电子课件

常微分方程

Ordinary differential equation

王高雄 周之铭 朱思铭 王寿松编

制作者：窦霁虹

常微分方程

Ordinary differential equation

课程目的/Major Subjection of Course/

- 学习各类可求解的常微分方程和方程组的类型及其求解方法。
- 熟悉常微分方程解的基本性质，如解的存在性，唯一性等内容，了解研究常微分方程的基本方法，如稳定性分析、定性分析等。

课时/Periods/ 4节/周，共64学时。

考试/Examination/ 闭卷：期中测验、期末考试。

参考书目/Reference Books/

- *叶彦谦，常微分方程讲义，高等教育出版社。*
- *王柔怀，伍卓群，常微分方程讲义，人民教育出版社。*

第一章　绪 论

Introduction

- 微分方程概述 **/Sketch of ODE/**
- 基本概念 **/Basic Conception/**
- 练习题**/Exercise/**

本章要求/Requirements/

- 能快速判断微分方程的类型;
- 掌握高阶微分方程及其初值问题的一般形式;
- 理解微分方程解的意义。

§ 1.1 微分方程概述/ Sketch of ODE/

微分方程理论起始于十七世纪末，是研究自然现象强有力的工具，是数学科学联系实际的主要途径之一。

1676年，莱布尼兹在给Newton（牛顿）的信中首次提到Differential Equations（微分方程）这个名词。

微分方程研究领域的代表人物：Bernoulli、Cauchy、Euler 、Taylor 、Leibniz、Poincare、Liyapunov等。

微分方程理论发展经历了三个过程：求微分方程的解；定性理论与稳定性理论；微分方程的现代分支理论。

方程/Equation/

含有未知量(数)的等式(或关系式)。例如:

1 代数方程(组)，其未知量为数

一元**n**次代数方程: $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$

无理方程: $\sqrt{x^2 + 5} = 6$ 方程组: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$

2 超越方程（组），其含有超越函数

三角方程: $\sin(x + 5) = \cos x$

指数方程: $e^x + 2^x = 5$

其特点：方程的解为实数（有限个或者无限个）

3 函数方程（或泛函方程），其未知量为函数

$$Z^2(t)+\sin^2 t=1 \qquad Z(t)=\pm\cos t$$

$$Z''(t)=1 \qquad Z(t)=\frac{t^2}{2}+c_1 t+c_2$$

其特点：方程的解为有限个或无穷多个函数。

定义：一个或几个包含自变量，未知函数以及未知函数的某些阶导数（或微商）的关系式，称之为**微分方程**。

例

1. $y'=x^2 \qquad y'=f(x)$

2. $r^2\dfrac{d^2u}{dr^2}+r\dfrac{du}{dr}+(r^2-1)u=0$

3. $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=\theta(x)$

4. $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ n阶隐式方程

5. $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ n阶显式方程

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ 方程组

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ 偏微分方程

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = -4\pi\rho$ 偏微分方程

9. $\mathrm{f}^2(x) = \sin x$ 不是微分方程

微分方程模型举例/Modeling of ODE/

例1： 质量为m的物体在重力的作用下，沿铅直线下落，物体下落距离S(向下为正）随时间 t 而改变。在不考虑空气阻力的情况下，试求出距离 S 应满足的微分方程。

解： 设在时刻 t 物体下落的距离为 $s(t)$

按牛顿第二定律

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg \qquad \frac{d^2s}{dt^2}=g$$

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$$

例2：放射性元素镭因不断放射出各种射线而逐渐减少其质量，这种现象成为衰变，实验知镭的衰变率与其当时的质量成比例。试求镭衰变的规律。

解：设在任意时刻 t 镭的质量为R(t),

$$R'(t) = kR(t)$$

微分方程模型：含有自变量，未知函数及未知函数导数（或变化率）的关系式。

§ 1.2 基本概念/Basic Conception/

1. 常微分方程和偏微分方程
2. 一阶与高阶微分方程
3. 线性和非线性微分方程
4. 解和隐式解
5. 通解和特解
6. 积分曲线和积分曲线族
7. 微分方程的几何解释-----方向场

●常微分方程与偏微分方程/ODE and PDE/

常微分方程/ODE /

在微分方程中，自变量的个数只有一个的微分方程称为常微分方程。

偏微分方程/ PDE/

自变量的个数有两个或两个以上的微分方程称为偏微分方程。

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t) \qquad (\frac{dy}{dt})^2+t\frac{dy}{dt}+y=0$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial Z^2}=0 \qquad \frac{\partial^2T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t}$$

