикл содержащий a и x не содержит b, то см. рисунок



Остальное в качестве упражнения.
□

26 Теорема Менгера

Минимальное число вершин, разделяющих две несмежные вершины u и v равно максимальному числу попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей.

Доказательство. (не вникал в доказательство, но идейно оно такое же как и на лекциях)
Наибольшее число попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей не больше минимального числа вершин, разделяющих u и v (поскольку можем удалить по вершине в каждой из этих (u, v)-цепей и разделить т.о. вершины u и v).
Докажем, что если наименьшее число вершин, разделяющих u и v в графе G равно k, то существует k попарно непересекающихся простых цепей.
При $k = 1$ — очевидно.
Пусть для некоторого $k > 1$ — неверно. Пусть t — наименьшее такое k. F — граф с наименьшим числом вершин, для которого не выполненено условие (которое после слова "доказать") для t.
Будем удалять из F рёбра до тех пор, пока не получим некоторый граф G такой, что $\forall e \in EG$ для разделения u и v в графе G надо t вершин, а в графе $G - e$ надо $t - 1$ вершину.
Т.о. имеется G и t такие, что теорема верна для

1. $\forall k < t$.
2. $\forall$ графа с числом вершин, меньшим, чем $|VG|$.
3. $\forall$ графа $G - e \, \forall e \in EG$.

(док-во ниже) □

26.1 Утверждение 1

В гарфе G нет вершин, которые одновременно смежны с u и v.

Доказательство. Пусть w смежно с u и v. Тогда в $G - w$ для разделения u и v достаточно $t - 1$ вершины по пункту 2 в $G - w$ существует $t - 1$ попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей. Добавляем цепь $u, w, v \Rightarrow t$ попарно непересекающихся простых (u, v) цепей в графе G. Противоречие с выбором графа G. □

26.2 Утверждение 2

Любое мно-во вершин W, разделяющих u и v, $|W| = t$ смежно либо с u, либо с v.

Доказательство. Цепь, соединяющую u с нек... □

Доказательство. (продолжение)
Рассмотрим некоторе $e = xy \in EG$. По условию 3 в $G - e$ существует $t-1$ вершина, разделяющая u и v.
В $(G - S_e)$ существует (u, v)-цепь и каждая точка цепи содержит ребро e.
$(**) \forall e = xy :\Rightarrow 1)\ x, y \notin S_e$
2) если $x \neq u, x \neq v$, то $S_e \cup \{x\}$ разделяет u и v в G.
Рассмотрим кратчайшую (u, v)-цепь в графе G. $P = u, x_1, x_2, x_3, ..., x_m, v$.
Рассмотрим $e = x_1 x_2$. Из утвержджения 1 $x_2 \neq v$.
$S_e = \{y_1, ..., y_{t-1}\}$
$W_1 = S_e \cup \{x_1\}$ по (**) разделяет u и v. По утверждению 1, $x_1, v \notin EG$. По утверждению 2, W_1 смежно с u. $\{y_1, ..., yt-1\}$ смежно с u и не смежно с v.
$W_2 = S_e \cup \{x_2\}$ по (**) разделяет u и v. По утверждению 2 x_2 смежно с u. Противорчеие с выбором кратчайшей цепи □

27 Независимое множество. Оценки числа независимости. Вершинное покрытие. Связь чисел покрытия и независимости.

27.1 Независимое множество.

Мно-во вершин $W \subseteq VG$ называется **независимым**, если $\forall w, u \in W \quad uw \notin EG$.
Независимое мно-во **тупиковое (максимальное)**, если оно не является собственным подмножеством другого независимого мно-ва.
Независимое мно-во наибольшей мощности - **наибольшее** назависимое мно-во. Мощность такого мно-ва называется **числом независимости** $\alpha_0(G)$

27.2 Оценки числа независимости.

$\forall G \quad \alpha_0(G) \geq \sum\limits_{v \in VG} (1 + \deg(v))^{-1}$

Доказательство. Пусть $G = K_n$. Тогда $\alpha_0(K_n) = 1$.
$\sum\limits_{v \in VG} n^{-1} = \dfrac{n}{n} = 1.$
Индукция по числу вершин для $G \neq K_n$:
$|VG| \leq 2$ - всё очевидно.
Пусть $|VG| = n \geq 3$, для любого графа с меньшим число вершин теорема верна, $G \neq K_n$.
Выбираем x - вершинка G наименьшей степени. Т.к. $G \neq K_n$, то $x \cup N(x) \neq VG$.
$G' = G - x - N(x)$. По индукционному предположению в $G' :\ \alpha_0(G') \geq \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg(v))^{-1}$.
Пусть $M' \subseteq VG'$, M' - независимо в G', $|M'| = \alpha_0(G')$.
$v \cup M'$ - независимо в $G \quad \Rightarrow \quad \alpha_0(G) \geq |x \cup M'| = \alpha_0(G') + 1$.
$\forall v \in VG' \quad \deg_G(v) \geq \deg_{G'}(v)$
$\sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_{G'} v)^{-1} \geq \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_G v)^{-1}$
$\forall v \in N(x) \quad \deg_G(v) \geq \deg_G(x)$ (т.к. x — вершина с наименьшей степенью в G)

$$\sum_{v\in N(x)}(1+\deg_G(v))^{-1}\leq\sum_{v\in N(x)}(\deg_G(x)+1)^{-1}=\frac{\deg_G(x)}{\deg_G(x)+1}$$

Берём неравенства 1 и 3 строчками выше и подставляем их куда-то в начало:

$$\alpha_0(G)\geq 1+\sum_{v\in VG'}(1+\deg_G(v))^{-1}\geq\frac{\deg_G(x)+1}{\deg_G(x)+1}+\sum_{v\in VG'}(1+\deg_G(v))^{-1}=\frac{\deg_G(x)}{1+\deg_G(x)}+(1+\deg_G(x))^{-1}+$$
$$\sum_{v\in VG'}(1+\deg_G(v))^{-1}\geq\sum_{v\in N(x)}(\deg_G(v)+1)^{-1}+(1+\deg_G(x))^{-1}+\sum_{v\in VG'}(1+\deg_G(v))^{-1}=\sum_{v\in VG}(1+\deg_G(v))^{-1}\quad\square$$

27.3 Вершинное покрытие.

Вершина покрывет рёбра, инциндентные ей. Мно-во вершин, покрывающих все рёбра - **покрытие** (вершинное покрытие).
Покрытие W - тупиковое (минимальное), если $\forall V\subset W$, V - не покрытие. Покрытие наименьшей мощности - наименьшее покрытие и его мощность Обозначается $\beta_0(G)$ - число покрытия графа G.

27.4 Связь чисел покрытия и независимости.

Для $\forall$ G: $\alpha_0(G)+\beta_0(G)=|VG|$
Доказательство:
Берём S — независимое: $|S|=\alpha_0(G)$
По лемме 2.19 из лекций ($S\subseteq VG$ — независимое $\Leftrightarrow VG\setminus S$ — вершинное покрытие)
$VG\setminus S$ — вершинное покрытие
$\beta_0(G)\leqslant|VG\setminus S|=|VG|-\alpha_0(G)\Rightarrow\alpha_0(G)+\beta_0(G)\leqslant|VG|$

Теперь, пусть P — вершинное покрытие: $|P|=\beta_0(G)$
По лемме 2.19 $VG\setminus P$ — независимое множество
$\alpha_0(G)\geqslant|VG\setminus P|=|VG|-\beta_0(G)\Rightarrow\alpha_0(G)+\beta_0(G)\geqslant|VG|$
$\Downarrow$
$\alpha_0(G)+\beta_0(G)=|VG|$
$\square$

28 Паросочетание, реберное покрытие. Теорема о связи чисел паросочетания и реберного покрытия. Совершенное паросочетание.

28.1 Паросочетание, реберное покрытие.

$M\subseteq EG$ — паросочетание, если $\forall e,h\in M\ e,h$ — не смежны.
Наибольшее по мощности паросочетание — наибольшее паросочетание. Его мощность — число паросочетания $\alpha_1(G)$
$Q\subseteq EG$ — рёберное покрытие, если оно покрывает все вершины
Наименьшее по мощности рёберное покрытие — мин. рёберное покрытие. Его мощность — число рёберного покрытия $\beta_1(G)$

28.2 Теорема о связи чисел паросочетания и реберного покрытия.

$\forall$ G без изолированных вершин
$\alpha_1(G)+\beta_1(G)=|VG|$
Доказательство:

Пусть $\alpha_1 = \alpha_1(G)$, $\beta_1 = \beta_1(G)$, $|VG| = n$
Докажем: $\alpha_1 + \beta_1 \le n \quad \alpha_1 + \beta_1 \ge n$

1. Пусть M - наибольшее паросочетание в G. Пусть V' - мно-во вершин, не покрытых M.
   Либо V' - пусто, либо V' - независимое мно-во вершин (т.к. иначе М — не наибольшее паросочетание). Для каждой вершины из V' выберем ребро, инциндентне ей. получаем E'. (если $V' = \varnothing \Rightarrow E' = \varnothing$).
   Поскольку V' - независимо, то $|E'| = |V'|$.
   По построению V': $|V'| = n - 2 \cdot \alpha_1$
   $E' \cup M$ - рёберное покрытие $\beta_1 \le |E' \cup M| = |E'| + |M| = n - 2\alpha_1 + \alpha_1 = n - \alpha_1$.

2. Пусть P - наименьшее рёберное покрыти графа G. $G' = G[P]$. В G' нет циклов (были бы, могли бы убрать одно ребро)
   Получаем, что G' — ациклический граф, т.е. G' — лес
   Каждая компонента связности графа G' - дерево. Пусть t компонент связности и число рёбер $k_1, k_2, ..., k_t$.
   В каждой компоненте выберем по одному ребру $\Rightarrow$ получим паросочетания M. $|M| = t$.
   Имеем, $t \le \alpha_1$. Получаем, что $n = \sum_{i=1}^{t}(k_i + 1) = t + \sum_{i=1}^{t} k_i = t + \beta_1 \le \alpha_1 + \beta_1$.

□

28.3 Совершенное паросочетание.

Совершенное паросочитание — паросочитание, являющееся рёберным покрытием.

29 Терема Кенига о числе паросочетания для двудольных графов. Теорема Кенига о (0,1)-матрицах.

29.1 Терема Кенига о числе паросочетания для двудольных графов.

Для любого двудольного графа G: $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$.

Доказательство. Пусть G — граф. Докажем, что $\alpha_1(G) \ge \beta_0(G)$.
Обозначин $\beta_0 = \beta_0(G)$
Удаляем рёбра из G пока не получим некоторый граф G': $\beta_0(G') = \beta_0$ и $\forall e \in EG' \quad \beta_0(G' - e) = \beta_0 - 1$.

Докажем утверждение, что в G' нет смежных рёбер.
Пусть это гон и в $\exists e, g \in EG'$: e и g смежны в G', общая вершина v. В графе $G' - e$ существуют вершин. покрытие $S_e \quad |S_e| = \beta_0 - 1$ и концы ребра e не лежат в S_e.
В графе $G' - g$ существует вершинное покрытие S_g и концы ребра g не принадлежат S_g.
Рассмотрим порождённый подграф графа G': $G'' = G'[\{v\} \cup (S_e \setminus S_g) \cup (S_g \setminus S_e)]$
$|S_e \cap S_g| = t \quad |VG''| = 1 + \beta_0 - 1 - t + \beta_0 - 1 - t = 1 + 2(\beta_0 - 1) - 2t$
G'' подграф графа $G \quad \Rightarrow \quad G''$ - двудольный.
Пусть A - меньшая доля графа G.
$|A| \le \frac{1}{2}|VG''| = \beta_0 - 1 - t$. A - вершинное покрытие G''.
Покажем, что $A' = A \cup (S_e \cup S_g)$ - вершинное покрытие G'.
Возьмём произвольное ребро. Пусть $h \in EG'$.

1. $h \in \{e, g\}$
   $e, g \in EG'' \Rightarrow e, g$ покрыты мно-ом A, а значит и A'.

2. $h \notin \{e, g\}$
   Тогда h покрывается как S_e, так и S_g.

   (a) $x \in S_g \quad x \in S_e \Rightarrow x \in S_g \cap S_e \Rightarrow$ покр. A'.

   (b) один конец принадлежит $S_e \setminus S_g$, а другой: $S_g \setminus S_e \Rightarrow h \in EG'' \Rightarrow h$ покрывается A.

Следовательно $\beta_0(G') \leq |A'| \leq |A| + |S_e \cap S_g| \leq \beta_0 - 1 - t + t = \beta_0 - 1$ - противоречие с выбором графа G' (противоречие с тем, что существуют 2 смежных ребра).

Граф G' состоит из независимых рёбер. $\beta_0(G') = \alpha_1(G') \quad \beta_0(G) = \beta_0(G') = \alpha_1(G') \leq \alpha_1(G)$.
Из леммы 2.23($\forall G \quad \alpha_1(G) \leqslant \beta_0(G)$, это верно т.к. чтобы покрыть все рёбра, надо покрыть и все рёбра паросочетания) следует, что $\beta_0(G) = \alpha_1(G)$. □

29.2 Теорема Кенига о (0,1)-матрицах.

Для любой (0, 1)-матриц максимальное число единиц, никакие 2 из которых не стоят в одном столбце и в одной строке, равно минимальному числу строк и столбцов, содержащих все единицы.

Доказательство. Пусть G - двудольный граф, с долями $\{v_1, v_2 ... v_n\}$, $\{u_1 ... u_n\}$. Матрица смежности двудольного графа G:

$A(G) = (a_{ij}) \mid a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i u_j \in EG \\ 0, & else \end{cases}$. $\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & A \\ \hline A^T & 0 \\ \hline \end{array}$

Биекция между двудольным графом с долями мощности n и m и множеством (0,1)-матриц размера $n \times m$.
Максимальное число единиц, никакие две из которых не стоят в одной строке или столбце равно $\alpha_1(G)$ для соотв. графа G.
Минимальное число строк и столбцов, содержащих единицы равно $\beta_0(G)$ для соотв. графа G. □

30 Терема Холла о паросочетаниях.

Пусть $G = (A, B, E)$ - двудольный граф.
В G существует паросочетание, покр. $A \quad \Leftrightarrow \quad \forall X \subseteq A \quad |N(X)| \geq |X|$

Доказательство.

$\Rightarrow$) Если существет $X \subseteq A: \quad |N(X)| < |X|$, тогда паросоч., покр. X не существует: не хватит рёбер. А значит нет паросч., покрывающего A.

$\Leftarrow$) Док-во индукцией по числу вершин в доле A:
Если $|A| = 1$ - очевидно верно
Пусть $|A| \geq 2$. Рассмотрим 2 случая:

1. $\forall X \subset A \quad |X| < |N(X)|$
   Выберем ребро $uv \in E \quad v \in A, u \in B$.
   Рассмотрим новый граф $G' = G - v - u$. Обозначим $A' = A \setminus \{v\}$.
   Пусть $X \subseteq A'$. $|X| < |N_G(X)|$, $|N_{G'}(X)| \geq |N_G(X)| - 1$ (-1 на случай, если y входит в $N(X)$)
   $|X| < |N_{G'}(X)| + 1 \Rightarrow |X| \leq |N_{G'}(X)|$.
   По индукционному предположению в графу G' существуют паросчитания, покрывающие $A' \quad \Rightarrow \quad$ объединим его с ребром $vu \quad \Rightarrow \quad$ получаем паросчитание в G покр. A.

2. $\exists A' \subset A \quad |A'| = |N(A')|$
   Рассмотрим 2 порождённых подграфа:
   $G_1 = G[A' \cup N(A')]$
   $G_2 = G - A' - N_G(A')$
   Покажем, что G_1 и G_2 удовлетворяют условиям теоремы.
   В G_1: $\forall X \subseteq A' \quad N_G(X) = N_{G'}(X)$
   $|X| \leq |N_G(X)| = |N_{G'}(X)| \quad \Rightarrow \quad G_1$ удовлетворяет условию теоремы.

