§3.3 解对初值的连续性和可微性

/Continuous and differentiable dependence of the solutions/

内容提要

- 解对初值的连续性
- 解对初值的可微性

本节要求：

1 了解解对初值及参数的连续依赖性定理；

2 了解解对初值及参数的可微性定理。

3.3.1 解对初值的对称性定理

设 $f(x,y)$ 于域 D 内连续且关于 y 满足利普希茨条件，

$$(x_0, y_0) \in G, \quad y = \varphi(x, x_0, y_0)$$

是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的唯一解，则在此表达式中， (x_0, y_0) 与 (x, y) 可以调换其相对位置，即在解的存在范围内成立着关系式

$$y_0 = \varphi(x_0, x, y)$$

3.3.2解对初值的连续依赖性定理

假设 $f(x,y)$ 于域 G 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件，$(x_0,y_0)\in G$， $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的解，它于区间 $a\le x\le b$ 有定义 $(a\le x_0\le b)$，那么，对任意给定的 $\varepsilon>0$，必存在正数，$\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$ 使得当

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta^2$$

时，方程满足条件 $y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$ 的解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 在区间 $a\le x\le b$ 也有定义，并且

$$\left|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|<\varepsilon, \quad a\le x\le b$$

引理 如果 **$f(x,y)$** 在某域 D 内连续，且关于 y 满足利普希兹条件（利普希兹常数为L），则方程(3.1.1)任意两个解 $\varphi(x)$及$\psi(x)$在它们公共存在区间成立不等式

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \le |\varphi(x_0)-\psi(x_0)| e^{L|x-x_0|}$$

其中 x_0 为所考虑区间内的某一值。

证明 设 $\varphi(x),\psi(x)$在区间 $a \le x \le b$ 均有定义，令

$$V(x)=[\varphi(x)-\psi(x)]^2 \quad a \le x \le b$$

不妨设 $\varphi(x)<\psi(x)$ 因此，有

则 $$V'(x) = 2[\varphi(x) - \psi(x)][\varphi'(x) - \psi'(x)]$$

$$= 2[\varphi(x) - \psi(x)][f(x,\varphi) - f(x,\psi)]$$

$$\leq 2L[\varphi(x) - \psi(x)][\varphi(x) - \psi(x)] = 2LV(x)$$

$$V'(x)e^{-2Lx} - 2LV(x)e^{-2Lx} \leq 0$$

于是 $$\frac{d}{dx}(V(x)e^{-2Lx}) \leq 0$$

因此，在区间 [a,b] 上 $V(x)e^{-2Lx}$ 为减函数，有

$$V(x) \leq V(x_0)e^{2L(x-x_0)}, x_0 \leq x \leq b$$

对于区间 $a \le x \le x_0$，令 $-x = t$，并记 $-x_0 = t_0$， 则

$$\frac{dy}{dt} = -f(-t, y)$$

并且已知它有解 $y = \varphi(-t), y = \psi(-t)$

类似以上推导过程，令 $\sigma(t) = [\varphi(-t) - \psi(-t)]^2$

$\sigma'(t) = 2\sigma(t)$ $\qquad \sigma(t) \le \sigma(t_0) e^{-2L(t-t_0)}, t_0 \le t \le -a$

注意到 $\sigma(t)\big|_{t=-x} = V(x)$ 及 $\sigma(t_0) = V(x_0)$

$$V(x) \le V(x_0) e^{-2L(x-x_0)}, a \le x \le x_0$$

因此 $\quad V(x) \le V(x_0) e^{2L|x-x_0|}, a \le x \le b, a \le x_0 \le b$

两边取平方根，得 $\quad |\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(x_0) - \psi(x_0)| e^{L|x-x_0|}$

解对初值的连续依赖性定理的证明

（一）构造满足利普希茨条件的有界闭区域

因为，积分曲线段 S： $y=\varphi(x,x_0,y_0)\equiv\varphi(x),\ a\le x\le b$ 是 **xy** 平面上一个有界闭集，又按假定对S上每一点**(x,y)**必存在一个以它为中心的开圆 $C:C\subset G,$ 使在其内函数 $f(x,y)$ 关于 y 满足利普希茨条件。根据有限覆盖定理，可以找到有限个具有这种性质的圆 $C_i\,(i=1,2,\cdots,N)$ 并且它们的全体覆盖了整个积分曲线段S。设 r_i 为圆 C_i 的半径，L_i 表示 $f(x,y)$ 于 C_i 内的相应的利普希茨常数。

令 $\tilde{G}=\bigcup_{i=1}^{N} C_i,$ 则有 $S\subset\tilde{G}\subset G,$

且 $\tilde{G}$ 的边界与S的距离 $\rho>0$ 。对预先给定的$\varepsilon>0$

若取 $\eta=\min(\varepsilon,\dfrac{\rho}{2})$ 及 $L=\max(L_1,L_2,\cdots,L_N)$

则以S上每一点为中心，以 η 为半径的圆的全体，连同它们的圆周一起构成S的有界闭域 $D\subset G$ ，且 $f(x，y)$ 在D上关于 y 满足利普希茨条件，利普希茨常数为L。

（二）解对初值的连续依赖性

断言，必存在这样的正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)\ \ (\delta<\eta)$,

