# Cours Analyse II

Iaousse M'barek

mars 06, 2022

# Table des matières

Le présent cours contiendra :
- Intégration
- Intégration et dérivation
- Intégration sur un intervalle quelconque

CHAPITRE 1

# Intégration

Le présent Chapitre contiendra :

- Integrale des fonctions escalier
- Integrale des fonctions continues par morceaux
- Propriete de l'integrale
- Somme de Reiman
- Fonctions continue par morceaux sur un intervalle

## 1.1 Intégrale des fonctions en escalier

$a$ et $b$ désignent deux réels tels que $a < b$. Toutes les fonctions sont supposées définies sur $[a, b]$ et a valeurs réelles. Le but de l'intégration est de définir un nombre qui, pour une fonction $f$ positive sur un segment $[a, b]$ , mesure l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Ce nombre sera appelé intégrale de $f$ sur $[a, b]$ et notée :

$$\int_a^b f(x)dx$$

### 1.1.1 Subdivision d'un segment

**Définition 1**

- On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille $u = (x_i)_{i=0}^n$ telle que $n \in \mathbb{N}^\star$ et
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$
- On appelle pas ou module de la subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$, le reel
$$\delta(u) = \max_{i \in [1,n]} (x_i - x_{i-1})$$

**Exemple**

Une subdivision $(x_i)_{i=0}^n$ ou $n$ un entier naturel non nul est dite a pas constant si :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

Son module est $\dfrac{b-a}{n}$

---

**Définition 2**

Si $u$ et $v$ sont deux subdivisions de $[a, b]$ , on dit que $u$ est plus fine que $v$ si tout élément de $v$ est élément de $u$.

---

**Proposition 1**

Pour toutes subdivisions $u$ et $v$ de $[a, b]$ il existe une subdivision plus fine que $u$ et $v$.

### 1.1.2 Fonctions en escalier

**Définition 3**

Une fonction $\varphi$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite en escalier si l'on peut trouver une subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$ de $[a, b]$ telle que $\varphi$ soit constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$, $(1 \leq i \leq n)$. La subdivision $u$ est dite adaptée à la fonction $\varphi$.

---

**Exemples**

— Une fonction constante sur l'intervalle $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.

— La fonction *partie entière* est une fonction en escalier sur segment $[a, b]$ (pensez à une subdivision adaptée !).

**Remarques** :

1. Une fonction en escalier prend un nombre fini de valeurs. En particulier, elle est bornée.
2. Si $u$ est une subdivision adaptée à une fonction $\varphi$ en escalier, alors toute subdivision plus fine que $u$ est adaptée à $\varphi$.
3. Si $\varphi$ et $\psi$ sont deux fonctions en escalier sur $[a.b]$, alors il existe une subdivision adaptée à $\varphi$ et $\psi$.

---

**Proposition 2**

L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur $[a, b]$

---

**Démonstration**

Soient $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Soient $\lambda$ et $\mu$ deux réels.

D'après la proposition 1 il existe une subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$ adaptées à $\varphi$ et $\psi$. Donc les deux fonctions sont constantes sur $]x_{i-1}, x_i[$ Il en est de même pour $\lambda\varphi + \mu\psi$ (constante sur $]x_{i-1}, x_i[$). Donc, $u$ est une subdivision adaptée pour $\lambda\varphi + \mu\psi$ qui est par la suite une fonction en escalier.

Les autres conditions sont faciles à vérifier !

### 1.1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

**Proposition 3**

Soit $\varphi$ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $u = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision adaptées à $\varphi$. Soit $c_i$ la valeur prise par $\varphi$ sur $]x_{i-1}, x_i[$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ (i.e $\varphi(x) = c_i$ pour tout $x \in ]x_{i-1}, x_i[$). Alors la quantité

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

ne dépend pas de la subdivision choisie.

Cette quantité s'appelle `l'intégrale` de $\varphi$ sur $[a, b]$ et on le note :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_{[a,b]} \varphi$$

**Démonstration**

Pour toute $u$ une subdivision adaptée à la fonction $\varphi$, on note

$$I(\varphi, u) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

Le but est de montrer que $\forall u, v$ subdivision adaptée à $\varphi$, $I(\varphi, u) = I(\varphi, v)$

- Si $v$ est plus fine que $u$, Elle est obtenue en rajoutant un nombre fini d'éléments à la subdivision $u$. Pour démontrer que $I(\varphi, u) = I(\varphi, v)$, il suffit de le démontrer dans le cas où $v$ a un élément de plus que $u$.

Soit donc $u = (x_i)_{i=0}^n$ et $v = (x_1, \dots, x_p, y, x_{p+1}, \dots, x_n)$

Il est claire que la fonction $\varphi$ sur $]x_p, y[$ et $]y, x_{p+1}[$. Donc :

$$I(\varphi, v) = \sum_{i=1}^{p-1} c_i(x_i - x_{i-1}) + c_p(y - x_p) + c_p(x_{p+1} - y) + \sum_{i=p+2}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = I(\varphi, u)$$

- Dans le cas général :

D'après la proposition 1, il existe une subdivision $w$ plus fine que $u$ et $v$, cette subdivision est aussi adaptée à $\varphi$ (remarque 2). Donc on aura d'une part $I(\varphi, w) = I(\varphi, u)$ et d'autre part $I(\varphi, w) = I(\varphi, v)$.

Par conséquent,

$$I(\varphi, v) = I(\varphi, u)$$

### 1.1.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

**Proposition 4**

Montrer que :

1- pour toutes fonctions en escalier sur $[a, b]$ $\varphi$ et $\psi$, et pour tous réels $\alpha$ et $\beta$ nous avons :

$$\int_{[a,b]} \alpha\varphi + \beta\psi = \alpha \int_{[a,b]} \varphi + \beta \int_{[a,b]} \psi$$

2- une fonction en escalier positive a une intégrale positive.

3- si $\varphi$ et $\psi$ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ alors :

$$\varphi \leq \psi \Rightarrow \int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$$

**Démonstration**

1-

Soient $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\alpha$ et $\beta$ deux réels.

Soit $u = (x_i)_{i=0}^{n}$ une subdivision adaptée à $\varphi$ et $\psi$. Si, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $c_i$ et $d_i$ sont respectivement les valeurs prises par $\varphi$ et $\psi$ sur $]x_{i-1}, x_i[$ alors $\alpha\varphi + \beta\psi$ est une fonction en escalier qui prend $\alpha c_i + \beta d_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Nous avons donc,

$$\int_{[a,b]} \alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha c_i + \beta d_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \alpha \int_{[a,b]} \varphi + \beta \int_{[a,b]} \psi$$

2-

Soit $\varphi$ une fonction en escalier sur $[a, b]$ qui est positive et $u = (x_i)_{i=0}^{n}$ une subdivision adaptée à $\varphi$. Puisqu'elle est positive, les valeurs $c_i$ prise par $\varphi$ sont positives. D'autre part, puisque pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, x_{i-1} \leq x_i$ (par définition de la subdivision) alors $\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0$.

3-

La fonction $\varphi - \psi$ est une fonction en escalier positive donc son intégral est positive.