   Пусть $X \subseteq A \setminus A'$. Рассмотрим $X \cup A'$ в G.
   $|X \cup A'| \leq |N_G(X \cup A')| \leq |N_{G_2}(X)| + |N_G(A')|$
   Вспоминаем, что $|A' \cup X| = |X| + |A'|$
   $|A'| = |N_G(A')| \quad \Rightarrow \quad |X| \leq |N_{G_2}(X)|$
   По индукционному предположению в G_1 существует паросоч., покрывающ. A', в G_2 существует паросоч., покрывающ. $A \setminus A'$. Следовательно, их объединение - искомое паросоч., покр. A.

□

31 Теорема Фробениуса о свадьбах. Системы различных представителей, теорема Холла о СРП.

31.1 Теорема Фробениуса о свадьбах.

Двудольный граф $G = (A, B, E)$ имеет совершенное паросочетание $\Leftrightarrow$ $|A| = |B|$ и для любого $X \subseteq A \quad |N_G(X)| \geq |X|$.

Доказательство:

В G $\exists$ совершенное паросочетание $\Leftrightarrow |A| = |B|$ и $\exists$ паросочетание покр. $A \underset{\text{по т. Холла}}{\Leftrightarrow}$
$|A| = |B|$ и $\forall X \subseteq A \quad |N(X)| \leqslant |X|$
□

31.2 Системы различных представителей

$A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — некоторое множество
$S = \{S_1, \ldots, S_n\}$; $S_i \subseteq A \quad \forall i$; — семейство подмножеств множества A
$x = (x_1, \ldots, x_n)$ — система различных представителей для S если:
1) $x_i \in S_i \quad \forall i$;
2) $x_i \neq x_j; \quad i \neq j$

31.3 теорема Холла о СРП.

$S = (S_1, \ldots, S_n)$ имеет СРП $\Leftrightarrow \forall k; \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad \forall \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\} \quad |S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}| \leqslant k$

Доказательство:

$\Rightarrow$) Если посмотреть на определение, станет очевидно.
$\Leftarrow$) Рассмотрим граф $G = (A, B, E)$
$A = \{S_1, \ldots, S_n\}$
$B = \{a_1, \ldots, a_m\}$
$E = \{a_i S_j | a_i \in S_j\}$
Когда $\exists$ паросочетание покрывающее A?
(по т. Холлла) когда $\forall X \subseteq A \quad |N_G(X)| \leqslant |X| = k$
$|N_G(X)| = |S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}|$

Это условие выполняется $\Rightarrow \exists$ паросочетание покр. $A \Rightarrow$ существующее паросочетание определяет СРП
$\square$

32 Теорема об увеличивающей цепи. Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

32.1 Определения

G — граф; M — паросочетание
цепь $x_1, \dots, x_t$ — M-чередующаяся $\Leftrightarrow x_i x_{i+1} \in M \Leftrightarrow x_{i+1} x_{i+2} \notin M \quad \forall i$

M-чередующаяся цепь $x_0, \dots, x_t$ — M-увеличивающаяся, если x_0 и x_t не покрыты рёбрами из M

32.2 Теорема об увеличивающей цепи.

M — паросочетание в G
M — наибольшее $\Leftrightarrow$ в G нет M-увеличивающей цепи
Доказательство:
$\Rightarrow$) Пусть в G существует M-увелич. цепь P. Тогда рассмотрим $M' = (M \setminus EP) \cup (EP \setminus M)$ – паросочетание (очевидно)
$|M'| = |M| + 1$ – противоречие с тем, что M наибольшее.
$\Leftarrow$) Рассмотрим M' – пусть это наибольшее паросочетание в G.
$G' = G[(M \setminus M') \cup (M' \setminus M)]$
$\forall v \in G' \quad deg_{G'}(v) \leqslant 2 \Rightarrow$ каждая компонента связности графа G' – цикл или цепь.
Если в какой-то компоненте связности $\exists$ цепь, в которой рёбер 1-го паросочетания больше рёбер другого $\Rightarrow \exists$ либо M-увеличивающая цепь (противореч. с нач. усл.), либо $\exists$ M'-увеличивающая цепь (противореч. с M'—наиб.)
$\Rightarrow |M| = |M'| \Rightarrow M$ — наибольшее паросочетание
$\square$

32.3 Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

$G = (A, B, E)$

1. M — паросочетание
2. $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ — множества непокрытых M вершин; Организуем максимальный лес F в G:
   (a) $\forall b \in (VF \cap B) \quad deg_F(b) = 2$ и одно из этих 2-х рёбер из M
   (b) $\forall$ компонента связности леса F содержит ровно 1-ну вершину из A_1. Добавим все оставшиеся вершины из A_1 в качестве одновершинных компонент связности графа F
3. Если $\exists$ ребро между вершинами из B_1 и VF, то есть M—увеличивающая цепь начинающаяся с этого ребра. по пункту 32.2 строим новое паросочетание большей мощности и переходим на шаг 2)
4. Если нет ребра, то M — наибольшее паросочетание

33 Эйлеров цикл, эйлеров граф. Теорема Эйлера. Алгоритм Флёри.

33.1 Эйлеров цикл, эйлеров граф.

Цикл, содержащий все рёбра графа — эйлеров.
Граф, в котором есть эйлеров цикл — эйлеров

33.2 Теорема Эйлера.

Для связного графа порядка $n \leqslant 2$ следующие условия эквивалентны:

1. G — эйлеров
2. $\forall v \in VG \quad deg\ v$ — чётна
3. Множество рёбер можно разбить на циклы.

Доказательство:
1 $\Rightarrow$ 2) Эйлеров цикл проходит через $\forall$ вершину v k раз и содержит все рёбра $\Rightarrow deg_G(v) = 2k$
2 $\Rightarrow$ 3) все вершины чётные $\Rightarrow$ нет висячих вершин $\Rightarrow$ G – не дерево $\Rightarrow$ в нём есть циклы
Пусть G_1 – максимальный подграф графа G, удовлетворяющий условию 3. Очевидно, что все вершины в нём имеют чётную степень.
$G_2 = G - EG_1$
в G_2 все вершины имеют чётную степень (т.к. чёт−чёт=чёт).
Если G_2 пуст, то всё доказали, иначе в нём есть рёбра.
Очевидно, что он не дерево, а значит в нём есть цикл. Противоречие с максимальностью G_1.
3 $\Rightarrow$ 1) Рассмотрим разбиение рёбер графа G на наименьшее число циклов: $c_1, \ldots, c_s$.
Покажем, что s = 1:
Пусть не так ($s > 1$). $\Rightarrow \exists i \neq j \mid c_i$ и c_j имеют общую вершину, но не имеют общих рёбер. Склеим их в один цикл. Противоречие с выбором наименьшего числа циклов $\Rightarrow s = 1$. Это и есть Эйлеров цикл.
$\square$

33.3 Алгоритм Флёри.

Нахождение эйлерова цикла
0. выбираем произвольную вершину δ в графе G; $G' = G$
1. Выбираем ребро e в графе G' инцидентное δ и не мост (если это возможно).
$G' = G' - e$ и переходим во второй конец e

34 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф. Теорема Оре. Теорема Дирака.

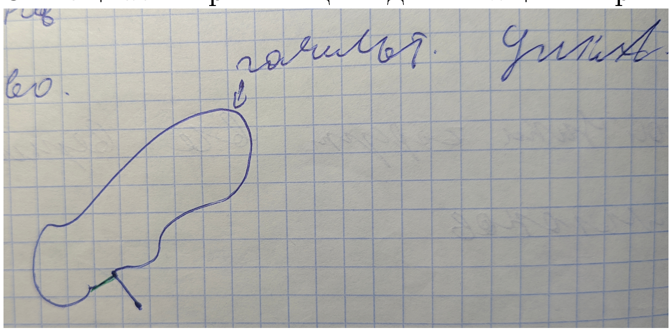
34.1 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф.

Простой цикл, содержащий все врешины графа, называется **Гамильтоновым циклом**.
Граф, содержащий Гамильтонов цикл, называется **Гамильтоновым**.

34.2 Теорема Оре.

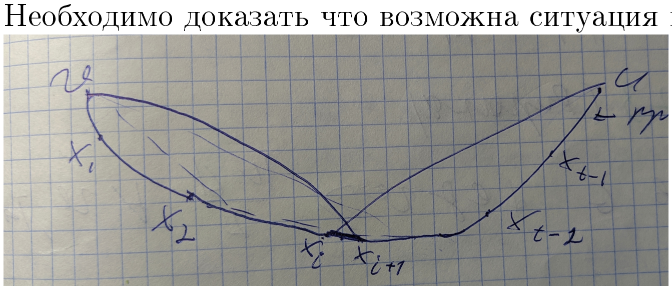
Если для любых двух несмежных вершин v, u верно $deg(v) + deg(u) \geqslant |VG|$, то G – гамильтонов.
Доказательство теоремы:

Утверждение:
Если в связном графе длина максимальной простой цепи равна k и в нём существует простой цикл длины $k+1$, то этот простой цикл является гамильтоновым.
Доказательство утверждения:
Рассмотрим наш цикл C_{k+1}. Если C – не гамильтонов, G – связный $\Rightarrow \exists\ u,\ v$: $u \in C, v \notin C, uv \in EG$.
Пусть $e \in C$, e инцидентноно u.
$C - e + uv$ – простая цепь длины $k+1$ – противоречие с максимальной длиной цепи.



□

Вернёмся к доказательству теоремы
Рассмотрим самую длинну просутю цепь в графе G
$v = x_0, \ldots, x_t = u$
Если $ub \in EG$, то получим цикл длины $t+1$ и он гамильтонов по утверждению
Если $ub \notin EG$
Знаем что $deg(u) + deg(v) \geqslant |VG|$
Необходимо доказать что возможна ситуация как на изображениии:



А именно: $\exists x_i, x_{i+1}$ т.ч. x_i — смежна с u и x_{i+1} смежна с v
Поскольку наша цепь длиннейшая, то все вершины, смежные с v и смежные с u лежат на этой цепи
$I = \{i | x_i v \in EG, \quad 2 \leqslant i \leqslant t-1\}$
$|I| = deg(v) - 1$
$Y = \{j | x_{j-1} u \in EG, \quad 2 \leqslant j \leqslant t-1\}$
$|Y| = deg(u) - 1$
$|Y \cup I| \leqslant t - 2$
$|Y| + |I| = deg(v) + deg(u) - 2 \geqslant |VG| - 2 \geqslant t + 1 - 2 = t - 1$
т.е. $|Y \cup I| < |I| + |Y| \Rightarrow Y \cap I \neq \emptyset \Rightarrow$
$\exists i$: $vx_i, ux_{i-1} \in EG$
Удаляем из цепи ребро между x_{i-1} и x_i, добавляем рёбра vx_i, ux_{i-1} и получаем цикл длины $t+1$
Согласно утверждению, этот цикл являетя гамильтоновым.
□

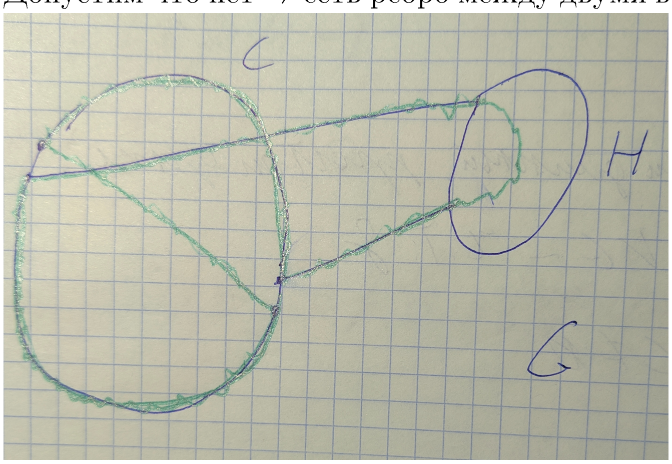
35 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф. Теорема Хватала-Эрдеша

35.1 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф.

Простой цикл, содержащий все вершины графа — гамильтонов
Граф, содержащий гамильтонов цикл — гамильтонов

35.2 Теорема Хватала-Эрдеша

Пусть G — связный граф порядка $n \geqslant 3$. Если $æ(G) \geqslant \alpha_0(G)$, то G — гамильтонов
Доказательство:
Если G нет циклов, то G — дерево $\overset{n \geqslant 3}{\Rightarrow}$ $æ(G) = 1$; $\alpha_0(G) \geqslant 2$. Противоречие. $\Rightarrow$ в G есть циклы
Пусть C — самый длинный простой цикл
Если $VC = VG$ — $\square$
Если $VG \setminus VC \neq \emptyset$
Рассмотрим $G' = G - VC$
Пусть H — компонента связности G'
$N_G(H) = \{x \in VG \setminus VH | \exists y \in H : xy \in EG\}$
$N_G(H) \subseteq C$
(*) Все вершины из $N_G(H)$ — попарно несмежные по циклу (иначе, есть простой цикл большей длины)
$G - N_G(H)$ — несвязный граф (поскольку есть компонента H и остальное)
$\Downarrow$
$æ(G) \leqslant |N_H(H)|$
S — множество правых соседей по циклу C вершин из $N_G(H)$
$|S| = |N_G(H)|$
Покажем что S — независимое множество в G
Допустим что нет $\Rightarrow$ есть ребро между двумя вершинами из S $\Rightarrow$ есть более длинный цикл (см. рисунок)



(*) $\Rightarrow S \cap N_G(H) = \emptyset$ (иначе бы какая-то вершина из $N_G(H)$ являлась бы соседом др. вершине из $N_G(H)$ по циклу) $\Rightarrow S \cup \{x\}$ — независимое множество $\Rightarrow \alpha_0(G) \geqslant |S \cup \{x\}| = |N_G(H)| + 1 \geqslant æ(G) + 1$
Противоречие с условием теоремы
$\square$

36 Укладка графа в пространство. Планарный граф, плоский граф, укладка на сфере.

36.1 Укладка графа в пространство.

Граф G укладывается в про-во α, если он изоморфен некоторому графу, вершинами которого являются точки этого пространства, а рёбра — кривые без самопересечений, соединяющие соответствующие вершины, при чём выполнены след. усл.:

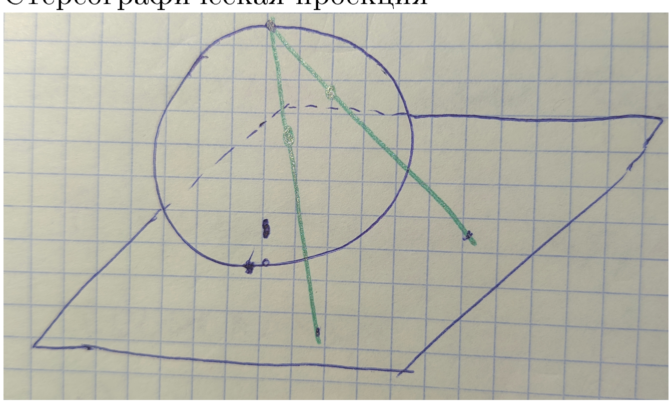
1. кривая-ребро не содержит др. вршин графа кроме своих концов.

2. 2 кривые-ребра пересекаются только в вершине инцидентной обоим рёбрам

36.2 Планарный граф, плоский граф, укладка на сфере.

Граф укладывающийся на плоскость — планарный
Укладка планарного графа на плоскость — плоский граф

Граф укладывается на плоскость $\Leftrightarrow$ он планарный
Доказательство:
Стереографическая проекция



□

37 Формула Эйлера. Непланарность K_5 и $K_{3,3}$. Критерии планарности.

37.1 Формула Эйлера.

G — связный плоский граф (n, m)-граф с f гранями, тогда $n - m + f = 2$
Доказательство:
Рассмотрим остовное дерево T для G
В T n вершин, $n - 1$ ребро, 1 грань
$n - (n - 1) + 1 = 2$
т.е. ф-ла верна
Добавление ребра грань на 2 грани
$+1$ к грани и граням $\Rightarrow$ ф-лы остаётся верной
т.о. мы можем приёти к графу G и сохранить ф-лу
□

37.2 Непланарность K_5 и $K_{3,3}$.

