1 Комбинаторные правила произведения и суммы. Число выборок объема k из n элементов.

1.1 Правило произведенеия

Если $a \in A$ можно выбрать n способами и для каждого такого выбора $b \in B$ можем выбрать m способами, то пару ab мы можем выбрать $n \cdot m$ способами.
$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times \dots \times |A_n|$

1.2 Правило суммы

Если элемент $a \in A$ может быть выбран n способами и независимо, а элемент $b \in B$ может быть выбран m способами, то выбор "a или b"может быть осуществлён $n + m$ способами.
$\forall$ разбиения конечного множества A $= A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$
$|A| = |A_1| + \dots + |A_n|$

1.3 Число выборок объема k из n элементов

1.3.1 Упорядоченная выборка объема k из n элементов с повторениями (число кортежей)

$\widetilde{A}_n^k = n^k$

1.3.2 Упорядоченная выборка объема k из n элементов без повторений (число k-размещений)

$[n]_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Доказательство:
Индукция по k:
$k = 1$: $[n]_1 = n$
$k > 1$: $[n]_k = [n]_{k-1}(n-k+1)$
□

1.3.3 Неупорядоченные выборки объема k из n элементов без повторений (сочетания)

$\forall\, n, k\ 0 \leqslant k \leqslant n$
$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{[n]_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Доказательство:
Индукция по n
$n = 1$: $\binom{1}{0} = 1$; $\binom{1}{1} = 1$
$n \geqslant 2$:
Если $k = n$, то $\binom{n}{n} = 1 = \frac{n!}{n! \cdot 0!}$
Если $k < n$, то
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
□

1.3.4 Неупорядоченные выборки объема k из n элементов с повторениями (число мультимножеств)

$\widehat{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m$
Доказательство:
$<\alpha_1, \dots \alpha_n>$ задаёт наше m-сочетание с повторениями

Сопоставим ему двоичный кортеж
$(\underbrace{0,\dots,0}_{\alpha_1},1,\underbrace{0,\dots,0}_{\alpha_2},1,\dots,1,\underbrace{0,\dots,0}_{\alpha_n})$

Знаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = m \Rightarrow$ длина кортежа $m+n-1$ и в нём $n-1$ единица. Таких кортежей C_{n+m-1}^{n-1}
$\square$

2 Число выборок объема k из n элементов. Комбинаторные тождества. Бином Ньютона.

2.1 Число выборок объема k из n элементов.

См. пункт 1.3

2.2 Комбинаторные тождества

2.2.1 Тождество Паскаля

$\forall n, k \ 1 \leqslant k < n$
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
Доказательство:
M — все k-подмножества n-множества
$|M| = \binom{n}{k}$
$M_1 \subseteq M$ — не попал элемент a
$M_2 \subseteq M$ — попал элемент a
$\Downarrow$
$M = M_1 \sqcup M_2 \Rightarrow |M| = |M_1| + |M_2| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
$\square$

2.2.2

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Доказательство:
$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$
$\square$

2.3 Бином Ньютона

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

Доказательство:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$\square$

2.4 Обобщение бинома Ньютона

$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum\limits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k;\alpha_i \geqslant 0;\alpha_1+\cdots+\alpha_k=n} P_n(\alpha_1 \ldots \alpha_k) x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$
$P_n(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$ — полиномиальный коэффициент
Доказательство:
Упражнение
$\square$

3 Мультимножества, их спецификации. Полиномиальные коэффициенты.

3.1 Мультимножества, их спецификации.

3.1.1 Мультимножество первичной спецификации

Рассмотрим X = $\{x_1, \ldots, x_n\}$
и кортеж $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ на $\mathbb{N}_0$ т. ч. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$
Совокупность из m элементов множества x, в которой x_i встречается α_i раз $\forall$ i — m-мультимножество первичной спецификации $[x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}]$ порождённое множеством X.

3.1.2 Мультимножество вторичной спецификации

Совокупность из m элементов множества X, в которой в $< \alpha_1, \ldots, \alpha_n > \beta_0$ нулей, β_1 единиц...
Запись: $[[0^{\beta_0}, 1^{\beta_1}, \ldots, m^{\beta_m}]]$
$\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + m\beta_m = m$

3.2 Полиномиальные коэффициенты

$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — количество m-кортежей из m-мультимножества
$\forall m, \alpha_1 \ldots \alpha_n$: $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$
$P_m(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$
Доказательство:
$(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n})$
$\alpha_1! \cdots \alpha_n! P_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = m!$
$\Downarrow$
$P_m = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$
$\square$

$P_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — полиномиальный коэффициент.
Обозначается: $\binom{m}{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$

4 Комбинаторное правило суммы. Формула включений и исключений.

4.1 Комбинаторное правило суммы.

См. пункт 1.3

4.2 Формула включений и исключений.

Пусть A - конечное конечное множество
$A_1 \dots A_n \subseteq A$
Тогда $|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k S_k,$
$S_0 = |A|$
$\forall k < 0 \ S_k = \sum\limits_{\{i_1 \dots i_k\} \subseteq \{1 \dots n\}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$
Доказательсво:
$x \in A$
пусть x попал ровно в t подмножеств $A_{j_1}, \dots A_{j_t}$
Вклад "x"
В $S_0 = |A|$ — 1 раз
В $S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |Ai|$ — t раз
В S_2 — $\binom{t}{2}$ раз

В S_3 — $\binom{t}{3}$ раз
$\vdots$
В S_t — $\binom{t}{t}$ раз
Т. о. $1 - t + \dbinom{t}{2} - \dbinom{t}{3} \dots + (-1)^t \dbinom{t}{t} = \sum\limits_{k=0}^{t} (-1)^k \dbinom{t}{k} = \begin{cases} 0; & t > 0 \\ 1; & t = 0 \end{cases}$
$\square$

5 Формула включений и исключений. Задача о беспорядках.

5.1 Формула включений и исключений.

См. пункт 4.2

5.2 Задача о беспорядках.

$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ — перестановка $(1, \dots, n)$.
Нужно найти число перестановок из n элементов множества, в которых никакой элемент не остался на месте.
Доказательство:
$(\forall i \quad \pi_i \neq i)$.
A - все перестановки. $\forall i \quad A_i \leftrightarrow \pi_i = i$.
$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ - искомое множество.
$|A| = n! \Rightarrow S_0 = n!$
$|A_i| = (n-1)!$

$S_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = n \cdot (n-1)!$

при $i \neq j$ $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = \binom{n}{2}(n-2)!$

$|A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}| = (n-k)!$

$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} (n-k)! = \binom{n}{k}(n-k)!$

$|A \setminus (A_i \cup \ldots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!}(n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

$\square$

6 Функция Эйлера, формула для функции Эйлера. Формула для числа сюръективных отображений.

6.1 Функция Эйлера, формула для функции Эйлера.

$\varphi(m)$ - функция Эйлера, $m \in N$. Кол-во натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m.

$\forall m \geq 2 \quad m = p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{l_n}$ — разложение на простые множители, тогда

$\varphi(m) = m \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

Доказательство:

$A = \{1 \ldots m\}$

A_i — числа A, которые дляется на p_i, $\forall i = 1 \ldots m$

$|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n|$

$|A| = m \quad \Rightarrow \quad S_0 = m$

$|A_i| = \frac{m}{p_i}$ $(p_i, 2p_i, 3p_i, \ldots, \frac{m}{p_i} \cdot p_i)$

$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{m}{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}$

$S_k = \sum_{i \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}$

$|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = m + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k S_k = m + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} = m(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}) =$

$m \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_n})$

$\square$

6.2 Формула для числа сюръективных отображений.

Число сюръективных отображений из m-множества X = $\{x_1, \ldots, x_m\}$ в n-множество Y=$\{y_1, \ldots, y_n\}$ равно $(-1)^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^m$

Доказательство:

A — все отображения $X \to Y$
A_i — все отображения $X \to Y \mid y_i$ — нет proообраза.
$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)$ — множество всех отображений, у которых 1-й элемент покрыт, ..., k-й элемент покрыт.
$|A| = n^m = S_0$
$|A_i| = (n-1)^m$
$S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| = C_n^1 |A_j| = n(n-1)^m$
$|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$
$S_2 = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| = C_n^2 |A_i \cap A_j| = C_n^2 (n-2)^m$
$\vdots$
$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$
$S_k = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leq n} (n-k)^m = C_n^k (n-k)^m$
$\vdots$
$S_n = 0$
$|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_k)| = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^m \overset{j=n-k}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} C_n^{n-j} j^m = (-1)^n \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^j C_n^j j^m$
$\square$

7 Число Стирлинга второго рода. Формула для числа Стирлинга второго рода. Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода.

7.1 Число Стирлинга второго рода.

Число стирлинга II рода $S(n,k)$ — количество неупорядоченных разбиений n-множества на k непустых подмножеств
Положим:
$S(n,0) = \begin{cases} 0; & n > 0 \\ 1; & n = 0 \end{cases}$
$S(n,k) = 0; \quad k > n$

7.2 Формула для числа Стирлинга второго рода.

$S(n,k) = \dfrac{(-1)^k}{k!} \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^i \dbinom{k}{i} i^n$
Доказательство:
Сюръективное отображение из n-множества в k-множество сопоставляется упорядоченному разбиению n-множества на k непустых подмножеств
Их $(-1)^k \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i i^n$
Делим на $k!$ и получаем число неупорядоченных разбиений.
$\square$

7.3 Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода.

$\forall k, n \in N, \quad 0 < k < n$
$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$
Доказательство:
M — все разбиения n-множества на k непересекающихся подмножеств.
В n-множестве зафиксируем элемент a
M_1 — множество разбиений, в котрых есть одноэлементное подмножество {a}
$M_2 = M \setminus M_1$ — все остальные разбиения
$|M| = S(n,k)$
$|M_1| = S(n-1,k-1)$ ($n-1$ т.к. один элемент уже учавствует в разбиении, $k-1$ т.к. одно множество в разбиении уже есть)
$|M_2| = kS(n-1,k)$ (разбиваем $n-1$-множество на k непустых подмножеств, и добавление элемента a в каждое из k подмножеств порождает разбиение изначального n-множества)
$M = M_1 \sqcup M_2$
$\Downarrow$
$|M| = |M_1| + |M_2|$
$\Downarrow$
$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$
$\square$

8 Числа Бела. Теорема о числе Бела.

8.1 Числа Бела.

Число Бела B_n — количество неупорядоченных разбиений n-множества на непустые подмножества.
$B_0 = S(0,0)$
$B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} S(n,k)$

8.2 Теорема о числе Бела.

$\forall n \geqslant 2$

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$$

Доказательство:
$B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} S(n,k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=k-1}^{n-1} S(i,k-1)\binom{n-1}{i} \overset{\text{поменяем знаки суммы местами}}{=} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sum\limits_{k=1}^{i+1} S(i,k-1)\binom{n-1}{i} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum\limits_{k=1}^{i+1} S(i,k-1) \overset{k-1=t}{=} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum\limits_{t=0}^{i} S(i,t) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i$
$\square$
На экзамене требуется комбинаторное доказательство, но какое есть.

9 Число Стирлинга первого рода. Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга первого рода. Связь между числами Стирлинга.

9.1 Число Стирлинга первого рода.

Число Стирлинга первого рода — количество неупорядоченных разбиений n-множества на k циклов
Обозначение: $s(n, k)$

9.2 Рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга первого рода.

Положим:
$s(n, 0) = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n > 0 \end{cases}$
$s(n, k) = 0; \quad k > n$

$\forall n, k \quad 0 < k < n$
$s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k)$
Доказательство:
Аналогично числам Стирлинга I рода
□

9.3 Связь между числами Стирлинга.

$$\forall n, m \in N \quad \sum_{k=1}^{n} S(n,k)s(k,m)(-1)^{k-m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} .$$

Доказательство:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)[x]_k = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \sum_{m=1}^{k} s(k,m)(-1)^{k-m}x^m = \sum_{m=1}^{n} x^m \sum_{k=1}^{n} S(n,k)s(k,m)(-1)^{k-m}x^m$$

Сравниваем степень при x^n : если $n = m$, то вторая сумма равна 1, иначе она должна быть равна 0.
□

10 Разложение x^n в базисе $[x]_k$. Разложение $[x]_k$ в базисе x^n. Связь между числами Стирлинга.

10.1 Разложение x^n в базисе $[x]_k$.

$$\forall n \in N : \quad x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)[x]_k.$$

Доказательство:
$[x]_{k+1} = [x]_k \cdot (x - k) = [x]_k \cdot x - [x]_k \cdot k$
$\Downarrow$
$(*) \quad x \cdot [x]_k = [x]_{k+1} + k \cdot [x]_k$
Индукция по n: $x^1 = [x]_1$ — очевидно

$$x^n = x \cdot x^{n-1} \overset{\text{по индукции}}{=} x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)[x]_k = \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k) \cdot [x]_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k) \cdot k \cdot [x]_k \overset{t=k+1 \text{ в первой сумме}}{=}$$

$= \sum_{t=2}^{n} S(n-1,t-1)[x]_t + \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)\cdot k\cdot[x]_k$ Первая сумма равна 0 при t=1, вторая сумма равна 0 при k=n. Получается:

$\sum_{k=1}^{n}(S(n-1,k-1)+kS(n-1,k))[x]_k = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)[x]_k$

□

10.2 Разложение $[x]_k$ в базисе x^n.

$\forall n \in \mathbb{N}$

$[x]_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}s(n,k)x^k$

Доказательство:

Аналогично пункту 10.1

□

10.3 Связь между числами Стирлинга.

См. пункт 9.3

11 Разбиения чисел. Диаграмма Ферре. Свойства числа разбиений. Равенство числа разбиений на различные слагаемые и на нечетные слагаемые.

11.1 Разбиения чисел.

