Ребдев Павел Александрович
5130904/30008

Системы линейных дифференциальных уравнений

Вариант: 23

1. Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений, заданной в векторной форме $\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = x + 2y + 2z \\ \dot{y} = 2x + y + 2z \\ \dot{z} = x + 2y + 2z \end{cases}$$

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 8 + 8 - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)^3 + 16 - 12(1 - \lambda) = 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 16 - 12 + 12\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5$

$\lambda_{1,2} = -1$

$\lambda_3 = 5$

$\lambda_{1,2}$:

$$\begin{cases} (1+1)\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 + (1+1)\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + (1+1)\gamma_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

$\vec{r}_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\vec{r}_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

λ_3:

$$\begin{cases} (1-5)\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 + (1-5)\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + (1-5)\gamma_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 - 4\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 + 2\gamma_2 - 4\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

$\vec{r}_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{\vec{r} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

2 Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений, заданной в векторной форме $\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$, где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = -3x - 3y - 2z \\ \dot{y} = 6x + 6y + 2z \\ \dot{z} = 7x + 4y + 5z \end{cases}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -3 & -2 \\ 6 & 6-\lambda & 2 \\ 7 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda) - 48 - 42 + 14(6-\lambda) - 8(-3-\lambda) + 18(5-\lambda)$$

$= -90 - 15\lambda + 5\lambda^2 + 18\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 48 - 42 + 84 - 14\lambda + 24 + 8\lambda + 90 - 18\lambda = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18$

$\lambda_{1,2} = 3$

$\lambda_3 = 2$

$\lambda_{1,2}$:

$$\begin{cases} (-3-3)\gamma_1 - 3\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \\ 6\gamma_1 + (6-3)\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 7\gamma_1 + 4\gamma_2 + (5-3)\gamma_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6\gamma_1 - 3\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \\ 6\gamma_1 + 3\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 7\gamma_1 + 4\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\gamma_1 + 3\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r}_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

λ_3:

$$\begin{cases} (-3-2)\gamma_1 - 3\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \\ 6\gamma_1 + (6-2)\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 7\gamma_1 + 4\gamma_2 + (5-2)\gamma_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\gamma_1 - 3\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \\ 6\gamma_1 + 3\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ 7\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 0 \\ 4\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r}_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \mathbf{C_1 e^{3t}} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} + \mathbf{C_2 e^{3t}} \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + \mathbf{C_3 e^{2t}} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

3 Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений, заданной в векторной форме $\dot{\vec{r}}$= A$\vec{r}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = x - y \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 - 1 + (1-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda$$

$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 1 + i$
$\lambda_3 = 1 - i$

λ_1:

$$\begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_2 \\ \gamma_1 = -\gamma_3 \end{cases}$$

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

λ_2:

$$\begin{cases} (1-(1+i))\gamma_1 - \gamma_2 = 0 \\ \gamma_1 + (0-(1+i))\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 + (1-(1+i))\gamma_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -i\gamma_1 - \gamma_2 = 0 \\ \gamma_1 - (1+i)\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - i\gamma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = -\dfrac{\gamma_2}{i} \\ \gamma_1 = (1+i)\gamma_2 - \gamma_3 \\ \gamma_1 = i\gamma_3 \end{cases}$$

$$\tilde{\vec{r}}(t) = e^{t(1+i)} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -\frac{1}{i} \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t)e^t \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -\frac{1}{i} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\cos t - i\sin t \\ i\cos t - \sin t \\ -\frac{\cos t}{i} - \sin t \end{pmatrix} = -e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Re} \tilde{\vec{r}}(t) = -e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} \tilde{\vec{r}}(t) = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\vec{r} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - C_2 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}}$$

4 Решить линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений второго порядка методом неопределённых коэффициентов

$$\begin{cases} \dot{X} = -2y + 3t \\ \dot{y} = 2x + 4 \end{cases}$$

A = $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

det(A – λE) = $\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}$ = $\lambda^2 + 4$

$\lambda_1 = 2i$
$\lambda_2 = -2i$

λ_1:

$\begin{cases} (0-2i)\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0 \\ 2\gamma_1 + (0-2i)\gamma_2 = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} \gamma_1 = -\dfrac{\gamma_2}{i} \\ \gamma_1 = i\gamma_2 \end{cases}$

$\tilde{\vec{r}}$ (t) =e^{2ti} $\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$ = (cos2t + isin2t) $\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -\cos 2t - i\sin 2t \\ i\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}$ = -$\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ + i$\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$

Re $\tilde{\vec{r}}$ (t) = -$\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$, Im $\tilde{\vec{r}}$ (t) = $\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$

$\vec{r}_{\text{о.о}}$ = -C_1 $\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ + C_2 $\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$

$\vec{f}$(t) = $\begin{pmatrix} 3t \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$

A$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -2(Ct+D) \\ 2(At+B) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -2(Ct+D) \\ 2(At+B) \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 3t \\ 4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 3t-2Ct-2D \\ 4+2At+2B \end{pmatrix}$

3t – 2Ct = 0 =>	C = 1,5
2At = 0 =>	A = 0
0 = 0 – 2D =>	D = 0
1,5 = 4 + 2B =>	B = –1,25

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,25 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{\text{о.н}} = -C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,25 \\ 1,5t \end{pmatrix}$$

$x(t) = -C_1\cos 2t - C_2\sin 2t - 1,25$

$y(t) = -C_1\sin 2t + C_2\cos 2t + 1,5t$