K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.
Доказательство:
1) Непланарность K_5
Для $\forall$ связного планарного (n, m)-графа имеет место неравенство:
$m \leqslant 3n - 6$
Для K_5 $m = 10, n = 5$
$10 \leqslant 3 * 5 - 6$ неверно
2) Непланарность $K_{3,3}$
Для $K_{3,3}$ $n = 6; m = 9$
Для связного планарного **двудольного** графа имеет место неравенство:
$m \leqslant 2n - 4$
$9 \leqslant 2 * 6 - 4$ неверно
□

37.3 Критерии планарности.

37.3.1 Критерий планарности Понтрягина-Куратовского

Граф планарен $\Leftrightarrow$ в нём нет подграфа гомеоморфного к K_5 или $K_{3,3}$
Доказательство:
$\Rightarrow$) G — планарен $\Rightarrow$ $\forall$ его подграф планарен $\forall$ гомеоморфные графы для $\forall$ подграфа планарны $\Rightarrow$ K_5 и $K_{3,3}$ не могут быть гомеоморфны подграфу
$\Leftarrow$) б/д
□

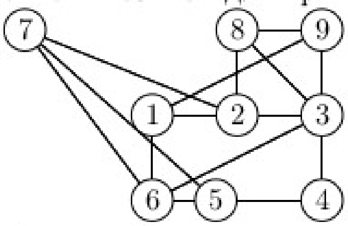
37.3.2 Критерий планарности Вагнера

Граф планарен $\Leftrightarrow$ в нём нет подграфа стягиваемого к K_5 или $K_{3,3}$
Доказательство:
Аналогично критерию Понтрягина-Куратовского
□

38 Алгоритм укладки графа на плоскость.

3.1.4 Алгоритм укладки графа на плоскость

На каждом шаге укладка цепи и образование новой грани. Работает только для двусвязных графов, без вариантов. Возьмём для примера граф:



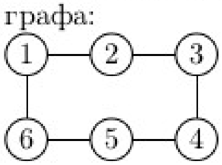
Сегмент S относительно графа $\tilde{G}$ – подграф графа G одного из видов:

1. ребро $e = uv \in EG: \quad e \notin \tilde{G}, \quad u, v \in V\tilde{G}$
2. каждая компонента связности графа $G - \tilde{G}$, дополненная всеми рёбрами, связывающими $\tilde{G}$ с этой компонентой.

Если G – планарен, следовательно каждый сегмент планарен.
Вершины сегмента S относительно $\tilde{G}$, принадлежащие $\tilde{G}$ – **контактные** вершины.
G – двусвязный, следовательно каждый сегмент имеет не менее двух контактных вершин.
У $\tilde{G}$ есть грани. Допустимой гранью для сегмента S относительно $\tilde{G}$ называется грань $\varGamma$ графа $\tilde{G}$, содержащая все контактные вершины графа S. Мно-во всех допустимых граней для S: $\varGamma(S)$.
Простую цепь сегмента S, соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин называют **α-цепь**.

3.1.5 Собственно, сам алгоритм

шаг 0. В G выбираем простой цикл C и укладываем на плоскость $\tilde{G} = C$. Напр., для приведённого выше графа:



шаг 1. Берём все грани и сегменты относительно $\tilde{G}$. Если мно-во сегментов пусто, переходим к 7.

шаг 2. Для каждого сегмента S определим $\varGamma(S)$:

3 Если $\exists S: \quad \varGamma(S) = \varnothing \Rightarrow G$ – не планарный. Идём к шагу 4.

4 Если $\exists S: \quad |\varGamma(S)| = 1 \Rightarrow$ шаг 6. Иначе 5.

5 Для некоторого сегмента S выбираем произвольную допустимую грань $\varGamma$.

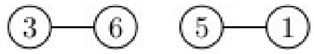
6 Помещаем α-цепь $L \in S$ в грань $\varGamma\tilde{G}$ на $\tilde{G} \cup L$. К шагу 1.

7 Построена укладка $\tilde{G}$ – укладка G.

3.1.6 Oобоснование?

Два сегмента S_1 и S_2 называются **конфликтующими**, если:

1. $\Theta = \Gamma(S_1) \cap \Gamma(S_2) \neq \varnothing$.
2. Существуют 2 α-цепи $L_1 \in S_1$ и $L_2 \in S_2$. Нельзя одновременно уложить ни в какую грань $\Gamma \in \Theta$.

Пример конфликтующих сегментов: 

3.1.7 Лемма 33

Если S_1 и S_2 конфликтуют, $|\Gamma(S_1)| \geq 2$, $|\Gamma(S_2)| \geq 2$, тогда $\Gamma(S_1) = \Gamma(S_2)$ и $|\Gamma(S_1)| = 2$.

Доказательство.
Докажем, что $\Gamma(S_1) = \Gamma(S_2)$.
Пусть нет, тогда существует 3 различных грани: $\Gamma_1 \in \Gamma(S_1)$, $\Gamma_2 \in \Gamma(S_2)$, $\Gamma_3 \in (\Gamma(S_1) \cap \Gamma(S_2))$.
Каждую α-цепь L_1 сегмента S_1 можно уложить в Γ_1. Каждую α-цепь L_2 сегмента S_2 можно уложить в Γ_2
Следовательно каждую пару цепей $L_1 \in S_1$ и $L_2 \in S_2$ можно одновременно уложить вне грани $\Gamma_3 \Rightarrow$ внутри грани Γ_3 противоречие с конфликтностью.

□

Построим граф сегментов $S(\tilde{G})$: $VS(\tilde{G})$ и две вершинки смежны, если сегменты конфликтуют.
Частичной укладкой планарного графа G называется такой граф, который можно получить из укладки графа G на плоскость удалением некоторых вершин.

3.1.8 Лемма 34

Если после очередного шага алгоритма получили частичную укладку $\tilde{G}$ планарного графа G такую, что $\forall S \quad |\Gamma(S)| \geq 2$, то $S(\tilde{G})$ – двудольный.

Доказательство.
От противного. По критерию двудольности в $S(\tilde{G})$ есть цикл нечётной длины $S_1, \ldots, S_r, S_1$.
По лемме 33: $\forall i = 1, \ldots, r \quad \Gamma(S_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$.
$\tilde{G}$ – частичная укладка $\Rightarrow$ все сегменты могут быть уложеные в Γ_1 или в Γ_2.
S_1 и S_r укладываются в Γ_1 и Γ_2 по очереди $\Rightarrow$ противоречие с нечётной длиной цикла. □

3.1.9 Теорема 37

Если G – планарный, то результатом каждого шага алгоритма является частичная укладка $\tilde{G}$ графа G.

Доказательство.

инд. по числу шагов:
Шаг 0 — укладка цикла
...
...
Шаг n — $\widetilde{G}$ — частичная укладка; если $\exists\ \Gamma(S) = \emptyset \Rightarrow G$ не планарен
Если $\exists S : |\Gamma(S)| = 1$
В исходной укладке G S уложен в $\Gamma : \Gamma(S) = \{\Gamma\}$
$\Rightarrow$ укладка α-цепи из S в $\Gamma \Rightarrow$ получим частичную укладку
Теперь пусть $\Gamma(S) \geqslant 2\ \forall S$
Рассм. $S(\widetilde{G})$ — он двудольный. Берём произвольную вершину S. Если S изолированная вершина, то S ни с кем не конфликтует $\Rightarrow$ укладка α-цепи из S не мешает частичной укладке $\Rightarrow$ всё хорошо
Если S не изолированная вершина $\Rightarrow S$ лежит в непустой компоненте связности графа $\mathrm{S}(\widetilde{G})$. В этой

к.с. все сегменты содержат 2 одинаковые грани.
$S_1, \ldots, S_t$ — вершины этой к.с.
По лемме 33 $\forall i$ $\Gamma(S) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$
По лемме 34 $S(\widetilde{G})$ — двудольный
И получается в исходной укладке G на плоскость сегменты из 1-ой доли уложены в Γ_1, из др. доли в Γ_2
И если в ней поменять местами Γ_1 и Γ_2 то получим укладку G на плоскости
$\square$

39 Правильная раскраска вершин графа. Верхние оценки хроматического числа. Теорема Брукса

39.1 Правильная раскраска вершин графа.

$G = (V, E)$
$\varphi : V \to \{c_1, \ldots, c_t\}$ — раскраска вершин разбиения $V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_t$; V_i — мн-во вершин цвета c_i
Раскраска φ правильная, если:
$xy \in E \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \forall i \quad V_i$ — независимое мн-во

39.2 Верхние оценки хроматического числа.

39.2.1 Оценка 1

G — (n, m)-граф $\Rightarrow \chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$
Доказательство:
$\forall$ пары цветов $\exists$ ребро на концах которого вершины этих цветов (из леммы о том, что в правильной раскраске для $\forall$ цвета $\exists$ вершина этого цвета, в окружении которой есть вершины всех остальных цветов) $\Rightarrow m \geqslant \binom{\chi(G)}{2}$
$\square$

39.2.2 Оценка 2

$X(G) \leq \triangle(G) + 1$ ($\triangle(G)$ – максимальная степень графа G).

Доказательство.
Индукция по кол-ву вершин графа G:
G – граф порядка $n \geq 2, \quad v \in VG$.
$G' = G - v$. По индукционному предположению $X(G') \leq \triangle(G) + 1$.
$\deg(v) \leq \triangle(G) \quad \Rightarrow \quad$ в окр. v не использовали какой-то цвет, окрасим её в этот цвет $\quad \Rightarrow \quad X(G) \leq \triangle(G) + 1$.
$\square$

39.3 Теорема Брукса

$\forall$ связного графа, не явл. $K_n, C_{2n+1} \quad \chi(G) \leqslant \Delta(G)$
Доказательство:

3.2.10 Теорема 38 (Брукс, 1941)

Пусть G – связный граф, не являющийся ни полным, ни циклом нечётной длины.
Тогда $X(G) \leq \triangle(G)$.

3.2.11 Алгоритм последовательной раскраски

1. Упорядочим $v_1, ..., v_n$ – все вершины графа G.
2. $\varphi(v_1) = c_1$
3. $r = 2, \ldots, n : \quad v_1...v_r$ – раскрашены. Берём $\varphi(v_{r+1}) = c_m$, где m – минимальный индекс цвета, которого нету в окружении вершинки v_{r+1}.

3.2.12 Лемма 43

Пусть G – двусвязный, не является ни полным, ни циклом. Тогда существует 2 вершины $u, v \in VG, \quad d(v, u) = 2$
$G - u - v$ - связный.

Доказательство.
a – доминирующая вершина, если $\deg(a) = |V| - 1$.
D – мно-во всех доминирующих вершин графа G.

1. $D \neq \varnothing$. G – не полный $\Rightarrow \quad VG \setminus D \neq \varnothing$.
   Пусть $u, v \in VG : \quad uv \notin EG \quad \Rightarrow \quad d(u, v) = 2 \Rightarrow G - u - v$ – связен.
2. $D = \varnothing$. По условию G – не цикл $\quad \Rightarrow \quad$ в $G \, \exists z : \deg(z) \geq 3$.
   Рассмотрим граф $G - z = G'$.
   (a) G' – двусвязный. Т.к. $D = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists v : d(v, z) = 2$. Полагаем $u = z$. v, u – искомые.
   (b) G' имеет точки сочленения. $\quad \Rightarrow \quad$ существует два висячих блока B_1 и B_2.
   $\exists u \in B_1$: не точка сочленения и смежная с z в G, иначе т. сочленения блока B_1 явл. т. сочленения, но G – двусвязен.
   Аналогично $\exists v \in B_2$ – не точка сочленения и смежная с z в G.
   $G' - u - v$ – связен $\quad \Rightarrow \quad G - u - v$ – связен?.

3.2.13 Лемма 44

Пусть G – связный, n-вершинный граф. $w \in VG$.
Тогда вершины графа G можно упорядочить так, чтобы $w_1, w, w_2, ..., w_n$, что любая вершинка w_i, $i \geq 2$ смежн
по крайней мере с одной вершиной с меньшим номером.

Доказательство т. Брусса.

1. G - двусвязный, без циклов, $|V| = n$. По л. 43 $\exists u, v: \quad d(u,v) = 2 \quad G - u - v$ – связный.
   По лемме 44 вершины графа $G - u - v$ можно упорядочить так, что $w, ..w_{n-1}$
   $\forall i, 2 \leq i \leq n-2, \quad w_i$ смежна с вершиной с меньшим номером.
   Упорядочим вершины графа G: $u, v, w_{n-2}, ..., w_1 = w$ и применим алгоритм последовательной раскраски
   $\varphi(u) = \varphi(v) = c_1$.
   Пусть уже покрашены $u, v, w_{n-2}...w_{s+1}$ в $\triangle(G)$ цветов.
   w_s смежна с вершиной с меньшим номером - не покрашеные вершины $\quad\Rightarrow\quad$ в окружении w_s используетс
   не более $\Delta(G) - 1$ цветов $\quad\Rightarrow\quad$ покрасим её в один из $\Delta(G)$ цветов.
   $w_1 = w$ – смежна с v и u: $\quad \varphi(v) = \varphi(u)$.

2. Пусть $\Delta = \Delta(G)$, G – не связен. Покажем, что любой блок графа G является Δ-раскрашиваем.

   (a) Блок является $K_m \quad\Rightarrow\quad$ точка сочленеия этого блока имеет степень не меньше $m \leq \Delta$. Но K_m
   m-раскрашиваем $\quad\Rightarrow\quad$ он является Δ-раскрашиваем.

   (b) Блок явлется циклом. Точка сочленеия этого блока имеет степень не меньше 3. Цикл 3-раскрашивае
   $\Rightarrow \quad \Delta$-раскрашиваем.

   (c) Блок не полный и не цикл $\quad\Rightarrow\quad$ по доказанному.

□

□

40 Правильная раскраска вершин графа. Нижние оценки хроматического числа. Теорема о существовании графов без треугольников с большим хроматическим числом.

40.1 Правильная раскраска вершин графа.

$G = (V, E)$
$\varphi : V \to \{c_1, \ldots, c_t\}$ — раскраска вершин разбиения $V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_t$; V_i — мн-во вершин цвета c_i
Раскраска φ правильная, если:
$xy \in E \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \forall i \quad V_i$ — независимое мн-во

40.2 Нижние оценки хроматического числа.

1) $\chi(G) = \chi$
$G = (V, E)$
$V = V_1 \sqcup \cdots, \sqcup V_\chi$
V_i — независимое мн-во $\forall i$
$|V_i| < \alpha_0(G) \quad \forall i$
$|VG| = \sum |V_i| \leqslant \alpha_0(G) * \chi(G)$
$\Downarrow$
$\chi(G) \geqslant \frac{|VG|}{\alpha_0(G)}$

2) $\chi(G) \geqslant \alpha_0(\bar{G})$
3) $\chi(G) \geqslant t$
t — мощность наиб. клики в G

40.3 Теорема о существовании графов без треугольников с большим хроматическим числом.

3.2.14 Теорема 39 (Зыкова, 1949)

Существуют графы без треугольников с произвольно большим хроматическим числом.

3.2.15 Лемма 45

Любой минимальной, правильной раскраске графа G для любого цвета c_i существуют вершины этого цвета, смежные с вершинами всех остальных цветов.

Доказательство т. Зыкова.
Построим последовательность графов $G_2 ... G_i ...$, так, что:

1. G_i без треугольников.
2. $X(G_i) = i$

$G_2 = K_2$
Пусть G_i построено, $VG_i = \{v_1 ... v_n\}$. Построим G_{i+1}:
$VG_{i+1} = VG_i \cup V' \cup \{v\}$, где $V' = \{v'_1, ..., v'_n\}, \quad VG_i \cap V' = \varnothing$.
$v \notin VG_i \cup V'$.
Определяем мно-во рёбер: на вершинках VG_i строим граф G_i.
Любую вершинку $v'_i \in V'$ соединяем со всеми вершинами из VG_i, смежными с v_i. v смежна со всеми вершинами из V'. Имеем: G_i – без тре-ов и $X(G_i) = i$. Докажем, что G_{i+1} без треугольников.
Пусть в G_{i+1} есть треугольник. Тогда $a, b, c: \ a, b \in VG_i, c \in V'$ (единственный вариант, который остался). Но $c = v'_j \quad \Rightarrow \quad a, b, v_j$ – треугольник. Противоречие.
Рассмотрим теперь хроматическое число.
G_{i+1} в $i+1$. $G_i - i$ - раскр. φ, φ' графа $G_{i+1}: \quad \forall$ верш. из $V'G$.
Почему нельзя меньше? Пусть G_{i+1} правильно раскрашен в i цветов. Но $X(G_i) = i \quad \Rightarrow \quad$ эта раскраска порождает правильную минимальную раскраску графа G_i. Тогда по лемме 45 есть вершина, смежная с вершинами всех остальных цветов, тогда её дупликат расрашен в тот же цвет, следовательно в V' существуют вершины всех цветов, а значит для вершины v? нет цвета.
Следовательно, $X(G_{i+1}) = i + 1$. □

41 Раскраски планарных графов. Теорема о четырех красках. Теорема Хивуда.

