

Ларченко Дмитрий Игоревич, студент гр. 20400,  
e-mail: Larchenko42@gmail.com;  
Сафронов Кирилл Сергеевич, ст. преп. кафедры ПМиММ,  
e-mail: [safronov.kirill.pm@gmail.com](mailto:safronov.kirill.pm@gmail.com);  
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный  
морской технический университет»

### **Построение интервальных оценок для надёжности подводных беспроводных сенсорных сетей**

**Аннотация.** В статье исследуется среднеквадратическое отклонение процента потерянных сообщений для различных архитектур подводных беспроводных сенсорных сетей. Данные расчёты могут быть использованы для оптимизации работы сети.

**Ключевые слова:** подводные беспроводные сенсорные сети, критерий надёжности, интервальные оценки

Dmitry I. Larchenko, student of group 20400,  
e-mail: Larchenko42@gmail.com;  
Safronov Kirill Sergeevich,  
assistant prof. of the Department of AM&MM,  
e-mail: [safronov.kirill.pm@gmail.com](mailto:safronov.kirill.pm@gmail.com);  
Saint Petersburg State Marine Technical University

### **Distributed Algorithms for Stochastic Scheduling in Underwater Wireless Sensor Networks**

**Abstract.** The article examines the standard deviation of the percentage of lost messages for various architectures of underwater wireless sensor networks (UWSNs). These calculations can be applied to optimize network performance.

**Keywords:** underwater wireless sensor networks, reliability criterion, interval estimates

### **Введение**

Подводные беспроводные сенсорные сети (ПБСС) играют ключевую роль в таких областях, как мониторинг морской среды, исследования океанов и управление подводной инфраструктурой. Их уникальные технические и физические условия требуют специальных подходов к обеспечению надёжности передачи данных. Одной из ключевых характеристик эффективности таких сетей является процент потерянных сообщений, который напрямую влияет на их функциональность. Важным направлением исследований является анализ среднего процента потерянных сообщений и дисперсии, что позволяет оценить стабильность передачи данных и точность

расчетов. Изучение этих показателей способствует разработке более эффективных и устойчивых архитектур подводных сетей.

### Дисперсия и среднее квадратичное отклонение потерянных сообщений

Пусть  $p$  — вероятность успешной доставки сообщения при одной пересылке, а  $q = 1 - p$  — вероятность его потери. Кроме того, пусть  $N$  — максимально допустимое число пересылок сообщения каждым агентом. Если количество референсных узлов равно  $m$ , то для доставки требуется передать  $S = n^2 - m$  сообщений.

Обозначим через  $p_k = P_k(p, N)$  вероятность успешной доставки сообщения с  $k$ -го уровня удаленности на референсный узел, а через  $q_k = 1 - p_k$  — вероятность его потери. Следовательно, процесс доставки каждого сообщения с  $k$ -го уровня удаленности можно описать с помощью распределения Бернулли, где  $p_k$  — вероятность успеха, а  $q_k$  — вероятность неудачи. Здесь мы будем считать, что сообщения посылаются независимо друг от друга, тогда вероятность успешной отправки сообщения между уровнями будет одинакова для всех уровней.

Для случая доставки сообщений между соседними уровнями, можем посчитать вероятности как для доставки на уровень  $k = 1$ :

$$q_1 = q^N = (1 - p)^N,$$

$$p_1 = 1 - q_1 = 1 - q^N.$$

Для уровней с  $k > 1$ , вероятность  $p_k$  доставки сообщения с  $k$ -го уровня на  $k-1$ -й уровень (и далее до референсного узла) может быть представлена как произведение вероятностей доставки сообщения с уровня на уровень. Каждая из этих вероятностей равна  $p_1$ , что позволяет выразить  $p_k$  через  $p_1$ . Таким образом, общая вероятность доставки сообщения с уровня  $k$  на референсный узел будет вычисляться как произведение вероятностей доставки между всеми промежуточными уровнями:

$$p_k = p_1^k = [1 - q^N]^k, q_k = 1 - p_k = 1 - [1 - q^N]^k, 1 \leq k \leq n.$$

В работе [1] рассматривалась величина среднего процента потерянных сообщений  $\xi_p$ :

$$\xi_p = \frac{100}{S} \sum_{k=1}^{k_{\max}} S_k \cdot q_k,$$

выведем для нее дисперсию и среднее квадратичное отклонение для последующей оценки достоверности расчетов