●一阶与高阶微分方程/First and Higher ODE/

微分方程的阶/Order/

在一个微分方程中所出现的未知函数的导数的最高阶数n称为该方程的阶。

当n=1时，称为一阶微分方程；

当n>1时，称为高阶微分方程。

例如

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t) \qquad (\frac{dy}{dt})^2+t\frac{dy}{dt}+y=0$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial Z^2}=0 \qquad \frac{\partial^2T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t}$$

一阶常微分方程的一般隐式形式可表示为：

$$F(x, y, y') = 0$$

一阶常微分方程的一般显式形式可表示为：

$$y' = f(x, y)$$

类似的，n阶隐方程的一般形式可表示为：

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

n阶显方程的一般形式为

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

其中F及f分别是它所依赖的变元的已知函数。

●线性和非线性微分方程/Linear and Nonlinear ODE/

如果方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$

的左端为未知函数及其各阶导数的一次有理整式，则称它为线性微分方程，否则，称它为非线性微分方程。

例如：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t) \qquad (\frac{dy}{dt})^2 + t\frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 4\frac{\partial T}{\partial t}$$

n阶线性微分方程的一般形式为：

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=g(x)$$

其中 $a_0(x)\neq 0$ $a_0(x),a_1(x),\cdots,a_n(x),g(x)$ 均为 x 的已知函数

如：2阶线性方程的一般形式

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=g(x)$$

$$y''+x^2y'+y\sin x=xe^x$$

●解和隐式/Solution/

对于方程

$$F[x,y,y',\cdots,y^{(n)}]=0 \quad 或 \quad y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

若将函数 $y=\varphi(x)$ 代入方程后使其有意义且两端成立

即 $F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]=0$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为该方程的一个解.

一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ 有解 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$

即关系式 $x^2+y^2=1$ 包含了方程的解，

若方程的解是某关系式的隐函数，称这个关系式为该方程的隐式解。把方程解和隐式解统称为方程的解。

●通解和特解/General Solution and Special Solution/

常微分方程的解的表达式中，可能包含一个或者几意常数，若其所包含的独立的任意常数的个数恰好与该方程的阶数相同，我们称这样的解为该微分方程的通解。

常微分方程满足某个初始条件的解称为微分方程的特解。

例：二阶方程 $\frac{d^2s}{dt^2}=g$

其通解 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$

而 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 是方程满足初始条件 $s(0)=0,\ s'(0)=0$ 解。

初值条件/Initial Value Conditions/

对于 n 阶方程 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$

初值条件可表示为

$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y'_0,\quad y''(x_0) = y''_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

n阶方程初值问题（Cauchy Problem）的表示

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

一阶和二阶方程初值问题（Cauchy Problem）的表示

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

●积分曲线和积分曲线族 /Integral Curve(s)/

一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的解 $y=\varphi(x)$ 表示 x,y平面的一条曲线，我们称它为微分方程的积分曲线，而微分方程的通解 $y=\varphi(x,c)$ 表示 x,y 平面的一族曲线，称它们为微分方程的积分曲线族。

●方向场/Directional Pattern/

对于一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 其右端函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D ，在定义域的每一点 (x,y) 处，画一个小线段，其斜率等于 $f(x,y)$，此时，点集 D 就成为带有方向的点集。称此区域为由方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 确定的方向场。