**Proposition 5**

Une fonction $\varphi$ est en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $c \in ]a, b[$, ses restrictions sur $]a, c[$ et $]c, b[$ le sont. Le cas échéant,

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]}$$

**Démonstration**

— $\Rightarrow$ Soit $\varphi$ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $u$ une subdivision adaptée à $\varphi$. On ajoutant $c$ a la subdivision $u$ on obtient un subdivision $v = (x_i)_{i=0}^n$ qui est encore adaptée à $\varphi$. Soit $p$ l'entier naturel tel que $c = x_p$. Alors nous avons :

  — $(x_1, \ldots, x_p)$ une subdivision de $[a, c]$ et puisque $\varphi$ est constante sur chaque $]x_{i-1}, x_i[$ donc $\varphi_{|[a,c]}$ est fonction en escalier sur $[a, c]$. Nous avons donc :

$$\int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} = \sum_{i=1}^{p} c_i(x_i - x_{i-1})$$

  — $(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[c, b]$ et puisque $\varphi$ est constante sur chaque $]x_{i-1}, x_i[$ donc $\varphi_{|[c,b]}$ est fonction en escalier sur $[c, b]$. Nous avons donc :

$$\int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]} = \sum_{i=p+1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

  Par suite :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{p} c_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=p+1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]}$$

— $\Leftarrow$ Supposons que $\varphi_{|[a,c]}$ et $\varphi_{|[c,b]}$ sont en escalier sur $[a, c]$ et $[c, b]$ respectivement.

Soit $u = (x_i)_{i=0}^p$ (respectivement $v = (x_i)_{i=0}^q$) une subdivision de $[a, c]$ (respectivement de $[c, b]$) adaptée à $\varphi_{|[a,c]}$ (respectivement q $\varphi_{|[c,b]}$).

Alors, $(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_p = c = y_1, \ldots, y_q)$ est une subdivision $[a, b]$. De plus $\varphi$ est constante sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ et $]y_{i-1}, y_i[$. Donc $\varphi$ est en escalier sur $[a, b]$.

## 1.2 Fonctions continues par morceaux

### 1.2.1 Définition, exemples

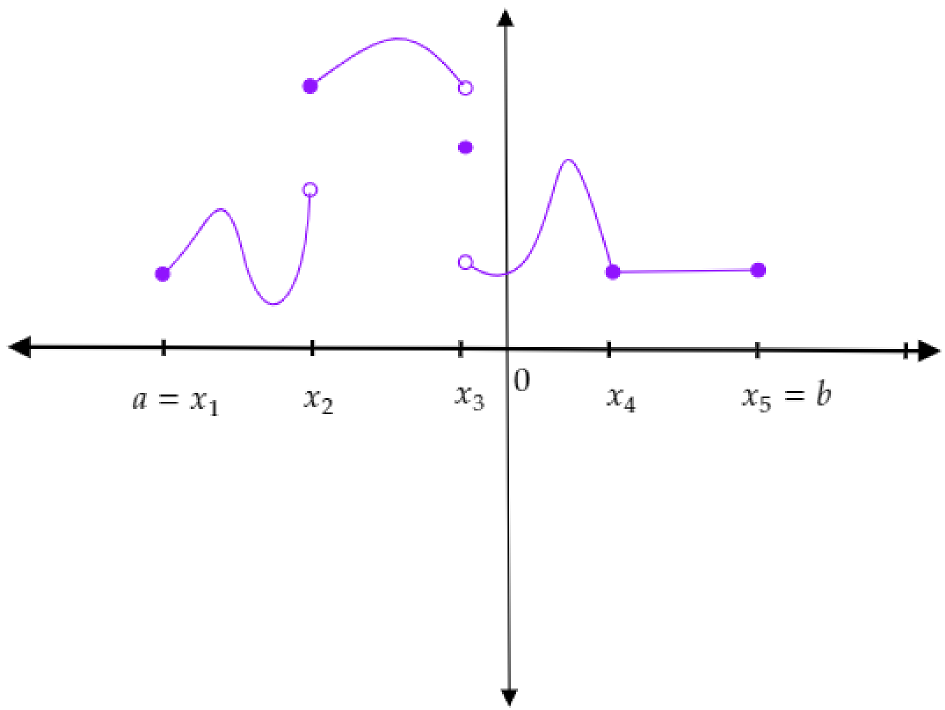
**Définition 4**

Une application $f$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$ de $[a, b]$ telle que pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ la restriction de $f$ à $]x_{i-1}, x_i[$ soit continue et admette des limites finies en $x_{i-1}$ et $x_i$.

La subdivision $u$ est dite adaptée à la fonction $f$.

L'exemple suivant donne une illustration graphique d'une fonction continue par morceaux.

**Illustration avec un exemple graphique** :




**Exemples**

— Toute fonction en escalier est continue par morceaux.

— Toute fonction continue est continue par morceaux.

— La fonction $f$ définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$$

n'est pas continue par morceaux, car elle n'a pas de limite finie à droite et à gauche de 0.

**Remarques**

Comme pour les fonctions en escalier, on peut vérifier que :

— si $u$ est une subdivision adaptée à une fonction $f$ continue par marceaux, alors toute subdivision plus fine que $u$ est adaptée à $f$,

— si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ , alors il existe une subdivision adaptée à $f$ et $g$.

**Proposition 6**

Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$ .

**Démonstration**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $u = (x_i)_{i=0}^{n}$ une subdivision adaptée à $f$.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ admet des limites finies en $x_{i-1}$ et $x_i$. Donc la restriction de $f$ sur $]x_{i-1}, x_i[$ admet un prolongement par continuité sur $[x_{i-1}, x_i]$ qui donc borne. Par suite, $f$ est bornée sur $]x_{i-1}, x_i[$. Soit $M_i = \sup_{]x_{i-1}, x_i[} |f|$

En prenant $M = max(M_1, M_2, \dots, M_n, |f(x_0)|, \dots, |f(x_0)|)$, nous aurons $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M$.

Par suite, $f$ est bornée sur $[a, b]$.

**Proposition 7**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Les assertions suivantes sont correctes :
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g$ est continue par morceaux.
- $fg$ est continue par morceaux.

**Démonstration**

Soit $u = (x_i)_{i=0}^{n}$ une subdivision adaptée à $f$ et $g$.

Les restrictions des fonctions $f$ et $g$ à chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ sont continues et admettent des limites finies en $x_{i-1}$ et $x_i$, donc il en est de même pour $\lambda f + \mu g$ et $fg$. Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $fg$ sont donc continues par morceaux sur $[a, b]$.

### 1.2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

**Théorème (admis)**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ . Pour tout réel $\epsilon > O$ :
- il existe une fonction en escalier $\theta$ telle que $|f - \theta| \leq \epsilon$
- il existe des fonctions en escalier $\varphi$ et $\psi$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \epsilon$$

**Notations** : Dans ce qui suit, pour une fonction continue par morceaux $f$ nous allons adopte les notations suivantes :
- $\mathcal{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus grandes que $f$.
- $\mathcal{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus petites que $f$.