Обозначим через  $D_p$  дисперсию процента потерянных сообщений. Зная вероятность  $q_k$  потери сообщения с уровня  $k$ , количество уровней  $k_{\max}$  и

количество сообщений на каждом уровне  $S_k, 1 \leq k \leq k_{\max}$ , а также учитывая, что все сообщения посылаются независимо друг от друга, можем вывести общую формулу для  $D_p$  (в процентах):

$$D_p = \left( \frac{100}{S} \right)^2 \sum_{k=1}^{k_{\max}} S_k \cdot q_k \cdot p_k$$

Тогда среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  имеет вид:

$$\sigma = \sqrt{D_p} = \sqrt{\left( \frac{100}{S} \right)^2 \sum_{k=1}^{k_{\max}} S_k \cdot q_k \cdot p_k}$$

### Распределение величины доставленных сообщений

Будем рассматривать факт доставки сообщения с  $i$ -ого датчика на  $k-1$  уровне на референсный узел как случайную величину  $\zeta_{k_i}$ . При определенных ранее параметрах эта случайная величина имеет вид:

$$\zeta_{k_i} = \begin{cases} 1, & p^k \\ 0, & 1 - p^k \end{cases}$$

Соответственно, сумма  $\Delta = \zeta_{k_1} + \zeta_{k_2} + \dots + \zeta_{k_i}$  имеет распределение Бернулли с параметрами  $S_k, p^k$ :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{S_k} \zeta_{k_i}, \Delta \sim B(S_k, p^k)$$

При достаточно большом количестве испытаний распределение Бернулли приближается к нормальному:

$$B(S_k, p^k) \stackrel{S_k \rightarrow \infty}{\sim} N(S_k p_k, \sqrt{S_k p_k (1 - p_k)})$$

В таких условиях мы можем посчитать доверительный интервал для оценки среднего значения доставленных/потерянных сообщений с  $k$ -ого уровня на референсный узел/узлы:

Обозначим  $X \sim N(m, \sigma)$ , где  $m = S_k p_k, \sigma = \sqrt{S_k p_k (1 - p_k)}$ , тогда:

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{S_k}} U_{1-\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{S_k}} U_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

где  $\bar{X} = \frac{1}{S_k} \sum_{i=1}^{S_k} X_i$ ,  $U_{1-\frac{\alpha}{2}}$  — квантиль нормального распределения для  $1 - \frac{\alpha}{2}$

Далее будет рассматриваться практическое применение выведенных ранее формул для некоторых вариантов расположения референсных датчиков в БПСС.

### Численные расчеты для различных архитектур сетей

### Кластерная архитектура

Рассмотрим кластерную структуру расположения референсных узлов. Предположим, что каждый кластер представляет собой квадратную сетку размером  $l \times l$ , где  $l$  — нечётное число, а референсный узел находится в центре этого кластера. Для упрощения расчетов будем считать, что общее количество узлов

$n^2$  кратно  $l^2$ , то есть  $n^2 = ml^2$ , где  $m$  — количество референсных узлов и кластеров. Для удобства примем, что. Таким образом, для сети малого размера при  $n^2 = 100$  получаем  $m = 100 / 25 = 4$  кластера, а для сети большого размера при  $n^2 = 2500$  —  $m = 2500 / 25 = 100$  кластеров.

Рассмотрим средний процент потерянных сообщений для кластера размером  $l = 5$ :

$$\xi_p^{clusters} = \frac{50}{3} q_1 (15 - 14q_1 + 6q_1^2 - q_1^3)$$

Далее на рисунке представлена зависимость среднего процента потерянных сообщений от максимально допустимого числа перепосылок для различных вероятностей передачи сообщения ( $p = 0.5$ ,  $p = 0.7$ ,  $p = 0.95$ ).