Разбиение числа n на натуральные слагаемые - это представление n в виде суммы $x_1+x_2+\cdots+x_k, \quad x_i \in \mathbb{Z}_+$ Количество упорядоченных разбиений: $\binom{n-1}{k-1}$

Неупорядоченные разбиения:

$p(n)$ — количество разбиений числа n на слагаемые

$p(n,k)$ — количество разбиений числа n на k слагаемых

11.2 Диаграмма Ферре.

Диаграмма Ферре разбиения $n = x_1+\cdots+x_k. \quad x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_k$ — k строк точек, в i-ой строке x_i точек в первых x_i столбцах.

11.3 Свойства числа разбиений.

11.3.1

$p(0,0) = p(0)$

$p(n,1) = 1$

$p(n,n) = 1$

$p(n,k) = 0; \quad k > n$

11.3.2

1. $p(n,k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, наибольшее из которых равно k.
2. $p(n+k,k)$ равно числу разбиений n на натуральные слагаемые, не превосходящие k.
3. Число разбиений $n-k$ ровно на $m-1$ слагаемое, не превосходящих k равно числу разбиений $n-m$ на $k-1$ слагаемое, не превосходящих m.

Доказательство:

1. Транспозиция диаграммы Ферре.
2. Рассмотреть диаграмму без первого столбца.
3. Тоже через диаграмму Ферре.

□

11.3.3 Рекуррентное соотношение

$\forall n,k \mid 0<k<n$

$p(n,k)=\sum_{i=1}^{k} p(n-k,i)$

Доказательство:

$(*) \quad (n-k)=(x_1-1)+(x_2-1)+\ldots+(x_k-1)$

$y_i=x_i-1$

$n-k=y_1+y_2+\ldots+y_k, \quad y_1\geq y_2\geq\ldots\geq y_k\geq 0$

Если $s: y_s>0, y_{s+1}=y_{s+2}=\ldots=y_n=0$, тогда (*) - это разбиение $n-k$ на k слагаемых, которых у нас $p(n-k,s)$.

$p(n,k)=\sum_{s=1}^{k} p(n-k,s)$

□

11.4 Равенство числа разбиений на различные слагаемые и на нечетные слагаемые.

Количество разбиений n на различные слагаемые равно количеству разбиений n на нечётные слагаемые.

Доказательство:

Q_n - множество разбиений n на различные слагаемые, T_n - множество разбиений на нечётные слагаемые.

Докажем, что $|Q_n|=|T_n|$, построим для этого биекцию.

$f: Q_n \to T_n$

$n=x_1+x_2+\ldots+x_k, \quad x_1>x_2>\ldots>x_k$

$\forall i \quad x_i=2^{t_i}\cdot y_i, \quad y_i$ - нечётно

$n=\underbrace{y_1+\ldots+y_1}_{2^{t_1}}+\underbrace{y_2+\ldots+y_2}_{2^{t_2}}+\ldots+\underbrace{y_k+\ldots+y_k}_{2^{t_k}}.$

$h: T_n \to Q_n$

$n=\underbrace{y_1+\ldots+y_1}_{d_1}+\ldots+\underbrace{y_s+\ldots+y_s}_{d_s}, \quad y_i\neq y_j, i\neq j.$

$\forall i \quad d_i$ - однозначно раскладывается в степени двойки.

$d_i = 2^{\sigma_{i,1}} + 2^{\sigma_{i,2}} + \ldots + 2^{\sigma_{i,m_i}}; \quad \sigma_{i,1} > \sigma_{i,2} > \ldots > \sigma_{i,m_i}$
$n = 2^{\sigma_{1,1}}y_1 + 2^{\sigma_{1,2}}y_1 + \ldots + 2^{\sigma_{i,m_i}} + \ldots + 2^{\sigma_{s,1}}y_s + \ldots + 2^{\sigma_{s,m_s}}y_s.$

$h = f^{-1}$ — биекция.
$\square$

12 Производящие функции и их свойства. Элементарные производящие функции.

12.1 Производящие функции и их свойства.

12.1.1 Определение

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A(t)$ — производящая функция последовательноси $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

12.1.2 Свойства

Пусть $A(t)$ и $B(t)$ - производящие функции последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ соответственно. Тогда:

1. $\alpha A(t) + \beta B(t)$ - производящая функция. $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=0}^{\infty}$.
2. $A(t) \cdot B(t)$ - производящая функция последовательности $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}, d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$
3. $t^m A(t)$ - производящая функция. $\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, a_0, a_1, \ldots$
4. $A(ct)$ - производящая функция последовательности $\{c^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$
5. $tA'(t)$ - $\{n \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$
6. $\displaystyle\int_0^t \frac{A(t) - a_0}{t} dt$ - производящая функция последовательности $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
7. $\dfrac{A(t)}{1-t}$ - производящая функция последовательности $\left\{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\right\}_{n=0}^{\infty}$

12.2 Элементарные производящие функции.

1. $(1+T)^{\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n; \quad \alpha \in \mathbb{C}$
2. $e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!}$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{1-t}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^n}{n}$
4. $\sin(t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{f^{2n+1}}{(2n+1)!}$

5. $\cos(t)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{f^{2n}}{(2n)!}$

13 Числа Каталана, производящая функция последовательности чисел Каталана, формула для числа Каталана.

13.1 Числа Каталана

$\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$: $\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_0 \end{cases}$

C_n — Количество правильных скобочных последовательностей с n парами скобок.

13.2 Производящая функция последовательности чисел Каталана

$C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$

Доказательство:

$C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(C_{k-1} \cdot C_0 + \ldots + C_0 \cdot C_{k-1})t^k = 1 + t\sum_{k=0}^{\infty}(C_k \cdot C_0 + \ldots + C_0 \cdot C_k)t^k = 1 + t(C(t))^2$

$\Downarrow$

$tC^2(t) - C(t) + 1 = 0$

$\Downarrow$

$2tC_{1/2}(t) = 1 \pm \sqrt{1-4t}$

т.к. при $t = 0$ $C(t) = 1$

$\Downarrow$

$C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$

$\square$

13.3 Формула для числа Каталана

n-ое число Каталана: $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

Доказательство:

$(1-4t)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4t)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4t)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-3}{2})}{n!}(-4t)^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot 2^n \cdot t^n}{n!} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot 2\cdot 4\cdots(2n-2)}{n!(n-1)!2^{n-1}}2^n t^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}2t^n = \sqrt{1-4t}$

$C(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}t^n$

т.о. $C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

$\square$

14 Числа Фибоначчи, производящая функция последовательности чисел Фибоначчи, формула для числа Фибоначчи.

14.1 Числа Фибоначчи

$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$: $\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; \quad n \geqslant 2 \end{cases}$

14.2 Производящая функция последовательности чисел Фибоначчи

Производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет вид $F(t) = \dfrac{1}{1-t-t^2}$

Доказательство:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty}(f_{n-1} + f_{n-2})t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1}t^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}t^n =$$

$$= 1 + t\sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}t^{n-1} + t^2\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}t^{n-2} = 1 + tF(t) + t^2F(t) \Rightarrow F(t) = \frac{1}{1-t-t^2}$$

□

14.3 Формула для числа Фибоначчи

$$\forall n \geq 0 \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Доказательство:

$t^2 + t - 1 = 0$

$t_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$t_2 = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$

$$F(t) = \frac{-1}{t^2+t-1} = \frac{-1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{t-t_2} - \frac{1}{t-t_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}t_1}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{t_1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{t_2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}t_1}\left(1 + \frac{t}{t_1} + \frac{t^2}{t_1^2} + \dots\right) - \frac{1}{\sqrt{5}t_2}\left(1 + \frac{t}{t_2} + \frac{t^2}{t_2^2} + \dots\right)$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{t_1^{n+1}} - \frac{1}{t_2^{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{t_2^{n+1} - t_1^{n+1}}{t_1^{n+1} \cdot t_2^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}}(t_2^{n+1} - t_1^{n+1}) =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

□

15 Линейная однородная возвратная последовательность, ее производящая функция. Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения.

15.1 Линейная однородная возвратная последовательность

Линейное однородное рекуррентное соотношение порядка k для последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ выглядит:
$(*)\quad a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = 0, \quad p_k \neq 0.$
Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет $(*)\,\forall n$ она наз-ся однородной возвратной последовательностью порядка k.

15.2 Производящая функция однородной возвратной последовательности

Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет (*) $\forall n,\ n \geq 0$, то производящая функция $A(t)$ этой последовательности имеет вид:
$A(t) = \dfrac{C(t)}{K(t)}$, где $K(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots + p_k t^k$, $C(t)$ - многочлен степени, не превосходящей $k-1$.
Доказательство:
Пусть $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

$$\begin{aligned}
C(t) = A(t)\cdot K(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \quad & \ldots \quad + a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \\
+ \ldots + a_0 p_1 t + a_1 p_1 t^2 + \quad & \ldots \quad + a_{k-1} p_1 t^k + a_k p_1 t^{k+1} + \\
+ \ldots + a_0 p_2 t^2 + \quad & \ldots \quad + a_{k-2} p_2 t^k + a_{k-1} p_2 t^{k+1} + \\
+ \quad & \ldots \quad + a_0 p_k t^k + a_1 p_k t^{k+1} + \ldots
\end{aligned}$$

(Все столбцы после первого многоточия будут зануляться, а до первого в сумме образуют $C(t)$.)
□

15.3 Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения.

$f(t) = t^k + p_1 t^{k-1} + \ldots + p_k$ — характеристический многочлен для (*).
$f(t) = (t-\lambda_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, \sum r_i = k$

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ - линейная однородная возвратная последовательность удовлетворяющая (*). Тогда $a_n = \sum\limits_{i=1}^{s} Q_i(n)\lambda_i^n$, где $\lambda_1, \ldots \lambda_s$ — корни характеристического многчлена кратного $r_1, \ldots, r_s$ соответственно.
$Q_i(t)$ - многочлен степени, не превосходящей $r_i - 1$, который находится из начальных условий.
Доказательство:
$K(t) = t^k f\left(\dfrac{1}{t}\right) = t^k \prod\limits_{i=1}^{s}\left(\dfrac{1}{t} - \lambda_i\right)^{r_i} = \prod\limits_{i=1}^{s}\left(\dfrac{1}{t} - t\lambda_i\right)^{r_i}$
$A(t) = \dfrac{C(t)}{\prod\limits_{i=1}^{s}(1-t\lambda_i)^{r_i}} = \sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{r_i}\dfrac{B_{ij}}{(1-t\lambda_i)^j}$
$(1-t\lambda_i)^{-j} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{-j}{n}(-\lambda_i t)^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-j)(-j-1)\ldots(-j-n+1)}{n!}(-1)^n\lambda_i^n t^n =$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j(j+1)\dots(j+n-1)}{n!}\lambda_i^n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{n}\lambda_i^n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{j+n-1}{j-1}\lambda_i^n t^n$$

$$A(t) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r_i} B_{ij}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{j+n-1}{j-1}\lambda_i^n t^n\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{r_i}\lambda_i^n \sum_{i=1}^{s} B_{ij}\binom{j+n-1}{j-1}\right)t^n.$$

При этом $\binom{j+n-1}{j-1}$ - многолчен степени, не превышающей $n-j+1$.

□

16 Формула Стирлинга. Асимптотика биномиальных коэффициентов.

16.1 Формула Стирлинга

$n! \underset{n\to\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

Доказательство:

Без доказательства

□

16.2 Асимптотика биномиальных коэффициентов.

1. $k^2 = o(n) \Rightarrow C_n^k \underset{n\to\infty}{\backsim} \frac{n^k}{k!}$

2. $k^3 = o(n^2) \Rightarrow C_n^k \underset{n\to\infty}{\backsim} \frac{n^k}{k!}e^{\frac{-k(k-1)}{2n}} \overset{\text{т.к. } \frac{k}{2n}\to 0}{\backsim} \frac{n^k}{k!}e^{-\frac{k^2}{2n}}$

Доказательство:

$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leqslant \frac{n^k}{k!}$

$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) = \frac{n^k}{k!}e^{\ln(1-\frac{1}{n})+\ln(1-\frac{2}{n})+\dots+\ln(1-\frac{k-1}{n})} =$

$\frac{n^k}{k!}e^{-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{2n^2})-\frac{2}{n}+O(\frac{4}{2n^2})+\dots+-\frac{k-1}{n}+O(\frac{(k-1)^2}{2n^2})} = \frac{n^k}{k!}e^{\frac{k(k-1)}{2n}+O(\frac{k^3}{n^2})}$

Расмотрим сумму:

$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(k-1)^2}{n^2} \leqslant \frac{k(k-1)^2}{n^2}$ (все слагаемые заменили на последнее)

$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(k-1)^2}{n^2} \geqslant \frac{(\frac{k}{2})^2}{n^2}\frac{k}{2}$ (половину слагаемых заменили на $\frac{(\frac{k}{2})^2}{n^2}$)

Из доказанного следуют оба пункта

□

17 Граф, мультиграф, псевдограф. Изоморфизм графов, автоморфизм. Лемма о рукопожатиях. Орграф, связный, сильно связный орграф.

17.1 Граф, мультиграф, псевдограф.

V - непустое конечное множество (конечное)

$V^{(2)}$ - множество всех двухэлементных подмножеств множества V.

Графом называется пара множеств $(V, E) = G$, где $E \subseteq V^{(2)}$

Элементы V - вершины,
Элементы E - рёбра.
VG - множество вершин
EG - множество рёбер.
$|VG|$ - порядок графа.
$|G| = |VG| = n \Rightarrow G - n$-граф
$|G| = n, \quad |EG| = m \Rightarrow G -\ (n, m)$ - граф.

17.2 Изоморфизм графов, автоморфизм.

$G = (V, E), \quad G' = (V', E')$.
G и G' изоморфны ($G \cong G'$), если $\exists$ биекция $\varphi : V \to V' : \quad uv \in E \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E'$.
φ - изоморфизм графов G и G'. Если $G = G'$, то φ - автоморфизм графа (V и V' совпадают).

17.3 Лемма о рукопожатиях.