**Proposition 8**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Alors :
- $\left\{\int_{[a,b]} \varphi | \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$ admet une borne supérieure,
- $\left\{\int_{[a,b]} \psi | \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$ admet une borne inferieure,

de plus,

$$sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi | \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\} = inf\left\{\int_{[a,b]} \psi | \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$$

**Démonstration**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Donc $\{f(x) | x \in [a, b]\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ bornée donc admet une borne supérieure et une borne inferieure. Soit $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$.
- Les deux fonctions constantes $m$ et $M$ sur $[a, b]$ sont aussi continues par morceaux sur $[a, b]$. $\left\{\int_{[a,b]} \varphi | \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$ est donc une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée (par $M(b - a)$). Alors, elle possède une

borne supérieure ($\alpha$). De même, $\left\{\int_{[a,b]}\psi|\psi\in\mathcal{E}^+(f)\right\}$ une partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée donc possède une borne inferieure ($\beta$).

— Toute fonction $\varphi\in\mathcal{E}^-(f)$ est inférieure à toute fonction $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$. Par suite :

$$\int_{[a,b]}\varphi\leq\int_{[a,b]}\psi$$

Fixons $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$. L'ensemble $\left\{\int_{[a,b]}\varphi|\varphi\in\mathcal{E}^-(f)\right\}$ est majoreé par $\int_{[a,b]}\psi$. Alors nous avons forcement $\alpha\leq\int_{[a,b]}\psi$ et ça pour tout $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$. Donc $\alpha$ est un minorant de $\left\{\int_{[a,b]}\psi|\psi\in\mathcal{E}^+(f)\right\}$. Par conséquent, $\alpha\leq\beta$.

Donc

$$\alpha\leq\beta$$

— soit $\epsilon>0$. En utilisant le théorème précédant, il existe deux fonctions en escalier $\varphi\in\mathcal{E}^-(f)$ et $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$ tel que $\psi-\varphi\leq\epsilon$.

Donc $\int_{[a,b]}\psi-\int_{[a,b]}\varphi\leq\int_{[a,b]}\epsilon=\epsilon(b-a)$

donc $0\leq\beta-\alpha\leq\epsilon(b-a)$

Et ca pour tout $\epsilon\geq 0$.

Donc $\alpha=\beta$.

---

**Définition**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$.

On appelle intégrale de $f$ sur $[a,b]$ le réel

$$\int_{[a,b]}f=sup\left\{\int_{[a,b]}\varphi|\varphi\in\mathcal{E}^-(f)\right\}=inf\left\{\int_{[a,b]}\psi|\psi\in\mathcal{E}^+(f)\right\}$$

---

**Question** : Comparer l'intégrale d'une fonction en escalier avec son intégral en tant que fonction continue par morceaux.

---

**Indications pour la réponse**

— Une fonction en escalier est continue par morceaux ;

— si $f$ est une fonction en escalier, alors $f\in\left\{\int_{[a,b]}\varphi|\varphi\in\mathcal{E}^-(f)\right\}$ et $f\in\left\{\int_{[a,b]}\psi|\psi\in\mathcal{E}^+(f)\right\}$.

---

Nous avons vu que si $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors $f$ est bornée. Soient $m=inf\left\{f(x)|x\in[a,b]\right\}$ et $M=sup\left\{f(x)|x\in[a,b]\right\}$. $m$ et $M$ sont donc des fonctions en escalier sur $[a,b]$. Leurs intégrales sont respectivement $m(b-a)$ et $M(b-a)$.

Et puisque $m\leq f\leq M$, nous avons $m(b-a)\leq\int_{[a,b]}f\leq M(b-a)$.

Donc, la quantité $\dfrac{1}{b-a}\int_{[a,b]}f$ est comprise entre $m$ et $M$.

---

**Définition**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. La quantité $\dfrac{1}{b-a}\int_{[a,b]}f$ s'appelle **la valeur moyenne** de $f$.

---

## 1.3 Propriétés de l'intégrale

**Proposition (linéarité)**

Soient $f_1, f_2$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_{[a,b]} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2$$

On dit que l'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

**Démonstration**

— Soient $\epsilon > 0$ et $f$ est une fonction continue par morceaux, alors il existe $\theta$ est fonction en escalier telle que $|f-\theta| \leq \epsilon$. On a $\theta - \epsilon \leq f \leq \theta + \epsilon$. Alors

$$\int_{[a,b]} (\theta - \epsilon) \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (\theta + \epsilon)$$

et donc

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta \right| \leq (b-a)\epsilon$$

— Maintenant, soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, ainsi que $\lambda_1, \lambda_2$ deux réels. Pour $\epsilon > 0$ quelconque, il existe $\theta_1, \theta_2$ deux fonctions en escalier telles que :

$$|f_1 - \theta_1| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad |f_2 - \theta_2| \leq \epsilon$$

Ce qui entraine

$$\left| \int_{[a,b]} f_1 - \int_{[a,b]} \theta_1 \right| \leq (b-a)\epsilon$$

et

$$\left| \int_{[a,b]} f_2 - \int_{[a,b]} \theta_2 \right| \leq (b-a)\epsilon$$

Donc

$$|\lambda_1| \left| \int_{[a,b]} f_1 - \int_{[a,b]} \theta_1 \right| \leq |\lambda_1|(b-a)\epsilon$$

et

$$|\lambda_2| \left| \int_{[a,b]} f_2 - \int_{[a,b]} \theta_2 \right| \leq |\lambda_2|(b-a)\epsilon$$

Donc (puisque l'intégrale sur les fonctions en escalier est linéaire)

$$\left| \lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 - \int_{[a,b]} \lambda_1\theta_1 \right| \leq |\lambda_1|(b-a)\epsilon$$

et

$$\left| \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2 - \int_{[a,b]} \lambda_2\theta_2 \right| \leq |\lambda_2|(b-a)\epsilon$$

Par suite

$$\left|\lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2 - \left(\int_{[a,b]} \lambda_1\theta_1 + \int_{[a,b]} \lambda_2\theta_2\right)\right| \leq (|\lambda_1| + |\lambda_2|)(b-a)\epsilon$$

On pose

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \quad \text{et } \theta = \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2$$

On a

$$|f - \theta| \leq |\lambda_1||f_1 - \theta_1| + |\lambda_2||f_2 - \theta_2| \leq (|\lambda_1| + |\lambda_2|)\epsilon$$

Et par suite

$$\left|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta\right| \leq (b-a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\epsilon$$

On pose

$$I = \int_{[a,b]} \theta = \int_{[a,b]} \lambda_1\theta_1 + \int_{[a,b]} \lambda_2\theta_2$$

et

$$\Delta = \left|\int_{[a,b]} f - \left(\lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2\right)\right|$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Delta = &\quad \left|\int_{[a,b]} f - I + I - \left(\lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2\right)\right| \\
\leq &\quad \left|\int_{[a,b]} f - I\right| + \left|I - \left(\lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2\right)\right| \\
\leq &\quad 2(b-a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\epsilon
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\forall \epsilon > 0, \Delta \leq 2(b-a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\epsilon$$

Ce qui prouve que $\Delta = 0$ et donc

$$\left|\int_{[a,b]} f = \lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2\right|$$

---

Deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a.b]$ qui sont égales sauf en un nombre fini de points ont la même intégrale car leur différence, qui est nulle sauf en un nombre fini de points, est une fonction en escalier dont l'intégrale est nulle.

---

**Proposition (relation de Chasles)**

Soit $c \in [a, b]$ et $f$ une fonction définie sur $[a, b]$.

La fonction $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si, et seulement si, ses restrictions à $[a, c]$ et à $[c, b]$ sont continues par morceaux, et l'on a alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$

---

**Démonstration**

Soit $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ (une fonction en escalier plus petite que $f$).