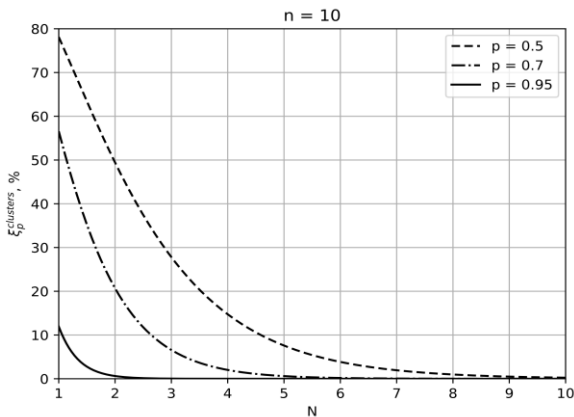


Рис. 1. Средний процент потерянных сообщений  $\xi_p^{clusters}$  в зависимости от максимально допустимого числа перепосылок  $N$  с различными вероятностями доставки сообщения  $p = 0.5$ ,  $p = 0.7$ ,  $p = 0.95$

При низкой вероятности доставки  $p = 0.5$  процент потерь остается высоким даже при большом числе перепосылок, что указывает на значительные ограничения надежности. С ростом вероятности доставки  $p = 0.7$ ,  $p = 0.95$  потери снижаются быстрее, достигая практически нуля при

высокой вероятности  $p=0.95$  и минимальном числе перепосылок. Это демонстрирует, что высокая вероятность доставки снижает необходимость увеличения количества перепосылок для обеспечения надежной передачи.

Отобразим среднеквадратичное отклонение по отдельности для каждой из вероятностей:

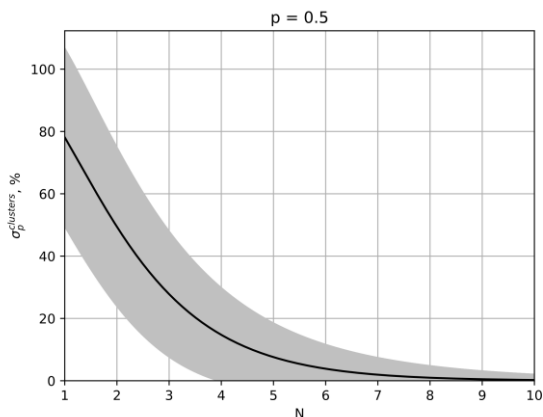


Рис.2. Средний процент потери сообщений при вероятности доставки  $p=0.5$  с отображением среднеквадратичного отклонения

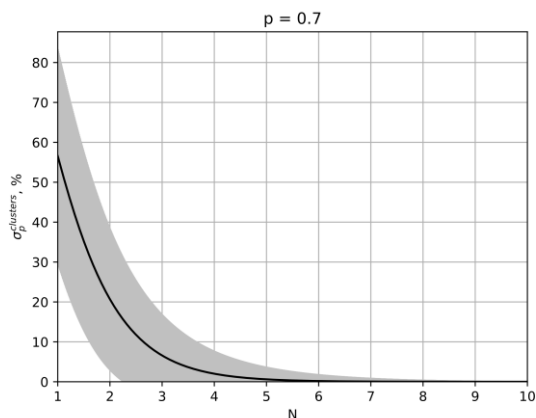


Рис.3. Средний процент потери сообщений при вероятности доставки  $p=0.7$  с отображением среднеквадратичного отклонения

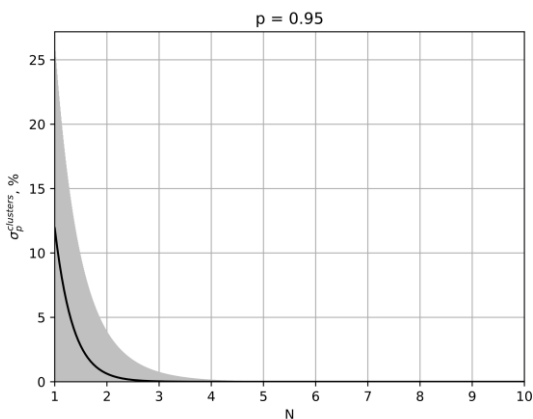


Рис.4. Средний процент потери сообщений при вероятности доставки  $p=0.95$  с отображением среднеквадратичного отклонения

Чтобы лучше понимать зависимость отклонения средней величины от вероятности доставки сообщения и количества перепосылок построим графики среднеквадратичного отклонения отдельно:

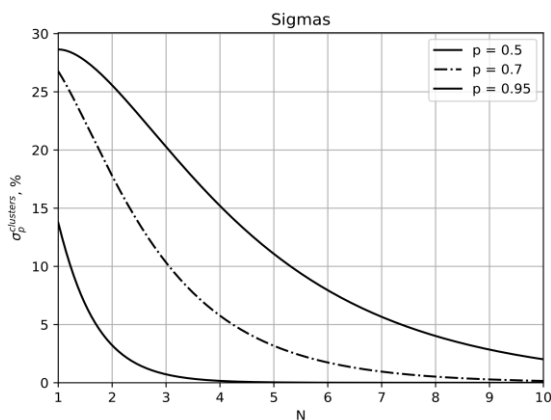


Рис.5. Зависимость среднеквадратичного отклонения  $\sigma_p^{clusters}$  от максимально допустимого количества перепосылок при различных вероятностях доставки сообщения  $p=0.5$ ,  $p=0.7$ ,  $p=0.95$

Из-за малого размера рассмотренной сети среднеквадратичное отклонение достаточно велико, однако все еще позволяет с определенной уверенностью рассуждать об эффективности кластеризации.

### Обход внутреннего квадратного контура

Предположим, что референсные узлы расположены вдоль некоторого квадратного контура, такого, что центр квадрата совпадает с центром системы. На Рис. 6 цветными линиями изображены возможные расположения референсных агентов на периметрах этих квадратов.

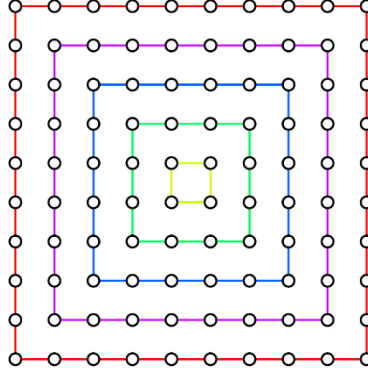


Рис. 6. Модель ПБСС в произвольном слое в случае обхода внутреннего контура

Для упрощения расчетов предположим, что  $n$  — четное, то есть  $n = 2v$ . Тогда число возможных контуров для размещения референсных узлов равно  $v$ . Пронумеруем эти контуры, начиная с самого внутреннего квадрата, и предположим, что референсные агенты находятся на  $\mu$ -м контуре, где  $1 \leq \mu \leq v$ . В этом случае количество референсных узлов равно

$$m = 4(2\mu - 1),$$

число сообщений для доставки к референсным узлам —

$$S = n^2 - 4(2\mu - 1).$$

Агенты, не являющиеся референсными узлами, можно разделить на внутренние и внешние относительно референсных узлов. Задачу определения максимального уровня удаленности узлов от референсных  $k_{\max}$ , а также числа сообщений на каждом уровне  $S_k$ , можно разбить на два этапа: отдельно для внутренних и внешних узлов относительно выбранного референсного контура. Эти характеристики обозначим  $k_{\max}^{in}, S_k^{in}, k_{\max}^{out}, S_k^{out}$ . Определим эти величины:

$$k_{\max}^{in} = \mu - 1$$

$$S_k^{in} = 4(2\mu - 2k - 1), 1 \leq k \leq k_{\max}^{in}.$$

$$k_{\max}^{out} = 2(v - \mu)$$

$$S_k^{out} = 4 \cdot \begin{cases} 2\mu + k - 1 & 1 \leq k \leq \frac{k_{max}^{out}}{2} \\ 2\nu - (2\mu + k - 1) \cdot \frac{k_{max}^{out}}{2} + 1 & \frac{k_{max}^{out}}{2} + 1 \leq k \leq k_{max}^{out} \end{cases}$$

Найдем средний процент потерянных сообщений:

$$\xi_{p,\mu}^{cont} = \frac{100}{S} \left( \sum_{k=1}^{k_{max}^{in}} S_k^{in} \cdot q_k + \sum_{k=1}^{k_{max}^{out}} S_k^{out} \cdot q_k \right).$$

В случае с внутренним контуром есть несколько вариантов расположения референсных датчиков, поэтому возникает вопрос оптимального выбора. Подобные вычисления были сделаны в статье [2], где была выведена формула поиска оптимального уровня для внутреннего контура:

$$\mu_{opt} = 0.366n + 0.5.$$

Начнем со случая маленькой сети графики среднего процента потерянных сообщений при выборе оптимального контура для различных вероятностей успешной отправки сообщения. Ниже представлены графики зависимости  $\xi_{p,\mu}^{cont}$  для малой сети ( $n = 10$ ).

