5.3.3 拉普拉斯变换的应用

定义

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$$

这里 $f(t)$ 是 n 维向量函数，要求它的每一个分量都存在拉普拉斯变换。

定理12 如果对向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$，存在常数 $M>0$和$\sigma>0$

使不等式

$$\left\|f(t)\right\| \le Me^{\sigma t} \qquad \textbf{(5.62)}$$

对所有充分大的t 成立，则初值问题

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\eta}$$

的解 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 均象 $\boldsymbol{f}(t)$ 一样满足类似

(5.62)的不等式从而它们的拉普拉斯变换都存在。

例12 试求方程组 $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 \end{cases}$

满足初始条件 $\varphi_1(0)=0, \varphi_2(0)=1$ 的解 $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$,

并求出它的基解矩阵。

解 令 $X_1(s) = L[x_1(t)], X_2(s) = L[x_2(t)]$

假设 $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t)$ 满足微分方程组

对方程组施行拉普拉斯变换，有:

$$\begin{cases} sX_1(s) - \varphi_1(0) = 2X_1(s) + X_2(s) \\ sX_2(s) - \varphi_2(0) = -X_1(s) + 4X_2(s) \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} (s-2)X_1(s) - X_2(s) = \varphi_1(0) = 0 \\ X_1(s) + (s-4)X_2(s) = \varphi_2(0) = 1 \end{cases}$$

解出 $X_1(s), X_2(s)$ 有:

$$X_1(s) = \frac{1}{(s-3)^2}, X_2 = \frac{s-2}{(s-3)^2} = \frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}$$

$$X_1(s)=\frac{1}{(s-3)^2},\qquad X_2=\frac{1}{s-3}+\frac{1}{(s-3)^2}$$

取反变换，得:

$$\varphi_1(t)=te^{3t},\varphi_2(t)=e^{3t}+te^{3t}=(1+t)e^{3t}$$

为了寻求基解矩阵，再求满足初始条件

$\psi_1(0)=1,\psi_2(0)=0$ 的解 $(\psi_1(t),\psi_2(t))$

$$\begin{cases}(s-2)X_1(s)-X_2(s)=\psi_1(0)=1\\ X_1(s)+(s-4)X_2(s)=\psi_2(0)=0\end{cases}$$

其解为:

$$X_1(s)=\frac{s-4}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{(s-3)^2},\ X_2(s)=\frac{-1}{(s-3)^2}$$

$$\psi_1(t)=(1-t)e^{3t},\psi_2(t)=-te^{3t}$$

基解矩阵是 $\Phi(t)=\begin{bmatrix}\psi_1(t) & \varphi_1(t)\\ \psi_2(t) & \varphi_2(t)\end{bmatrix}=e^{3t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}$

作业 **P.236, 第6(a)题（用拉普拉斯变换法）。**

1 应用拉普拉斯变换可以将求解线性微分方程组的问题转化为求解线性代数方程组的问题。

2 应用拉普拉斯变换还可以直接解高阶的常系数线性微分方程组，不必先化为一阶的常系数线性微分方程组。

3 拉普拉斯变换提供了一种寻求常系数线性微分方程组

$$x' = Ax \qquad \text{............}(5.33)$$

的基解矩阵的又一种方法。

可化为常系数线性方程组的类型

1 $$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\frac{1}{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{g}(x))$$

利用自变量的代换 $x=e^t$

可将方程化为常系数线性方程组

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{g}(e^t)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & n-2 \\ -2 & -1 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & -(n-1) & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

利用自变量的代换 $x = e^t$ 与

$$Y_1 = y_1,\ Y_2 = e^t y_2,\ Y_3 = e^{2t} y_3, \cdots,\ Y_n = e^{(n-1)t} y_n$$

可将方程化为常系数线性方程组

2

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{a_{11}}{x} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} x y_3 + \cdots + a_{1n} x^{n-2} y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{a_{21}}{x^2} y_1 + \dfrac{a_{22}}{x} y_2 + a_{23} y_3 + \cdots + a_{2n} x^{n-3} y_n \\ \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \dfrac{a_{n1}}{x^n} y_1 + \dfrac{a_{n2}}{x^{n-1}} y_2 + \dfrac{a_{n3}}{x^{n-2}} y_3 + \cdots + \dfrac{a_{nn}}{x} y_n \end{cases}$$

a_{ij}为常数，x的次数有以下规律：

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + (a_{12} - 1)y_2 + a_{23}y_3 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + (a_{33} - 2)y_3 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + a_{n3}y_3 + \cdots + [a_{nn} - (n-1)]y_n \end{cases}$$

例1 求解方程组

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例2 求解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=y_2\\[2ex]\dfrac{dy_2}{dx}=-\dfrac{2}{x^2}y_1+\dfrac{2}{x}y_2\end{cases}$$

解 $x=e^t \qquad Y_1=y_1,\ Y_2=e^t y_2$

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{e^t dt}=y_2\\[2ex]\dfrac{dy_2}{e^t dt}=-\dfrac{2}{e^{2t}}y_1+\dfrac{2}{e^t}y_2\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=e^t y_2\\[2ex]\dfrac{e^t dy_2}{dt}=-2y_1+2e^t y_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=e^t y_2\\[2ex]e^t y_2+\dfrac{e^t dy_2}{dt}=-2y_1+2e^t y_2+e^t y_2\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = e^t y_2 \\ e^t y_2 + \dfrac{e^t dy_2}{dt} = -2y_1 + 2e^t y_2 + e^t y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dY_1}{dt} = Y_2 \\ \dfrac{dY_2}{dt} = -2Y_1 + 3Y_2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

属于 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 的特征向量分别为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 原方程组的基解组为 $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x^2 \\ 2x \end{bmatrix}$