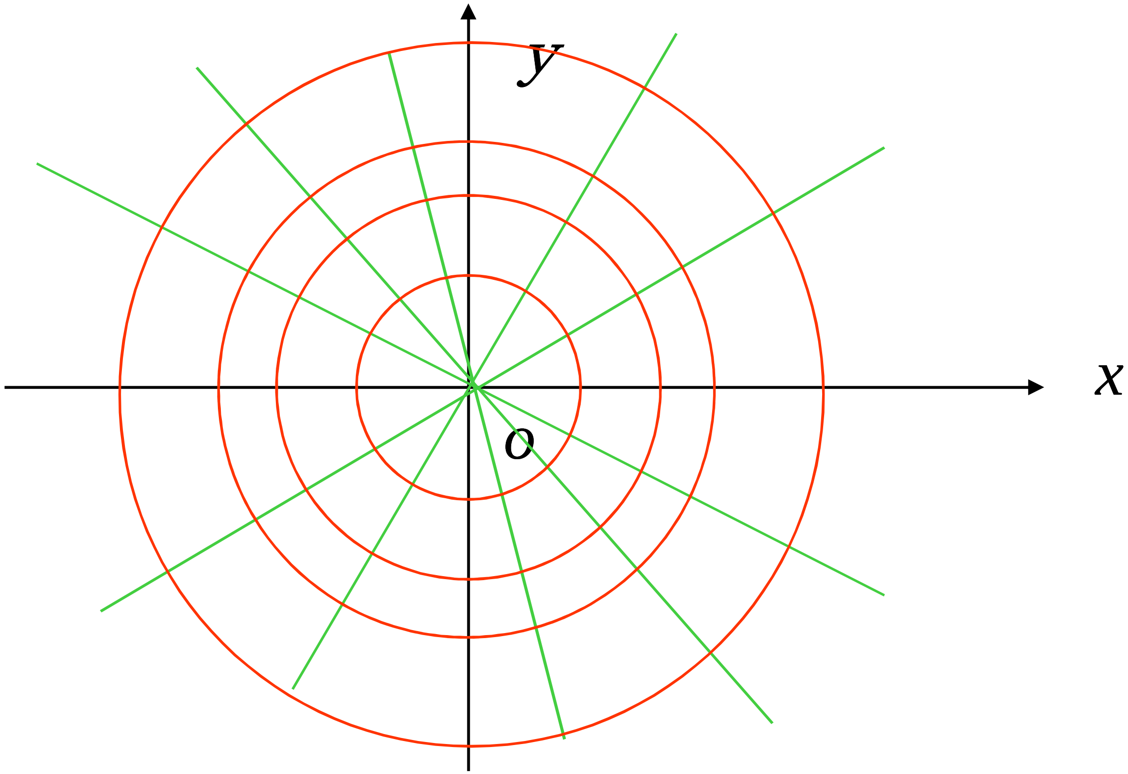
常微分方程求解的几何意义是:

在方向场中寻求一条曲线，使这条曲线上每一点切线的方向等于方向场中该点的方向。

例1 画出方程 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ 的方向场。

等倾线方程 $-\dfrac{x}{y} = k$ 即 $y = -\dfrac{1}{k}x$

也就是说，方向场中每点的方向与该点等倾线垂直。

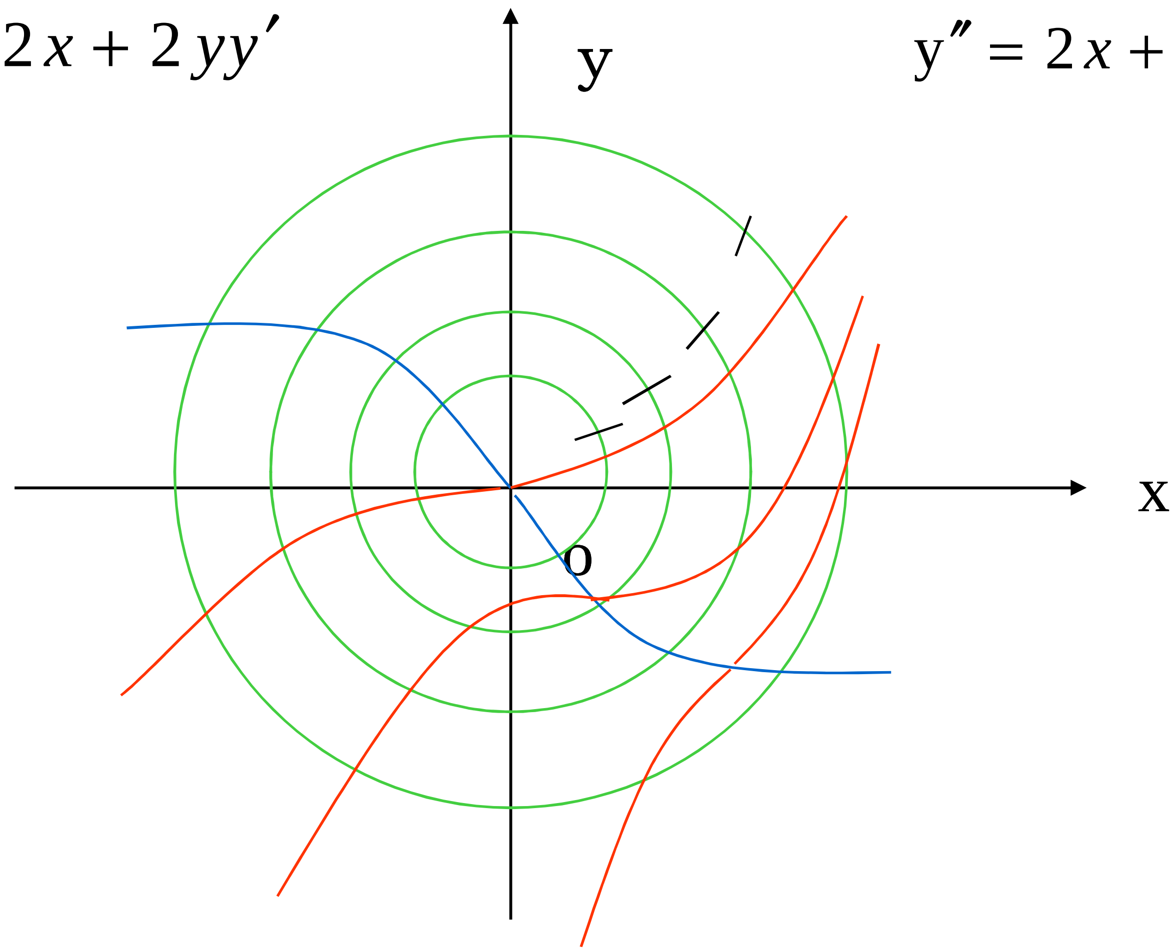


例2 画出方程 $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ 的方向场。

等倾线方程 $x^2 + y^2 = k$ ，拐点线方程 $x^2 + y^2 = -\dfrac{x}{y}$

$y'' = 2x + 2yy'$

$y'' = 2x + 2y(x^2 + y^2)$



练习题1

编号	微分方程	自变量	未知函数	常或偏	阶数	是否线性
1	$\frac{d^4 s}{d\gamma^4} + s = s^3$	γ	s	常	4	否
2	$y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$	x	y	常	1	否
3	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2}$	$x \quad y \quad t$	u	偏	2	是
4	$\frac{dy}{dx} + \cos y + 2x = 0$	x	y	常	1	否

练习题2

编号	函数	微分方程	初始条件
1	$y=e^{x^2}(1+\int_0^x e^{-t^2}dt)$	$y'-2xy=1$	$y(0)=1$
2	$y=e^{\lambda x}$(λ 是实数)	$y'''-\lambda^3 y=0$	$y(0)=1$ $y'(0)=1$ $y''(0)=1$ $\lambda\neq-1$例外
3	$u=1+\cos(x+t)$	$u''_{tt}=u''_{xx}$	$u(0,x)=1+\cos x$ $u'(0,x)=-\sin x$
4	$y=\sin x$	$y''+y=0$	$y(\pi)=0$ $y'(\pi)=-1$ $\lambda\neq-1$例外

练习题3

求下列曲线族所满足的微分方程

(1) $y = cx + x^2$

$$y' = c + 2x$$

$$y'' = 2$$

$$y''' = 0$$

(2) $\dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{c^2 - 1} = 1$

$$\frac{2x}{c^2} + \frac{2yy'}{c^2 - 1} = 0$$

$$(c^2 - 1)x + c^2 yy' = 0$$

$$(c^2 - 1) + c^2 (y')^2 + c^2 yy'' = 0$$

$$c^2 2y'y'' + c^2 y'y'' + c^2 yy''' = 0$$

$$2y'y'' + y'y'' + yy''' = 0$$

作业/Homework/

4. 给定一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=2x$

（1）求出它的通解. （2）求出通过点（1,4）的特解.

（3）求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解.

（4）求出满足条件 $\int_0^1 y\,dx=2$ 的解

（5）画出上述解的图形。

5. 求出下列两个微分方程的公共解

（1） $y'=y^2+2x-x^4$ （2）$y'=2x+x^2+x^4-y-y^2$

6. 求微分方程 $y'+xy'^2-y=0$ 的直线积分曲线.

9. (5) (6)

习题答案

/Answer/

4. (1) $y = x^2 + c$ (2) $y = x^2 + 3$ (3) $y = x^2 + 4$ (4) $y = x^2 + \frac{5}{3}$

5. $y = x^2$

6. 解：设 $y = kx + b$ 是其直线型解，则把 $y' = k$ 代入

原微分方程 $y' + xy'^2 - y = 0$

$k + k^2 x - y = 0$ $\qquad y = k + k^2 x$ $\qquad y' = k^2$

$k = k^2$ $\qquad k = 0, \quad k = 1$ $\qquad y = 0, \quad y = x + 1$

7. (1) $y'' = 2$ $\qquad$ (2) $y'^2 + yy'' = x$