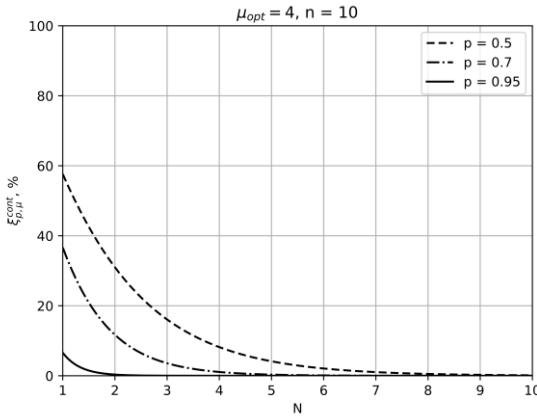


Рис. 7. Средний процент потерянных сообщений  $\xi_{p,\mu}^{cont}$  в зависимости от максимально доступного числа пересылок  $N$  при выборе оптимального контура в сети  $10 \times 10$  при различных вероятностях доставки сообщения

Как видно из графика, при увеличении вероятности доставки средний процент потерянных сообщений уменьшается, а также уменьшается и необходимое число пересылок, чтобы гарантировать доставку.



Построим графики для каждой из вероятностей отдельно и отобразим на них полосу среднеквадратичного отклонения:

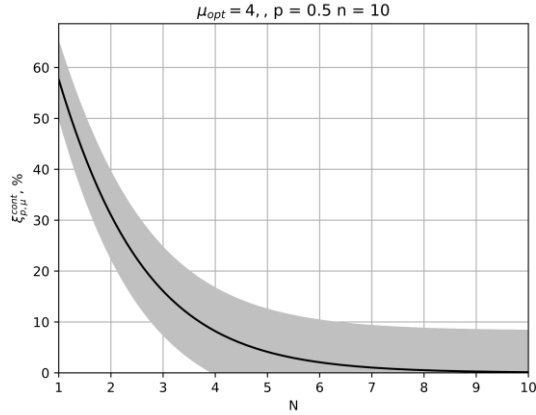


Рис. 8. Средний процент потерянных сообщений  $\xi_{p, \mu}^{cont}$  в зависимости от максимально допустимого количества перепосылок  $N$  с вероятностью доставки сообщения  $p = 0.5$  в сети размера  $10 \times 10$  при выборе оптимального контура на уровне  $\mu_{opt} = 4$  с отображением среднеквадратичного отклонения

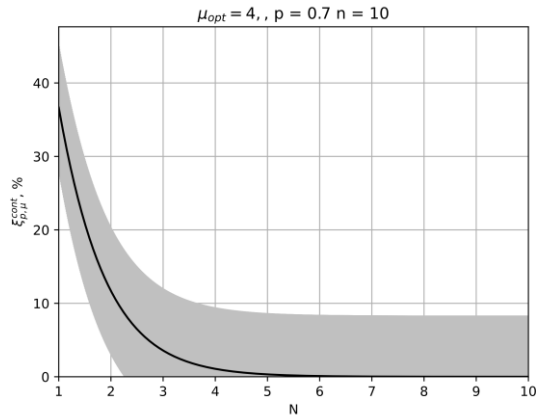


Рис. 9. Средний процент потерянных сообщений  $\xi_{p, \mu}^{cont}$  в зависимости от максимально допустимого количества перепосылок  $N$  с вероятностью доставки сообщения  $p = 0.7$  в сети размера  $10 \times 10$  при выборе

оптимального контура на уровне  $\mu_{opt} = 4$  с отображением  
среднеквадратичного отклонения

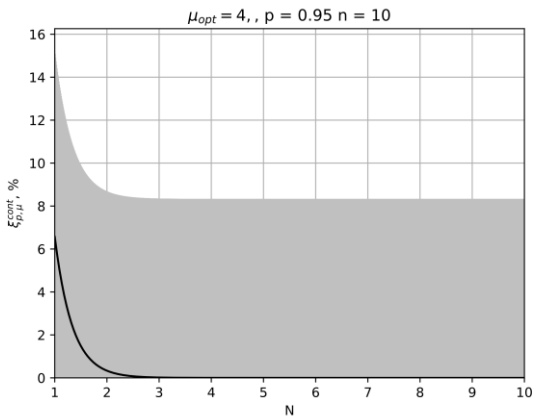
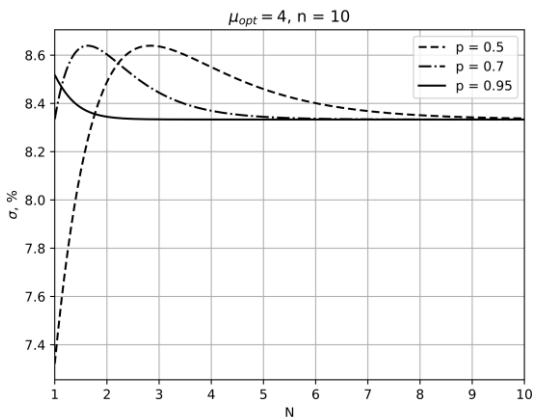