41.1 Теорема о четырех красках.

$\forall$ планарный граф 4-раскрашиваем
Доказательство:
б/д
□

41.2 Теорема Хивуда.

$\forall$ планарный граф 5-раскрашиваем
Доказательствой:
Индукция по числу вершин $n = |VG|$
При $n \leqslant 5$ теор. верна
переход
G — планарный граф на $n > 5$ вершинах
В G $\exists$ вершина x т.ч. $degx \leqslant 5$ (иначе, в графе был бы подграф $K_{3,3}$)
$G' = G - x$; по инд. предположению $\exists$ прав. раскр. φ в 5 цветов
Возвращаем вершину x
Если $degx < 5$, то всё хорошо, перекрашиваем в свободный цвет
Если $degx = 5$ и в окр. x есть одинаковые цвета, то всё хорошо
Если $degx = 5$ и в окр. x есть все 5 цветов
c_i, c_j — 2 цвета. рассмотрим вершины этих цветов
$G_{i,j}$ — подграф графа G порождённый вершинами c_i и c_j
Рассмотрим $G_{1,3}$. Если y_1 и y_3 в разных к. с. $G_{1,3}$, то 1 к. с. графа $G_{1,3}$ перекрашиваем и освобождаем цвет для x
Если y_1 и y_3 в одной к.с. графа $G_{1,3}$, то $\exists$ $(y_1, y_3)-$цепь из вершин цвета c_1 и c_3. Тогда рассмотрим вершины y_2 и y_4. Они в разных к.с. графа $G_{2,4}$ т.к. граф G плоский и (y_2, y_4)-цепь должна пересекать (y_1, y_3)-цепь
$\square$

42 Правильная раскраска ребер графа. Хроматический индекс. Теорема Кёнига о хроматическом индексе двудольных графов.

42.1 Правильная раскраска ребер графа.

$\varphi : EG \to \{c_1, \ldots, c_t\}$ — раскраска рёбер в t цветов
φ — правильная рёберная раскраска, если e и h смежны $\Rightarrow \varphi(e) \neq \varphi(h)$

42.2 Хроматический индекс.

G — рёберно t-хроматический, если G рёберно t-раскрашиваемый и не является рёберно $(t-1)$-раскрашиваемым.
G — рёберно t-хроматический $\Rightarrow$ t — рёберное хроматическое число (хроматический индекс) $\chi'(G)$

42.3 Теорема Кёнига о хроматическом индексе двудольных графов.

$\forall$ двудольного графа G: $\chi'(G) = \Delta(G)$

Доказательство. Индукцией по числу ребер q при заданном числе вершин p построим раскраску ребер двудольного графа G в $\Delta(G)$ цветов из $C = \{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$.

Базис индукции: $q = 0$ верен.

Индуктивный переход. Рассмотрим двудольный граф $G = (V, E)$, в котором $|V| = p$, $|E| = q + 1 \geqslant 1$.
Пусть $e = (u, w) \in E$ — произвольное ребро графа G.
Рассмотрим граф $G' = G - e$. Граф G' является двудольным, содержит p вершин и q ребер. Значит, для него верно предположение индукции.
Окрасим ребра графа G' в $\Delta(G') \leqslant \Delta(G)$ цветов из множества C.

1. Если найдется цвет $i \in C$, одновременно отсутствующий среди ребер из вершин u, w графа G', то припишем ребру (u, w) графа G цвет i.

2. Иначе заметим, что найдется некоторый цвет $i \in C$, отсутствующий среди ребер из вершины u, и некоторый цвет $j \in C$, отсутствующий среди ребер из вершины w, $i \neq j$, т. к. $d_{G'}(u) \leqslant \Delta(G) - 1$, $d_{G'}(w) \leqslant \Delta(G) - 1$.
Рассмотрим неудлиняемую цепь P с ребрами чередующихся цветов i и j, начинающуюся из вершины w.
Эта цепь не может достигнуть вершины u. В самом деле, если цепь P приходит в вершину u, то в графе G существует цикл $C = u(u, w)wPu$ нечетной длины, чего не может быть.
Перекрасим на цепи P ребра: цвет i заменим на цвет j, цвет j заменим на цвет i.
Затем припишем ребру (u, w) в графе G цвет i.

$\square$

43 Теорема Визинга о хроматическом индексе графа (без доказательства). Хроматический индекс полного графа.

43.1 Теорема Визинга о хроматическом индексе графа (без доказательства).

$\forall$ графа G: $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$

43.2 Хроматический индекс полного графа.

Справедливы равенства $\chi'(K_n) = n$, если n — нечетное число, $\chi'(K_n) = n-1$, если n — четное число.

Доказательство.
1. Пусть n — нечетное число. Предположим, что $\chi'(K_n) = n-1$. Тогда из каждой вершины графа K_n исходит ровно одно ребро каждого цвета.
Поэтому число ребер одного цвета равно $n/2$, т. к. каждое ребро имеет два конца.
Но n — нечетное число, получаем противоречие.
Получим раскраску ребер графа K_n в n цветов $C = \{1, 2, \ldots, n\}$: ребро (i, j) графа K_n, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ окрасим в цвет $((i+j) (\mathrm{mod}\ n)) + 1$.

2. Пусть n — четное число. Удалим из графа K_n произвольную вершину v и раскрасим ребра оставшегося графа K_{n-1} в $(n-1)$ цветов.
Рассмотрим в этом графе K_{n-1} все ребра одного цвета i. Их концами являются $(n-2)$ вершины, т. к. $(n-1)$ — нечетное число. Поэтому в этом графе K_{n-1} найдется некоторая вершина v_i, из которой не исходит ребро цвета i. Окрасим в исходном графе K_n ребро (v, v_i) в цвет i.
Т. к. в каждой вершине графа K_{n-1} отсутствует ребро только одного цвета, все ребра графа K_n, исходящие из вершины v, окрасим в разные цвета.

□

44 Теорема Рамсея для графов.

3.4.6 Теорема 51 (Рамсея для графов)

$\forall p, q \quad p \geq 2,\ q \geq 2 \quad \exists$ минимальное число $N(p,q)$: $\quad \forall n \geq N(p,q)$, $\forall$ раскраси ребёр графа K_n в два цвета c_1 и c_2 выполнено хотя бы одно из двух условий:

1. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на p вершинах.
2. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_2 на q вершинах.

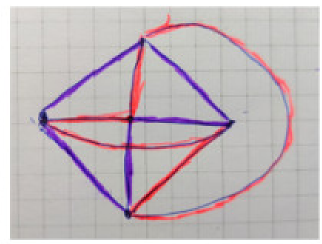
$N(p,q)$ – **число Рамсея** для графов.

3.4.7 Лемма 48

$\forall p, q \geq 2$ верны:

1. $N(2,q) = q$
2. $N(p,2) = p$
3. $N(3,3) = 6$.

Доказательство.
1, 2 – упражнение.
3. Докажем (1) $N(3,3) > 5$ и (2) $N(3,3) \leq 6$.



1. привести пример раскраси ребёр K_5, где нет монохроматических тре-ков.
2. рассмотрим произвольную раскраску ребёр графа K_6, $x \in VK_6$.
   Есть 3 ребра, инцидентных x и раскрашенных в один цвет.

□

Доказательство (Теорема Рамсея).
Индукция по $m = p + q$. Докажем неравенство $N(p,q) \leq N(p-1,q) + N(p,q-1)$, $\quad \forall p > 2,\ q > 2$. Сама индукция доказывает граничность числа $N(p,q)$.
База индукции: $N(p,2) = p$, $\quad N(2,q) = q$ (лемма 48).
$n = N(p-1,q) + N(p,q-1)$. Надо доказать, что для K_n выполнено условие теореым.
Пусть φ – произвольная раскраса рёбра графа K_n в два цвета c_1 и c_2.
$x \in VK_n$. $V_1 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_1\}$, $\quad V_2 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_2\}$. $|V_1| = n_1$, $\quad |V_2| = n_2$.
$n_1 + n_2 + 1 = n = N(p-1,q) + N(p,q-1)$ (возможно, числа чётные?) $\quad \Rightarrow \quad$ выполнено одно из условий:

1. $n_1 \geq N(p-1,q)$
2. $n_2 \geq N(p,q-1)$

Пусть (1). Рёбра графа $G(V_1)$ раскрашены раскраской φ. По индукционному предположению выполнено хотя бы одно из условий:

1. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на $p-1$ вершине.
2. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_2 на q вершинах.

Если выполняется второе, то всё доказано. А если первое???
Если первое, то добавим вершину x и получим монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на p вершинах. Иными словами, док-во чем-то похоже на док-во предыдущей леммы.
Случай (2) рассматривается аналогично. □

45 Правильная раскраска ребер графа. Хроматический индекс. Теорема о хроматическом индексе полного графа.

45.1 Правильная раскраска ребер графа.

$\varphi : EG \to \{c_1, \ldots, c_t\}$ — раскраска рёбер в t цветов
φ — правильная рёберная раскраска, если e и h смежны $\Rightarrow \varphi(e) \neq \varphi(h)$

45.2 Хроматический индекс.

G — рёберно t-хроматический, если G рёберно t-раскрашиваемый и не является рёберно $(t-1)$-раскрашиваемым.
G — рёберно t-хроматический $\Rightarrow$ t — рёберное хроматическое число (хроматический индекс) $\chi'(G)$

45.3 Теорема о хроматическом индексе полного графа.

Справедливы равенства $\chi'(K_n) = n$, если n — нечетное число, $\chi'(K_n) = n-1$, если n — четное число.

Доказательство.
1. Пусть n — нечетное число. Предположим, что $\chi'(K_n) = n-1$. Тогда из каждой вершины графа K_n исходит ровно одно ребро каждого цвета.
Поэтому число ребер одного цвета равно $n/2$, т. к. каждое ребро имеет два конца.
Но n — нечетное число, получаем противоречие.
Получим раскраску ребер графа K_n в n цветов $C = \{1, 2, \dots, n\}$: ребро (i, j) графа K_n, где $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ окрасим в цвет $((i+j)(\mathrm{mod}\ n)) + 1$.

2. Пусть n — четное число. Удалим из графа K_n произвольную вершину v и раскрасим ребра оставшегося графа K_{n-1} в $(n-1)$ цветов.
Рассмотрим в этом графе K_{n-1} все ребра одного цвета i. Их концами являются $(n-2)$ вершины, т. к. $(n-1)$ — нечетное число. Поэтому в этом графе K_{n-1} найдется некоторая вершина v_i, из которой не исходит ребро цвета i. Окрасим в исходном графе K_n ребро (v, v_i) в цвет i.
Т. к. в каждой вершине графа K_{n-1} отсутствует ребро только одного цвета, все ребра графа K_n, исходящие из вершины v, окрасим в разные цвета.

$\square$

46 Булева функция. Существенные и фиктивные переменные. Теорема о числе булевых функций, существенно зависящих от n переменных.

46.1 Булева функция.

Фуекция вида $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — булева

46.2 Существенные и фиктивные переменные.

Переменная x_i функции $f(x_1, \dots, x_n)$ — существенная, если $\exists$ набор переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ т.ч. $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_i, \dots, \alpha_n)$

иначе — фиктивная

46.3 Теорема о числе булевых функций, существенно зависящих от n переменных.

Число булевых ф-ий $f(x_1 \dots x_n)$, существенно зависящих от $x_1 \dots x_n$ равно $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$

Доказательство.

Формула включений-исключений: $|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot S_k, \quad S_k = \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}|$.

A_i – формулы, существенно не зависящие от переменной x_i.

$|A| = 2^{2^n}$, $|S_0| = |A| = 2^{2^n}$.

$|A_i| = 2^{2^{n-1}}$, $|S_1| = n \cdot 2^{2^{n-1}}$.

$|A_i \cap A_j| = 2^{2^{n-2}}$, $|S_2| = \binom{n}{2} \cdot 2^{2^{n-2}}$.

$\vdots$

$|S_k| = \binom{n}{k} \cdot 2^{2^{n-k}}$.

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$. □

47 Формула. Функция, которую реализует формула. Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности.

47.1 Формула.

Пусть $\Omega \subseteq P_2$.

1) Если $f \in \Omega$, то f – формула над Ω.

2) Если $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ – формулы над Ω, либо символьные переменные, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, то $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ – формула над Ω.

47.2 Функция, которую реализует формула.

Формуле $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ над Ω сопоставим $f(x_1, \ldots, x_n)$, которую реализует данная формула.

1) Если $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ совпадает с $f(x_1, \ldots, x_n)$, то $\Phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n)$.

2) Если $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = f_0(A_1, \ldots, A_m)$, где A_i – символьные переменные, либо формулы над Ω, то $\Phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow f_0(f_1, \ldots, f_m)$, где f_i реализуется A_i.

47.3 Эквивалентные формулы.

Формулы эквивалентны, если они реализуют равные функции

47.4 Основные эквивалентности.

$x_1 \circ x_2$ — любая из ф-ций $x_1\ x_2$; $x_1 \vee x_2$; $x_1 \oplus x_2$

1. $x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$
2. $x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3$
3. $(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3)$
4. $(x_1 \& x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \& (x_2 \vee x_3)$
5. $(x_1 \oplus x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \oplus (x_2 \& x_3)$
6. $\bar{\bar{x}} = x$
7. $x_1 \bar{\&} x_2 = \bar{x_1} \vee \bar{x_2}$
8. $x_1 \bar{\vee} x_2 = \bar{x_1} \& \bar{x_2}$
9. $x_1 \& (x_1 \vee x_2) = x_1$
10. $x_1 \vee (x_1 \& x_2) = x_1$
11. $x \& \bar{x} = 0$
12. $x \vee \bar{x} = 1$
13. $x \& x = x$
14. $x \vee x = x$
15. $x \oplus x = 0$
16. $x \oplus 1 = \bar{x}$
17. $x \oplus \bar{x} = 1$
18. $x \oplus 0 = x$

19. $x\&0 = 0$

20. $x \vee 0 = x$

21. $x\&1 = x$

22. $x \vee 1 = 1$

Доказательство:
Нарисовать таблицы для левых и правых частей
□

48 Теорема о разложении функций по переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Совершенная конъюнктивная нормальная форма. Двойственная функция. Принцип двойственности.

48.1 Теорема о разложении функций по переменным.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$
Тогда $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0,1\}^k} x_1^{\sigma_1} \cdots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ (*)
Доказательство:
Если подставить конкретные значения, то в правой части останется только одна конъюнкция, и оставшаяся конъюнкция совпадёт с левой частью
□

48.2 Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

Разложение ф-ции отличной от 0 вида (*) при $k = n$ называется СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма)

48.3 Совершенная конъюнктивная нормальная форма.

Разложение вида $\underset{\substack{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{0,1\}^n \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0}}{\&} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}})$ – СКНФ.

48.4 Двойственная функция.

$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}$ – двойственная к f.

48.5 Принцип двойственности.

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$.
Тогда $F^*(x_1, \ldots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n))$.

49 Замкнутое, полное множества булевых функций. Теорема о полноте двух систем.

49.1 Замкнутое, полное множества булевых функций.

Пусть $\Omega \subseteq P_2$.
$[\Omega]$ (замыкание) – все функции, выражаемые формулами над Ω.
Ω замкнута, если $[\Omega] = \Omega$.
Ω полна, если $[\Omega] = P_2$.

49.2 Теорема о полноте двух систем.