On a $\varphi_{|[a,c]} \in \mathcal{E}^-(f_{|[a,c]})$ et $\varphi_{|[c,b]} \in \mathcal{E}^-(f_{|[c,b]})$.

Par suite

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} \varphi = & \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]} \\ \leq & \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}\end{aligned}$$

Le réel $\int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$ est un majorant de de $\left\{\int_{[a,b]} \varphi \;\mid\; \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$.

Donc il est plus grands que sa borne supérieure ($\int_{[a,b]} f$). Ce qui donne

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$

En applique les mêmes étapes pour $-f$

Soit $\varphi \in \mathcal{E}^-(-f)$ (une fonction en escalier plus petite que $-f$).

On a $\varphi_{|[a,c]} \in \mathcal{E}^-(-f_{|[a,c]})$ et $\varphi_{|[c,b]} \in \mathcal{E}^-(-f_{|[c,b]})$.

Par suite

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} \varphi = & \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]} \\ \leq & \int_{[a,c]} -f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} -f_{|[c,b]}\end{aligned}$$

Le reel $\int_{[a,c]} -f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} -f_{|[c,b]}$ est un majorant de de $\left\{\int_{[a,b]} \varphi \;\mid\; \varphi \in \mathcal{E}^-(-f)\right\}$.

Donc il est plus grands que sa borne supérieure ($\int_{[a,b]} -f$). Ce qui donne

$$\int_{[a,b]} -f \leq \int_{[a,c]} -f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} -f_{|[c,b]}$$

Et d'après la linéarité de l'intégrale nous avons

$$\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$

En fin

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$

**Remarque** :

Soient $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, et $u = (x_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ une subdivision adaptée à $f$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, notons $f_i$ la fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ tel que $\forall x \in ]x_{i-1}, x_i[, f_i(x) = f(x)$. Alors d'après la relation de Chasles :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} f_i$$

### 1.3.1 Quelques inégalités

**Proposition**

— Une fonction positive et continue par morceaux à une intégrale positive.

— Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ alors :

$$f \leq g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$$

**Démonstration**

— Si $f$ est une fonction continue par morceaux et positive alors la fonction nulle (qui constante donc en escalier) appartient à $\mathcal{E}^-(f)$. Donc son intégrale (qui vaut 0) est inférieure à l'intégrale de $f$. Par suite $\int_{[a,b]} f \geq 0$.

— On applique le résultat précèdent à $g - f$ puis on utilise la linéarité de l'intégrale.

**Théorème**

Si $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $|f|$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

**Démonstration**

Soient $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $u = (x_i)_{i=0}^{n}$ une subdivision adaptée à $f$. Alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ la restriction de $f$ sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ est continue et admet des limites finies en $x_{i-1}$ et $x_i$. Il en est de même pour $|f|$ d'après les propriétés des limites. Donc $|f|$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

Nous avons $-|f| \leq f \leq |f|$ donc

$$-\int_{[a,b]} |f| \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|$$

Ce qui veut dire

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

**Proposition (Inégalité de la moyenne)**

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, alors :

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

**Démonstration**

Soit $M = sup_{[a,b]}|f|$. Nous avons

$$\forall x \in [a, b], |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M|g(x)|$$

Donc

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \int_{[a,b]} |fg| \leq \int_{[a,b]} M|g| = M \int_{[a,b]} |g|$$

**Corollaire**

Si $f$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f|$$

**Démonstration**

En pose $g = 1$ est on applique l'inégalité de la moyenne.

**Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, alors :

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

**Démonstration**

On pose

$$P(\lambda) = \int_{[a,b]} (f + \lambda g)^2 = \lambda^2 \int_{[a,b]} g^2 + 2\lambda \int_{[a,b]} fg + \int_{[a,b]} f^2$$

$P$ est donc une fonction polynomiale de degré au plus égale à 2 qui est positive pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

— Si $\int_{[a,b]} g^2 = 0$, alors la fonction $P$ ne peut pas changer de signe (car elle est positive) donc ne peut pas être de degré 1. On en déduit $\int_{[a,b]} fg = 0$

Donc $\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 = 0 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$

— Sinon, $P$ est polynôme de degré 2 qui positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Son discriminent

$$\Delta = 4\left(\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 - \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2\right)$$

est donc negatif. Ce donne

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

---

On peut écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz comme suit :

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[a,b]} g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

### 1.3.2 Cas des fonctions continues

---

**Théorème**

Une fonction **continue et positive** sur $[a, b]$ est nulle si, et seulement si, son intégrale sur $[a, b]$ est nulle.

---

---

**Démonstration**

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

Si $f$ est nulle alors son intégrale est nulle.

Montrons maintenant, que si l'intégrale de $f$ est nulle alors $f$ est la fonction nulle.

Par absurde, on suppose que $f$ n'est pas nulle. Donc il existe (au moins) $c \in [a, b]$ tel que $f(c) \neq 0$ et puisque $f$ est positive $f(c) > 0$.

1- Si $c \in ]a, b[$. Puisque la fonction est continue en $c$ alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a, b],\ \ |x - c| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

On pose $\epsilon = \dfrac{f(x)}{2}$

alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b],\ \ x \in ]c - \alpha, c + \alpha[ \Rightarrow f(x) \leq f(c) - \epsilon > 0$.

On pose $\beta = max(\dfrac{a+c}{2}, c - \alpha), \gamma = max(\dfrac{b+c}{2}, c + \alpha)$. On a

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,\beta]} f + \int_{[\beta,\gamma]} f + \int_{[\gamma,b]} f$$

$$\geq \int_{[\beta,\gamma]} f$$

$$\geq (\gamma - \beta)\frac{f(c)}{2} > 0$$

2- Si $c = a$ ou $c = b$. La fonction $f$ est continue en $c$ et $f(c) > 0$. Donc elle est strictement positive au voisinage de $c$. Ceci dit, il existe un réel $d \in ]a, b[$ tel f(d)>0. On répète les mêmes étapes précédentes mais cette fois avec $d$ et on aboutit a $\int_{[a,b]} f > 0$

Ce qui est absurde.

Donc $f$ est nulle.

---

**Avertissement :** Les deux hypothèses (continuité et positivité) sont nécessaires pour que le résultat soit vrai.

---

**Corollaire**

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, alors :

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

Si et seulement si, $f$ et $g$ sont proportionnelles.

---

**Démonstration**

— Si $f$ et $g$ sont proportionnelles, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda g$ où $g = \lambda f$. Supposons par exemple que $f = \lambda g$.

Alors,

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 = \lambda^2 \left(\int_{[a,b]} g^2\right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

Supposons maintenant que

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

On pose

$$P(\lambda) = \int_{[a,b]} (f + \lambda g)^2 = \lambda^2 \int_{[a,b]} g^2 + 2\lambda \int_{[a,b]} fg + \int_{[a,b]} f^2$$

— *si* $\int_{[a,b]} g^2 = 0$ alors $g^2$ est nulle (puisqu'elle est continue est positive avec intégrale nulle) donc $g$ est nulle. Donc $g = 0 \times f$. Par suite $f$ et $g$ sont proportionnelles.

— sinon, le polynôme $P$ a un discriminent nul. Donc il existe $\lambda_0$ tel que $P(\lambda_0) = 0$.

