§ 3.4 奇 解

/Singularly solution/

3.4 奇解

主要内容

- 包络和奇解
- 克莱罗方程（Clairant Equation）

本节要求：

- 1 了解奇解的意义；
- 2 掌握求奇解的方法。

一 包络和奇解的定义

曲线族的包络： 是指这样的曲线，它本身并不包含在曲线族中，但过这条曲线上的每一点，有曲线族中的一条曲线与其在此点相切。

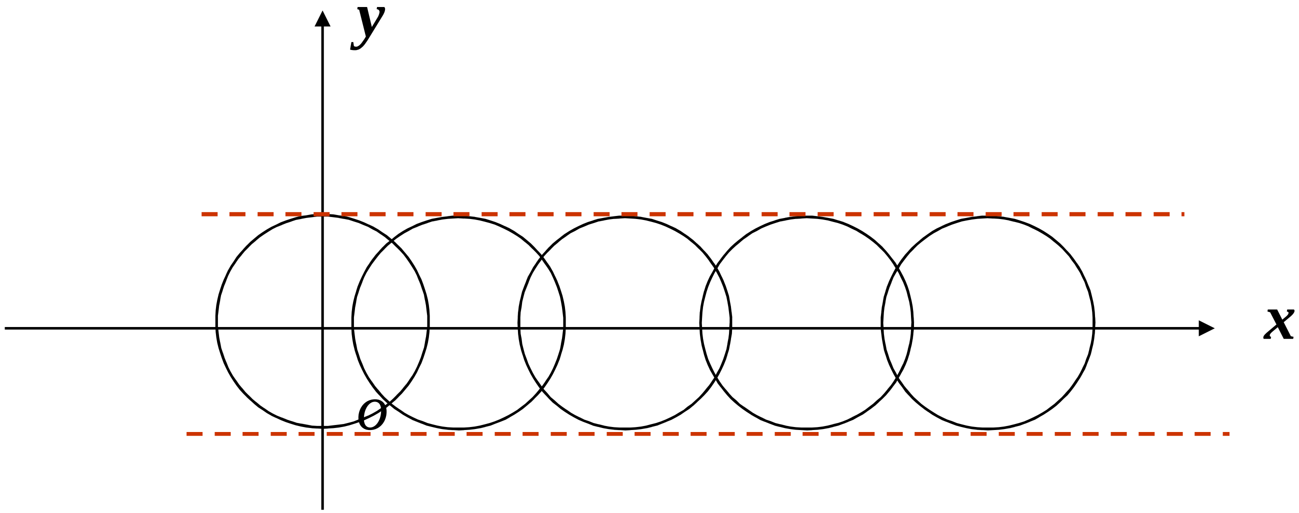
奇解： 在有些微分方程中，存在一条特殊的积分曲线，它并不属于这个方程的积分曲线族，但在这条特殊的积分曲线上的每一点处，都有积分曲线族中的一条曲线与其在此点相切。这条特殊的积分曲线所对应的解称为方程的奇解。

注： 奇解上每一点都有方程的另一解存在。

例 单参数曲线族

$$(x-c)^2+y^2=R^2$$

R是常数，c是参数。



显然，$y=\pm R$ 是曲线族 $(x-c)^2+y^2=R^2$ 的包络。

一般的曲线族并不一定有包络，如同心圆族，平行线族等都是没有包络的。

二 求奇解（包络线）的方法

- **C-判别曲线法**
- **P-判别曲线法**

设一阶方程 $F(x,y,y')=0$ 的通积分为 $\boldsymbol{\Phi}(x,y,C)=0$。

1 C-判别曲线法

结论： 通积分作为曲线族的包络线（奇解）包含在下列方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}(x,y,C)=0 \\ \boldsymbol{\Phi}'_C(x,y,C)=0 \end{cases}$$

消去 C 而得到的曲线中。

设由 $\begin{cases} \Phi(x,y,C)=0 \\ \Phi'_C(x,y,C)=0 \end{cases}$ 能确定出曲线为

$$L: \quad x=x(C),\ \ y=y(C)$$

则 $\Phi(x(C),y(C),C)\equiv 0$

对参数 C 求导数

$$\Phi'_x(x(C),y(C),C)x'(C)+\Phi'_y(x(C),y(C),C)y'(C)$$
$$+\Phi'_C(x(C),y(C),C)\equiv 0$$

