§ 2.2 线性方程与常数变易法

/Linear ODE and variation of constants Method/

内容提要/Constant Abstract/

- 线性方程与常数变易法
  - 线性方程
    - 齐次线性方程：特点·解法·举例
    - 非齐次线性方程
      - 常数变易法(积分因子方法)
      - 求解步骤·举例·随堂练习
  - 可化为线性方程的方程
    - 伯努利方程
    - 黎卡提方程
    - 其他可化为线性方程的方程
      - 特点
      - 解法
  - 重点与难点
  - 思考

本节要求/Requirements/

- 熟练掌握**线性方程**和**伯努利方程**的求解方法。
- 了解**黎卡提方程**的简单性质及其求解方法。

一、一阶线性微分方程/ First-Order Linear ODE/

一般形式 $a(x)\dfrac{dy}{dx}+b(x)y+c(x)=0$

形如 $y'=P(x)y+Q(x)$ ....(2.2.1)

的方程称为一阶线性微分方程(即关于 y, y' 是线性的)

其中 $P(x), Q(x)$ 为 x 的已知函数。当 $Q(x)\equiv 0$ 时，

$y'=P(x)y$ ....(2.2.2) 称为齐次线性方程;

当 $Q(x)\neq 0$ 时，称为非齐次线性方程。

假设 $P(x), Q(x)$ 函数在区间$a<x<b$上连续,则根据解的存在性及唯一性定理可知，在区域

$$D: a < x < b \qquad -\infty < y < +\infty$$

方程(2.2.1)的初值问题的解是存在唯一的。

$$y' = P(x)y + Q(x) \quad \text{..................}(2.2.1)$$

(1) 齐次线性方程/Homogenous Linear ODE/

$$y' = p(x)y \quad \text{.............................}(2.2.2)$$

解法:

分离变量，得: $$\frac{dy}{y} = p(x)dx$$

积分，得: $$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx + C_1$$

$$\ln|y| = \int p(x)dx + C_1 \qquad |y| = e^{C_1} e^{\int p(x)dx}$$

$$y = \pm e^{C_1} e^{\int p(x)dx} \qquad c = \pm e^{C_1}$$

得 $$y = ce^{\int p(x)dx}$$

因为 $y \equiv 0$ 为(2.2.2)的解,所以其通解为:

$$y = ce^{\int p(x)dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.3)$$

其中c为任意常数。

满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解是

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.3)'$$

例1 试求微分方程 $y' + y\sin x = 0$

的通解,并求满足条件的 $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ 特解

解 $p(x) = -\sin x$

由公式(2.2.3)得，所求通解为：

$$y = ce^{-\int \sin xdx} = ce^{\cos x}$$

由公式(2.2.3)’得，所求特解为:

$$y = 2e^{\cos x}$$

（2）非齐次线性方程/Non-Homogenous Linear ODE/

采用**常数变易法**求解

设想方程 $y' = P(x)y + Q(x)$

有形如(2.2.3)的解，但其中的常数c变易为x的待定函数

$$y = ce^{\int P(x)dx} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.3)$$

即设 $y = c(x)e^{\int P(x)dx}$ ……………………(2.2.4)

方程的解。

§ 2.2 Linear ODE and variation of constants Method

$$y = c(x)e^{\int P(x)dx} \qquad y' = P(x)y + Q(x)$$

上式代入方程(2.2.1)，得:

$$c'(x)e^{\int P(x)dx} + c(x)e^{\int P(x)dx}P(x) = P(x)c(x)e^{\int P(x)dx} + Q(x)$$

即: $$c'(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x) = Q(x)e^{-\int P(x)dx}$$

积分得:

$$c(x) = \int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + c$$

$$c(x)=\int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+c$$

代入(2.2.4) $y=c(x)e^{\int P(x)dx}$ 得:

$$\boxed{y=e^{\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.5)$$

同时，方程满足初始条件 $\varphi(x_0)=y_0$ 的特解为：

$$\boxed{y=e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt}[y_0+\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}dx]}$$