Donc $P(\lambda_0) = \int_{[a,b]} (f + \lambda_0 g)^2 = 0$. La fonction $(f + \lambda_0 g)^2$ est continue et positive avec intégrale nulle donc elle est nulle. Par suite $f = \lambda_0 g$. Les deux fonctions sont proportionnelles.

---

### 1.3.3 Invariance par translation

**Proposition**

Soient $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\alpha$ un réel. La fonction $f_\alpha$ définie sur $[a+\alpha, b+\alpha]$ par $f_\alpha(x) f(x-\alpha)$ est continue par morceaux sur $[a+\alpha, b+\alpha]$. De plus :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha$$

**Démonstration**

On va dabord montrer le resultat pour une fonction en escalier pouis, pour une fonction continue par morceaux.

— Si $f$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ :

soit $u = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision adaptee a $f$. Alors on peut facilement montrer que la famille $(y_i)_{i=0}^n$ avec $y_i = x_i + \alpha$ est une subdivision de $[a+\alpha, b+\alpha]$.

Si $f$ prend la valeur $c_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$ alors $f_\alpha$ vaut aussi $c_i$ sur $]x_{i-1}+\alpha, x_i+\alpha[$. Donc $f_\alpha$ est une fonction en escalier sur $[a+\alpha, b+\alpha]$.

De plus,

$$\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) c_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i = \int_{[a,b]} f$$

Maintenant si $f$ est continue par morceaux,

soit $u = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision adaptee a $f$. La famille $(y_i)_{i=0}^n$ avec $y_i = x_i + \alpha$ est une subdivision de $[a+\alpha, b+\alpha]$.

$f$ est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$ est admet des limites finies en $x_{i-1}$ et $x_i$. Donc, $f_\alpha$ est continue sur $]y_{i-1}, y_i[=]x_{i-1}+\alpha, x_i+\alpha[$ est admet des limites finies en $y_{i-1}$ et $y_i$. Donc $f_\alpha$ est continue par morceaux sur $[a+\alpha, b+\alpha]$.

si $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ donc $\varphi \leq f$ donc $\varphi_\alpha \leq f_\alpha$

donc $\{\varphi_\alpha \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\} \subset \mathcal{E}^-(f_\alpha)$

D'autre part, si $\psi \in \mathcal{E}^-(f_\alpha)$ donc il existe $\phi \in \mathcal{E}^-(f)$ telle que $\psi = \varphi_\alpha$.

Donc, $\mathcal{E}^-(f_\alpha) = \{\varphi_\alpha \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\}$

Par suite

$$\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha = sup\left\{\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^-(f_\alpha)\right\}$$

$$= sup\left\{\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} \varphi_\alpha \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$$

$$= sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\} = \int_{[a,b]} f$$

Soient $T > 0$ et $f$ une fonction $T$-périodique et continue par morceaux sur une période et donc sur tout segment de $\mathbb{R}$. Nous avons :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_{[a,a+T]} f = \int_{[0,T]} f$$

## 1.4 Somme de Riemann

**Définition**

Soient $u = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision de $[a, b]$ et $v = (y_i)_{i=1}^n$ une famille de points de $[a, b]$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, y_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Si $f$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on appelle **somme de Riemann** de $f$ associée a la subdivision $u$ et a la suite $v$, la quantité :

$$\sigma(f, u, v) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(y_i)$$

Pour le cas d'une fonction en escalier (qui est une fonction continue par morceaux), la somme de Riemann $\sigma(f, u, v)$ est égale a son intégrales.

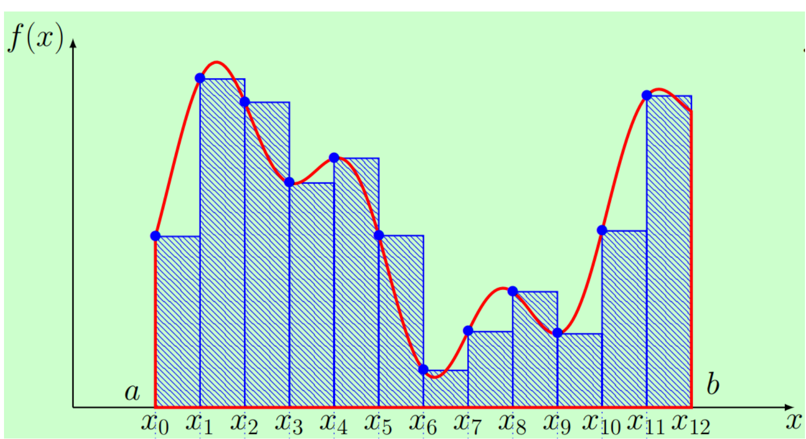
Les cas les plus utilises sont ceux ou la subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$ est pas constant, c'est-à-dire lorsque $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$

— Considérons une subdivision régulière $u = (x_i)_{i=0}^n$ $v = (y_i)_{i=1}^n$ une famille de points de $[a, b]$ telle que :

$$\begin{cases} x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}, & 0 \leq i \leq n \\ y_i = x_{i-1}, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

La somme de Riemann correspondante s'écrit :

$$\sigma(f, u, v) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})$$

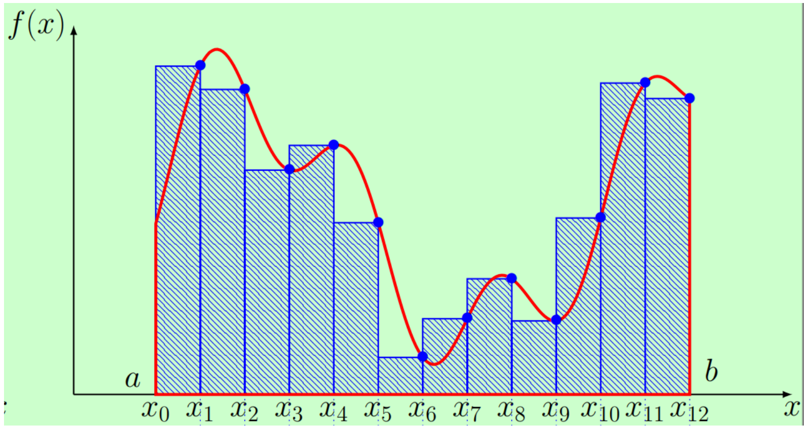



— Considérons une subdivision régulière $u = (x_i)_{i=0}^n$ $v = (y_i)_{i=1}^n$ une famille de points de $[a, b]$ telle que :

$$\begin{cases} x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}, & 0 \leq i \leq n \\ y_i = x_i, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

La somme de Riemann correspondante s'écrit :

$$\sigma(f, u, v) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n})$$




**Proposition (résultat admis)**

Soit $f$ une application continue sur $[a,b]$,

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$ et pour toute famille $v = (y_i)_{i=1}^n$ qvec $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a :

$$\delta(u) \leq \eta \Rightarrow \left| \int_{[a,b]} f - \sigma(f,u,v) \right| \leq \epsilon$$

**Proposition**

Soit $f$ une application continue sur $[a,b]$,

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$ et pour toute famille $v = (y_i)_{i=1}^n$ avec $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a :

$$\delta(u) \leq \eta \Rightarrow \left| \int_{[a,b]} f - \sigma(f,u,v) \right| \leq \epsilon$$

Les sommes de Riemann sont aussi proches que l'on veut de son intégrale quand le module de la subdivision tend vers 0.