Рис.10. Средний процент потерянных сообщений  $\xi_{p, \mu}^{cont}$  в зависимости от  
максимально допустимого количества перепосылок  $N$  с вероятностью  
доставки сообщения  $p = 0.95$  в сети размера  $10 \times 10$  при выборе  
оптимального контура на уровне  $\mu_{opt} = 4$  с отображением  
среднеквадратичного отклонения

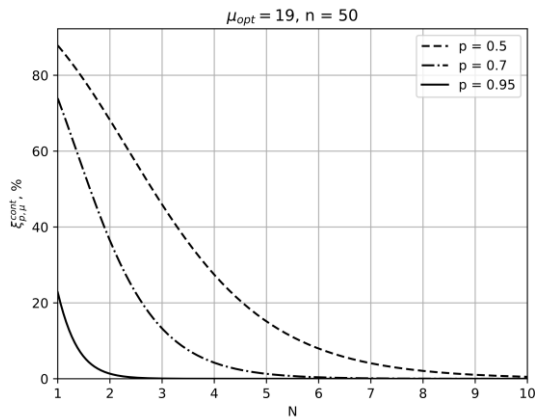
Теперь посмотрим, как ведет себя среднеквадратичное отклонение при  
различных вероятностях в зависимости от максимально допустимого  
количества перепосылок:



*Рис.11. Среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  в зависимости от максимального числа перепосылок  $N$  для различных вероятностей при выборе оптимального контура в сети  $10 \times 10$*

Легко заметить, что в случае архитектуры контура процент потерянных сообщений значительно меньше, чем в случае с кластеров с тем же размером сети, а среднеквадратичное отклонение гораздо меньше даже для малых размеров, что еще сильнее подтверждает лучшую эффективность данного расположения референсных узлов.

Теперь рассмотрим большую сеть ( $n = 50$ ) и сравним средний процент потерянных сообщений для оптимального контура  $\mu_{opt} = 19$  с разными вероятностями доставки:



*Рис.12. Средний процент потерянных сообщений  $\xi_{p,\mu}^{cont}$  в зависимости от максимально доступного числа перепосылок  $N$  при выборе оптимального контура в большой сети ( $n = 50$ ) при различных вероятностях доставки сообщения для оптимального контура  $\mu_{opt} = 19$*

Теперь на каждом из графиков отобразим среднеквадратичное отклонение по отдельности:

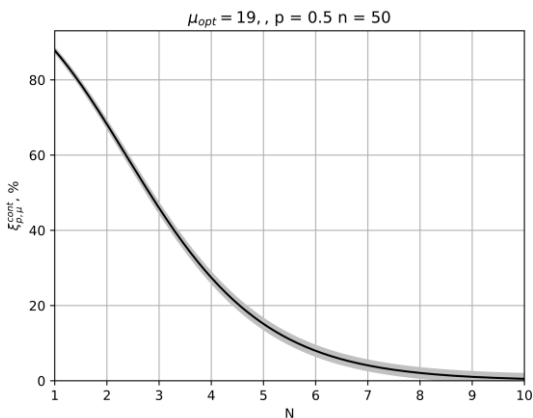


Рис.13. Средний процент потерянных сообщений  $\xi_{p,\mu}^{cont}$  в зависимости от максимально доступного числа перепосылок  $N$  при выборе оптимального контура в большой сети ( $n = 50$ ) при вероятности доставки сообщения  $p = 0.5$  для оптимального контура  $\mu_{opt} = 19$  с отображением среднеквадратичного отклонения