由(2.2.5)得:

$$y = ce^{\int P(x)dx} + e^{\int P(x)dx}\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx$$

其中第一项是线性齐次方程的通解，第二项是线性非齐次方程特解。

非齐次线性方程通解的结构:

通解等于其对应齐次方程通解与自身的一个特解之和。

例2 $$\cos x\frac{dy}{dx}=y\sin x+\cos^2 x$$

解 1）先求对应的齐次方程通解

$$\cos x\frac{dy}{dx}=y\sin x \qquad \frac{dy}{y}=\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$\ln|y|=-\ln|\cos x|+\ln|c|$$

$$y=\frac{c}{\cos x}$$ (c为任意常数)

2）用常数变易法求方程通解

设 $y=\dfrac{c(x)}{\cos x}$ 是方程的解，代入原方程，得

$$\cos x \frac{dy}{dx} = y \sin x + \cos^2 x \qquad y = \frac{c(x)}{\cos x}$$

$$\cos x \left(\frac{c'(x) \cos x + c(x) \sin x}{\cos^2 x} \right) = \frac{c(x)}{\cos x} \sin x + \cos^2 x$$

$$c'(x) = \cos^2 x$$

$$c(x) = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$y = \frac{1}{\cos x} \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \right) \quad (c\text{为任意常数})$$

说明： 对于一阶线性方程，也可直接用通解公式计算得出。

例3 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$$

$$\boxed{y=e^{\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c]}$$

解 1) 转换变量位置

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2}{y}x-y$$

2) 用公式求方程通解

$$x=e^{2\int\frac{1}{y}dx}[-\int ye^{-2\int\frac{1}{y}dy}dy+c]=e^{\ln y^2}(-\int ye^{\ln y^{-2}}dy+c)$$

$$x=y^2(-\int\frac{1}{y}dy+c)=-y^2\ln|y|+cy^2$$

$$x=-y^2\ln|y|+cy^2$$

注意:

有时方程关于 $y, \dfrac{dy}{dx}$ 不是线性的，但如果视

x 为 y 的函数，方程关于 $x, \dfrac{dx}{dy}$ 是线性的，

于是仍可以根据上面的方法求解。

练习

(1) $xy'+(1+x)y=e^{x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=4x$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+y^{3}}$

练习 (1) $xy'+(1+x)y=e^x$

解 1)先解齐次方程 $xy'+(1+x)y=0$

$$\frac{dy}{y}+\frac{1+x}{x}dx=0$$

积分，得:

$$\ln y+\ln x+x=c_1 \qquad y=c\frac{e^{-x}}{x}$$

2) 设 $y=c(x)\dfrac{e^{-x}}{x}$,代入原方程，得:

$$x[c(x)\frac{e^{-x}}{x}]'+(1+x)c(x)\frac{e^{-x}}{x}=e^x$$

$$x[c'(x)\frac{e^{-x}}{x}+c(x)\frac{-xe^{x}-e^{x}}{x^{2}}]+(1+x)c(x)\frac{e^{-x}}{x}=e^{x}$$

化简得: $c'(x)e^{-x}=e^{x}$ $\qquad c'(x)=e^{2x}$

$$c(x)=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

所以，通解为: $y=\frac{e^{-x}}{x}(\frac{1}{2}e^{2x}+c)$

$$y=\frac{e^{x}}{2x}+\frac{ce^{-x}}{x}$$

练习 (2) $$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

解 用公式求解，$p(x) = -2x, Q(x) = 4x$

$$y = e^{-\int 2xdx}\left(\int 4xe^{\int 2xdx}dx + c\right)$$
$$= e^{-x^2}\left(\int 4xe^{x^2}dx + c\right)$$
$$= e^{-x^2}\left(2e^{x^2} + c\right)$$