Пусть G - произвольный граф, тогда $\sum\limits_{v \in VG} \deg_G(v) = 2|EG|$.

Доказательство:
Возьмем пустой граф. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер.
$\square$

17.4 Орграф, связный, сильно связный орграф.

Орграф - это пара $G = (V, D)$, где V - непустое множество, а $D \subseteq V \times V$. Элементы V - вершины, элементы D - дуги.
$(v, u) \in D$. vu - выходит из v и входит в u.

$x, y \in VG$ — связные в G, если в G $\exists$ простая (x, y) - цепь.
Граф G — связный, если $\forall$ 2 вершины связные.

Вершина v достижима из u, если $\exists$ ориентированная (u, v)-цепь.
Орграф G — сильносвязанный, если любая вершинка достижима из любой другой.

18 Подграф, порожденный подграф, остовный подграф. Объединение, соединение, умножение графов. Связный граф, компонента связности.

18.1 Подграф, порожденный подграф, остовный подграф.

Граф H называется подграфом графа G, если $VH \subseteq VG$, $EG \subseteq EG$.
Если $VH = VG$, то H - остовный подграф.

18.1.1 Порожденные подграфы

Пусть $U \subseteq VG \quad D = \{uv \mid u, v \in U, \quad uv \in EG\ \}$.
Тогда $G(U) = (U, D)$ - подграф, порождённый мно-вом вершин U.

Пусть $D \subseteq EG, \quad U$ - множество концов рёбер из D.
Тогда $G[D] = (U, D)$ - подргаф, порождённый мно-вом рёбер D.

18.2 Объединение, соединение, умножение графов.

18.2.1 Объединение графов

Граф H называется объединением графов G и F, если $VH = VG \cup VF$, $EH = EG \cup EF$, будем обозначать $H = G \cup F$.
Если $VG \cap VG \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad G \cup F$ - дизъюнктивное объедиение.

18.2.2 Соединение графов

Соединение графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ $(V_1 \cap V_2 = \varnothing)$ — граф $G_1 + G_2$ — дизъюнктивное объединения G_1 и G_2 и добавление ребёр $v_1 v_2 = v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.

18.2.3 Умножение графов.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.
Произведение $G = G_1 \times G_2$ называется $G = (V_1 \times V_2, E)$.
(v_1, v_2) смежные с $(u_1, u_2) \quad \Leftrightarrow \quad$ или $(v_1 = u_1, \quad v_2 u_2 \in E_2)$ или $(v_2 = u_2, \quad v_1 u_1 \in E_1)$.

18.3 Связный граф, компонента связности.

$x, y \in VG$ — связные в G, если в G $\exists$ простая (x, y) - цепь.
Граф G — связный, если $\forall$ 2 вершины связные.
Максимальный по включению вершин и рёбер связный подграф графа G назывется компонентной связности графа G.

19 Дополнение к графу, реберный граф. Двудольность, критерий двудольности.

19.1 Дополнение к графу, реберный граф.

Дополнение к графу $G = (V, E)$ есть $\overline{Q} = (V, \overline{E})$, где $\overline{E} = \{uv \mid uv \notin E, \quad u, v \in V\}$.
Для графа $G = (V, E)$ рёберным графом называется $L(G), \quad VL(G) = EG$, $e_1 e_2 \in EL(G) \Leftrightarrow e_1$ и e_2 смежные в G.

19.2 Двудольность, критерий двудольности.

19.3 Двудольность

Граф $G = (V, E)$ - двудольный, если $\exists$ разбиение $V = A \sqcup B : G[A]$ и $G[B]$ — пустые

19.4 Критерий двудольности Кенига

G - двудольный $\Leftrightarrow$ в G нет циклов нечётной длины.
Доказательство:

$\Rightarrow$) C - цикл в G. $C = v_1v_2v_3v_4...v_e, v_{e+1} = v_1$. $V = A \cup B$, $v_1, v_3, v_5... \in A$, $v_2, v_4, v_6 \in B$, т.е. все нечётные в A, все чётные B.

$\Leftarrow$) Пусть G — связный
$v \in VG$
Разбиваем множество $VG = A \sqcup B$
$A = \{u \in VG | d(v, u)\text{—чётно}\}$
$B = \{u \in VG | d(v, u)\text{—нечётно}\}$
Надо показать что в A и B нет рёбер.
От противного. $e = uw \in EG$, $u, w \in$ одному мно-ву (A или B). По построение $u, w \neq v$. Рассмотрим кратчаяшие цепи: U - кратчайшая (u, v)-цепь, W - кратчайшая (w, v)-цепь. Длины этих цепей имеют одинаковую чётность. Пусть v_1 - последняя, начиная с v, общая вершина цепей U, W. (v, v_1) - подцепи цепей U и W имеют одинаковую длину $\Rightarrow$ (v_1, u)-подцепь цепи U и (v_1, w)-подцепь цепи W имеют одинаковую чётность длины. Их объединение с ребром uw даёт цикл нечётной длины. Противоречие. Следовательно, граф является двудольным.

□

20 Оценки числа ребер графа. Эксцентриситет, радиус, диаметр, центр графа.

20.1 Оценки числа ребер графа.

$\forall(n, m)$-графа с k компонентами связности верны два неравенства: $n - k \leq m \leq \binom{n-k+1}{2}$, причём обе оценки достижимы.

Доказательство.

верхняя) Пусть G - n-граф с k компонентами связности с максимальным число рёбер. Очевидно, что G - дизъюнктное объединение полных графов ($G = K_{n_1} \cup ... \cup K_{n_k}$). Пусть $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_k$. Покажем, что $n_2 = n_3 = ... = n_k = 1$.
Пусть не так ($n_2 > 1$). Рассмотрим $v \in K_{n_2}$. Рассмотрим граф $G' = (K_{n_1} + v) \cup (K_{n_2} - v) \cup K_{n_3} \cup ... \cup K_{n_k}$ - удалили $n_2 - 1$ рёбёр. Добавили n_1 ребёр. Получили, что в G' добавили больше, чем удалили. Противоречие к предположению в самом начале.
В G у нас $\binom{n-k+1}{2}$ рёбер.

нижняя) Индукция по числу рёбер:
$m = 0$ - всё очевидно, равенство есть.
Пусть $m > 0$ и для всех графов с меньшим число рёбер наше неравенство верно.
Рассмотрим (n, m)-граф G с k комп. связности. Возьмём некоторое $e \in EG$ и безжалостно удалим его: $G_1 = G - e$. G_1 - $(n, m-1)$-граф с k_1 компонентами связности. По лемме 2.7 из лекций имеет, что $k_1 \leq k+1$. По индукционному предположению $n - k_1 \leq m - 1 \Rightarrow m \geq n - k_1 + 1 \geq n - k + 1 - 1 = n - k$.
Пример такого графа: $G = O_{k-1} \cup P_{n-k}$.

□

20.2 Эксцентриситет, радиус, диаметр, центр графа.

Эксцентриситет вершины v: $e(v) = \max\limits_{u \in VG} d(v, u)$.
Радиус графа G: $r(G) = \min\limits_{v \in VG} e(v)$.
Диаметр графа G: $d(G) = \max\limits_{v \in VG} e(v)$.
Вершина $v \in VG \mid e(v) = r(G)$ называется **центральной** вершиной.
Множество всех центральных вершин - **центр графа**.

21 Лес, дерево, характеризация деревьев.

21.1 Определения

Ациклический граф — **лес**
Ациклический связный граф — **дерево**.

21.2 Характеризация деревьев

(n, m)-граф G. Следующие условия эквивалентны:

1. G — дерево.
2. G — связный, $m = n - 1$
3. G — ациклический, $m = n - 1$
4. В графе G любые 2 вершины связаны единственной простой цепью.
5. G — ациклический и добавление одного нового ребра приводит к появлению ровно одного простого цикла.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$) Докажем, что в любом (n, m)-дереве $m = n - 1$. Индукцией по m:
$m = 0 \Rightarrow n = 1$.
Пусть G - произвольное (n, m)-дерево и для всех деревьев с меньшим числом рёбер наше равенство выполняется.
Возьмём некоторое ребро $e \in EG$. e не принадлежит никакому циклу, т.к. в нашем графе их нет $\overset{\text{лемма 2.7 из лекций}}{\Rightarrow}$ в $G - e$ ровно 2 компонентны связности G_1 и G_2 - деревья (n_1, m_1) и (n_2, m_2). По индукционному предположению $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$. Тогда для нашего графа имеем $m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$.

$2 \Rightarrow 3$) Пусть в графе G есть цикл, рассмотрим некоторе ребро e из этого цикла $\overset{\text{лемма 2.7 из лекций}}{\Rightarrow}$ $G - e$ — связный и является $(n, n-2)$-графом, что противоречит оценке числа рёбер (пункт 20.1).

$3 \Rightarrow 4$) Докажем, что G — связный
G — ациклический $\Rightarrow G$ — лес.
Пусть в G k компонент связности
Каждая компонента связности $G_1, ..., G_k$ — дерево
G_i — (n_i, m_i)-дерево
Т.к. доказано, что из $1 \Rightarrow 2$, то $m_i = n_i - 1$
$n - 1 = m = m_1 + \dots + m_k = n_1 + ... + n_k - k = n - k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ граф связен
$\Rightarrow \forall u, v \quad \exists (u, v)$ — цепь.
Пусть $\exists u, v$ т.ч. в G есть две различные (u, v)-простые цепи L_1 и L_2

Пусть x — последняя вершина общего начала путей L_1 и L_2 начиная с u, y - следующая на цепи L_1 $\Rightarrow G - xy$ - остаётся связным $\overset{\text{лемма 2.7 из лекций}}{\Rightarrow}$ xy принадлежит некоторому циклу $\Rightarrow$ противоречие с ацикличностью.

$4 \Rightarrow 5)$ В любом цикле 2 вершины соединены не менее 2 различными путями $\Rightarrow$ в G нет циклов.
Пусть $u, v \in VG$ и $uv \notin EG$, тогда единственная (u, v)-цепь в G вместе с ребром uv даёт единственный простой цикл

$5 \Rightarrow 1)$ Докажем, что G связный.
От противного: пусть G не связен. Пусть u и v в разных компонентах связности $\Rightarrow G + uv$ не имеет циклов (по лемме 2.7 из лекций). Противоречие.

□

22 Центр дерева. Остовное дерево, остов.

22.1 Центр дерева.

Центр любого дерева состоит из одной или двух смежных вершин.

Доказательство.
$n = 1$ — очевидно.
$n = 2$ — аналогично.
Пусть T - дерево порядка $n \geq 2$. Рассмотрим дерево T', которое получается из T удалением всех висячих вершин.
$\forall v \in T' \quad \mathrm{e}_{T'}(v) = \mathrm{e}_T(v) - 1 \Rightarrow$ центры T и T' совпали.
Продолжаем, пока порядок дерева > 2. □

22.2 Остовное дерево, остов.

G — связный. Оставной подрграф графа G, явля-ся деревом, называется, как ни странно, оставным деревом графа G.
Оставной подграф графа G, являющийся дизъюнктным объединением оставным деревьев его компонент связности - **остов** графа G.

23 Код Прюфера помеченного дерева. Теорема Кэли.

23.1 Код Прюфера помеченного дерева.

Пусть T - помеченное дерево $VT = \{1, ..., n\}$. Сопоставим ему $a = (a_1, ..., a_{n-1})$:

1. Полагаем $T_0 = T$

2. $\forall i \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$ в T_{i-1} находим висячую вершину x_i с наименьшим номером. a_i — номер её соседа
$T_i = T_{i-1} - x_i$
$(a_1, \ldots, a_{n-1})$ — код Прюфера

23.2 Теорема Прюфера

(не знаю, нужна ли она в этом билете)
Если $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \{1, 2, \dots, n\}^{n-1}$, $a_{n-1} = n$, то $\exists!$ помеченное дерево T, для которого a — код Прюфера.
Доказательство:
Построим $b = (b_1, \dots, b_{n-1})$
$b_i = \min\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1}\}$
рассмотрим граф T т.ч.
$VT = \{1, 2, \dots, n\}$,
$ET = \{(a_i, b_i) | 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$
Докажем, что:
1) T — дерево
2) a — код Прюфера дерева T

1) Рассмотрим последовательность $T_0 = T, T_1, \dots, T_{n-1}$
$T_i = T_{i-1} - b_i$; $1 \leqslant i \leqslant n-1$
$T_{n-1} = K_1$ — дерево
По построению $\{1, 2, \dots, n\} = \{b_1, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\}$
$\forall i \quad VT_{i-1} = \{b_i, b_{i+1}, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\}$
(*) $ET_{i-1} \subseteq \{a_i b_i, a_{i+1} b_{i+1}, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$
$b_i \neq b_j; \quad i \neq j$
$b_i \notin \{a_i, \dots, a_{n-1}\}$
b_i — висячая в T_{i-1}
$T_i = T_{i-1} - b_i$
Если T_i дерево, то T_{i-1} тоже дерево
T_n дерево $\Rightarrow T_0$ дерево $\Rightarrow T$ дерево
Т.к. T_{i-1} дерево, то из (*) следует, что
$ET_{i-1} = \{a_i b_i, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$
Получается $\forall x \in VT_{i-1} \quad deg_{T_{i-1}} x$ — количество появлений x в $b_i, \dots, b_{n-1}, a_i, \dots, a_{n-1}$
$deg_{T_{i-1}} x > 1 \Leftrightarrow x \in \{a_i, \dots, a_{n-1}\}$
$\Downarrow$
$\{b_i, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{a_i, \dots, a_{n-2}\}$ — множество висячих вершин в T_{i-1}
$a_i = \min\{1, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-2}\} = \min\{b_1, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-2}\} = \min\{b_i, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}\} \setminus \{a_i, \dots, a_{n-2}\}$
b_i — висячая вершина в T_{i-1} с наименьшим номером $\Rightarrow$ Декодирование даёт исходное дерево
$\square$

23.3 Теорема Кэли.