从而得到恒等式

$$\Phi'_x(x(C),y(C),C)x'(C)+\Phi'_y(x(C),y(C),C)y'(C)\equiv 0$$

$$\Phi'_x(x(C),y(C),C)x'(C)+\Phi'_y(x(C),y(C),C)y'(C)\equiv 0$$

当 $\Phi'_x(x,y,C),\Phi'_y(x,y,C)$ 至少有一个不为零时

有 $$\frac{y'(C)}{x'(C)}\equiv -\frac{\Phi'_x(x(C),y(C),C)}{\Phi'_y(x(C),y(C),C)},$$ 或

$$\frac{x'(C)}{y'(C)}\equiv -\frac{\Phi'_y(x(C),y(C),C)}{\Phi'_x(x(C),y(C),C)},$$

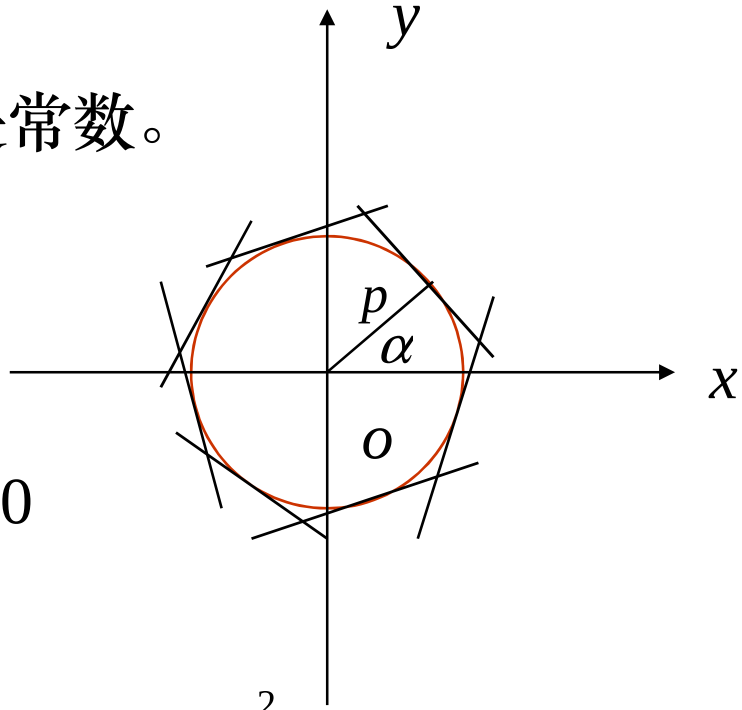
这表明曲线 L 在其上每一点 $(x(C),y(C))$ 处均与曲线族中对应于C的曲线$\Phi(x,y,C)\equiv 0$ 相切。

注意： **C-判别曲线中除了包络外，还有其他曲线，尚需检验。**

例1 求直线族

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

的包络，这里 α 是参数，p 是常数。



解: 对参数 α 求导数

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0$$

联立 $\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \end{cases}$

$$x^2\cos^2\alpha + y^2\sin^2\alpha + 2xy\sin\alpha\cos\alpha = p^2$$

$$x^2\sin^2\alpha + y^2\cos^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

相加，得 $x^2 + y^2 = p^2$，经检验，其是所求包络线。

例2 求直线族

$$(y-c)^2-\frac{2}{3}(x-c)^3=0$$

的包络，这里 c 是参数。

解： 对参数 c 求导数 $y-c-(x-c)^2=0$

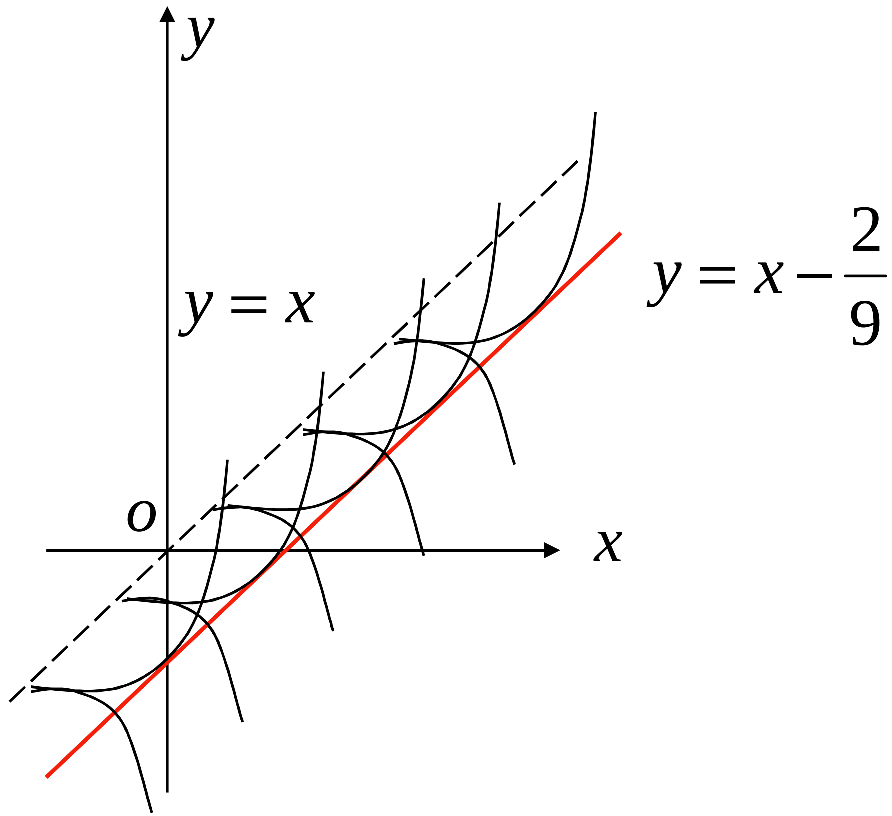
联立 $$\begin{cases}(y-c)^2-\frac{2}{3}(x-c)^3=0\\ y-c-(x-c)^2=0\end{cases}$$

