Duda & Hart
2.6 ERROR PROBABILITIES AND INTEGRALS

作成者: おおつかたく

November 26, 2025

目次

Purpose and Background

目的と背景

- これまで分類器における識別関数について多クラス分類と二クラス分類での扱いと領域を分離する決定境界 (decision boundaries) について説明。
- ここでは、分類器のエラー確率 (error probabilities) と全体の確率を計算する積分 (integrals) について説明。
- 分類器を、特徴空間を決定領域に分割するための装置として考えることにより、ベイズ分類器の動作についてさらなる洞察を得ることができる。

Two-Category Case

ニクラスの場合

まず、ニクラス分類を考える。

- 分類器が空間を二つの領域 $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ に分割するとする。
- 分類エラー（誤分類）が発生するケースは二通りある。
  1. 観測 $\vec{x}$ が領域 $\mathcal{R}_2$ に落ちたが、真の自然の状態が ω_1 である場合
  2. 観測 $\vec{x}$ が領域 $\mathcal{R}_1$ に落ちたが、真の自然の状態が ω_2 である場合
- この事象は互いに排他的かつ網羅的であるため、誤り確率 $P(error)$ は以下のようになる。

$$P(\text{error}) = P(\vec{x} \in \mathcal{R}_2, \omega_1) + P(\vec{x} \in \mathcal{R}_1, \omega_2). \tag{1}$$

ニクラスの場合（続き）

- この同時確率を展開すると、

$$P(\text{error}) = P(\vec{x} \in \mathcal{R}_2 | \omega_1) P(\omega_1) + P(\vec{x} \in \mathcal{R}_1 | \omega_2) P(\omega_2). \tag{2}$$

- そして、特徴ベクトル $\vec{x}$ については、この確率は領域 $\mathcal{R}_i$ における積分（確率密度の総和）として表せる。

$$P(\text{error}) = \int_{\mathcal{R}_2} p(\vec{x} \mid \omega_1) P(\omega_1) d\vec{x} + \int_{\mathcal{R}_1} p(\vec{x} \mid \omega_2) P(\omega_2) d\vec{x}. \tag{3}$$

ニクラスの場合（続き）

- 各クラスに対して、誤分類される領域での条件付き確率密度関数と事前確率の積を積分することで、全体の誤り確率を求めることができる。
- 合計二つの項は関数 $p(\vec{x} \mid \omega_i)P(\omega_i)$ の裾野（テール）の領域にすぎない。
- この式 (3) は一次元のケースについて下の図 2.6 にしめされる。

ニクラスの場合（続き）

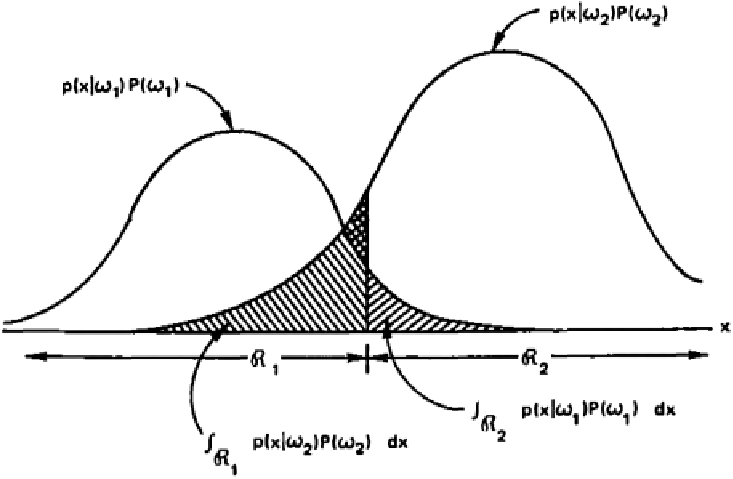

FIGURE 2.6. Components of the probability of error.

二クラスの場合（続き）

- 領域 $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ は任意に選ばれたため、この誤り確率は最小であるとは限らない。
- 決定境界を左に移動させることで暗い「三角形」の領域を排除し、誤り確率を減らせる。

Multiple-Class Case

多クラスの場合

- 多クラスの場合では、正解するよりも誤るほうが多くのパターン（方法）があるため、以下のように正解する確率を計算するほうが簡単。

$$\begin{aligned} P(\text{correct}) &= \sum_{i=1}^{c} P(\vec{x} \in \mathcal{R}_i, \omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^{c} P(\vec{x} \in \mathcal{R}_i \mid \omega_i) P(\omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^{c} \int_{\mathcal{R}_i} p(\vec{x} \mid \omega_i) P(\omega_i)\, d\vec{x}. \end{aligned} \tag{4}$$

多クラスの場合（続き）

- この結果は特徴空間が決定領域にどのように分割されても有効である。
- ベイズ分類器は、被積分関数が最大となるように領域を選択することによって、この正解確率を最大化する。
- 他のいかなる分割も、これより小さな誤り確率（より大きな正解確率）をもたらすことはできない。

Conclusion

まとめ

- 各クラスに対して、誤分類される領域での条件付き確率密度関数と事前確率の積を積分することで、全体の誤り確率を求めることができる。
- 多クラスの場合では、正解するよりも誤るほうが多くのパターン（方法）があるため、正解する確率を計算する。