## 1.5 Fonctions continue par morceaux sur un intervalle

Dans cette partie, $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

**Définition**

Soit $f$ une fonction définie sur $I$. On dit que $f$ est continue par morceaux sur $I$ si elle est continue par morceaux sur tout segment de $I$ ($[a,b]$ avec $a, b \in I$ et $a < b$).

**Exemples**

1- Une fonction continue sur $I$ est continue par morceaux sur $I$. 2- La fonction $x \to x - E(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. 3- La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$$

n'est pas continue morceaux sur $\mathbb{R}$ puisque elle n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$. Cependant, elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ car elle continue sur chacun de ces intervalles.

**Notations**

Soient $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$, ainsi que $a$ et $b$ deux éléments de $I$ ( a partir de maintenant, on a pas nécessairement $a < b$) On adopte les notations suivantes :

— si $a < b$, $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f$
— si $a > b$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b,a]} f$
— si $a = b$, $\int_a^b f(x)dx = 0$

**Avertissement :** Le résultat :

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

n'est pas valide que lorsque $a \leq b$.

**Proposition (Relation de Chasles)**

Si $f$ est continue par morceaux sur un intervalle I, alors :

$$\forall a, b, c \in I, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

**Démonstration**

Nous allons traiter le cas ou $a = b = c$, $a < c < b$ et $a < b < c$. Les autres casd ($b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$ et $c < b < a$) sont similaire aux deux premiers cas.

— si $a = b = c$ chaque intégrale vaut 0, le résultat est donx trivial.
— si $a < c < b$, c'est le cas qu'on a vu dans la proposition de la Relation de Chasles pour le cas d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.
— si $a < b < c$, on applique la même proposition (Relation de Chasles) pour $f$ qui est continue par morceaux sur $[a,c]$.

Donc

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Or $\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$. Donc

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

Et par suite

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

---

**Proposition**

Si $f$ est continue par morceaux et bornée sur $I$, on :

$$\forall a, b \in I, \quad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq |b-a| sup_I |f|$$

---

**Démonstration**

Nous avons 3 cas : $a = b$, $a < b$ et $a > b$.

1- si $a = b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = 0|, le résultat est immédiat.

2- si $a < b$, la fonction $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$. Donc, nous avons $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq (b-a) sup_{[a,b]} |f|$

Donc $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a) sup_{[a,b]} |f|$

Or $sup_{[a,b]} |f| \leq sup_I |f|$

Donc, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a) sup_I |f|$

3- si $a > b$, en applique les mêmes étapes précédentes pour la fonction $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et on reçoit $\left|\int_b^a f(x)dx\right| \leq (b-a) sup_I |f|$

Et puisque $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ donc $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|-\int_b^a f(x)dx\right| = \left|\int_b^a f(x)dx\right|$.

En fin, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a) sup_I |f|$

---

## 1.6 Exercices

### 1.6.1 Exercice 1

1- Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, et $f$ une application telle que :

$$\begin{array}{rclcl} f & : & [m,n] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & E(x) \end{array}$$

Calculer

$$\int_{[m,n]} f$$

### 1.6.2 Exercice 2

Soit $f$ une application telle que :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} [-1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x|x| \end{array}$$

Calculer

$$\int_{[-1,2]} f dx$$

### 1.6.3 Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ : Soit fonction $f_a$ qui, pour tout $x \in [0,1]$, définie par $f_a(x) = min(a,x)$.

Calculer

$$\int_{[0,1]} f_a$$

### 1.6.4 Exercice 4

Soit $f$ la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

1. Vérifier que $f$ est une fonction en escalier ?
2. Donner deux subdivisions adaptées à $f$ (notees $\sigma$ et $\sigma^{'}$).
3. Calculer $I(\sigma, f)$ et $I(\sigma^{'}, f)$.

### 1.6.5 Exercice 5

Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x \text{ et } g(x) = x^2$$

Est-ce que ces fonctions sont continue par morceaux sur tout intervalle ferme borne de $\mathbb{R}$ ?

En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales

$$\int_0^1 f(x)dx, \int_1^2 g(x)dx$$

CHAPITRE 2

# Intégration et Dérivation

Le présent Chapitre contiendra :

— Premitive et intégrale des fonctions continues

— Methodes de calcul des premitives

## 2.1 Primitive et intégrale des fonctions continues

Dans tout ce qui suit, $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts.

### 2.1.1 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

**Définition**

Soit $f$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $I$. On appelle primitive de $f$ sur $I$ toute fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $I$ et dont la dérivée est $f$.

**Proposition**

Soit $f$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $I$.

Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors les primitives de $f$ sur $I$ sont les fonctions $F + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Démonstration**

Les fonctions $F + \lambda$ sont dérivables sur $I$ est leurs dérivées valent $f$. Donc $F + \lambda$ sont des primitives de $f$.

Soit $G$ une primitive de $f$ donc $G - F$ a une dérivée nulle sur $I$. Donc $G - F$ est une constante sur $I$.

### 2.1.2 Primitives usuelles

Les deux tableaux suivants contiennent les primitives des fonctions usuelles :

| Fonction | Primitive | Domaine de définition |
|---|---|---|
| $e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ | $\frac{1}{a}e^{ax}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ $n < -1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tanh x$ | $\ln\cosh x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$ | $\ln\lvert\sinh x\rvert$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ | $\tanh x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{\sinh^2 x} = \coth^2 x - 1$ | $-\coth x$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan x$ | $-\ln\lvert\cos x\rvert$ | $x \in \mathbb{R}$ $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$ |
| $\text{cotan } x = \frac{1}{\tan x}$ | $\ln\lvert\sin x\rvert$ | $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $\tan x$ | $x \in \mathbb{R}$ $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \text{cotan }^2 x$ | $-\text{cotan } x$ | $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ |

| Fonction | Primitive | Domaine de définition |
|---|---|---|
| $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x$ | $]-1;1[$ |
| $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{1-x^2}$ | $\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$ | $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$ | $]-\infty;-1[\cup;]1;+\infty[$ |

**Exemple**

Les primitives d'une fonction polynomiale de la forme

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

sont de la forme $F+\lambda$ avec :

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1} \quad \text{et } \lambda\in\mathbb{R}$$

### 2.1.3 Théorème fondamental

**Proposition**

Soient $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$ et $a$ un point de $I$. La fonction $F_a$ définie par :

$$F_a(x)=\int_a^x f(t)dt$$

est continue sur $I$

**Théorème**

Soient $F$ une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$ et $a$ un point de $I$. La fonction $F_a$ définie par :

$$F_a(x)=\int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de $f$ sur $I$. C'est l'unique primitive qui s'annule en $a$.