Число помеченных деревьев на n вершинах равно n^{n-2}

24 Числа вершинной и реберной связности, их связь. Точка сочленения, характеризация точек сочленения. Мост, характеризация мостов.

24.1 Числа вершинной и реберной связности, их связь.

Число вершинной связности æ(G) — наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу, либо одновершинному.

Число рёберной связности $\lambda(G)$ графа G порядка $n > 1$ — минимальное количество рёбер, удаление которых делает граф несвязным.
$\delta(G) = \min\limits_{v \in VG}(deg(v)$.
$\forall G \quad æ(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$
Доказательство:
оценка сверху: берём нашу вершинку с минимальной степенью и удаляем все смежные ей рёбра.
оценка снизу:
для несвязного графа $0 \leqslant 0$
для графа с мостом: $\lambda(G) = 1$. и хотя бы одна вершина соединённая с мостом является точкой сочленения (если e — мост в связном графе, то его концы — либо точки сочленения, либо висячая вершина)
Если $\lambda(G) > 1$:
$E_1 \subseteq EG, |E_1| = \lambda$, $G - E_1$ – не связен.
Пусть $e \in E_1$, $E_1' = E_1 - \{e\}$
Для каждого ребра из E_1' выберем один конец не инцедентный e и удалим его.
Получим множество $V_1 = \{h | h \in E_1 \setminus \{e\}$ и h не инц. e$\}$
$|V_1| \leqslant |E_1| - 1$
$G' = G - V_1$
1) $G' = G - V_1$ — не связный $\Rightarrow æ(G) \leqslant |V_1| \leqslant |E_1| - 1 = \lambda(G) - 1$
2) $G' = G - V_1$ — связный $\Rightarrow e$ — мост в $G' \Rightarrow æ(G') = \lambda(G') = 1 \Rightarrow \exists$ точка сочленения x в G'.
$V_1 \cup \{x\}$: $G - (V_1 \cup \{x\})$ — несвязный
$æ(G) \leqslant |V_1 \cup \{x\}| = |V_1| + 1 \leqslant |E_1| = \lambda(G)$
□

24.2 Точка сочленения, характеризация точек сочленения.

$x \in VG$ — точка сочленения, если в $G - x$ больше компонент связности чемв G
Характеризация точек сочленения. В связном графе следующие утверждения эквивалентны:

1. x — точка сочленения графа G
2. $\exists$ разбиение $VG \setminus \{x\} = U \sqcup W : \forall a \in U, \forall b \in W \forall$ простая (a, b)-цепь содержит x.
3. $\exists a, b \in VG \setminus \{x\}$: любая простая (a, b)-цепь содержит x.

Доказательство:
$1 \Rightarrow 2$) $G - v$ – не свзяный. A – одна компонента, B – остальные. значит, для любой пары вершин из эти множеств не существует простой цепи, следовательно в G любая цепь проходит через v
$2 \Rightarrow 3$) Очевидно
$3 \Rightarrow 1$) Если удалить x, то все простые цепи (a, b)-цепи исчезнут и a,b никак не будут связаны $\Rightarrow$ граф будет несвязным $\Rightarrow x$ — точка сочленения
□

24.3 Мост, характеризация мостов.

$e \in EG$ — мост, если $G - e$ имеет больше компонент связности чем G
Характеризация мостов. В связном графе следующие утверждения эквивалентны:

1. e — мост в G
2. $\exists$ разбиение $VG = U \sqcup W : \forall a \in U, \forall b \in W \forall$ простая (a, b)-цепь содержит e.
3. $\exists a, b \in VG \setminus \{x\}$: любая простая (a, b)-цепь содержит e.

4. ребро e не принадлежит простому циклу

Доказательство:
$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ — аналогично характеризации точек сочленения
$1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ — лемма 2.7 из лекций
$\square$

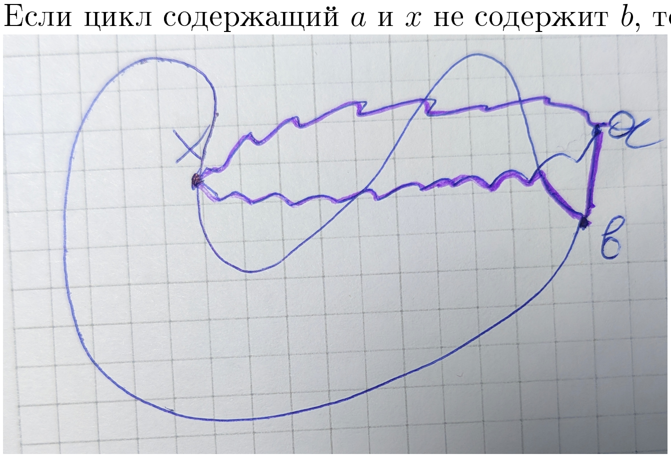
25 Характеризация двусвязных графов. Блок, bc-дерево графа.

25.1 Характеризация двусвязных графов.

Для связного графа порядка $n > 2$ эквивалентны:

1. G — двусвязный
2. $\forall$ 2 вершины принадлежат простому циклу
3. $\forall$ вершина и $\forall$ ребро принадлежат простому циклу
4. $\forall$ 2 ребра принадлежат простому циклу
5. $\forall$ двух вершин $x, y \in VG$, $\forall e \in EG$ существует простая (x, y)-цепь содержащая e
6. $\forall\ x, y, z \in VG$ $\exists$ простая (x, y)-цепь содержащая z

Доказательство:
$1 \Rightarrow 2)$
Пусть $x, y \in VG$;
u — множество всех вершин графа G, принадлежащих хотя бы одному простому циклу проходящему через x
Если $y \in u \Rightarrow \square$
Если $y \notin u \Rightarrow u \subset VG \Rightarrow VG \setminus u \neq \emptyset$
Но т.к. G — связный $\Rightarrow \exists \quad a \in u$ и $b \in VG \setminus u$ т.ч. $ab \in EG$
По лемме 2.14 из лекций. $\exists$ простая (x, b)-цепь не содержащая a
По построению $\exists$ простой цикл C проходящий через x, a
Пусть z — 1-я, начиная от b общая вершина (b, x)-цепи из цикла C
Тогда (b, z) — подцепь, ребро (a, b) и часть цикла C между вершинами z и a, содержащая xm образуют простой цикл $\Rightarrow b \in u$. Противоречие. $\Rightarrow$ y обязан принадлежать u
$2 \Rightarrow 3)$
Есть вершина x и ребро ab
Если цикл содержащий a и x содержит и b, то доказано
Если цикл содержащий a и x не содержит b, то см. рисунок



Остальное в качестве упражнения.
□

26 Теорема Менгера

Минимальное число вершин, разделяющих две несмежные вершины u и v равно максимальному числу попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей.

Доказательство. (не вникал в доказательство, но идейно оно такое же как и на лекциях)
Наибольшее число попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей не больше минимального числа вершин, разделяющих u и v (поскольку можем удалить по вершине в каждой из этих (u, v)-цепей и разделить т.о. вершины u и v).
Докажем, что если наименьшее число вершин, разделяющих u и v в графе G равно k, то существует k попарно непересекающихся простых цепей.
При $k = 1$ — очевидно.
Пусть для некоторого $k > 1$ — неверно. Пусть t — наименьшее такое k. F — граф с наименьшим числом вершин, для которого не выполнено условие (которое после слова "доказать") для t.
Будем удалять из F рёбра до тех пор, пока не получим некоторый граф G такой, что $\forall e \in EG$ для разделения u и v в графе G надо t вершин, а в графе $G - e$ надо $t - 1$ вершину.
Т.о. имеется G и t такие, что теорема верна для

1. $\forall k < t$.
2. $\forall$ графа с числом вершин, меньшим, чем $|VG|$.
3. $\forall$ графа $G - e \, \forall e \in EG$.

(док-во ниже) □

26.1 Утверждение 1

В гарфе G нет вершин, которые одновременно смежны с u и v.

Доказательство. Пусть w смежно с u и v. Тогда в $G - w$ для разделения u и v достаточно $t - 1$ вершины по пункту 2 в $G - w$ существует $t - 1$ попарно непересекающихся простых (u, v)-цепей. Добавляем цепь $u, w, v \Rightarrow t$ попарно непересекающихся простых (u, v) цепей в графе G. Противоречие с выбором графа G. □

26.2 Утверждение 2

Любое мно-во вершин W, разделяющих u и v, $|W| = t$ смежно либо с u, либо с v.

Доказательство. Цепь, соединяющую u с нек...

□

Доказательство. (продолжение)
Рассмотрим некоторе $e = xy \in EG$. По условию 3 в $G - e$ существует $t - 1$ вершина, разделяющая u и v.
В $(G - S_e)$ существует (u, v)-цепь и каждая точка цепи содержит ребро e.
$(**) \forall e = xy :\Rightarrow$ 1) $x, y \notin S_e$
2) если $x \neq u, x \neq v$, то $S_e \cup \{x\}$ разделяет u и v в G.
Рассмотрим кратчайшую (u, v)-цепь в графе G. $P = u, x_1, x_2, x_3, ..., x_m, v$.
Рассмотрим $e = x_1 x_2$. Из утвержджения 1 $x_2 \neq v$.

$S_e = \{y_1, ..., y_{t-1}\}$
$W_1 = S_e \cup \{x_1\}$ по (**) разделяет u и v. По утверждению 1, $x_1, v \notin EG$. По утверждению 2, W_1 смежно с u. $\{y_1, ..., yt-1\}$ смежно с u и не смежно с v.
$W_2 = S_e \cup \{x_2\}$ по (**) разделяет u и v. По утверждению 2 x_2 смежно с u. Противорчеие с выбором кратчайшей цепи □

27 Независимое множество. Оценки числа независимости. Вершинное покрытие. Связь чисел покрытия и независимости.

27.1 Независимое множество.

Мно-во вершин $W \subseteq VG$ называется **независимым**, если $\forall w, u \in W \quad uw \notin EG$.
Независимое мно-во **тупиковое (максимальное)**, если оно не является собственным подмножеством другого независимого мно-ва.
Независимое мно-во наибольшей мощности - **наибольшее** назависимое мно-во. Мощность такого мно-ва называется **числом независимости** $\alpha_0(G)$

27.2 Оценки числа независимости.

$\forall G \quad \alpha_0(G) \geq \sum\limits_{v \in VG} (1 + \deg(v))^{-1}$

Доказательство. Пусть $G = K_n$. Тогда $\alpha_0(K_n) = 1$.
$\sum\limits_{v \in VG} n^{-1} = \frac{n}{n} = 1$.
Индукция по числу вершин для $G \neq K_n$:
$|VG| \leq 2$ - всё очевидно.
Пусть $|VG| = n \geq 3$, для любого графа с меньшим число вершин теорема верна, $G \neq K_n$.
Выбираем x - вершинка G наименьшей степени. Т.к. $G \neq K_n$, то $x \cup N(x) \neq VG$.
$G' = G - x - N(x)$. По индукционному предположению в G' : $\alpha_0(G') \geq \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg(v))^{-1}$.
Пусть $M' \subseteq VG'$, M' - независимо в G', $|M'| = \alpha_0(G')$.
$v \cup M'$ - независимо в $G \quad \Rightarrow \quad \alpha_0(G) \geq |x \cup M'| = \alpha_0(G') + 1$.
$\forall v \in VG' \quad \deg_G(v) \geq \deg_{G'}(v)$
$\sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_{G'} v)^{-1} \geq \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_G v)^{-1}$
$\forall v \in N(x) \quad \deg_G(v) \geq \deg_G(x)$ (т.к. x — вершина с наименьшей степенью в G)
$\sum\limits_{v \in N(x)} (1 + \deg_G(v))^{-1} \leq \sum\limits_{v \in N(x)} (\deg_G(x) + 1)^{-1} = \frac{\deg_G(x)}{\deg_G(x) + 1}$
Берём неравенства 1 и 3 строчками выше и подставляем их куда-то в начало:
$\alpha_0(G) \geq 1 + \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} \geq \frac{\deg_G(x) + 1}{\deg_G(x) + 1} + \sum\limits_{v \in VG'} (1 + \deg_G(v))^{-1} = \frac{\deg_G(x)}{1 + \deg_G(x)} + (1 + \deg_G(x))^{-1} + \sum\limits_{v \in VG'} (1+\deg_G(v))^{-1} \geq \sum\limits_{v \in N(x)} (\deg_G(v)+1)^{-1} + (1+\deg_G(x))^{-1} + \sum\limits_{v \in VG'} (1+\deg_G(v))^{-1} = \sum\limits_{v \in VG} (1+\deg_G(v))^{-1}$ □

27.3 Вершинное покрытие.

Вершина покрывет вёбра, инциндентные ей. Мно-во вершин, покрывающих все рёбра - **покрытие** (вершинное покрытие).

Покрытие W - тупиковое (минимальное), если $\forall V \subset W$, V - не покрытие. Покрытие наименьшей мощности - наименьшее покрытие и его мощность Обозначается $\beta_0(G)$ - число покрытия графа G.

27.4 Связь чисел покрытия и независимости.

Для $\forall$ G: $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |VG|$
Доказательство:
Берём S — независимое: $|S| = \alpha_0(G)$
По лемме 2.19 из лекций ($S \subseteq VG$ — независимое $\Leftrightarrow VG \setminus S$ — вершинное покрытие)
$VG \setminus S$ — вершинное покрытие
$\beta_0(G) \leqslant |VG \setminus S| = |VG| - \alpha_0(G) \Rightarrow \alpha_0(G) + \beta_0(G) \leqslant |VG|$

Теперь, пусть P — вершинное покрытие: $|P| = \beta_0(G)$
По лемме 2.19 $VG \setminus P$ — независимое множество
$\alpha_0(G) \geqslant |VG \setminus P| = |VG| - \beta_0(G) \Rightarrow \alpha_0(G) + \beta_0(G) \geqslant |VG|$
$\Downarrow$
$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |VG|$
$\square$

28 Паросочетание, реберное покрытие. Теорема о связи чисел паросочетания и реберного покрытия. Совершенное паросочетание.