$\Omega_1, \Omega_2 \subseteq P_2$
Ω_1 — полна, и $\forall$ ф-я из Ω_1 выражается ф-лой над Ω_2, тогда Ω_2 — полна
Доказательство:
$[\Omega_1] = P_2 \quad \Omega_1 \subset [\Omega_2]$
$P_2 = [\Omega_1] \subseteq [[\Omega_2]] = [\Omega_2] \subseteq P_2$
$\Downarrow$
$[\Omega_2] = P_2$
$\square$

50 Полином Жегалкина. Теорема Жегалкина. Способы построения полинома Жегалкина.

50.1 Полином Жегалкина.

$K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_l$, где $K_i \neq K_j$ $\forall i \neq j$ и K_i – монотонные элементарные конъюнкции $\forall i$ – полином Жегалкина.

50.2 Теорема Жегалкина.

Для любой БФ $f \in P_2$ $\exists!$ полином Жегалкина, реализующий эту ф-ию.

Доказательство.

существование) $\{\&, \oplus, 1\}$ – полная. $\Rightarrow$ $f(x_1 \dots x_n) \in P_2$, то f выражается ф-лой над $\{\&, \oplus, 1\}$.
Преобразуем ее:

1. Раскроим скобки по законам дистрибутивности $\oplus$ относительно $\&$. Получаем ф-лу $A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где A_i – ф-ла над $\{\&, 1\}$.
2. По законам $x \& x = x$, $x \& 1 = x$ преобразуем все A_i в ЭМК.
3. По закону $A \oplus A = 0$ получаем полином Ж, который эквивалентен исходной ф-ле.

единственность) Кол-во БФ от n переменных $= 2^{2^n}$.
Кол-во МЭК от n переменных $x_1 \dots x_n = 2^n$.
$\Rightarrow$ ПЖ от n переменных $= 2^{2^n}$.
Каждый полином реализует единственную ф-ию $\Rightarrow$ для каждой ф-ии ПЖ – единственный.

$\square$

50.3 Способы построения полинома Жегалкина.

4.3.3 3 способа построения ПЖ для ф-ии f

Введём нумерацию МЭК над мно-ом переменных $\{x_1 \dots x_n\}$.
$K \leftrightarrow$ набор $(\sigma_1 \dots \sigma_n) \mid \sigma_i = 1 \Leftrightarrow x_i$ входит в K.

Номер $K = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot 2^{n-1}$. Константа 1 имеет номер 0.

K	v	x_1	x_2
1	0	0	0
x_2	1	0	1
x_1	2	1	0
x_1x_2	3	1	1

4.3.4 Способ первый (обыкновенный, ничем не примечательный)

$f(x_1 \dots x_n)$ представим в виде СДНФ или СКНФ. По законму Де Моргана изб-ся от $\vee$, все отрицания заменим на $\oplus 1$. Получим ф-лу над $\{\&, \oplus, 1\}$. Далее по алгоритму из док-ва.

Пример $f(xy) = x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{x \& \overline{y}} = x\&(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus 1$.

4.3.5 Способ второй (метод неопределённых коэффициентов)

$P(x_1 \dots x_n)$ – ПЖ для $f(x_1 \dots x_n)$.
$P(x_1 \dots x_n) = C_0 \oplus C_1K_1 \oplus C_2K_2 \oplus \dots \oplus C_{2^n-1}K_{2^n-1}$, где K_i – ЭМК с номером i, $C_i \in \{0, 1\}$.
$(C_0 \dots C_{2^n-1}$ – набор коэффициентов в ПЖ.
$\forall \widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$ сопоставим ур-ие $P(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Это система из 2^n ур-ий и 2^n неизвестных. По т. Жегалкина она имеет единственно решение.

Пример $x \to y = C_0 \oplus C_1y \oplus C_2x \oplus C_3xy$.

$$\begin{cases} f(0,0) = 1 = C_0 \\ f(0,1) = 1 = C_0 \oplus C_1 \\ f(1,0) = 0 = C_0 \oplus C_2 \\ f(1,1) = 1 = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x \to y = 1 \oplus x \oplus xy$$

4.3.6 Способ третий (преобразование кортежа значений ф-ии)

$\widetilde{\alpha_f} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1}) \quad \Rightarrow \quad (C_0, C_1, \dots, C_{2^n-1}) = \widetilde{C_f}$.
Если $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1 \dots \beta_n)$, то $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \dots, \alpha_n \oplus \beta_n)$.
$\widetilde{\alpha_f} = (\alpha_0 ... \alpha_{2^n-1})$ – кортеж значений ф-ии $f(x_1 ... x_n)$.

$\alpha_i = f(\sigma_1 ... \sigma_n)$, где $(\sigma_1 ... \sigma_n) \mid i = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k \cdot 2^{n-k}$.

Преобразованиями в $\widetilde{C_f}$ иднукцией по n:
$n = 1$. $\widetilde{\alpha_f} = (\alpha_0\alpha_1) \Rightarrow \widetilde{C_f} = (\alpha_0, \alpha_0 + \alpha_1)$
$n \to n+1 \quad f(y, x_1, ..., x_n)$:
$f_0(x_1 ... x_n) := f(0, x_1 ... x_n)$
$f_1(x_1 ... x_n) := f(1, x_1 ... x_n)$
$\widetilde{C_{f_0}}$ и $\widetilde{C_{f_1}}$ – известны по предположению индукции, тогда $\widetilde{C_f} = (\widetilde{C_{f_0}} \mid \widetilde{C_{f_0}} \oplus \widetilde{C_{f_1}})$.

51 Основные замкнутые классы булевых функций. Предполные классы.

51.1 Основные замкнутые классы булевых функций.

$T_0 = \{f \in P_2 \mid f(0,\dots,0) = 0\}$ – сохраняющие 0.
$T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1,\dots,1) = 1\}$ – сохраняющие 1.
$S = \{f \in P_2 \mid f^* = f\}$ – самодвойственные.
$L = \{f \in P_2 \mid f = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n,\ \alpha_i \in \{0,1\}\}$ – линейные.
$M = \{f \in P_2 \mid (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \leqslant (\beta_1,\dots,\beta_n) \Rightarrow$
$f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \leqslant f(\beta_1,\dots,\beta_n)\}$ – монотонные.

T_0, T_1, S, L, M — замкнуты
Доказательство:
1. $f_0,\dots,f_m \in T_0$
Рассм. $F(0,\dots,0) = f_0(f_1(0,\dots,0),\dots f_m(0,\dots,0)) = f_0(0,\dots,0) = 0$
2. $f_0,\dots,f_m \in T_1$
Аналогично
3. $f_0,\dots,f_m \in S$
$F^*(x_1,\dots,x_n) \underset{\text{принцип двойственности}}{=} f_0^*(f_1^*(x_1,\dots,x_n),\dots f_m^*(x_1,\dots,x_n)) = f_0(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots f_m(x_1,\dots,x_n)) = F(x_1,\dots,x_n)$
4. $f_0,\dots,f_m \in L$
$L = [\{\oplus, 1\}] \Rightarrow$ L замкнуто
5. $f_0,\dots,f_m \in M$
$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \leqslant (\beta_1,\dots,\beta_n) \quad 1 \leqslant i \leqslant m$
$\Downarrow$
$(f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\dots,f_m(\alpha_1,\dots,\alpha_n)) \leqslant (f_1(\beta_1,\dots,\beta_n),\dots,f_m(\beta_1,\dots,\beta_n))$
$\Downarrow$ $(f_0 \in M)$
$f_0(f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\dots,f_m(\alpha_1,\dots,\alpha_n)) \leqslant f_0(f_1(\beta_1,\dots,\beta_n),\dots,f_m(\beta_1,\dots,\beta_n))$
$\Downarrow$
$F(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \leqslant F(\beta_1,\dots,\beta_n)$
$\square$

51.2 Предполные классы.

Ω – предполный класс, если:

1) $\Omega \neq P_2$,

2) Ω – замкнутый,

3) $\forall f \in P_2 \backslash \Omega : \Omega \cup \{f\}$ – полна.

52 Теорема Поста.

Леммы, необходимые для доказательства теоремы:

52.1 Лемма о несамодвойственной ф-ции

$f \notin S \Leftrightarrow 0, 1 \in [\{f, \bar{x}\}]$
Доказательство:
$\Rightarrow$) $f \in S \Leftrightarrow \forall\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \overline{f(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n})}$
$g(x) = f(x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n})$
$g(0) = f(0^{\alpha_1}, \ldots, 0^{\alpha_n}) = f(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(1^{\alpha_1}, \ldots, 1^{\alpha_n}) = g(1)$
$\Downarrow$
$g(x)$ — const
$\Leftarrow$) Дано $0, 1 \in [\{f, \bar{x}\}]$
От противного
Пусть $f \in S \Rightarrow \{f, \bar{x}\} \subseteq S \overset{\text{S — замкнут}}{\Rightarrow} [\{f, \bar{x}\}] \subseteq S$
Но $0, 1 \notin S$
Противоречие
$\square$

52.2 Лемма о немонотонной ф-ции

$f \notin M \Leftrightarrow \bar{x} \in [\{f, 0, 1\}]$
Доказательство:
$\Leftarrow$) Аналогично прошлой лемме
$\Rightarrow$) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$
$\Downarrow$
$\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ т.ч.$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$
$\Downarrow$
$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$
$f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$

Рассм. $g(x)$ получаемая из $f(x_1, \ldots, x_n)$ подставлением на место x_i: $\begin{cases} 0;\ \text{если } \alpha_i = \beta_i = 0 \\ 1;\ \text{если } \alpha_i = \beta_i = 1 \\ x_i;\ \text{если } \alpha_i \neq \beta_i = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0, \beta_i = 1 \end{cases}$

$g(0) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$
$g(1) = f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$
$\Downarrow$
$g(x) = \overline{x}$
$\square$

52.3 Лемма о нелинейной ф-ции

$f \notin L \Leftrightarrow x \& y \in [\{f, \overline{x}, 0, 1\}]$
Доказательство:
$\Leftarrow$) Аналогично прошлой лемме
$\Rightarrow$) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$
$K = x_1 \cdots x_r$
Если что, переменные перенумеруем. Но выберем такое r, что у $f(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ в полиноме Жегалкина ровно одно слагаемое имеет ранг больше 1
$f(x_1, x_2, 1 \ldots, 1, 0, \ldots, 0) = x_1x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma$
$f(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha, 1 \ldots, 1, 0, \ldots, 0) = (x_1 \oplus \beta)(x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha(x_1 \oplus \beta) \oplus \beta(x_2 \oplus \alpha) \oplus \gamma = x_1x_2 \oplus \alpha\beta \oplus \gamma \in \{x_1x_2, \overline{x_1x_2}\}$
Если получили $\overline{x_1x_2}$, то $\overline{\overline{x_1x_2}} = x_1x_2$
$\square$

52.4 Теорема Поста.

Сист. б.ф. $\Omega \subseteq P_2$ полна $\Leftrightarrow$ она не лежит целиком ни в из классов T_0, T_1, S, L, M
Доказательство:
$\Rightarrow$) Ω — полна $\Rightarrow$ функциями из Ω можно выразить штрих Шеффера.
Т. к. классы T_0, T_1, L, S, M замкнуты и штрих шеффера не принадлежит ни одному из этих классов. То Штрих шеффера выражается функциями не из этих классов $\Rightarrow$ Ω не может лежать целиком ни в одном из этих классов
$\Leftarrow$) $\Omega \nsubseteq T_0 \Rightarrow \exists f_0 \in \Omega \setminus T_0$
аналогично:
$\exists f_1 \in \Omega \setminus T_1$
$\exists f_S \in \Omega \setminus S$
$\exists f_L \in \Omega \setminus L$
$\exists f_M \in \Omega \setminus M$
Рассм. $\Omega' = \{f_0, f_1, f_S, f_L, f_M\}$
Хотим показать, что $x\&y, \overline{x} \in [\Omega']$
Шаг 1. Покажем что $0, 1, \overline{x} \in [\Omega']$
$\varphi_1(x) = f_0(x, \dots, x)$
$\varphi_2(x) = f_1(x, \dots, x)$
$\varphi_1(0) = f_0(0, \dots, 0) = 1 \Rightarrow \varphi_1 \in \{1, \overline{x}\}$
$\varphi_2(1) = f_1(1, \dots, 1) = 0 \Rightarrow \varphi_2 \in \{0, \overline{x}\}$
Если $\varphi_1(x) \neq \overline{x}$ и $\varphi_2(x) \neq \overline{x}$. Тогда $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = 0$
Тогда по лемме о немонотонной ф-ции $\overline{x} \in [f_m, 0, 1]$
В противном случае $\overline{x} \in \{\varphi_1, \varphi_2\}$
Т.о. $\overline{x}$ получили
По лемме о несамодвойственной ф-ции $0, 1 \in [\{f_s, \overline{x}\}]$
Показали
Шаг 2
По лемме о нелинейной ф-ции
$x_1, x_2 \in [\{f_L, 0, 1, \overline{x}\}]$
В итоге мы получили
$x\&y \in [\Omega']$
$\Downarrow$ по теореме о полноте двух систем
Ω'полна $\Rightarrow$ Ω полна
$\square$

53 Минимизация ДНФ. Способы построения сокращенной ДНФ.

53.1 Минимизация ДНФ.

53.1.1 Элементарная конъюнкция

элементарная конъюнкция ранаг r
$K = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \cdots x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$
Эл. конъюнкция ранга 0 — $K = 1$

53.1.2 ДНФ

$K_1 \vee \dots \vee K_s$; $K_i \neq K_j$ $i \neq j$
$\forall 1 \leqslant i \leqslant s$ K_i — элементарная конъюнкция

53.2 Мин. ДНФ

ДНФ D наз-ся минимальным ДНФ ф-ции f, если она имеет мин. сумму рангов вход. в неё эл. конъюнкций среди всех ДНФ реализующих ф-цию f

53.3 Теорема

Сокращённая ДНФ монотонрой ф-ции f не содержит отриցаний переменных и явл. её ед. мин. ДНФ
Доказательство:
$f \in M$
$f = K_1 \vee \dots \vee K_s$ — сокр. ДНФ
$K_i = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_t} \overline{x_{i_t+1}} \cdots \overline{x_{i_r}}$
f принимает значение 1 на всех кортежах (наборах): $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \ldots = \alpha_{i_t} = 1$
$\alpha_{i_t+1} = \ldots = \alpha_{i_r} = 1$
из монотонности
$\Rightarrow$ и на всех кортежах $(\beta_1, \dots, \beta_n)$: $\beta_{i_1} = \ldots, = \beta_{i_t} = 1$
$K' = x_{i_1} \cdots x_{i_t}$ — импликанта ф-ции
$K < K' \leqslant f \Rightarrow$ К не простая
Противоречие
□

53.4 Способы построения сокращенной ДНФ.

3 операции:

1. склеивание $xK \vee \overline{x}K = K$
2. поглощение $K_1 \vee K_1 K2 = K_1$
3. обощ. склеивание $xK_1 \vee \overline{x}K_2 = xK_1 \vee \overline{x}K_2 \vee K_1 K_2$

Алгоритмы: **метод Нельсона** (из КНФ)
раскрываем все скобки, поглощение, убираем дублирование
Метод Квайна (из СДНФ)
все пары проверяем на склейк $\Rightarrow$ все пары рёбер проверяем на склейку $\Rightarrow$ получаем грани размерности 2 и т.д. пока можем $\Rightarrow$ Поглощение
Метод Блейка
Пока можем обобщ. склеивание, потом поглощение

54 Схема из функциональных элементов. Система функций, реализуемая схемой из функциональных элементов.

54.1 Схема из функциональных элементов.