即: $$y = 2 + ce^{-x^2}$$

练习　(3)　$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$$

解　方程可以改写为:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}x+y^2 \qquad p(y)=\frac{1}{y},\ \ Q(y)=y^2$$

故通解为:

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int y^2e^{-\int\frac{1}{y}dy}+c\right)=y\left(\frac{1}{2}y^2+c\right)$$

即: $x=\frac{1}{2}y^3+cy$ 或 $y=cx-\frac{1}{2}y^3$

二、 可化为线性方程的方程

1 伯努利方程/Bernoulli ODE/

2* 黎卡提方程/ Riccati ODE/

1 伯努利方程/Bernoulli ODE/

形如 $$y' = P(x)y + Q(x)y^n \qquad (2.2.6)$$

的方程称为伯努利方程，其中 $n \neq 0, n \neq 1$

它通过变量代换可化为线性方程。

解法: 将方程(2.2.6)的各项同乘以 y^{-n}

得: $$y^{-n}y' = P(x)y^{1-n} + Q(x)$$

令 $$z = y^{1-n}$$

则 $$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \qquad \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}=P(x)z+Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$$

用上式求解后，代入原变量 $z=y^{1-n}$,便得原方程的通解。

$$\boxed{y^{1-n}=e^{\int(1-n)P(x)dx}[\int(1-n)Q(x)e^{-\int(1-n)P(x)dx}dx+c]}$$

例4 $xy'+y=xy^2\ln x$

解 将方程改写为: $y^{-2}y'+\frac{1}{x}y^{-1}=\ln x$

$z=y^{-1}$ $\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-\ln x$

$$z=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int(-\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right)$$

$$=x\left(\int-\frac{\ln x}{x}dx+c\right)$$

$$=x\left[-\frac{1}{2}(\ln x)^2+c\right]$$

故 $\frac{1}{y}=x\left[c-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]$

2 黎卡提方程 / Riccati ODE/

●形如

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{2.2.7}$$

的方程称为黎卡提方程。

●特点:

在一般情况下，此类方程的解不能用初等函数及其积分形示表示，如果先由观察法或其他方法知道它的一个特解时，才可以通过初等积分法，求出它的通解。

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad (2.2.7)$$

解法　若方程有一特解为　$y(x) = \tilde{y}(x)$

设　$y = z + \tilde{y}(x)$　　$y' = z' + \tilde{y}'(x)$

则　$z' + \tilde{y}'(x) = P(x)(z+\tilde{y})^2 + Q(x)(z+\tilde{y}) + R(x)$

$$z' + \tilde{y}'(x) = P(x)(z^2 + 2\tilde{y}z + \tilde{y}^2) + Q(x)(z+\tilde{y}) + R(x)$$

$$z' + \tilde{y}'(x) = P(x)z^2 + (2\tilde{y}P(x) + Q(x))z + P(x)\tilde{y}^2 + Q(x)\tilde{y} + R(x)$$

$$z' = P(x)z^2 + (2\tilde{y}P(x) + Q(x))z$$

化为伯努利方程。

例5 $$y' = y^2 - x^2 + 1$$

解 由观察看出$\tilde{y} = x$是方程的一个特解，于是

令 $y = x + u$ ，则得 $1 + u' = (u + x)^2 - x^2 + 1$

$$u' = u^2 + 2xu \qquad \frac{1}{u^2}u' = 1 + 2xu^{-1}$$

$$-(u^{-1})' = 1 + 2xu^{-1}$$

$$z' = -2xz - 1 \qquad z = e^{-x^2}\left(\int -e^{x^2}dx + C\right)$$

故原方程的通解为 $y = x + e^{x^2}\left(C - \int e^{x^2}dx\right)^{-1}$

例6　试求 $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$ 形如 $\frac{a}{x}$ 的特解，解此微分方程。