28.1 Паросочетание, реберное покрытие.

$M \subseteq EG$ — паросочетание, если $\forall e, h \in M$ e, h — не смежны.
Наибольшее по мощности паросочетание — наибольшее паросочетание. Его мощность — число паросочетания $\alpha_1(G)$
$Q \subseteq EG$ — рёберное покрытие, если оно покрывает все вершины
Наименьшее по мощности рёберное покрытие — мин. рёберное покрытие. Его мощность — число рёберного покрытия $\beta_1(G)$

28.2 Теорема о связи чисел паросочетания и реберного покрытия.

$\forall$ G без изолированных вершин
$\alpha_1(G) + \beta_1(G) = |VG|$
Доказательство:
Пусть $\alpha_1 = \alpha_1(G)$, $\beta_1 = \beta_1(G)$, $|VG| = n$
Докажем: $\alpha_1 + \beta_1 \leq n \quad \alpha_1 + \beta_1 \geq n$

1. Пусть M - наибольшее паросочетание в G. Пусть V' - мно-во вершин, не покрытых M.
   Либо V' - пусто, либо V' - независимое мно-во вершин (т.к. иначе M — не наибольшее паросочетание). Для каждой вершины из V' выберем ребро, инциндентне ей. получаем E'. (если $V' = \varnothing \Rightarrow E' = \varnothing$).
   Поскольку V' - независимо, то $|E'| = |V'|$.
   По построению V': $|V'| = n - 2 \cdot \alpha_1$
   $E' \cup M$ - рёберное покрытие $\beta_1 \leq |E' \cup M| = |E'| + |M| = n - 2\alpha_1 + \alpha_1 = n - \alpha_1$.

2. Пусть P - наименьшее рёберное покрыти графа G. $G' = G[P]$. В G' нет циклов (были бы, могли бы убрать одно ребро)

Получаем, что G' — ациклический граф, т.е. G' — лес

Каждая компонента связности графа G' - дерево. Пусть t компонент связности и число рёбер $k_1, k_2, ..., k_t$.

В каждой компоненте выберем по одному ребру $\Rightarrow$ получим паросочетания M. $|M| = t$.

Имеем, $t \leq \alpha_1$. Получаем, что $n = \sum_{i=1}^{t}(k_i + 1) = t + \sum_{i=1}^{t} k_i = t + \beta_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$.

□

28.3 Совершенное паросочетание.

Совершенное паросочитание — паросочитание, являющееся рёберным покрытием.

29 Терема Кенига о числе паросочетания для двудольных графов. Теорема Кенига о (0,1)-матрицах.

29.1 Терема Кенига о числе паросочетания для двудольных графов.

Для любого двудольного графа G: $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$.

Доказательство. Пусть G — граф. Докажем, что $\alpha_1(G) \geq \beta_0(G)$.
Обозначин $\beta_0 = \beta_0(G)$
Удаляем рёбра из G пока не получим некоторый граф G': $\beta_0(G') = \beta_0$ и $\forall e \in EG' \quad \beta_0(G' - e) = \beta_0 - 1$.

Докажем утверждение, что в G' нет смежных рёбер.
Пусть это гон и в $\exists e, g \in EG'$: e и g смежны в G', общая вершина v. В графе $G' - e$ существуют вершин. покрытие $S_e \quad |S_e| = \beta_0 - 1$ и концы ребра e не лежат в S_e.
В графе $G' - g$ существует вершинное покрытие S_g и концы ребра g не принадлежат S_g.
Рассмотрим порождённый подграф графа G': $G'' = G'[\{v\} \cup (S_e \setminus S_g) \cup (S_g \setminus S_e)]$
$|S_e \cap S_g| = t \quad |VG''| = 1 + \beta_0 - 1 - t + \beta_0 - 1 - t = 1 + 2(\beta_0 - 1) - 2t$
G'' подграф графа $G \quad \Rightarrow \quad G''$ - двудольный.
Пусть A - меньшая доля графа G.
$|A| \leq \frac{1}{2}|VG''| = \beta_0 - 1 - t$. A - вершинное покрытие G''.
Покажем, что $A' = A \cup (S_e \cup S_g)$ - вершинное покрытие G'.
Возьмём произвольное ребро. Пусть $h \in EG'$.

1. $h \in \{e, g\}$
   $e, g \in EG'' \Rightarrow e, g$ покрыты мно-ом A, а значит и A'.

2. $h \notin \{e, g\}$
   Тогда h покрывается как S_e, так и S_g.

   (a) $x \in S_g \quad x \in S_e \Rightarrow x \in S_g \cap S_e \Rightarrow$ покр. A'.

   (b) один конец приндалежит $S_e \setminus S_g$, а другой: $S_g \setminus S_e \Rightarrow h \in EG'' \Rightarrow h$ покрывается A.

Следовательно $\beta_0(G') \leq |A'| \leq |A| + |S_e \cap S_g| \leq \beta_0 - 1 - t + t = \beta_0 - 1$ - противоречие с выбором графа G' (противоречие с тем, что существуют 2 смежных ребра).

Граф G' состоит из независимых рёбер. $\beta_0(G') = \alpha_1(G') \quad \beta_0(G) = \beta_0(G') = \alpha_1(G') \leq \alpha_1(G)$.
Из леммы 2.23($\forall G \quad \alpha_1(G) \leqslant \beta_0(G)$, это верно т.к. чтобы покрыть все рёбра, надо покрыть и все рёбра паросочетания) следует, что $\beta_0(G) = \alpha_1(G)$. □

29.2 Теорема Кенига о (0,1)-матрицах.

Для любой (0, 1)-матриц максимальное число единиц, никакие 2 из которых не стоят в одном столбце и в одной строке, равно минимальному числу строк и столбцов, содержащих все единицы.

Доказательство. Пусть G - двудольный граф, с долями $\{v_1, v_2 ... v_n\}$, $\{u_1 ... u_n\}$. Матрица смежности двудольного графа G:

$A(G) = (a_{ij}) \mid a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i u_j \in EG \\ 0, & else \end{cases}$.

0	A
A^T	0

Биекция между двудольным графом с долями мощности n и m и множеством (0,1)-матриц размера $n \times m$.

Максимальное число единиц, никакие две из которых не стоят в одной строке или столбце равно $\alpha_1(G)$ для соотв. графа G.

Минимальное число строк и столбцов, содержащих единицы равно $\beta_0(G)$ для соотв. графа G. □

30 Терема Холла о паросочетаниях.

Пусть $G = (A, B, E)$ - двудольный граф.

В G существует паросочетание, покр. $A \quad \Leftrightarrow \quad \forall X \subseteq A \quad |N(X)| \geq |X|$

Доказательство.

$\Rightarrow$) Если существет $X \subsetneq A : \quad |N(X)| < |X|$, тогда паросоч., покр. X не существует: не хватит рёбер. А значит нет паросч., покрывающего A.

$\Leftarrow$) Док-во индукцией по числу вершин в доле A:
Если $|A| = 1$ - очевидно верно
Пусть $|A| \geq 2$. Рассмотрим 2 случая:

1. $\forall X \subset A \quad |X| < |N(X)|$
   Выберем ребро $uv \in E \quad v \in A, u \in B$.
   Рассмотрим новый граф $G' = G - v - u$. Обозначим $A' = A \setminus \{v\}$.
   Пусть $X \subseteq A'$. $|X| < |N_G(X)|$, $|N_{G'}(X)| \geq |N_G(X)| - 1$ (-1 на случай, если y входит в $N(X)$)
   $|X| < |N_{G'}(X)| + 1 \Rightarrow |X| \leq |N_{G'}(X)|$.
   По индукционному предположению в графу G' существуют паросчитания, покрывающие $A' \quad \Rightarrow \quad$ объединим его с ребром $vu \quad \Rightarrow \quad$ получаем паросчитание в G покр. A.
2. $\exists A' \subset A \quad |A'| = |N(A')|$
   Рассмотрим 2 порождённых подграфа:
   $G_1 = G[A' \cup N(A')]$
   $G_2 = G - A' - N_G(A')$
   Покажем, что G_1 и G_2 удовлетворяют условиям теоремы.
   В G_1: $\forall X \subseteq A' \quad N_G(X) = N_{G'}(X)$
   $|X| \leq |N_G(X)| = |N_{G'}(X)| \quad \Rightarrow \quad G_1$ удовлетворяет условию теоремы.

   Пусть $X \subseteq A \setminus A'$. Рассмотрим $X \cup A'$ в G.
   $|X \cup A'| \leq |N_G(X \cup A')| \leq |N_{G_2}(X)| + |N_G(A')|$
   Вспоминаем, что $|A' \cup X| = |X| + |A'|$
   $|A'| = |N_G(A')| \quad \Rightarrow \quad |X| \leq |N_{G_2}(X)|$
   По индукционному предположению в G_1 существует паросоч., покрывающ. A', в G_2 существует паросоч., покрывающ. $A \setminus A'$. Следовательно, их объединение - искомое паросоч., покр. A.

□

31 Теорема Фробениуса о свадьбах. Системы различных представителей, теорема Холла о СРП.

31.1 Теорема Фробениуса о свадьбах.

Двудольный граф $G = (A, B, E)$ имеет совершенное паросочетание $\Leftrightarrow$ $|A| = |B|$ и для любого $X \subseteq A \quad |N_G(X)| \geq |X|$.

Доказательство:

В G $\exists$ совершенное паросочетание $\Leftrightarrow$ $|A| = |B|$ и $\exists$ паросочетание покр. $A \underset{\text{по т. Холла}}{\Leftrightarrow}$
$|A| = |B|$ и $\forall X \subseteq A \quad |N(X)| \leqslant |X|$
□

31.2 Системы различных представителей

$A = \{a_1, \dots, a_m\}$ — некоторое множество
$S = \{S_1, \dots, S_n\}$; $S_i \subseteq A \quad \forall i$; — семейство подмножеств множества A
$x = (x_1, \dots, x_n)$ — система различных представителей для S если:
1) $x_i \in S_i \quad \forall i$;
2) $x_i \neq x_j; \quad i \neq j$

31.3 теорема Холла о СРП.

$S = (S_1, \dots, S_n)$ имеет СРП $\Leftrightarrow \forall k; \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad \forall \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\} \quad |S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}| \leqslant k$

Доказательство:

$\Rightarrow$) Если посмотреть на определение, станет очевидно.
$\Leftarrow$) Рассмотрим граф $G = (A, B, E)$
$A = \{S_1, \dots, S_n\}$
$B = \{a_1, \dots, a_m\}$
$E = \{a_i S_j | a_i \in S_j\}$
Когда $\exists$ паросочетание покрывающее A?
(по т. Холлла) когда $\forall X \subseteq A \quad |N_G(X)| \leqslant |X| = k$
$|N_G(X)| = |S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}|$
Это условие выполняется $\Rightarrow \exists$ паросочетание покр. $A \Rightarrow$ существующее паросочетание определяет СРП
□

32 Теорема об увеличивающей цепи. Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

32.1 Определения

G — граф; M — паросочетание
цепь $x_1, \dots, x_t$ — M-чередующаяся $\Leftrightarrow x_i x_{i+1} \in M \Leftrightarrow x_{i+1} x_{i+2} \notin M \quad \forall i$

M-чередующаяся цепь $x_0, \dots, x_t$ — M-увеличивающаяся, если x_0 и x_t не покрыты рёбрами из M

32.2 Теорема об увеличивающей цепи.

M — паросочетание в G
M — наибольшее $\Leftrightarrow$ в G нет M-увеличивающей цепи
Доказательство:

$\Rightarrow$) Пусть в G существует M-увелич. цепь Р. Тогда рассмотрим $M' = (M \setminus EP) \cup (EP \setminus M)$ – паросочетание (очевидно)
$|M'| = |M| + 1$ – противоречие с тем, что M наибольшее.
$\Leftarrow$) Рассмотрим M' – пусть это наибольшее паросочетание в G.
$G' = G[(M \setminus M') \cup (M' \setminus M)]$
$\forall v \in G' \quad deg_{G'}(v) \leqslant 2 \Rightarrow$ каждая компонента связности графа G' – цикл или цепь.
Если в какой-то компоненте связности $\exists$ цепь, в которой рёбер 1-го паросочетания больше рёбер другого $\Rightarrow \exists$ либо M-увеличивающая цепь (противореч. с нач. усл.), либо $\exists$ M'-увеличивающая цепь (противореч. с M'—наиб.)
$\Rightarrow |M| = |M'| \Rightarrow M$ — наибольшее паросочетание
$\square$

32.3 Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

$G = (A, B, E)$

1. M — паросочетание
2. $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ — множества непокрытых M вершин; Организуем максимальный лес F в G:
   (a) $\forall b \in (VF \cap B) \quad deg_F(b) = 2$ и одно из этих 2-х рёбер из M
   (b) $\forall$ компонента связности леса F содержит ровно 1-ну вершину из A_1. Добавим все оставшиеся вершины из A_1 в качестве одновершинных компонент связности графа F
3. Если $\exists$ ребро между вершинами из B_1 и VF, то есть M—увеличивающая цепь начинающаяся с этого ребра. по пункту 32.2 строим новое паросочетание большей мощности и переходим на шаг 2)
4. Если нет ребра, то M — наибольшее паросочетание

33 Эйлеров цикл, эйлеров граф. Теорема Эйлера. Алгоритм Флёри.

33.1 Эйлеров цикл, эйлеров граф.

Цикл, содержащий все рёбра графа — эйлеров.
Граф, в котором есть эйлеров цикл — эйлеров

33.2 Теорема Эйлера.