СФЭ в базисе $\{\&, \vee, \overline{x}\}$ — орграф без контуров (ор. циклов) $G = (V, A)$; $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3$
$V_1 = \{v \in V | \deg v = 0\}$
$V_2 = \{v \in V | \deg v = 1\}$
$V_3 = \{v \in V | \deg v = 2\}$
$\forall v \in V_1$ приписана переменна x_i; разным — разные
$\forall v \in V_2$ приписано $\overline{x}$
$\forall v \in V_3$ приписано $\vee$ или $\&$

Выделено $V^* \subseteq V$
V_1 — выходы схемы; $V_2 \cup V_3$ — функциональные элементы
$v \in V_2$ — инвертор
$v \in V_3$ — конъюнктор или дизъюнктор
$v \in V^*$ — выход схемы
нумерация вершин — монотонная, если $\forall \overrightarrow{xy} \in A$ номер x меньше номера y
упорядовачиваем монотонно вершины схемы
$v_1, v_2, \ldots, v_t \quad v_i \in V_1 \Rightarrow v_i \leftrightarrow$ переменная
$v_i \in V_2 \Rightarrow$ есть дуга из y в v_i
$y \leftrightarrow f \Rightarrow v_i \leftrightarrow \overline{f}$
$v_i \in V_3 \Rightarrow$ есть две дуги $\overrightarrow{yv_i}, \overrightarrow{zv_i}$
$y \leftrightarrow f$, $z \leftrightarrow g$
$v_i \leftrightarrow$ либо $f \& g$, либо $f \vee g$

54.2 Система функций, реализуемая схемой из функциональных элементов.

СФЭ реализует систему б. ф., сопоставляет x выходам схемы
Булевые ф-ции, реализуемые в вершинах схемы не зависят от выбора монотонной нумерации
Доказательство:
инд. по числу функциональн. элементов в графе G
$n = 1$
1 функциональный элемент реализует 1-ну ф-ю независимо от нумерации
$n > 1$
S_1, S_2 — разные нумерации
Возьмём 1-ый функциональный элемент из S_1. Вместо него вставим новый вход y. По инд. предположению нумерации S_1 и S_2 реализуют одинаковые булевые ф-ции. И если обратно вернуть вместо y функциональный элемент, ничего не изменится
□

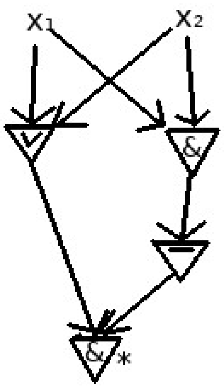
55 Сложность схемы из функциональных элементов. Реализация сумматора. Функция Шеннона для СФЭ. Метод Шеннона.

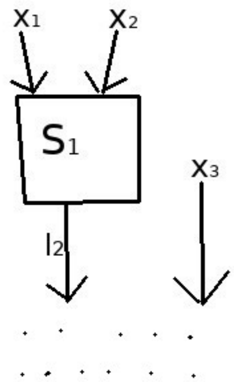
55.1 Сложность схемы из функциональных элементов.

$L(S)$ — сложность схемы, число функциональных элементов в ней

55.2 Реализация сумматора.

$l_n = x_1 \oplus \cdots x_n$
$L(l_n) \leqslant 4n - 4$
Доказательство:
$l_2 = x_1 \oplus x_2 = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_1 x_2}) = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) = x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2$
$l_3 = l_2 \oplus x_3$
...
...
$l_n = l_{n-1} \oplus x_n$





55.3 Функция Шеннона для СФЭ.

$L(n) = \max\limits_{f(x_1,\dots,x_n)\in P_2}(L(f))$ — ф-я Шеннона

55.4 Метод Шеннона.

→ $K_n(x_1 \dots x_n)$ – сис-ма всех 2^n конъюнкций вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$

лемма. $L(K_n) \le 2^{n+1} + n - 4$

доказательство:

индукция по n:

$n=1$:

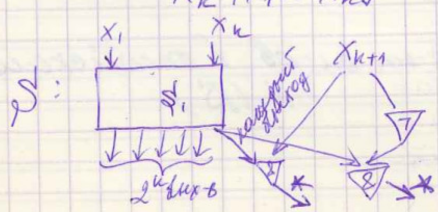
$\bar{x}_1$ и x_1 сложность '1'

пусть для $K_1, K_2 \dots K_k$ – верно

рассмотрим $K_{k+1}(x_1 \dots x_{k+1})$, по предпол. инд.:

∃ схема S_1 из $2^{k+1}+k-4$ эл-ов, реализ-ая $K_k(x_1 \dots x_k)$

$L(S) = L(S_1) + \underbrace{2\cdot 2^k}_{\&} + \underbrace{1}_{\neg} =$



$= 2^{k+1}+k-4+2\cdot 2^k+1 =$

$= 2^{k+2}+(k+1)-4$ ч.т.д.

Теорема: $L(n) \le 3\cdot 2^n + n - 5$

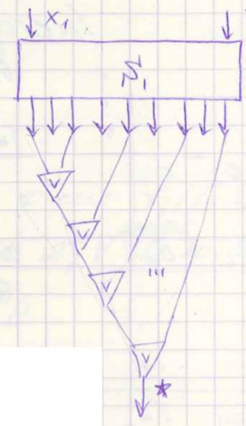
док-во: $f(x_1 \dots x_n) \in P_2$ Если $f \equiv 0 \Rightarrow$ то реализуем f схемой из 2х эл-ов

Пусть $f(x_1 \dots x_n) \not\equiv 0$, предст-ем f в виде СДНФ

$$f(x_1 \dots x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1 \dots \sigma_n) \\ f(\sigma_1 \dots \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} \quad (*)$$

Пусть S_1 - схема реализ-ая $K_n(x_1 \dots x_n)$

остается реализовать дн-ю



$L(S) \le L(S_1) + 2^n - 1 \le$

$\le 2^{n+1} + n - 4 + 2^n - 1 =$

$= 3\cdot 2^{n+2} + n - 5$

$\forall f$ $L(f) \le 3\cdot 2^n + n - 5$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow L(n) \le 3\cdot 2^n + n - 5$

Метод Шеннона

Теорема 12 $L(n) \lesssim \frac{8\cdot 2^n}{n}$ $\qquad a(n) \lesssim b(n) \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a(n)}{b(n)} \le 1$

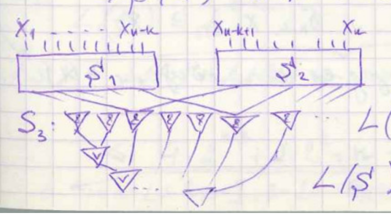
доказат: Пусть $f(x_1 \dots x_n) \in P_2$;

разложим f по $n-k$ переменным

$$f(x_1 \dots x_n) = \bigvee_{(\sigma_1 \dots \sigma_{n-k})} \underbrace{x_1^{\sigma_1} \dots x_{n-k}^{\sigma_{n-k}}}_{\text{реализ-ем все эти кон-ии}} f(\underbrace{\sigma_1 \dots \sigma_{n-k}, x_{n-k+1} \dots x_n}_{\text{реализ. все ф-ии от } k \text{ перемен}}) \quad (1)$$

$\Rightarrow S(f)$ строится из 3х схем: $S_1 = K_{n-k}$

$S_2 \in 2^k$ булевых ф-ий от $(x_{n-k+1} \dots x_n)$



$L(S_1) = /п12/ \le (2^{n-k+1} + n - k - 4)$

$L(S_2) \le 2^{2^k}(3\cdot 2^k + k - 5) \le 2^{2^k}(2^{k+2})$

S_3 - собирает S_1 и S_2

$L(S_3) \le 2^{n-k} + 2^{n-k} - 1 = 2^{n-k+1} - 1$

$L(S) \le 2^{n-k+1} - 1 + 2^{2^k+k+2} + n - k - 5 \le$

пусть при $n \to \infty$ $k = \lfloor \log_2 (n - 3\log_2 n) \rfloor$

$$\log(n - 3\log n) - 1 < k \le \log(n - 3\log n)$$

$$\frac{n - 3\log n}{2} < 2^k \le n - 3\log n; \quad 2^{2^k} \le \frac{2^n}{n^3}$$

$$L(S) \le 4 \cdot \frac{2^n \cdot 2}{n - 3\log n} + 4(n - 3\log n)\frac{2^n}{n^3} + \underbrace{n}_{k} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{8 \cdot 2^n}{n} + 4 \cdot \frac{2^n}{n^2} \lesssim 8 \cdot \frac{2^n}{n}$$

56 Лемма о нижней оценке сложности схем.

$N(k, n) \leqslant (32(n + k))^{n+k+3}$

Доказательство:

(в доказательстве ниже у функции N аргумены на других местах)

ЛЕММА 14

$$N(n,k) \le (32(n+k))^{n+k+3}$$

доказательство:

схема n' входов ($n' \le n$) k_1 ~~векторов~~ инвертор k_2 д-ов и кон-ов

1) вершин $n' + k_1 + k_2$ вершин

$\{x_1 \dots x_{n'}\}$ - приписаны верш $\subseteq \{x_1 \dots x_n\}$

Остальным приписаны отрицание, кон, диз-ия, а вершине с полуст. исх 0 приписана *

2) всего дуг $k_1 + 2k_2$ в инвертор вх 1 дуга
в $\forall$ конъюнктор/дизъюнктор 2 дуги

3) для $\forall$ верш $\exists$ ориентир путь из неё в верш, помеч. звездочкой

$S(n, n', k_1, k_2)$ - все схемы с этими 3мя св-ми,

их $N(n, n', k_1, k_2)$ - их число (таких схем)

$$\Rightarrow N(n,k) \le \sum_{\substack{n' \le n \\ k_1 + k_2 \le k}} N(n, n', k_1, k_2)$$

Оценим $N(n,n',k_1,k_2)$

$S\in S(n,n',k_1,k_2)$

Пусть G – граф, на котором ср. схема S

Рассмотрим основание графа (без ориентации) там могут быть циклы $\Rightarrow$ рассмотрим в нем остовное дерево

Зафиксир. в верш. $*$ корень $\Rightarrow$ это плоское корневое дерево

Т.о. схему из $S(n,n',k_1,k_2)$ можно получить след. алгоритмом:

1) Выбираем плоское корневое дерево на $n+k_1+k_2-1$ ребрах

(их число – число Каталана $\frac{1}{n+k_1+k_2}\binom{2(n+k_1+k_2-1)}{n+k_1+k_2-1} \le$

$\le 2^{n+k_1+k_2-1} < 4^{n+k_1+k_2}$

2) Корню приписываем $*$ и дуги (ребра) ориентируем

всего таких способов $\le 2^{n+k_1+k_2}$

3) выбираем $x_{i_1}\dots x_{i_{n'}}$ из $x_1\dots x_n$

их $\binom{n}{n'} \le 2^n$

4) одну из вершин символом

x_{i_1}... другую x_{i_2} и т.д. $x_{i_{n'}}$

способов это сделать $\le (n-k_1+k_2)^{n'} \le (n+k_1+k_2)^n$

5) k_1+k_2 вершин осталось надо среди них выбираем k_1 вершин пометим отрицанием, а потом делим на $\&$ и $\vee$

$\neg$: $\binom{k_1+k_2}{k_1} \le 2^{k_1+k_2}$

$\&, \vee$: 2^{k_2}

6) $(n+k_1+k_2-1)$ дуг, а нужно $(k_1+k_2\cdot 2)$ дуг (см 2)

$k_1+2k_2-n-k_1-k_2+1 \le k_2$ – надо еще провести, мы знаем 1 конец. всех дуг найти 1 конец. для всех дуг $\Rightarrow$ всего $\leqslant (n+k_1+k_2)^{k_2}$

$$(1\text{-}6) \Rightarrow N(n, n', k_1, k_2) \leqslant 4^{n+k_1+k_2} \cdot 2^{n+k_1+k_2} \cdot 2^n \cdot (n+k_1+k_2)^n \cdot 2^{k_1+k} \, 2^{k_2} \cdot (n+k_1+k_2)^{k_2}$$

$$\leqslant 32^{n+k_1+k_2} (n+k_1+k_2)^{n+k_1+k_2}$$

$$N(n,k) \leqslant \sum_{\substack{n' \leqslant n \\ k_1+k_2 \leqslant k}} 32^{n+k_1+k_2} (n+k_1+k_2)^{n+k_1+k_2} \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{n \, (k+1)^2}_{n+k \;\; n+k} 32^{n+k} \cdot (n+k)^{n+k} \leqslant$$

$$< (32(n+k))^{n+k+3}$$

□

57 Мощностной метод получения нижней оценки функции Шеннона для СФЭ

?

Для достаточно больших n

L(n) $> \frac{2^n}{n}$ и доля тех, ф-ций $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $L(f) \leqslant \frac{2^n}{n}$ стремится к 0 при $n \to \infty$

Доказательство:

Надо показать:

$\frac{N(\frac{2^n}{n}, n)}{2^{2^n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Из леммы о нижней оценке

$\log_2 N(\frac{2^n}{n}, n) - 2^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$(n + \frac{2^n}{n} + 3)\log_2(32(n + \frac{2^n}{n})) - 2^n \leqslant (n + \frac{2^n}{n} + 3)(5 + \log_2(\frac{2^{n+2}}{n})) - 2^n = (n + \frac{2^n}{n} + 3)(7 + n - \log_2 n) - 2^n =$
$7n + n^2 - n\log_2 n + 7 \cdot \frac{2^n}{n} + 2^n - \frac{2^n}{n}\log_2 n + 21 + 3n - 3\log_2 n - 2^n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$

□

58 Ограниченно-детерминированные функции. Способы их задания.

58.1 Ограниченно-детерминированные функциции

Информационные деревья эквивалентны, если они задают одинаковую функцию

$f(x)$ — ограниченно детерминированная ф-я, если в её информационном дереве конечное число попарно не эквивалентных поддеревьев

58.2 Способы их задания.

58.2.1 Определение

Рассмотрим $f(x)$ — о.д.ф веса r; $v_0, \ldots, v_{r-1:T_{v_0},\ldots,T_{v_{r-1}}}$ попарно неэквивалентны

Пометим все вершины дерева T_{v_0} числами $q_0, \ldots, q_{r-1}$

Т.о. дерево T_u имеет метку $q_j \Leftrightarrow T_u \, T_{v_j}$

58.2.2 Определение

$\{q_0, \ldots, q_{r-1}\} = Q$ — мн-во состояний о.д.ф. f

58.2.3 1. Усечённое информационное дерево

Усечённое информационное дерево — поддерево T_{v_0} т. ч. $\forall$ орцепь из v_0 в лист содержит ровно 2 вершины с 1-ой меткойи никакое поддерево этим св-вом не обладает

58.2.4 2. Диаграмма Мура

Отождествим все вершины с одинаковыми метками в усечённом информационном дереве, получим диаграмму о.д.ф.
Также необходимо задать начальную вершину

58.2.5 3. Канонические уравнения

$\delta : Q \times A \to Q$ — ф-я переходов
$\lambda : Q \times A \to B$ — ф-я выходов

$$\begin{cases} y(t) = \lambda(q(t), x(t)) \\ q(t+1) = \delta(q(t), x(t)) \\ q(q) = q_0 \end{cases}$$

59 Конечный детерминированный автомат с выходом. Автоматные функции, связь с ограниченно-детерминированными функциями. Лемма о периодической функции.

59.1 Конечный детерминированный автомат с выходом.

Он же автомат Мили: система $V = (A, B, Q, \delta, \lambda)$:
$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — входной алфавит
$B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ — выходной алфавит
$Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ — выходной алфавит
$\delta : Q \times A \to Q$ — ф-я переходов
$\lambda : Q \times A \to B$ — ф-я выходов

59.2 Автоматные функции, связь с ограниченно-детерминированными функциями.

Ф-я $f : A^{\text{inf}} \to B^{\text{inf}}$ — автоматная, если $\exists$ конечн. детерм. автомат её реализующий
Лемма:
ф-я автоматная $\Leftrightarrow$ она ограниченно детерминированная

59.3 Лемма о периодической функции

Опр: посл-сть $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2) \ldots) \in A$ — периодическая, если она период. с некоторого момента с периодом d

$\exists N \mid \forall t \geq N \quad \alpha(t+d) = \alpha(t)$

Лемма 25) (о периодич. посл-сти)

Конечн. авт с k сост. обр-ет период. посл с период. d в период. посл с периодом $k_1 \cdot d$ $\quad k_1$ - некот. число $\in N$, $k_1 \leq k$

Д-во: Определим автомат $V_{q_0} = (A, B, Q, \delta, \lambda)$

$|Q| = k, \; q_0 \in Q$

пусть он вычисляет автоматную ф-ию $f_V(x)$

рассмотрим $\alpha = \{\alpha(1) \ldots\} \in A^\infty$ и период. $(T=d)$

$\Rightarrow \exists\, n \mid \forall\, t \geq n \quad \alpha(t+d) = \alpha(t)$

$\Rightarrow \quad \alpha(N) = \alpha(N+d) = \ldots = \alpha(N+k\cdot d)$

$q(N), q(N+d), \ldots, q(N+k\cdot d)$ — соотв сост.