解　设 $y = \frac{a}{x}$, $y' = -\frac{a}{x^2}$,代入方程得:

$$-a = a^2 + a + 1 \qquad (a+1)^2 = 0$$

所以 $a = -1$ 故 $\tilde{y} = -\frac{1}{x}$ 是方程的一个特解。

令 $y = -\frac{1}{x} + u$

$$x^2\left(\frac{1}{x^2} + u'\right) = x^2\left(-\frac{1}{x} + u\right)^2 + x\left(-\frac{1}{x} + u\right) + 1$$

于是方程化为伯努利方程 $u' = x^2u^2 - xu$

$$\frac{1}{u^2}u' = -xu^{-1} + x^2 \Longrightarrow -(u^{-1})' = -xu^{-1} + x^2$$

$$z' = xz - x^2 \Longrightarrow z = e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int -x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right)$$

$$u = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\int x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right)^{-1}$$

故原方程的通解为

$$y = -\frac{1}{x} + u = -\frac{1}{x} + e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\int x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right)^{-1}$$

练习

$$(1)\quad xdy-[y+xy^3(1+\ln x)]dx=0$$

$$(2)\quad y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$$

练习 (1) $xdy-[y+xy^3(1+\ln x)]dx=0$

解 方程各项同除以 xy^3dx

得: $y^{-3}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}y^{-2}+1+\ln x$

令 $z=y^{-2}$, $\dfrac{dz}{dx}=-2y^{-3}\dfrac{dy}{dx}$

于是方程化为: $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{2}{x}z-2(1+\ln x)$

$$z=\frac{1}{x^2}[\int-2(1+\ln x)x^2dx+c]=\frac{1}{x^2}(-\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{3}x^3\ln x+c)$$

即 $y^{-2}=\dfrac{c}{x^2}-\dfrac{4}{9}x-\dfrac{2}{3}x\ln x$

练习 (2) $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$

解 $$y'=-y^2e^x+2ye^{2x}+e^x-e^{3x}$$

经观察，方程有一个特解 $\tilde{y}=e^x$

令 $$y=e^x+u$$

$$u'=-u^2e^x-2ue^{2x}$$

$$y=e^x+\frac{1}{c+e^x}$$

思考题

$$(1)\quad e^{-y}\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=xe^{x}$$

$$(2)\quad y^{'}-e^{x}+e^{x+y}=0$$

$$(3)\quad y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$$

作业： **P.38 第6，8，11，14，15，16，20，22(1)题**

P.64 第36(3)题

提示:

1 $$e^{-y}\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=xe^{x}$$ $$e^{-y}\frac{dy}{dx}+e^{-y}=xe^{x}$$

$$\frac{de^{-y}}{dx}=e^{-y}-xe^{x}$$ (线性方程)

2 $$y'-e^{x}+e^{x+y}=0$$ $$(e^{y})'-e^{x}e^{y}+e^{x}e^{2y}=0$$

$$u'-e^{x}u+e^{x}u^{2}=0$$ (伯努利方程)

3 $$y\ln y\,dx+(x-\ln y)dy=0$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{x-\ln y}{y\ln y}=-\frac{1}{y\ln y}x+\frac{1}{y}$$ (线性方程)

$$y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$$

解 原方程可改写为:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y\ln y}{x-\ln y} \qquad \frac{dx}{dy}=-\frac{x-\ln y}{y\ln y}$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{y\ln y}x+\frac{1}{y} \qquad P(y)=-\frac{1}{y\ln y}, \qquad Q(y)=\frac{1}{y}$$

故通解为:
$$x=e^{-\int\frac{1}{y\ln y}dy}\left(\int\frac{1}{y}\cdot e^{\int\frac{1}{y\ln y}dy}+c\right)$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left(\int\frac{\ln y}{y}dy+c\right)$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left(\int\frac{\ln y}{y}dy+c\right)$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left[\frac{1}{2}(\ln y)^2+c\right]$$

即: $$x=\frac{1}{2}\ln y+\frac{c}{\ln y}$$

或: $$(2x-\ln y)\ln y=2c$$