Для связного графа порядка $n \leqslant 2$ следующие условия эквивалентны:

1. G — эйлеров
2. $\forall v \in VG \quad deg\ v$ — чётна
3. Множество рёбер можно разбить на циклы.

Доказательство:
1 $\Rightarrow$ 2) Эйлеров цикл проходит через $\forall$ вершину v k раз и содержит все рёбра $\Rightarrow deg_G(v) = 2k$
2 $\Rightarrow$ 3) все вершины чётные $\Rightarrow$ нет висячих вершин $\Rightarrow$ G – не дерево $\Rightarrow$ в нём есть циклы
Пусть G_1 – максимальный подграф графа G, удовлетворяющий условию 3. Очевидно, что все вершины в нём имеют чётную степень.

$G_2 = G - EG_1$
в G_2 все вершины имеют чётную степень (т.к. чёт−чёт=чёт).
Если G_2 пуст, то всё доказали, иначе в нём есть рёбра.
Очевидно, что он не дерево, а значит в нём есть цикл. Противоречие с максимальностью G_1.
$3 \Rightarrow 1$) Рассмотрим разбиение рёбер графа G на наименьшее число циклов: $c_1, \ldots, c_s$.
Покажем, что s = 1:
Пусть не так ($s > 1$). $\Rightarrow \exists i \neq j \mid c_i$ и c_j имеют общую вершину, но не имеют общих рёбер. Склеим их в один цикл. Противоречие с выбором наименьшего числа циклов $\Rightarrow s = 1$. Это и есть Эйлеров цикл.
□

33.3 Алгоритм Флёри.

Нахождение эйлерова цикла
0. выбираем произвольную вершину δ в графе G; $G' = G$
1. Выбираем ребро e в графе G' инцидентное δ и не мост (если это возможно).
$G' = G' - e$ и переходим во второй конец e

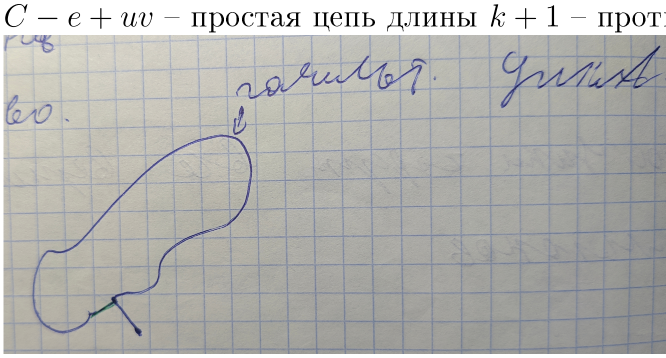
34 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф. Теорема Оре. Теорема Дирака.

34.1 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф.

Простой цикл, содержащий все врешины графа, называется **Гамильтоновым циклом**.
Граф, содержащий Гамильтонов цикл, называется **Гамильтоновым**.

34.2 Теорема Оре.

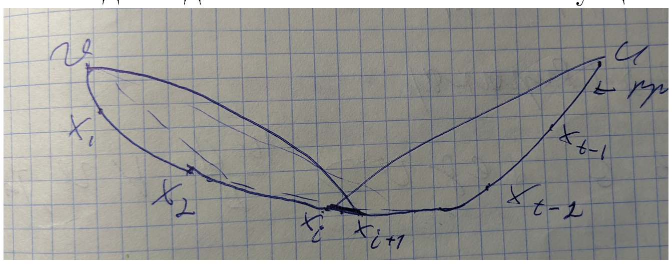
Если для любых двух несмежных вершин v, u верно $deg(v) + deg(u) \leqslant |VG|$, то G – гамильтонов.
Доказательство теоремы:

Утверждение:
Если в связном графе длина максимальной простой цепи равна k и в нём существует простой цикл длины $k + 1$, то этот простой цикл является гамильтоновым.
Доказательство утверждения:
Рассмотрим наш цикл C_{k+1}. Если C – не гамильтонов, G – связный $\Rightarrow \exists\ u$, v: $u \in C, v \notin C, uv \in EG$.
Пусть $e \in C$, e инцидентноно u.
$C - e + uv$ – простая цепь длины $k + 1$ – противоречие с максимальной длиной цепи.


□

Вернёмся к доказательству теоремы

Рассмотрим самую длинну просутю цепь в графе G
$v = x_0, \dots, x_t = u$
Если $ub \in EG$, то получим цикл длины $t+1$ и он гамильтонов по утверждению
Если $ub \notin EG$
Знаем что $deg(u) + deg(v) \geqslant |VG|$
Необходимо доказать что возможна ситуация как на изображениии:



А именно: $\exists x_i, x_{i+1}$ т.ч. x_i — смежна с u и x_{i+1} смежна с v
Поскольку наша цепь длиннейшая, то все вершины, смежные с v и смежные с u лежат на этой цепи
$I = \{i | x_i v \in EG, \quad 2 \leqslant i \leqslant t-1\}$
$|I| = deg(v) - 1$
$Y = \{j | x_{j-1} u \in EG, \quad 2 \leqslant j \leqslant t-1\}$
$|Y| = deg(u) - 1$
$|Y \cup I| \leqslant t - 2$
$|Y| + |I| = deg(v) + deg(u) - 2 \geqslant |VG| - 2 \geqslant t + 1 - 2 = t - 1$
т.е. $|Y \cup I| < |I| + |Y| \Rightarrow Y \cap I \neq \emptyset \Rightarrow$
$\exists i$: $vx_i, ux_{i-1} \in EG$
Удаляем из цепи ребро между x_{i-1} и x_i, добавляем рёбра vx_i, ux_{i-1} и получаем цикл длины $t+1$
Согласно утверждению, этот цикл являетя гамильтоновым.
$\square$

35 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф. Теорема Хватала-Эрдеша

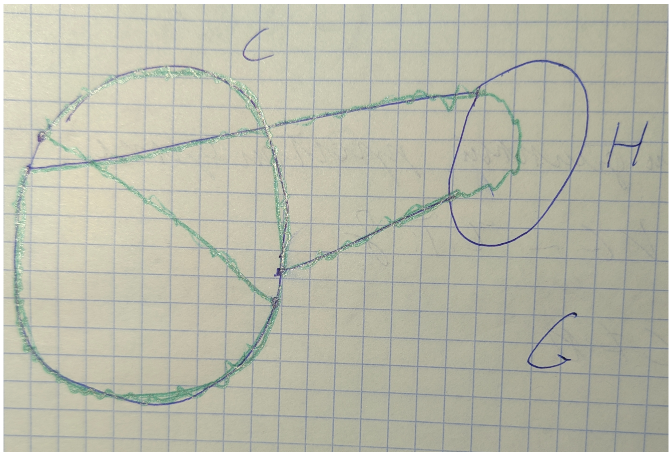
35.1 Гамильтонов цикл, гамильтонов граф.

Простой цикл, содержащий все вершины графа — гамильтонов
Граф, содержащий гамильтонов цикл — гамильтонов

35.2 Теорема Хватала-Эрдеша

Пусть G — связный граф порядка $n \geqslant 3$. Если $\text{æ}(G) \geqslant \alpha_0(G)$, то G — гамильтонов
Доказательство:
Если G нет циклов, то G — дерево $\overset{n \geqslant 3}{\Rightarrow}$ $\text{æ}(G) = 1$; $\alpha_0(G) \geqslant 2$. Противоречие. $\Rightarrow$ в G есть циклы
Пусть C — самый длинный простой цикл
Если $VC = VG$ — $\square$
Если $VG \setminus VC \neq \emptyset$
Рассмотрим $G' = G - VC$
Пусть H — компонента связности G'
$N_G(H) = \{x \in VG \setminus VH | \exists y \in H : xy \in EG\}$
$N_G(H) \subseteq C$
(*) Все вершины из $N_G(H)$ — попарно несмежные по циклу (иначе, есть простой цикл большей длины)
$G - N_G(H)$ — несвязный граф (поскольку есть компонента H и остальное)
$\Downarrow$
$\text{æ}(G) \leqslant |N_H(H)|$
S — множество правых соседей по циклу C вершин из $N_G(H)$

$|S| = |N_G(H)|$
Покажем что S — независимое множество в G
Допустим что нет $\Rightarrow$ есть ребро между двумя вершинами из $S \Rightarrow$ есть более длинный цикл (см. рисунок)



(*) $\Rightarrow S \cap N_G(H) = \emptyset$ (иначе бы какая-то вершина из $N_G(H)$ являлась бы соседом др. вершине из $N_G(H)$ по циклу) $\Rightarrow S \cup \{x\}$ — независимое множество $\Rightarrow \alpha_0(G) \geqslant |S \cup \{x\}| = |N_G(H)| + 1 \geqslant \text{æ}(G) + 1$
Противоречие с условием теоремы
$\square$

36 Укладка графа в пространство. Планарный граф, плоский граф, укладка на сфере.

36.1 Укладка графа в пространство.

Граф G укладывается в про-во α, если он изоморфен некоторому графу, вершинами которого являются точки этого пространства, а рёбра — кривые без самопересечений, соединяющие соответствующие вершины, при чём выполнены след. усл.:

1. кривая-ребро не содержит др. вршин графа кроме своих концов.
2. 2 кривые-ребра пересекаются только в вершине инцидентной обоим рёбрам

36.2 Планарный граф, плоский граф, укладка на сфере.

Граф укладывающийся на плоскость — планарный
Укладка планарного графа на плоскость — плоский граф

Граф укладывается на плоскость $\Leftrightarrow$ он планарный
Доказательство:
Стереографическая проекция

□

37 Формула Эйлера. Непланарность K_5 и $K_{3,3}$. Критерии планарности.

37.1 Формула Эйлера.

G — связный плоский граф (n, m)-граф с f гранями, тогда $n - m + f = 2$
Доказательство:
Рассмотрим остовное дерево T для G
В T n вершин, $n - 1$ ребро, 1 грань
$n - (n - 1) + 1 = 2$
т.е. ф-ла верна
Добавление ребра грань на 2 грани
$+1$ к грани и граням $\Rightarrow$ ф-лы остаётся верной
т.о. мы можем приёти к графу G и сохранить ф-лу
□

37.2 Непланарность K_5 и $K_{3,3}$.

K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.
Доказательство:
1) Непланарность K_5
Для $\forall$ связного планарного (n, m)-графа имеет место неравенство:
$m \leqslant 3n - 6$
Для K_5 $m = 10, n = 5$
$10 \leqslant 3 * 5 - 6$ неверно
2) Непланарность $K_{3,3}$
Для $K_{3,3}$ $n = 6; m = 9$
Для связного планарного **двудольного** графа имеет место неравенство:
$m \leqslant 2n - 4$
$9 \leqslant 2 * 6 - 4$ неверно
□

37.3 Критерии планарности.

37.3.1 Критерий планарности Понтрягина-Куратовского

Граф планарен $\Leftrightarrow$ в нём нет подграфа гомеоморфного к K_5 или $K_{3,3}$
Доказательство:
$\Rightarrow$) G — планарен $\Rightarrow$ $\forall$ его подграф планарен $\forall$ гомеоморфные графы для $\forall$ подграфа планарны $\Rightarrow$ K_5 и $K_{3,3}$ не могут быть гомеоморфны подграфу
$\Leftarrow$) б/д
□

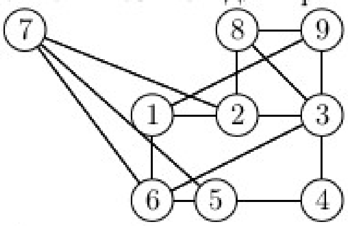
37.3.2 Критерий планарности Вагнера

Граф планарен $\Leftrightarrow$ в нём нет подграфа стягиваемого к K_5 или $K_{3,3}$
Доказательство:
Аналогично критерию Понтрягина-Куратовского
□

38 Алгоритм укладки графа на плоскость.

3.1.4 Алгоритм укладки графа на плоскость

На каждом шаге укладка цепи и образование новой грани. Работает только для двусвязных графов, без вариантов. Возьмём для примера граф:



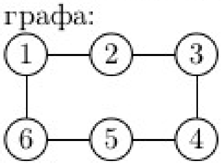
Сегмент S относительно графа $\tilde{G}$ – подграф графа G одного из видов:

1. ребро $e = uv \in EG: \quad e \notin \tilde{G}, \quad u, v \in V\tilde{G}$
2. каждая компонента связности графа $G - \tilde{G}$, дополненная всеми рёбрами, связывающими $\tilde{G}$ с этой компонентой.

Если G – планарен, следовательно каждый сегмент планарен.
Вершины сегмента S относительно $\tilde{G}$, принадлежащие $\tilde{G}$ – **контактные** вершины.
G – двусвязный, следовательно каждый сегмент имеет не менее двух контактных вершин.
У $\tilde{G}$ есть грани. Допустимой гранью для сегмента S относительно $\tilde{G}$ называется грань Γ графа $\tilde{G}$, содержащая все контактные вершины графа S. Мно-во всех допустимых граней для S: $\Gamma(S)$.
Простую цепь сегмента S, соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин называют **α-цепь**.

3.1.5 Собственно, сам алгоритм

шаг 0. В G выбираем простой цикл C и укладываем на плоскость $\tilde{G} = C$. Напр., для приведённого выше графа:



шаг 1. Берём все грани и сегменты относительно $\tilde{G}$. Если мно-во сегментов пусто, переходим к 7.

шаг 2. Для каждого сегмента S определим $\Gamma(S)$:

3 Если $\exists S: \quad \Gamma(S) = \varnothing \Rightarrow G$ – не планарный. Идём к шагу 4.

4 Если $\exists S: \quad |\Gamma(S)| = 1 \Rightarrow$ шаг 6. Иначе 5.

5 Для некоторого сегмента S выбираем произвольную допустимую грань Γ.

6 Помещаем α-цепь $L \in S$ в грань $\Gamma\tilde{G}$ на $\tilde{G} \cup L$. К шагу 1.

7 Построена укладка $\tilde{G}$ – укладка G.

3.1.6 Ообоснование?

Два сегмента S_1 и S_2 называются **конфликтующими**, если:

1. $\Theta = \mathit{\Gamma}(S_1) \cap \mathit{\Gamma}(S_2) \neq \varnothing$.
2. Существуют 2 α-цепи $L_1 \in S_1$ и $L_2 \in S_2$. Нельзя одновременно уложить ни в какую грань $\mathit{\Gamma} \in \Theta$.