**Corollaire**

Soient f une fonction continue sur $I$, ainsi que $\alpha$ et $\beta$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $J$ et a valeurs dans $I$. La fonction définie sur $J$ par :

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$$

est dérivable sur $J$ et sa dérivée est :

$$\varphi^{'}(x) = \beta^{'}(x)f(\beta(x)) - \alpha^{'}(x)f(\alpha(x))$$

**Exemple**

— Si $f$ est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T$, alors :

$$g(x) = \int_{x}^{x+T} f(t)dt$$

est indépendante de $x$ (constante), car :

$$g'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

**Proposition**

Soient $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$ et $a$ un point de $I$. Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, on a :

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = F(b) - F(a)$$

**Exemple**

—
$$\int_{a}^{b} e^{2x}dx = \frac{1}{2}(e^{2b} - e^{2a})$$

—
$$\int_{0}^{\pi} sinxdx = -cos\pi + cos0 = 2$$

— Soit $f(x) = \alpha x + \beta$. Une primitive de $f$ est $x \mapsto \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x$, donx :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2) + \beta(b-a) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

**Corollaire**

Si $f \in \mathcal{C}(I)$(dérivable et sa dérivée est continue), alors pour $a, x \in I$ on a :

$$f(x) - f(a) = \int_{a}^{x} f^{'}(t)dt$$

**Notations** :

— Dans ce qui suit, on va noter la différence de la fonction $F$ entre $a$ et $b$ : $[F(x)]_a^b$. Ceci dit,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

— Lorsque $f$ est une fonction continue, la notation $\int f(x)dx$ représente une primitive quelconque de la fonction $f$ ($\int f(x)dx = F(x) = Cst$).

## 2.2 Méthodes de calcul des primitives

### 2.2.1 Intégration par parties

**Proposition**

Si $u$ et $v$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, on a :

$$\int_a^b u(t)v^{'}(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u^{'}(t)v(t)dt$$

**Démonstration**

Si $u$ et $v$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, alors $uv$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Donc

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (uv)^{'}(t)dt = \int_a^b u(t)v^{'}(t)dt + \int_a^b u^{'}(t)v(t)dt$$

**Remarque** : Dans un calcul de primitive, la formule d'intégration par parties s'écrit :

$$\int u(x)v^{'}(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u^{'}(x)dx$$

La formule d'intégration par parties est en général utilisée pour :

— éliminer une fonction transcendantes dont la dérivée est plus simple comme par exemple les fonctions $ln, arcsin, arctan, \ldots$

— calculer une intégrale par récurrence.

**Exemples**

1- sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\int lnxdx = \int (x)^{'} lnxdx = xlnx - \int x\frac{1}{x} = xlnx = x + Cst$$

2- Sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\int arctanxdx = xarctanx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctanx - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + Cst$$

3 - Pour calculer $\int x^2e^xdx$, on peut intégrer l'exponentielle et dériver le polynôme :

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx$$

puis recommencer :

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

ce qui donne :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + Cst$$

---

### 2.2.2 Changement de variable

---

**Proposition**

Soient $I$ et $J$ deux intervalle de $\mathbb{R}$, ainsi que $f$ une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$ et $\varphi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $J$ dans $I$. Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux éléments de $J$, on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi^{'}(u)du$$

---

**Démonstration**

Comme $f$ est continue sur $I$, elle possède une primitive $F$ et l'on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F \circ \varphi(\beta) - F \circ \varphi(\alpha)$$

D'autre part, puisque les deux fonctions $F$ et $varphi$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc $F \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$

Donc on peut écrire : $F \circ \varphi(\beta) - F \circ \varphi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)^{'}(u)du$.

Par suite :

$$\begin{aligned} F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) &= \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)^{'}(u)du \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} F^{'}(\varphi(u))\varphi^{'}(u)du \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi^{'}(u)du \end{aligned}$$

---

**Remarques** :

- la formule de changement de variable n'est que la formule de dérivation d'une fonction composée lue à l'envers.
- Quand on utilise la formule de changement de variable avec les notations vues dans la proposition, on dit que l'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$ (d'où l'appellation changement de variable). On remplace alors $t$ par $\varphi(u)$ et $dt$ par la différentielle $\varphi^{'}(u)du$, ce qui rend le calcul assez naturel.
- il faut faire attention lors de l'application de cette méthode, les bornes de l'intégral doivent être changées.

**Exemples**

1- Pour calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2ucosudu$$

On pose $t = sinu$, donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2ucosudu = \int_0^1 t^2dt = \frac{1}{3}$$

2- Pour calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^2 \sqrt{4-u^2}udu$$

On pose $t = u^2$, donc :

$$\int_{-1}^2 \sqrt{4-u^2}udu = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{4-t}dt = [-\frac{1}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}]_1^4 = \sqrt{3}$$

## 2.3 Exercices

### 2.3.1 Exercice 1

Trouver les primitives suivantes :

— a) $\int (2x^2+3x-5)dx$
— b) $\int (x-1)dx$
— c) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$
— d) $\int \frac{x+3}{x+1}dx$

### 2.3.2 Exercice 2

Calculer :

— a) $\int x\sqrt{1+x}dx$
— b) $\int x^3e^{2x}dx$
— c) $\int x^2ln(x)dx$

### 2.3.3 Exercice 3

Soit $f$ une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$$

Montrer que :

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

### 2.3.4 Exercice 4

En utilisant la reconnaissance de forme déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

— $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

— $g(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$

— $h(x) = \dfrac{ln(x)}{x}$

— $k(x) = cos(x)sin^2(x)$

— $l(x) = \dfrac{1}{xln(x)}$

— $m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}$

### 2.3.5 Exercice 5

— Calculer $I_n = \int ln^n(x)dx$ pour $n = 0; 1; 2$.

— Calculer $I_n$ en fonction de $I_{n-1}$.

### 2.3.6 Exercice 6

Calculer avec deux méthodes (reconnaissance de la forme et changement de variable) les primitives de la fonction suivantes :

— $f(x) = cos^{1234}(x)sin(x)$

— $g(x) = \dfrac{1}{xln(x)}$

### 2.3.7 Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

— $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin(x)dx$ (par parties)

— $\int_0^1 \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x}+1}$ (changement de variable)

CHAPITRE 3

# Intégrale impropre

Le présent Chapitre contiendra :
- Definitions
- Proprietes des integrales convergentes
- Cas de fonctions continues positives
- Cas de fonctions de signe quelconque

## 3.1 Intégration sur un intervalle quelconque

Dans les chapitres précédents, nous avons définies $\int_a^b f(t)dt$, pour une fonction continue ou continue par morceaux sur $[a,b]$. Dans le présent chapitre, étant donnée une fonction continue seulement sur $]a,b[$, on cherche a donner un sens a $\int_a^b f(t)dt$.

### 3.1.1 Intégration sur un intervalle semi-ouvert

**Définition**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b[$ ou $(-\infty < a < b \leq +\infty)$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge ou est convergent si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, qui est définie sur $[a,b[$ possède une limite finie en $b$.

On note donc $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$. Si cette intégrale n'est pas convergente, on dit qu'elle est convergente. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite impropre (ou généralisée). On dit aussi qu'il y a une impropreté en $b$. Ou encore que l'intégrale est généralisée en $b$.

**Remarques :**
- Si f est continue sur $[a,b]$, on retrouve la définition de l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[a,b]$.
- Si $b$ est fini et $f$ admet un prolongement par continuité en $b$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, car si $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de $f$, on obtient :

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x \tilde{f}(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

On dit qu'on a une « fausse impropreté » en $b$.

— Si $b = +\infty$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est toujours impropre.

---

**Proposition**

Si $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergent si, et seulement si, toute primitive $F$ de $f$ possède une limite finie en $b$ et l'in a alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} F(x) - F(a)$$

---

**Preuve**

Nous avons $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

---

**Remarques :**

— Dans le cas où on connait une primitive de $f$, on peut ainsi déterminer la nature convergente ou divergente de l'intégrale et la calculer.