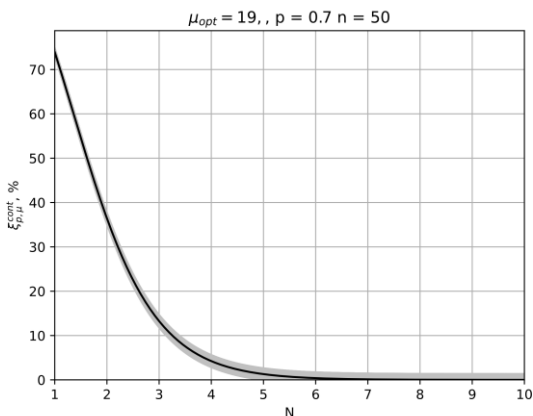


Рис.14. Средний процент потерянных сообщений  $\xi_{p,\mu}^{cont}$  в зависимости от максимально доступного числа перепосылок  $N$  при выборе оптимального контура в большой сети ( $n = 50$ ) при вероятности доставки сообщения  $p = 0.7$  для оптимального контура  $\mu_{opt} = 19$  с отображением среднеквадратичного отклонения

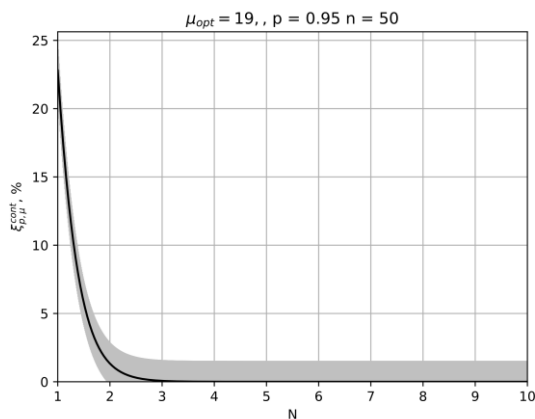


Рис.15. Средний процент потерянных сообщений  $\xi_{p,\mu}^{cont}$  в зависимости от максимально доступного числа перепосылок  $N$  при выборе оптимального контура в большой сети ( $n = 50$ ) при вероятности доставки сообщения  $p = 0.95$  для оптимального контура  $\mu_{opt} = 19$  с отображением среднеквадратичного отклонения

Рассмотрим также зависимость среднеквадратичного отклонения от максимально доступного числа перепосылок для различных вероятностей:

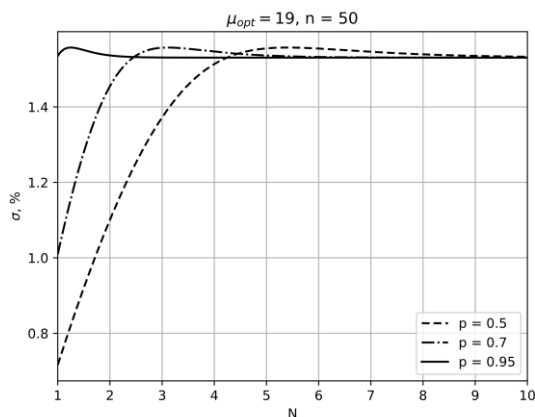


Рис.16. Среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  в зависимости от максимального числа перепосылок  $N$  для различных вероятностей при выборе оптимального контура в большой сети ( $n = 50$ )

В случае с большой сетью ( $n = 50$ ) точность измерений значительно повышается, что нам показывает малое среднеквадратичное отклонение для всех вероятностей доставки.

### **Заключение**

На основании проведенного анализа установлено, что оптимальное расположение референсных узлов в контурной архитектуре существенно снижает процент потерь сообщений по сравнению с кластерной структурой, особенно в условиях малой сети. В контурной архитектуре процент потерь остается ниже, а среднеквадратичное отклонение также значительно меньше. В больших сетях эта разница в надежности еще более заметна, что подтверждает высокую эффективность контурного размещения референсных узлов. Полученные результаты могут использоваться для проектирования энергоэффективных и надежных моделей гибридных подводных сетей с целью улучшения их производительности и увеличения времени автономной работы.

### **Список литературы**

1. Т.А.Федорова, В.А.Рыжов, К.С.Сафронов. Использование гибридной коммуникационной архитектуры подводной беспроводной сенсорной сети для повышения ее времени жизни и эффективности
2. Tatiana A. Fedorova, Vladimir A. Ryzhov, Kirill S. Safronov, Nikolay N. Semenov, Shaharin A. Sulaiman. Energy-Efficient and Reliable Deployment Models for Hybrid Underwater Acoustic Sensor Networks with a Mobile Gateway. Journal of Marine Science and Application 2024