Пример конфликтующих сегментов: (3)—(6) (5)—(1)

3.1.7 Лемма 33

Если S_1 и S_2 конфликтуют, $|\mathit{\Gamma}(S_1)| \geq 2$, $|\mathit{\Gamma}(S_2)| \geq 2$, тогда $\mathit{\Gamma}(S_1) = \mathit{\Gamma}(S_2)$ и $|\mathit{\Gamma}(S_1)| = 2$.

Доказательство.
Докажем, что $\mathit{\Gamma}(S_1) = \mathit{\Gamma}(S_2)$.
Пусть нет, тогда существует 3 различных грани: $\mathit{\Gamma}_1 \in \mathit{\Gamma}(S_1)$, $\mathit{\Gamma}_2 \in \mathit{\Gamma}(S_2)$, $\mathit{\Gamma}_3 \in (\mathit{\Gamma}(S_1) \cap \mathit{\Gamma}(S_2))$.
Каждую α-цепь L_1 сегмента S_1 можно уложить в $\mathit{\Gamma}_1$. Каждую α-цепь L_2 сегмента S_2 можно уложить в $\mathit{\Gamma}_2$
Следовательно каждую пару цепей $L_1 \in S_1$ и $L_2 \in S_2$ можно одновременну уложить вне грани $\mathit{\Gamma}_3 \quad \Rightarrow \quad$ внутри грани $\mathit{\Gamma}_3$ противоречие с конфликтностью.

$\square$

Построим граф сегментов $S(\tilde{G})$: $VS(\tilde{G})$ и две вершинки смежны, если сегменты конфликтуют.
Частичной укладкой планарного графа G называется такой граф, который можно получить из укладки графа G на плоскость удалением некоторых вершин.

3.1.8 Лемма 34

Если после очередного шага алгоритма получили частичную укладку $\tilde{G}$ планарного графа G такую, что $\forall S \quad |\mathit{\Gamma}(S)| \geq 2$, то $S(\tilde{G})$ – двудольный.

Доказательство.
От противного. По критерию двудольности в $S(\tilde{G})$ есть цикл нечётной длины $S_1, \ldots, S_r, S_1$.
По лемме 33: $\forall i = 1, \ldots, r \quad \mathit{\Gamma}(S_i) = \{\mathit{\Gamma}_1, \mathit{\Gamma}_2\}$.
$\tilde{G}$ – частичная укладка $\quad \Rightarrow \quad$ все сегменты могут быть уложеные в $\mathit{\Gamma}_1$ или в $\mathit{\Gamma}_2$.
S_1 и S_r укладываются в $\mathit{\Gamma}_1$ и $\mathit{\Gamma}_2$ по очереди $\quad \Rightarrow \quad$ противоречие с нечётной длиной цикла. $\square$

3.1.9 Теорема 37

Если G – планарный, то результатом каждого шага алгоритма является частичная укладка $\tilde{G}$ графа G.

Доказательство.

инд. по числу шагов:
Шаг 0 — укладка цикла
...
...
Шаг n — $\widetilde{G}$ — частичная укладка; если $\exists\ \Gamma(S) = \emptyset \Rightarrow G$ не планарен
Если $\exists S : |\Gamma(S)| = 1$
В исходной укладке G S уложен в $\Gamma : \Gamma(S) = \{\Gamma\}$
$\Rightarrow$ укладка α-цепи из S в $\Gamma \Rightarrow$ получим частичную укладку
Теперь пусть $\Gamma(S) \geqslant 2\ \forall S$
Рассм. $S(\widetilde{G})$ — он двудольный. Берём произвольную вершину S. Если S изолированная вершина, то S ни с кем не конфликтует $\Rightarrow$ укладка α-цепи из S не мешает частичной укладке $\Rightarrow$ всё хорошо
Если S не изолированная вершина $\Rightarrow$ S лежит в непустой компоненте связности графа S$(\widetilde{G})$. В этой

к.с. все сегменты содержат 2 одинаковые грани.
$S_1, \dots, S_t$ — вершины этой к.с.
По лемме 33 $\forall i\ \Gamma(S) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$
По лемме 34 $S(\widetilde{G})$ — двудольный
И получается в исходной укладке G на плоскость сегменты из 1-ой доли уложены в Γ_1, из др. доли в Γ_2
И если в ней поменять местами Γ_1 и Γ_2 то получим укладку G на плоскости
□

39 Правильная раскраска вершин графа. Верхние оценки хроматического числа. Теорема Брукса

39.1 Правильная раскраска вершин графа.

$G = (V, E)$
$\varphi : V \to \{c_1, \dots, c_t\}$ — раскраска вершин разбиения $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_t$; V_i — мн-во вершин цвета c_i
Раскраска φ правильная, если:
$xy \in E \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \forall i \quad V_i$ — независимое мн-во

39.2 Верхние оценки хроматического числа.

39.2.1 Оценка 1

G — (n, m)-граф $\Rightarrow \chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$
Доказательство:
$\forall$ пары цветов $\exists$ ребро на концах которого вершины этих цветов (из леммы о том, что в правильной раскраске для $\forall$ цвета $\exists$ вершина этого цвета, в окружении которой есть вершины всех остальных цветов) $\Rightarrow m \geqslant \binom{\chi(G)}{2}$
□

39.2.2 Оценка 2

$X(G) \leq \triangle(G) + 1$ ($\triangle(G)$ – максимальная степень графа G).

Доказательство.
Индукция по кол-ву вершин графа G:
G – граф порядка $n \geq 2, \quad v \in VG$.
$G' = G - v$. По индукционному предположению $X(G') \leq \triangle(G) + 1$.
$\deg(v) \leq \triangle(G) \quad \Rightarrow \quad$ в окр. v не использовали какой-то цвет, окрасим её в этот цвет $\quad \Rightarrow \quad X(G) \leq \triangle(G) + 1$.
□

39.3 Теорема Брукса

$\forall$ связного графа, не явл. $K_n, C_{2n+1} \quad \chi(G) \leqslant \Delta(G)$
Доказательство:

3.2.10 Теорема 38 (Брукс, 1941)

Пусть G – связный граф, не являющийся ни полным, ни циклом нечётной длины.
Тогда $X(G) \leq \triangle(G)$.

3.2.11 Алгоритм последовательной раскраски

1. Упорядочим $v_1, ..., v_n$ – все вершины графа G.
2. $\varphi(v_1) = c_1$
3. $r = 2, \dots, n : \quad v_1...v_r$ – раскрашены. Берём $\varphi(v_{r+1}) = c_m$, где m – минимальный индекс цвета, которого нету в окружении вершинки v_{r+1}.

3.2.12 Лемма 43

Пусть G – двусвязный, не является ни полным, ни циклом. Тогда существует 2 вершины $u, v \in VG, \quad d(v, u) = 2$
$G - u - v$ - связный.

Доказательство.
a – доминирующая вершина, если $\deg(a) = |V| - 1$.
D – мно-во всех доминирующих вершин графа G.

1. $D \neq \varnothing$. G – не полный $\Rightarrow \quad VG \setminus D \neq \varnothing$.
   Пусть $u, v \in VG : \quad uv \notin EG \quad \Rightarrow \quad d(u, v) = 2 \Rightarrow G - u - v$ – связен.
2. $D = \varnothing$. По условию G – не цикл $\quad \Rightarrow \quad$ в $G \, \exists z : \deg(z) \geq 3$.
   Рассмотрим граф $G - z = G'$.
   (a) G' – двусвязный. Т.к. $D = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists v : d(v, z) = 2$. Полагаем $u = z$. v, u – искомые.
   (b) G' имеет точки сочленения. $\quad \Rightarrow \quad$ существует два висячих блока B_1 и B_2.
   $\exists u \in B_1$: не точка сочленения и смежная с z в G, иначе т. сочленения блока B_1 явл. т. сочленения, но G – двусвязен.
   Аналогично $\exists v \in B_2$ – не точка сочленения и смежная с z в G.
   $G' - u - v$ – связен $\quad \Rightarrow \quad G - u - v$ – связен?.

3.2.13 Лемма 44

Пусть G – связный, n-вершинный граф. $w \in VG$.
Тогда вершины графа G можно упорядочить так, чтобы $w_1, w, w_2, ..., w_n$, что любая вершинка w_i, $i \geq 2$ смежн
по крайней мере с одной вершиной с меньшим номером.

Доказательство т. Брусса.

1. G - двусвязный, без циклов, $|V| = n$. По л. 43 $\exists u, v: \quad d(u,v) = 2 \quad G - u - v$ – связный.
   По лемме 44 вершины графа $G - u - v$ можно упорядочить так, что $w, ..w_{n-1}$
   $\forall i, 2 \leq i \leq n-2, \quad w_i$ смежна с вершиной с меньшим номером.
   Упорядочим вершины графа G: $u, v, w_{n-2}, ..., w_1 = w$ и применим алгоритм последовательной раскраск
   $\varphi(u) = \varphi(v) = c_1$.
   Пусть уже покрашены $u, v, w_{n-2}...w_{s+1}$ в $\triangle(G)$ цветов.
   w_s смежна с вершиной с меньшим номером - не покрашеные вершины $\quad \Rightarrow \quad$ в окружении w_s используетс
   не более $\Delta(G) - 1$ цветов $\quad \Rightarrow \quad$ покрасим её в один из $\Delta(G)$ цветов.
   $w_1 = w$ – смежна с v и u: $\quad \varphi(v) = \varphi(u)$.

2. Пусть $\Delta = \Delta(G)$, G – не связен. Покажем, что любой блок графа G является Δ-раскрашиваем.

   (a) Блок является $K_m \quad \Rightarrow \quad$ точка сочленеия этого блока имеет степень не меньше $m \leq \Delta$. Но K_m
   m-раскрашиваем $\quad \Rightarrow \quad$ он является Δ-раскрашиваем.

   (b) Блокявлется циклом. Точка сочленеия этого блока имеет степень не меньше 3. Цикл 3-раскрашивае
   $\Rightarrow \quad \Delta$-раскрашиваем.

   (c) Блок не полный и не цикл $\quad \Rightarrow \quad$ по доказанному.

□

□

40 Правильная раскраска вершин графа. Нижние оценки хроматического числа. Теорема о существовании графов без треугольников с большим хроматическим числом.

40.1 Правильная раскраска вершин графа.

$G = (V, E)$
$\varphi : V \to \{c_1, \ldots, c_t\}$ — раскраска вершин разбиения $V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_t$; V_i — мн-во вершин цвета c_i
Раскраска φ правильная, если:
$xy \in E \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \forall i \quad V_i$ — независимое мн-во

40.2 Нижние оценки хроматического числа.

1) $\chi(G) = \chi$
$G = (V, E)$
$V = V_1 \sqcup \cdots, \sqcup V_\chi$
V_i — независимое мн-во $\forall i$
$|V_i| < \alpha_0(G) \quad \forall i$
$|VG| = \sum |V_i| \leqslant \alpha_0(G) * \chi(G)$
$\Downarrow$
$\chi(G) \geqslant \frac{|VG|}{\alpha_0(G)}$

2) $\chi(G) \geqslant \alpha_0(\bar{G})$
3) $\chi(G) \geqslant t$
t — мощность наиб. клики в G

40.3 Теорема о существовании графов без треугольников с большим хроматическим числом.

3.2.14 Теорема 39 (Зыкова, 1949)

Существуют графы без треугольников с произвольно большим хроматическим числом.

3.2.15 Лемма 45

Любой минимальной, правильной раскраске графа G для любого цвета c_i существуют вершины этого цвета, смежные с вершинами всех остальных цветов.

Доказательство т. Зыкова.
Построим последовательность графов $G_2...G_i...$, так, что:

1. G_i без треугольников.
2. $X(G_i) = i$

$G_2 = K_2$
Пусть G_i построено, $VG_i = \{v_1...v_n\}$. Построим G_{i+1}:
$VG_{i+1} = VG_i \cup V' \cup \{v\}$, где $V' = \{v_1', ..., v_n'\}, \quad VG_i \cap V' = \varnothing$.
$v \notin VG_i \cup V'$.
Определяем мно-во рёбер: на вершинках VG_i строим граф G_i.
Любую вершинку $v_i' \in V'$ соединяем со всеми вершинами из VG_i, смежными с v_i. v смежна со всеми вершинами из V'. Имеем: G_i – без тре-ов и $X(G_i) = i$. Докажем, что G_{i+1} без треугольников.
Пусть в G_{i+1} есть треугольник. Тогда $a, b, c: \ a, b \in VG_i, c \in V'$ (единственный вариант, который остался). Но $c = v_j' \quad \Rightarrow \quad a, b, v_j$ – треугольник. Противоречие.
Рассмотрим теперь хроматическое число.
G_{i+1} в $i+1$. $G_i - i$ - раскр. φ, φ' графа $G_{i+1}: \quad \forall$ верш. из $V'G$.
Почему нельзя меньше? Пусть G_{i+1} правильно раскрашен в i цветов. Но $X(G_i) = i \quad \Rightarrow \quad$ эта раскраска порождает правильную минимальную раскраску графа G_i. Тогда по лемме 45 есть вершина, смежная с вершинами всех остальных цветов, тогда её дупликат расрашен в тот же цвет, следовательно в V' существуют вершины всех цветов, а значит для вершины v? нет цвета.
Следовательно, $X(G_{i+1}) = i + 1$. □

41 Раскраски планарных графов. Теорема о четырех красках. Теорема Хивуда.

41.1 Теорема о четырех красках.

$\forall$ планарный граф 4-раскрашиваем
Доказательство:
б/д
□

41.2 Теорема Хивуда.