— Il résulte de cette proposition que si $c \in ]a, b[$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\int_c^b f(t)dt$ converge. La nature de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas donc que du comportement de $f$ au voisinage de l'impropre $b$.

---

**Exemples**

— la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et a pour primitive la fonction $t \mapsto -e^{-t}$. Comme $\lim_{t \to +\infty} -e^{-t} = 0$, l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{t \to +\infty} -e^{-t} + e^0 = 1$$

2- L'intégrale $\int_0^{+\infty} sin(t)dt$ diverge, car la fonction $-cos$, primitive de $sin$ n'a pas de limite en $+\infty$.

---

### 3.1.2 Reste d'une intégrale convergente

---

**Définition**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$

On suppose que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente. On appelle reste de cette intégrale impropre l'intégrale $\int_x^b f(t)dt$ ou $x \in ]a, b[$.

---

**Proposition**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, Le reste $\int_x^b f(t)dt$ ou $x \in ]a, b[$ a pour limite 0 quand $x$ tend vers $b$.

---

**Preuve**

Nous avons $\lim_{x\to b}\int_x^b f(t)dt = \lim_{x\to b}(\lim_{u\to b} F(u) - F(x)) = \lim_{u\to b} F(u) - \lim_{x\to b} F(x) = 0$

---

On définit de la même façon l'intégrale d'une fonction continue sur $]a, b]$.

---

**Définition**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $]a, b]$ ou $(-\infty \leq a < b < +\infty)$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge ou est convergent si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$, qui est définie sur $]a, b]$ possède une limite finie en $a$.

---

On note donc $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)dt$.

---

**Proposition**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $]a, b]$ ou $(-\infty \leq a < b < +\infty)$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergent si, et seulement si, toute primitive $F$ de $f$ possède une limite finie en $a$ et l'on a alors :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - \lim_{x\to a} F(x)$$

---

**Exemple**

Montrons la convergence de $\int_0^1 ln(t)dt$, qui est impropre car la fonction $ln$ est continue sur $]0, 1]$ mais n'est pas définie en 0.

On obtient pour $x \in ]0, 1]$, en intégrant par parties,

$\int_x^1 ln(t)dt = [tln(t)]_x^1 - \int_x^1 dt = xln(x) - 1 + x.$

Comme $\lim_{x\to 0} xln(x) = 0$, on en déduit que $\int_0^1 ln(t)dt$ converge et $\int_0^1 ln(t)dt = -1$.

---

**Remarques : ** Comme précédemment, si $f$ est continue sur $]a, b]$, le reste de l'intégrale convergente $\int_a^b f(t)dt$, qui est $\int_a^x f(t)dt$, tend vers 0 quand $x$ tend vers $a$.

### 3.1.3 Intégrale d'une fonction sur un intervalle ouvert

---

**Définition**

Soit $f$ continue sur $]a, b[$ ou $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, $c \in ]a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et l'on pose, en cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

---

Cette définition ne dépend pas du choix du point $c$ comme le montre la proposition suivante :

---

**Proposition**

Soit $f$ continue sur $]a, b[$ ou $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, $c \in ]a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si, et seulement si, toute primitive $F$ de $f$ sur $]a, b[$ possède une limite finie en $a$ et $b$ et en cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_b F - \lim_a F$$

**Théorème**

Soit $\alpha$ un réel quelconque.

Si $a$ est un réel positif, l'intégrale $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$ ; l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Plus généralement, si $a$ et $b$ sont des réels tels $a < b$, $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}dt$ converge si, et seulement si $\alpha < 1$.

### 3.1.4 Propriétés des intégrales convergentes

**Définition**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_p = b$ de $[a, b]$ telle que $f$ soit définie et continue sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[(0 \leq k \leq (p-1))$. On dit que l'intégrale $\in_a^b f(t)dt$ converge si, pour $0 \leq k \leq p-1$, $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$ converge. Le cas échéant, on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$$

**Remarques :**

— Dans la définition précédente, le résultat ne dépend pas de la subdivision choisie.
— Si $f$ est continue par morceaux alors les intégrales $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$ convergent car sa restriction sur $[a_k, a_{k+1}]$ possède un prolongement par continuité en $a_k$ et $a_{k+1}$.

Les théorèmes qui suivent sont des versions « intégrales impropres » des propriétés des intégrales sur un segment.

**Théorème**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies et continue sur l'intervalle $[a, b]$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ sauf en un nombre fini de points, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt$ converge et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

**Proposition**

Soit $f$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ sauf en un nombre fini de points, $c \in ]a, b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

### Positivité

**Proposition**

Soit $f$ une fonction definie sur $]a,b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$.

Si $\int_a^b f(t)dt$ converge et si $f$ est positive sur $]a,b[$, alors on a $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. Si de plus $f$ n'est pas la fonction nulle, on obtient $\int_a^b f(t)dt > 0$.

**Corollaire**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies et continues sur $]a,b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$. Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent et si $f \leq g$, alors on a

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

Si de plus $f$ n'est pas égale à $g$. On obtient

$$\int_a^b f(t)dt < \int_a^b g(t)dt$$

### Intégration par parties

**Théorème**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ avec $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$. Si le produit $uv$ possède une limite finie en $a$ et $b$, les intégrales $\int_a^b u^{'}(t)v(t)dt$ et $\int_a^b u(t)v^{'}(t)dt$ ont même nature et, en cas de convergence, on dispose de l'égalité

$$\int_a^b u^{'}(t)v(t)dt = \lim_b uv - \lim_a uv - \int_a^b u(t)v^{'}(t)dt$$

### Changement de variables

**Théorème**

Soient $\varphi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, réalisant une bijection de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$ et $f : ]a,b[\to \mathbb{R}$, continue. Les intégrales $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)dt$ et $\int_a^b f(t)dt$ ont même nature et en cas de convergence

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)dt \text{ si } \varphi \text{ est croissante}$$

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)dt \text{ si } \varphi \text{ est décroissante}$$

### 3.1.5 Cas des fonctions positives

Pour la plupart des fonctions, on ne sait pas expliciter de primitive. C'est pourquoi il est utile de disposer de méthodes permettant de montrer la convergence des intégrales impropres sans en calculer la valeur. Dans cette section, on traite du cas où la fonction garde un signe constant au voisinage de l'impropriété.

#### Condition nécessaire et suffisante de convergence

**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, b[$.

De même,

Si $f$ une fonction continue et positive sur $]a, b]$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ est majorée sur $]a, b]$.

#### Critère de comparaison

**Théorème**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a, b[$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [c, b[$.

Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

### 3.1.6 Cas des fonctions de signe quelconque

#### Convergence absolue

**Définition**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

**Théorème**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, elle est convergente. De plus, on dispose de l'inégalité

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

**Exemple**

Pour $\alpha > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t^\alpha} dt$ est absolument convergente car, pour $t \geq 1$, $\left|\frac{sin(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge.

## 3.2 Exercices

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

Définition
- $\int_0^1 ln(t)dt$
- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Théorème de l'intégrale de Riemann
- $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$
- $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$
- $\int_0^3 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$
- $\int_4^9 \frac{1}{(t-4)^2} dt$
- $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{t-4}} dt$

Comparaison
- $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$