$(1+k)$-сост. $\to$ по пр. Дирихле $\exists\; i$ и $j \quad 0 \leq i \leq j \leq k$

$q(N+id) = q(N+jd) \qquad (1)$

Пусть $\quad k_1 = j - i$

$f_{V_{q_0}}(\alpha) - \beta = (\beta(1), \beta(2), \ldots) \in B^\infty$

Покажем инд-ей по t, что для $\forall\; t \geq N + id$

выполнено $\begin{cases} \beta(t) = \beta(t+k_1 d) \\ q(t) = q(t+k_1 d) \end{cases}$ (2) надо доказать $\Rightarrow$

базис) $\quad t = N + id$

$q(t) = q(N+id) \overset{(1)}{=} q(N+jd) =$

$= q(t - id + jd) = q(t + k_1 d)$

$\beta(t) = \lambda(q(t), \alpha(t)) = \lambda(q(t+k_1 d), \alpha(t+k_1 d)) =$

$= \beta(t + k_1 d)$

инд. шаг) Пусть (2) верно для некоторого $t \geq N + id$

рассмотрим "$t+1$"

$$q(t+1) = \delta(q(t), \alpha(t)) =$$
$$= \delta(q(t+k_1 d), \alpha(t+k_1 d)) =$$
$$= q(t+1+k_1 d)$$

$$\beta(t+1) = \lambda(q(t+1), \alpha(t+1)) =$$
$$= \lambda(q(t+1+k_1 d), \alpha(t+1+k_1 d)) =$$
$$= \beta(t+1+k_1 d)$$

$\Rightarrow \beta(t)$ — периодическая с периодом $k_1 d$ или с меньшим T) ч.т.д.

60 Схема из автоматных элементов. Теорема о не существовании конечных полных систем автоматных функций.

60.1 Схема из автоматных элементов.

Опр: P_A — мн-во всех автоматных ф-ий от $\forall$ числа переменных.

с вход и вых. алф A

рассмотрим сх. авт. ф-ий $F = \{f_1^{(n_1)}(x_1 \dots x_{n_1}) \dots f_k^{(n_k)}(x_1 \dots x_{n_k})\}$ — под-во в P_A

схема из авт. элементов в базисе F

$\to$ конечный граф без контуров с занум. ребрами, $\forall$ вершине без вх-вых переменная

с n_i вх. дугами приписыв f_i

(*)

60.2 Теорема о не существовании конечных полных систем автоматных функций.

Теорема 19; если $|A| \geqslant 2$ то в P_A не сущ. конечн полных систем авт. ф-ий

нужна:

Лемма 21: Пусть $k \in N$, F-конеч. сист ф-ий из P_A, причём кажд. из этих ф-ий имеет не более, чем k состояний

S-схема из авт. элем в базисе F и пусть

$f(x_1 \dots x_n)$ - авт. ф-ия, реализ-ая S

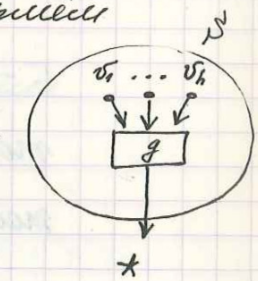
$\alpha_1 \dots \alpha_n \in A_k$ - посл. чисел. (замкнутых) ← см пред.

Тогда $f(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \beta \in A_k$

док-во: инд. по числу n - элементов в схеме S

$N=0$ - очевидно

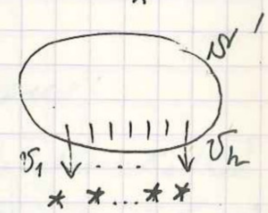
Пусть S с N автомат элементами, возьмём произвольный выход из S



- если совп. с входом - очевидно
- если нет, то это вых эл-та $g \in F$

Пусть у g h входов и r состояний

на $v_1 \dots v_h$ реализ-ся ф-ии $\varphi_1(x_1 \dots x_n)$ и ... $\varphi_h(x_1 \dots x_n)$



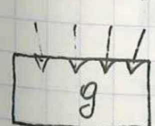
У схемы S' $(n-1)$ элементов, значит для неё можно применить инд. предпол

$\Rightarrow \exists\ \alpha_1 \dots \alpha_n \in A_k$

?} не имеют длит $> k$

рассмотр → $\begin{cases} \gamma_1 = \varphi_1(\alpha_1 \dots \alpha_n) \\ \vdots \\ \gamma_h = \varphi_h(\alpha_1 \dots \alpha_n) \end{cases}$

по инд. предпол $\gamma_1 \dots \gamma_n \in A_k$. Пусть min периоды $d_1 \dots d_h$ соответст



→ можно предст, что на него под-ся посл-сть

$(\varphi_1(t) \dots \varphi_h(t)) \in A_k$, период этой посл. есть $НОК(d_1 \dots d_h) = d$

по лемме о период посл.

$\beta = g(\overset{\circ}{\gamma})$ имеет период $\tau_1 d$ где $\tau_1 \le \tau \le k$

мы знаем, что $d_1 \dots d_k$ не имеют делителей, больших k $\Rightarrow d$ не имеет делителей больших k $\Rightarrow$

$\Rightarrow \tau_1 d$ тоже не имеет делит. больш k

$\Rightarrow \beta \in A_k$

ч.т.д.

доказательство теоремы:

Пусть F - конечн полн система автоматных функций. Обозначим из k - max число сост. ф-ий из F

Пусть p-простое и $p > k$, построим такую посл.

$\beta \in A^\infty \mid (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{p-1 \text{ раз}}, a_2, \underbrace{a_1 \dots a_1}_{p-1 \text{ раз}}, a_2, \dots\dots)$ - периодическая, min период - p

$a_1 \ne a_2 \quad a_1 a_2 \in A$

$\Rightarrow \beta \notin A_k$

$f \in P_A \quad f: A^\infty \to A^\infty$, зададим

$\forall \alpha \in A^\infty \quad f(\alpha) = \beta$ /обидим ф-ю... /

F-полна $\Rightarrow \exists S$ в базисе F, моделирующая f

тогда на вход S подадим $\gamma = (a_1 a_1 a_1 a_1 \dots)$

тогда по лемме 21: $\gamma \in A_k \Rightarrow$ на выходе будет посл-сть из A_k, т.е

$f(\gamma) \in A_k$, но мы знаем, что

$f(\gamma) = \beta \notin A_k$ ↯

ч.т.д.

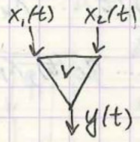
61 Схемы из автоматных элементов с использованием операции обратной связи. Реализация произвольной автоматной функции.

61.1 Схемы из автоматных элементов с использованием операции обратной связи.

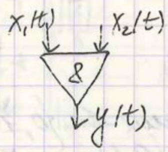
СХЕМЫ ИЗ Ф-ЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С Э-МИ ЗАДЕРЖКИ

1сл) $A = E = \{0,1\}$

функц. элемент — это автомат эл-нт с 1им сост



$$\begin{cases} y(t) = x_1(t) \vee x_2(t) \\ q(t+1) = q(t) \\ q(1) = 0 \end{cases} \qquad f_\vee(x_1 x_2) \in P_E$$

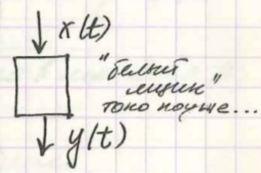


$$\begin{cases} y(t) = x_1(t) \,\&\, x_2(t) \\ q(t+1) = q(t) \\ q(1) = 0 \end{cases} \qquad f_\&(x_1 x_2) \in P_E$$

$$\begin{cases} y(t) = \overline{x(t)} \\ q(t+1) = q(t) \\ q(1) = 0 \end{cases} \qquad f_-(x_1) \in P_E$$

элемент задержки:

$$\vec{f}(x) \in P_E \qquad \begin{cases} y(t) = q(t) \\ q(t+1) = x(t) \\ q(1) = 0 \end{cases}$$



Пусть $f(x_1 \dots x_n) \in P_E$ иниц. авт., выч.-ая ф-цию

$V_{q_0} = (A, B, Q, \delta, \lambda)$

$B = E = \{0,1\}$ $\quad A = E^n = \{0,1\}^n$

$Q = \{q_1 \dots q_r\}$ $\quad q_0 \in Q$

ф-ия перехода:

$\delta : Q \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

ф-ия выхода:

$\lambda : Q \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

канонич. ур-ия:

$$\begin{cases} y(t) = \lambda(q(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ q(t+1) = \delta(q(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ q(1) = 0 \end{cases}$$

Пусть $l = \lceil \log_2 r \rceil$

Тогда занумеруем сост $q_1 \dots q_r$ наборами из 0 и 1 длины l

Причем $q_0 \to (0, 0 \dots 0)$

тогда $q(t)$ распадается на l ф-ий $q_1(t) \dots q_l(t)$
уже не сост, а ф-ии

Тогда нашу сист. можно переписать

$$\begin{cases} y(t) = \lambda^1(q_1(t) \dots q_l(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ (q_1(t+1), \dots, q_l(t+1)) = \tilde{\delta}^1(q_1(t) \dots q_l(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ (q_1(1) \dots q_l(1)) = (0 \dots 0) \end{cases}$$

Функции $\lambda^1, \delta_1^1 \dots \delta_1^l$ –
$/* \tilde{\delta}^1 = (\tilde{\delta}_1^1 \dots \tilde{\delta}_1^l) */$

– определены на под-ве мн-ва $\{0,1\}^{l+n}$
и имеют зн. на мн-ве $\{0,1\}$

→ частичные булевы функции

Доопределим их до б ф. $\lambda^2, \delta_1^2 \dots \delta_l^2$

$$\begin{cases} y(t) = \lambda^2(q_1(t) \dots q_l(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ q_1(t+1) = \delta_1^2(q_1(t) \dots q_l(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ \dots \\ q \dots \\ \dots \\ q_l(t+1) = \delta_l^2(q_1(t) \dots q_l(t), x_1(t) \dots x_n(t)) \\ q_1(1) = 0, \dots, q_l(1) = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}^2 = (\delta_1^2 \dots \delta_l^2)$$

что за автомат получился?

– инициальный автомат

$$V_{\tilde{q}_0}^2 = \{ \{0,1\}^n, \{0,1\}, \{0,1\}^l, \lambda^2, \tilde{\delta}^2 \}$$

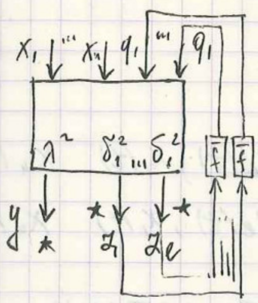
где $\lambda^2 \in \{0,1\}^l \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

$\tilde{\delta}^2 \in \{0,1\}^l \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^l$

$\tilde{q}_0 = (0 \dots 0)$

По постр. этот автомат $V^2_{\tilde q_0}$ реализует $f(x_1 \dots x_n)$

Строим схему S^1 из ф.ых элемент в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$
у неё $(n+l)$ входов с подписями $x_1 \dots x_n, q_1 \dots q_l$
и $(l+1)$ выход-в $\to y, z_1 \dots z_l$ при этом на y эта схема реализует $\lambda^2(q_1 \dots q_l, x_1 \dots x_n)$, а на выходе z_i реализ. $\tilde{\delta}_i^2(q_1 \dots q_l, x_1 \dots x_n)$



возьмем l элементов 1ой задержки и i-ый эл-нт $\begin{cases} \text{вход} - z_i \\ \text{выход} - q_i \end{cases} \forall i$

в S заменим все эл-ты $\&, \vee, \neg$ на $f_\vee, f_\&, f_-$

т.е. в схеме теперь все эл-ты автоматные

$\Rightarrow$ Получим обобщ. схему S' из авт эл-ов в базисе $\{f_\&, f_\vee, f_-, \vec f\}$

Опр: Построение в схеме контуров, пр-х ч/з элемент задер-жки — операция обратной связи

Если на входы подаём $x_1(t) \dots x_n(t)$, то в мом. вр t мы будем получать $y(t)$, $f(x_1 \dots x_n)$

- это надо д-ть индукц по t … (!) самим.

ТЕОРЕМА 20: $\forall$ авт. ф-ю из P_E можно реал. схой из авт. эл-ов в базисе $\{f_\&, f_\vee, f_-, \vec f\}$ с использ операц. обр. связи.

(обратное: замыкание по всем таким схемам дает P_E)

61.2 Реализация произвольной автоматной функции.

Для $\forall$ автоматной ф-ции $f \in P_A$ можно построить схему из автоматных элементов в базисе $f_\&, f_\vee, f_-, \overrightarrow{f}$ с использованием операции обр. связи, реализующую систему б.ф. $f_1, \dots, f_m \in P_E$ $(m = \lceil \log_2 |B| \rceil)$ значения которых однозначно опр. значение f

62 Конечные автоматы Мили и Мура, их эквивалентность.

62.1 Конечный автоматы Мили

Система $V = (A, B, Q, \delta, \lambda)$:
$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — входной алфавит
$B = \{b_1, \dots, b_m\}$ — выходной алфавит
$Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ — выходной алфавит
$\delta : Q \times A \to Q$ — ф-я переходов
$\lambda : Q \times A \to B$ — ф-я выходов

62.2 Конечный автомат Мура

Конечный детерминированный автомат — автомат Мура, если $\forall$ состояния q значение выходного символа на всех входящих в q дугах одинаково

62.3 эквивалентность автоматов Мили и Мура

$\forall$ автомата Мили, $\exists$ эквивалентный ему автомат Мура
Доказательство:
Дан произвольный автомат Мили: $(A, B, Q, \delta, \lambda)$
$A = (a_1, \dots, a_n)$
$Q = (q_1, \dots, q_k)$
Определим автомат Мура: $V_M = (A, B, Q_M, \delta_M, \mu)$
$Q_M = \{q_{ij} | i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n\} \cup \{q_{i0} | i = 1, \dots, k\}$
q_{i0} — исх. состояния
$q_{ij}(j > 1)$ — исх. дуги
$\delta_M : \delta_M(q_{i0}, a_r) = q_{ir}; i = 1, \dots, k$
$\delta_M(q_{ij}, a_r) = q_{lr}; l : \delta(q_i, a_j) = q_l$
$\mu : \mu(q_{io})$ — произвольные значения
$\mu : \mu(q_{ij}) = \lambda(q_i, a_j)$
Автомат построили, теперь необходимо обосновать:
1) $\forall i = 1, \dots, k \quad q_i \in Q$ автомата V неотличимо от $q_{i0} \in Q_M$ автомата V_M
2) $\forall i = 1, \dots, k; \forall j = 1, \dots, n \quad q_{ij} \in Q_M$ неотличимо от $q_{r0} \in Q_M \quad r : \delta(q_i, a_j) = q_r$
Обоснование:
1) В автомате V при состоянии q_i подадим на вход a_r, на выходе получим $\lambda(q_i, a_r)$
В автомате V_M при состоянии q_{i0} подадим на вход a_r
$\lambda_M(q_{i0}, a_r) = \mu(\delta_M(q_{io}, a_r)) = \mu(q_{ir}) = \lambda(q_i, a_r)$
2) б/д
□

63 Конечный детерминированный инициальный автомат без выходов. Пример языка, не распознаваемого конечным автоматом.

63.1 Конечный детерминированный инициальный автомат без выходов.

$V = (A, Q, \delta, q_0, F)$
A — входной алфавит
$Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ — мн-во состояний
$\delta : Q \times A \to Q$ — ф-я переходов
q_0 — нач. состояние
$F \subset Q$ — мн-во конечных состояний

63.2 Пример языка, не распознаваемого конечным автоматом.

ОПР 8.15.1 (События, элементарного события)**.**

Событие — *это слово в алфавите* A, *оно* элементарное*, если это буква из алфавита* A *или пустое слово* e.

Теорема 8.15.4 (Не представимые конечном автомате события)**.**

▷ Существуют события не представимые в конечном автомате, точнее: любая непериодическая последовательность — не представима в конечном автомате.

▷ Доказательство.