$\forall$ планарный граф 5-раскрашиваем
Доказательствой:
Индукция по числу вершин $n = |VG|$
При $n \leqslant 5$ теор. верна
переход
G — планарный граф на $n > 5$ вершинах
В G $\exists$ вершина x т.ч. $degx \leqslant 5$ (иначе, в графе был бы подграф $K_{3,3}$)
$G' = G - x$; по инд. предположению $\exists$ прав. раскр. φ в 5 цветов
Возвращаем вершину x
Если $degx < 5$, то всё хорошо, перекрашиваем в свободный цвет
Если $degx = 5$ и в окр. x есть одинаковые цвета, то всё хорошо
Если $degx = 5$ и в окр. x есть все 5 цветов
c_i, c_j — 2 цвета. рассмотрим вершины этих цветов
$G_{i,j}$ — подграф графа G порождённый вершинами c_i и c_j
Рассмотрим $G_{1,3}$. Если y_1 и y_3 в разных к. с. $G_{1,3}$, то 1 к. с. графа $G_{1,3}$ перекрашиваем и освобождаем цвет для x
Если y_1 и y_3 в одной к.с. графа $G_{1,3}$, то $\exists$ $(y_1, y_3)-$цепь из вершин цвета c_1 и c_3. Тогда рассмотрим вершины y_2 и y_4. Они в разных к.с. графа $G_{2,4}$ т.к. граф G плоский и (y_2, y_4)-цепь должна пересекать (y_1, y_3)-цепь
$\square$

42 Правильная раскраска ребер графа. Хроматический индекс. Теорема Кёнига о хроматическом индексе двудольных графов.

42.1 Правильная раскраска ребер графа.

$\varphi : EG \to \{c_1, \ldots, c_t\}$ — раскраска рёбер в t цветов
ϕ — правильная рёберная раскраска, если e и h смежны $\Rightarrow \phi(e) \neq \phi(h)$

42.2 Хроматический индекс.

G — рёберно t-хроматический, если G рёберно t-раскрашиваемый и не является рёберно $(t-1)$-раскрашиваемым.
G — рёберно t-хроматический $\Rightarrow$ t — рёберное хроматическое число (хроматический индекс) $\chi'(G)$

42.3 Теорема Кёнига о хроматическом индексе двудольных графов.

$\forall$ двудольного графа G: $\chi'(G) = \Delta(G)$

Доказательство. Индукцией по числу ребер q при заданном числе вершин p построим раскраску ребер двудольного графа G в $\Delta(G)$ цветов из $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$.

Базис индукции: $q = 0$ верен.

Индуктивный переход. Рассмотрим двудольный граф $G = (V, E)$, в котором $|V| = p$, $|E| = q + 1 \geqslant 1$.

Пусть $e = (u, w) \in E$ — произвольное ребро графа G.

Рассмотрим граф $G' = G - e$. Граф G' является двудольным, содержит p вершин и q ребер. Значит, для него верно предположение индукции.

Окрасим ребра графа G' в $\Delta(G') \leqslant \Delta(G)$ цветов из множества C.

1. Если найдется цвет $i \in C$, одновременно отсутствующий среди ребер из вершин u, w графа G', то припишем ребру (u, w) графа G цвет i.

2. Иначе заметим, что найдется некоторый цвет $i \in C$, отсутствующий среди ребер из вершины u, и некоторый цвет $j \in C$, отсутствующий среди ребер из вершины w, $i \neq j$, т. к. $d_{G'}(u) \leqslant \Delta(G) - 1$, $d_{G'}(w) \leqslant \Delta(G) - 1$.

Рассмотрим неудлиняемую цепь P с ребрами чередующихся цветов i и j, начинающуюся из вершины w.

Эта цепь не может достигнуть вершины u. В самом деле, если цепь P приходит в вершину u, то в графе G существует цикл $C = u(u, w)wPu$ нечетной длины, чего не может быть.

Перекрасим на цепи P ребра: цвет i заменим на цвет j, цвет j заменим на цвет i.

Затем припишем ребру (u, w) в графе G цвет i.

$\square$

43 Теорема Визинга о хроматическом индексе графа (без доказательства). Хроматический индекс полного графа.

43.1 Теорема Визинга о хроматическом индексе графа (без доказательства).

$\forall$ графа G: $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$

43.2 Хроматический индекс полного графа.

Справедливы равенства $\chi'(K_n) = n$, если n — нечетное число,
$\chi'(K_n) = n - 1$, если n — четное число.

Доказательство.
1. Пусть n — нечетное число. Предположим, что $\chi'(K_n) = n - 1$. Тогда из каждой вершины графа K_n исходит ровно одно ребро каждого цвета.
Поэтому число ребер одного цвета равно $n/2$, т. к. каждое ребро имеет два конца.
Но n — нечетное число, получаем противоречие.
Получим раскраску ребер графа K_n в n цветов
$C = \{1, 2, \ldots, n\}$: ребро (i, j) графа K_n, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ окрасим в цвет $((i + j)(\mathrm{mod}\ n)) + 1$.

2. Пусть n — четное число. Удалим из графа K_n произвольную вершину v и раскрасим ребра оставшегося графа K_{n-1}
в $(n - 1)$ цветов.
Рассмотрим в этом графе K_{n-1} все ребра одного цвета i. Их концами являются $(n - 2)$ вершины, т. к. $(n - 1)$ — нечетное число. Поэтому в этом графе K_{n-1} найдется некоторая вершина v_i, из которой не исходит ребро цвета i. Окрасим в исходном графе K_n ребро (v, v_i) в цвет i.
Т. к. в каждой вершине графа K_{n-1} отсутствует ребро только одного цвета, все ребра графа K_n, исходящие из вершины v, окрасим в разные цвета.

□

44 Теорема Рамсея для графов.

3.4.6 Теорема 51 (Рамсея для графов)

$\forall p, q \quad p \geq 2,\ q \geq 2 \quad \exists$ минимальное число $N(p,q)$: $\quad \forall n \geq N(p,q)$, $\forall$ раскраси ребёр графа K_n в два цвета c_1 и c_2 выполнено хотя бы одно из двух условий:

1. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на p вершинах.
2. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_2 на q вершинах.

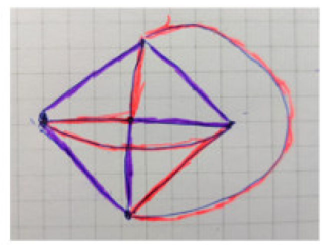
$N(p,q)$ – **число Рамсея** для графов.

3.4.7 Лемма 48

$\forall p, q \geq 2$ верны:

1. $N(2,q) = q$
2. $N(p,2) = p$
3. $N(3,3) = 6$.

Доказательство.
1, 2 – упражнение.
3. Докажем (1) $N(3,3) > 5$ и (2) $N(3,3) \leq 6$.



1. привести пример раскраси ребёр K_5, где нет монохроматических тре-ков.
2. рассмотрим произвольную раскраску ребёр графа K_6, $x \in VK_6$.
   Есть 3 ребра, инцидентных x и раскрашенных в один цвет.

□

Доказательство (Теорема Рамсея).
Индукция по $m = p + q$. Докажем неравенство $N(p,q) \leq N(p-1,q) + N(p,q-1)$, $\quad \forall p > 2,\ q > 2$. Сама индукция доказывает граничность числа $N(p,q)$.
База индукции: $N(p,2) = p$, $\quad N(2,q) = q$ (лемма 48).
$n = N(p-1,q) + N(p,q-1)$. Надо доказать, что для K_n выполнено условие теореым.
Пусть φ – произвольная раскраса рёбра графа K_n в два цвета c_1 и c_2.
$x \in VK_n$. $V_1 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_1\}$, $\quad V_2 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_2\}$. $|V_1| = n_1$, $\quad |V_2| = n_2$.
$n_1 + n_2 + 1 = n = N(p-1,q) + N(p,q-1)$ (возможно, числа чётные?) $\quad \Rightarrow \quad$ выполнено одно из условий:

1. $n_1 \geq N(p-1,q)$
2. $n_2 \geq N(p,q-1)$

Пусть (1). Рёбра графа $G(V_1)$ раскрашены раскраской φ. По индукционному предположению выполнено хотя бы одно из условий:

1. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на $p-1$ вершине.
2. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_2 на q вершинах.

Если выполняется второе, то всё доказано. А если первое???
Если первое, то добавим вершину x и получим монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на p вершинах. Иными словами, док-во чем-то похоже на док-во предыдущей леммы.
Случай (2) рассматривается аналогично. □

45 Правильная раскраска ребер графа. Хроматический индекс. Теорема о хроматическом индексе полного графа.

45.1 Правильная раскраска ребер графа.

$\varphi : EG \to \{c_1, \ldots, c_t\}$ — раскраска рёбер в t цветов
ϕ — правильная рёберная раскраска, если e и h смежны $\Rightarrow \phi(e) \neq \phi(h)$

45.2 Хроматический индекс.

G — рёберно t-хроматический, если G рёберно t-раскрашиваемый и не является рёберно $(t-1)$-раскрашиваемым.
G — рёберно t-хроматический $\Rightarrow$ t — рёберное хроматическое число (хроматический индекс) $\chi'(G)$

45.3 Теорема о хроматическом индексе полного графа.

Справедливы равенства $\chi'(K_n) = n$, если n — нечетное число,
$\chi'(K_n) = n-1$, если n — четное число.

Доказательство.
1. Пусть n — нечетное число. Предположим, что $\chi'(K_n) = n-1$.
Тогда из каждой вершины графа K_n исходит ровно одно ребро каждого цвета.
Поэтому число ребер одного цвета равно $n/2$, т. к. каждое ребро имеет два конца.
Но n — нечетное число, получаем противоречие.
Получим раскраску ребер графа K_n в n цветов
$C = \{1, 2, \ldots, n\}$: ребро (i, j) графа K_n, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ окрасим в цвет $((i+j)(\mathrm{mod}\ n)) + 1$.

2. Пусть n — четное число. Удалим из графа K_n произвольную вершину v и раскрасим ребра оставшегося графа K_{n-1} в $(n-1)$ цветов.
Рассмотрим в этом графе K_{n-1} все ребра одного цвета i. Их концами являются $(n-2)$ вершины, т. к. $(n-1)$ — нечетное число. Поэтому в этом графе K_{n-1} найдется некоторая вершина v_i, из которой не исходит ребро цвета i. Окрасим в исходном графе K_n ребро (v, v_i) в цвет i.
Т. к. в каждой вершине графа K_{n-1} отсутствует ребро только одного цвета, все ребра графа K_n, исходящие из вершины v, окрасим в разные цвета.

$\square$

46 Булева функция. Существенные и фиктивные переменные. Теорема о числе булевых функций, существенно зависящих от n переменных.

46.1 Булева функция.

Фуекция вида $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — булева

46.2 Существенные и фиктивные переменные.

Переменная x_i функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ — существенная, если $\exists$ набор переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ т.ч. $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \bar{\alpha}_i, \ldots, \alpha_n)$

иначе — фиктивная

46.3 Теорема о числе булевых функций, существенно зависящих от n переменных.

Число булевых ф-ий $f(x_1 \dots x_n)$, существенно зависящих от $x_1 \dots x_n$ равно $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$

Доказательство.

Формула включений-исключений: $|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot S_k, \quad S_k = \sum\limits_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}|$.

A_i – формулы, существенно не зависящие от переменной x_i.

$|A| = 2^{2^n}$, $|S_0| = |A| = 2^{2^n}$.

$|A_i| = 2^{2^{n-1}}$, $|S_1| = n \cdot 2^{2^{n-1}}$.

$|A_i \cap A_j| = 2^{2^{n-2}}$, $|S_2| = \binom{n}{2} \cdot 2^{2^{n-2}}$.

$\vdots$

$|S_k| = \binom{n}{k} \cdot 2^{2^{n-k}}$.

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$. □

47 Формула. Функция, которую реализует формула. Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности.

47.1 Формула.

Пусть $\Omega \subseteq P_2$.

1) Если $f \in \Omega$, то f – формула над Ω.

2) Если $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ – формулы над Ω, либо символьные переменные, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, то $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ – формула над Ω.

47.2 Функция, которую реализует формула.

Формуле $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ над Ω сопоставим $f(x_1, \dots, x_n)$, которую реализует данная формула.

1) Если $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ совпадает с $f(x_1, \dots, x_n)$, то $\Phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n)$.

2) Если $\Phi(x_1, \dots, x_n) = f_0(A_1, \dots, A_m)$, где A_i – символьные переменные, либо формулы над Ω, то $\Phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f_0(f_1, \dots, f_m)$, где f_i реализуется A_i.

47.3 Эквивалентные формулы.

Формулы эквивалентны, если они реализуют равные функции

47.4 Основные эквивалентности.

$x_1 \circ x_2$ — любая из ф-ций $x_1\ x_2$; $x_1 \vee x_2$; $x_1 \oplus x_2$

1. $x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$
2. $x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3$
3. $(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3)$
4. $(x_1 \& x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \& (x_2 \vee x_3)$
5. $(x_1 \oplus x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \oplus (x_2 \& x_3)$
6. $\bar{\bar{x}} = x$
7. $x_1 \bar{\&} x_2 = \bar{x_1} \vee \bar{x_2}$
8. $x_1 \bar{\vee} x_2 = \bar{x_1} \& \bar{x_2}$
9. $x_1 \& (x_1 \vee x_2) = x_1$
10. $x_1 \vee (x_1 \& x_2) = x_1$
11. $x \& \bar{x} = 0$
12. $x \vee \bar{x} = 1$
13. $x \& x = x$
14. $x \vee x = x$
15. $x \oplus x = 0$
16. $x \oplus 1 = \bar{x}$
17. $x \oplus \bar{x} = 1$
18. $x \oplus 0 = x$

19. $x\&0 = 0$

20. $x \vee 0 = x$

21. $x\&1 = x$

22. $x \vee 1 = 1$

Доказательство:
Нарисовать таблицы для левых и правых частей
$\square$

48 Теорема о разложении функций по переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Совершенная конъюнктивная нормальная форма. Двойственная функция. Принцип двойственности.

48.1 Теорема о разложении функций по переменным.