得 $$(x-c)^3[(x-c)-\frac{2}{3}]=0$$

从 $x-c=0$ 得到 $y=x$

从 $(x-c)-\frac{2}{3}=0$ 得到 $y=x-\frac{2}{9}$

因此，C-判别曲线中包括了两条曲线，易检验，$y=x-\frac{2}{9}$ 是所求包络线。



y
$y = x$
$y = x - \frac{2}{9}$
o
x

2 *p*-判别曲线

结论： 方程 $F(x, y, y')=0$ 的奇解包含在下列方程组

$$\begin{cases} F(x, y, p)=0 \\ F'_p(x, y, p)=0 \end{cases}$$

消去 p 而得到的曲线中。

注意： ***p*-判别曲线中除了包络外，还有其他曲线，尚需检验。**

例3 求方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - 1 = 0$ 的奇解。

解： 从

$$\begin{cases} p^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2p = 0 \end{cases}$$

消去 p，得到 p-判别曲线

$$y = \pm 1$$

经检验，它们是方程的奇解。

因为易求得原方程的通解为 $y = \sin(x + c)$

而 $y = \pm 1$ 是方程的解，且正好是通解的包络。

例4 求方程 $y = 2x\dfrac{dy}{dx} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ 的奇解。

解： 从

$$\begin{cases} y = 2xp - p^2 \\ 2x - 2p = 0 \end{cases}$$

消去 p，得到 p-判别曲线

经检验，$y = x^2$ 不是方程的解，故此方程没有奇解。

注意： **以上两种方法，只提供求奇解的途径，所得p-判别曲线和C-判别曲线是不是奇解，必需进行检验。**

3 克莱罗方程

形式 $y = xp - f(p)$

其中 $p = \dfrac{dy}{dx}$, $f(p)$ 是 p 的连续函数。

解法

$$p = p + xp' + f'(p)p'$$

$$(x + f'(p))p' = 0$$

$$p' = 0 \qquad\qquad p = c$$

$$y = cx + f(c) \qquad\qquad \text{通解}$$

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -f'(p)p + \varphi(p) \end{cases} \qquad\qquad \text{奇解}$$

例5 求解方程 $y = xp + \dfrac{1}{p}$

解： 这是克莱罗方程，因而其通解为 $y = xc + \dfrac{1}{c}$

从
$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{c^2} = 0 \\ y = xc + \dfrac{1}{c} \end{cases}$$

消去 c，得到奇解

$$y^2 = 4x$$

例6 求一曲线，使在其上每一点的切线截割坐标轴而成的直角三角形的面积都等于2。

解 设要求的曲线为 $y = y(x)$

过曲线任上一点 (x, y) 的切线方程为

$$Y = y'(x)(X - x) + y$$

其与坐标轴的交点为 $\left(-\frac{y}{y'} + x,\ -xy' + y\right)$

切线截割坐标轴而成的直角三角形的面积为

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{y}{y'} + x\right)(-xy' + y) = 2$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{y}{y'}+x\right)(-xy'+y)=2$$

$$(y-xy')^2=-4y'$$

$$y-xy'=\pm 2\sqrt{-y'} \qquad y=xy'\pm 2\sqrt{-y'}$$

这是克莱罗方程，因而其通解为

$$y=c_1x\pm 2\sqrt{-c_1}=2c-c^2x$$

从 $\begin{cases} y=2c-c^2x \\ 2-2cx=0 \end{cases}$ 消去 c，得到奇解 $xy=1$

这是等腰双曲线，显然它就是满足要求的曲线。

课堂练习:

1　求一曲线，使在其上每一点的切线截割坐标轴的两截距之和等于常数 a 。

2 求解方程，并划出积分曲线图。

$$(1)\quad y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$$

$$(2)\quad (\frac{dy}{dx})^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

作业:　（一）1，2，7，8，（二）1，3，（四）