1. Существует событие, не представимое в конечном автомате: множество конечных автоматов — счётно, таким образом множество всех конечных автоматов — счётно (можно занумеровать все автоматы с n состояниями), но множество событий — несчётно, таким образом всех автоматов не хватит на все события, следовательно есть не представимые события.
2. Возьмём не периодическую последовательность α, состоящую из букв $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}, \ldots$ — бесконечная (например $\alpha = 10110111011110\ldots$) и пусть α — распознаётся некоторым автоматом S с n состояниями.
   - ✓ Если событие E состоит из всех начальных отрезков некоторой бесконечной последовательности, то будем говорить, что E — эта последовательность, тогда любой начальный кусок должен переводить в конечное состояние $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_j}$; $\delta(q_1, a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_j}) = q_{ij} \in F$. То есть при „переработке“ слова α — автомат проходит последовательность финальных состояний. Но множество финальных состояний — конечно, следовательно некоторые состояния автомат будет проходить повторно, то есть существует j (длина начального отрезка) и k, что $q_{i_j} = q_{i_{j+k}}$, то есть $\delta(q_{ij}, a_{i_{j+1}} a_{i_{j+2}} \ldots a_{i_{j+k}}) = q_{i_{j+k}}$ и притом все промежуточные состояния автомата S тоже лежат в F.
   - ✓ Тогда при входном слове $\alpha' = a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_j}(a_{i_{j+1}}, a_{i_{j+2}}, \ldots, a_{i_{j+k}})$ (часть в скобочках повторяется периодически) — бесконечное периодическое слово. Автомат S на нём проходит последовательность заключительных состояний, а это значит, что S распознаёт слово α'. Но один автомат не может распознавать два события, таким образом S не различает α и α', следовательно S не распознаёт α, но мы предполагали, что распознаёт — противоречие $\Rightarrow$ α не представимо в конечном автомате.

□

64 Конечные автоматы без выходов. Регулярные языки. Теорема о детерминизации.

64.1 Конечные автоматы без выходов.

64.1.1 Конечный детерминированный инициальный автомат без выходов

$V = (A, Q, \delta, q_0, F)$
A — входной алфавит
$Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ — мн-во состояний
$\delta : Q \times A \to Q$ — ф-я переходов
q_0 — нач. состояние
$F \subset Q$ — мн-во конечных состояний

64.1.2 Конечный недетерминированный автомат без выходов

$V = (A, Q, \delta, q_0, F)$
$\delta : Q \times (A \cup \{e\}) \to 2^Q$
$2^Q = \{S | S \subseteq Q\}$ — множество всех подмножеств Q

64.2 Регулярные языки.

1. $E_1 + E_2 = E_1 \cup E_2$ — объединение
2. $E_1 \cdot E_2 = \{\alpha_1 \alpha_2 | \alpha_1 \in E_1; \alpha_2 \in E_2\}$ — конкатенация

3. $E^* = \{e\} \cup E \cup E^2 \cup \ldots = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} E^i$ — итерация

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$
языки $\{e\}, \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$ — элементарные языки

Язык $E \subseteq A^*$ — регулярный, если он может быть получен из элементарных языков конечным числом операций объединения, конкатенации и итерации

64.3 Теорема о детерминизации.

Введём подобные обозначения

Конечным недетерминированным автоматом без выхода называется пятерка

$$\mathcal{A} = (A, Q, \Psi, q_1, F),$$

в которой

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}, \;\; n \geq 1,$	— входной алфавит;
$Q = \{q_1, \ldots, q_r\}, \;\; r \geq 1,$	— множество состояний;
$\Psi : A \times Q \to 2^Q \setminus \emptyset$	— функция переходов;
$q_1 \in Q$	— начальное состояние;
$F \subseteq Q$	— множество заключительных состояний.

Напомним, что $2^Q = \{S \mid S \subseteq Q\}$ — множество всех подмножеств множества Q.

Теорема 1. *Пусть A — конечный алфавит. Если множество L, $L \subseteq A^*$, принимается некоторым недетерминированным конечным автоматом без выхода $\mathcal{A}$, то найдется такой детерминированный конечный автомат без выхода $\mathcal{A}'$, который принимает это же множество L, т.е. $L = L(\mathcal{A}')$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = (A, Q, \Psi, q_1, F)$ — недетерминированный автомат, который принимает множество L.

Построим такой детерминированный автомат $\mathcal{A}' = (A, Q', \psi, q_1', F')$, что $L = L(\mathcal{A}')$.

Доказательство (продолжение). Положим, что

$Q' = 2^Q \setminus \emptyset$, т.е. множество состояний детерминированного автомата — множество непустых **подмножеств** множества состояний Q недетерминированного автомата;

$q'_1 = \{q_1\}$, т.е. **начальное** состояние детерминированного автомата — множество, состоящее из одного элемента q_1, начального состояния недетерминированного автомата;

$F' = \{S \subseteq 2^Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$ – множество **заключительных** состояний детерминированного автомата — множество тех подмножеств состояний недетерминированного автомата, которые содержат **хотя бы одно его заключительное** состояние.

Доказательство (продолжение). Теперь нам надо определить **функцию переходов** ψ.

Положим, что

$$\psi(a, S) = \bigcup_{q \in S} \Psi(a, q),$$

т.е. считывая букву $a \in A$ и находясь в состоянии $S \subseteq Q$, детерминированный автомат **однозначно** переходит в свое состояние S', которое есть **объединение** тех состояний, в которые может перейти недетерминированный автомат, считывая букву $a \in A$ и находясь в каждом из состояний $q \in S$

Доказательство (продолжение). Получаем, что если $\alpha \in A^*$, то после «прочтения» этого слова детерминированный автомат $\mathcal{A}'$ переходит в состояние, которое является множеством всех тех состояний, в которые может перейти недетерминированный автомат $\mathcal{A}$, после «прочтения» этого же слова α.

А когда недетерминированный автомат **принимает** слово α?

Тогда и только тогда, когда он после «прочтения» слова α может перейти в одно из заключительных состояний из F.

А мы положили **все** такие множества состояний и только их **заключительными** состояниями нашего детерминированного автомата.

Т.е. $L(\mathcal{A}') = L$.

$\square$

65 Конечные автоматы без выходов. Регулярные языки. Теорема анализа автоматов

65.1 Конечные автоматы без выходов.

См. пункт 64.1

65.2 Регулярные языки.

См. пункт 64.2

65.3 Теорема анализа автоматов

Событие = слово

Теорема 8.16.5 (Клини о регулярности представимого в конечном автомате события).

▷ Любое событие, представимое в конечном автомате, является регулярным.

▷ **Доказательство**.

- Определим по индукции событие E_{ij}^k:
  - ✓ $E_{ij}^0 = \{a \in A \big| \delta(q_i, a) = q_j\}$;
  - ✓ $E_{ij}^k = E_{ij}^{k-1} \vee E_{ik}^{k-1}(E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1}$;

  а так же определим и множество $M_{ij}^k = \{\alpha \in A^* \big| \delta(q_i, \alpha) = q_j\}$ и при переходе из q_i в q_j под действием α, автомат не проходит через состояния с номерами большими k. По доказываемой ниже лемме 8.16.5.1 $M_{ij}^k = E_{ij}^k$, таким образом событие M_{ij}^k — регулярное.
- Пусть у автомата n состояний и q_1 — начальное, а $q_{m_1}, q_{m_2}, \ldots, q_{m_p}$ — конечные состояния, тогда наш автомат представляет событие $M_{1m_1}^n \vee \ldots \vee M_{1m_p}^n$, которое является регулярным.

□

Лемма 8.16.5.1 (Соотношение в теореме Клини).

▷ $M_{ij}^k = E_{ij}^k$, то есть любое M_{ij}^k — регулярное, где M_{ij}^k и E_{ij}^k — определяемые в предыдущей теореме события.

▷ **Доказательство**.

- Докажем это равенство индукцией по k:
  - ✓ При $k = 0$ равенство очевидно;
  - ✓ Переход $k = r - 1 \to k = r$: пусть $M_{ij}^k = M_{ij}^{k-1} \vee \widetilde{M}_{ij}^k$, где $\widetilde{M}_{ij}^k$ — это те слова из M_{ij}^k, под действием которых автомат обязательно проходит через состояние q_k. По индукционному предположению $M_{ij}^{k-1} = E_{ij}^{k-1}$, тогда $M_{ij}^k = E_{ij}^{k-1} \vee \widetilde{M}_{ij}^k$ и осталось доказать, что $\widetilde{M}_{ij}^k = E_{ik}^{k-1}(E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1}$:
    - ⋆ Докажем, что $\widetilde{M}_{ij}^k \subseteq E_{ik}^{k-1}(E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1}$: пусть $\alpha \in \widetilde{M}_{ij}^k$, тогда α переводит автомат из состояния q_i в состояние q_j и при этом s раз ($s > 0$) проходит состояние q_k, таким образом $\alpha = \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s$, где все α_i заканчиваются на состоянии q_k, при этом $\alpha_0 \in E_{ik}^{k-1}$, $\alpha_s \in E_{kj}^{k-1}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1} \in (E_{kk}^{k-1})^* \to$ $\to \alpha \in E_{ik}^{k-1}(E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1}$.
    - ⋆ Осталось доказать, что $E_{ik}^{k-1}(E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1} \subseteq \widetilde{M}_{ij}^k$: выберем $\alpha \in E_{ik}^{k-1}(E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1}$, тогда должно выполняться $\alpha \in M_{ik}^{k-1}(M_{kk}^{k-1})^* M_{kj}^{k-1}$; из определения M_{uv}^{k-1} следует, что автомат на слове α не должен проходить через состояния с номером большим чем $(k-1)$ и должен будет пройти через состояние с номером $(k-1)$, так как в событии $M_{ik}^{k-1}(M_{kk}^{k-1})^* M_{kj}^{k-1}$ есть событие $(M_{kk}^{k-1})^*$.

□

□

66 Конечные автоматы без выходов. Регулярные языки. Теорема синтеза автоматов

66.1 Конечные автоматы без выходов.

См. пункт 64.1

66.2 Регулярные языки.

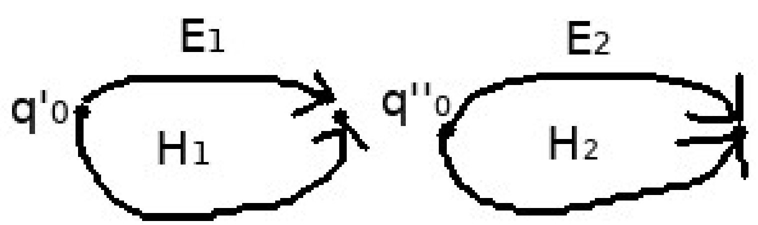
См. пункт 64.2

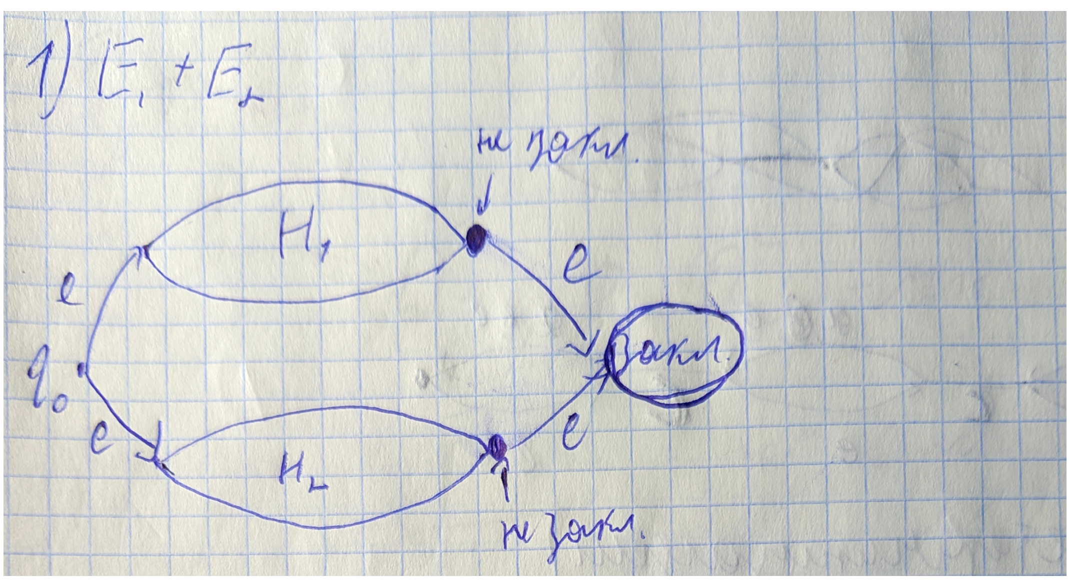
66.3 Теорема, необходимая для доказательства

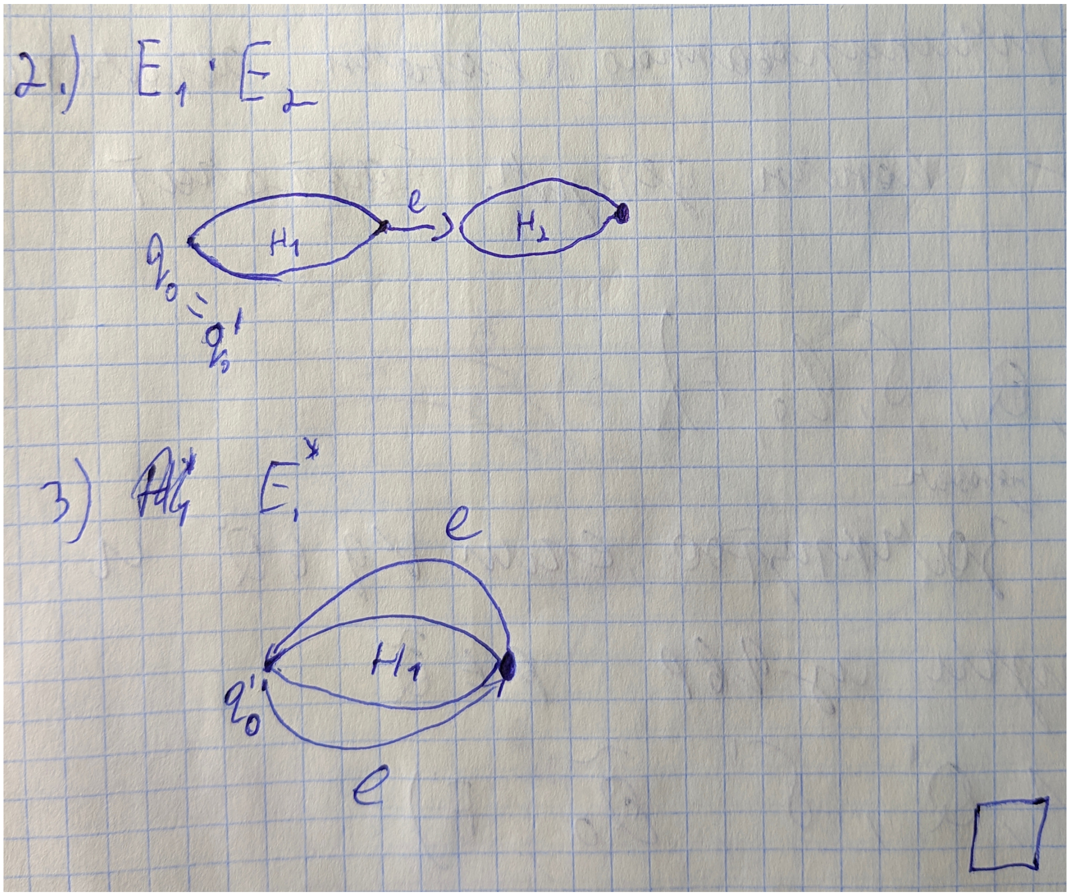
∀ регулярного языка ∃ недетерминированный конечный автомат с одним закл. состоянием распознающий его

Доказательство:
База: элементарный язык

Операции:
E_1, E_2 — языки, распознаваемые автоматом с одним закл. сост.







66.4 Теорема синтеза автоматов

$\forall$ регулярного языка E существует конечный автомат, распознающий этот язык

Доказательство:

Для регулярного языка E строим недетерминированный конечный автомат по доказанной выше теореме

Строим для полученного автомата эквивалентный ему детерминированный конечный автомат (по теореме о детерминизации)

□