使得只要 $\bar{x}_0,\bar{y}_0$ 满足不等式

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta^2$$

则解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)\equiv\psi(x)$ 必然在区间 $a\le x\le b$ 也有定义。

由于D是有界闭区域，且 $f(x,y)$在其内关于 y 满足利普希茨条件，由延拓性定理知，解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$必能延拓到区域D的边界上。设它在D的边界上的点为 $(c,\psi(c))$和

$(d,\psi(d)),c<d$，这是必然有 $c\le a,d\ge b.$

因为否则设 $c > a, d < b$，则由引理

$$\left|\varphi(x)-\psi(x)\right| \le \left|\varphi(\bar{x}_0)-\psi(\bar{x}_0)\right| e^{L\left|x-\bar{x}_0\right|}, c \le x \le d$$

由 $\varphi(x)$ 的连续性，对 $\delta_1 = \dfrac{1}{2}\eta e^{-L(b-a)}$，必存在 $\delta_2 > 0,$

使得当 $\left|x - x_0\right| \le \delta_2$ 时有 $\left|\varphi(x)-\varphi(x_0)\right| < \delta_1$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，则当 $(\bar{x}_0 - x_0)^2 + (\bar{y}_0 - y_0)^2 \le \delta^2$

$$\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|^2 \le \left|\varphi(\bar{x}_0)-\psi(\bar{x}_0)\right|^2 e^{2L\left|x-\bar{x}_0\right|}$$

$$\le \left(\left|\varphi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)\right| + \left|\varphi(x_0)-\psi(\bar{x}_0)\right|\right)^2 e^{2L\left|x-\bar{x}_0\right|}$$

$$\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|^2 \le \left|\varphi(\bar{x}_0)-\psi(\bar{x}_0)\right|^2 e^{2L|x-\bar{x}_0|}$$

$$\le \left(\left|\varphi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)\right|+\left|\varphi(x_0)-\psi(\bar{x}_0)\right|\right)^2 e^{2L|x-\bar{x}_0|}$$

$$\le 2\left(\left|\varphi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)\right|^2+\left|\varphi(x_0)-\psi(\bar{x}_0)\right|^2\right)e^{2L|x-\bar{x}_0|}$$

$$\le 2\left(\delta_1^2+\left|y_0-\bar{y}_0\right|^2\right) e^{2L(b-a)} \le 4\delta_1^2 e^{2L(b-a)}=\eta \quad ,c\le x\le d$$

于是 $\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|<\eta$ 对一切 $x\in[c,d]$ 成立，特别地有

$$\left|\varphi(c)-\psi(c)\right|<\eta \qquad \left|\varphi(d)-\psi(d)\right|<\eta$$

即点 $(c,\psi(c))$和 $(d,\psi(d))$ 均落在D的内部，而不可能位于D的边界上。与假设矛盾，因此，解 $\psi(x)$在区间[a,b]上有定义。

在不等式 $\left|\varphi(x)-\psi(x)\right| \le \eta$ $, c \le x \le d$ 中，

将区间[c，d]换为[a，b]，可知，当

$$(\bar{x}_0 - x_0)^2 + (\bar{y}_0 - y_0)^2 \le \delta^2$$ 时，有

$$\left|\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0) - \varphi(x, x_0, y_0)\right| < \eta \le \varepsilon, \quad a \le x \le b$$

定理得证。

解对初值的连续性定理

假设 $f(x,y)$ 于域 G 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件，则方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

的解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 作为 x, x_0, y_0 的函数在它的存在范围内是连续的。

1. 含参数的一阶方程表示

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (E_\lambda)$$

$$G_\lambda: \quad (x,y)\in G,\ \alpha<\lambda<\beta$$

2. 一致利普希兹条件

设函数 $f(x,y,\lambda)$ 在 G_λ 内连续，且在 G_λ 内一致地关于 y 满足局部利普希兹 (Lipschitz)条件，即对 G_λ 内的每一点 (x,y,λ) 都存在以 (x,y,λ) 为中心的球 $C\subset G_\lambda$，使得对任何$(x,y_1,\lambda),\ (x,y_2,\lambda)$ 成立不等式 $\left|f(x,y_1,\lambda)-f(x,y_2,\lambda)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|$ 其中L 是与λ 无关的正数。

由解的存在唯一性定理，对每一 $\lambda_0 \in (\alpha, \beta)$

方程 E_λ 的解唯一确定。记为 $y = \varphi(x, x_0, y_0, \lambda_0)$

解对初值和参数的连续依赖性定理

假设 $f(x,y,\lambda)$于域 G_λ 内连续，且在G_λ 内关于 y 一致地满足局部利普希茨条件，$(x_0,y_0,\lambda_0)\in G_\lambda$, $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$ 是方程 E_λ 通过点（x_0,y_0）的解，在区间 $a\le x\le b$ 有定义其中 $a\le x_0\le b$， 那么，对任意给定的 $\varepsilon>0$，必存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$ 使得当

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2+(\lambda-\lambda_0)^2\le\delta^2$$

时，方程满足条件 $y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$ 的解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)$ 在区间 $a\le x\le b$ 也有定义，并且

$$\left|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)-\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)\right|<\varepsilon,\quad a\le x\le b$$

解对初值和参数的连续性定理

假设 $f(x,y,\lambda)$于域 G_λ 内连续，且在 G_λ 内关于 $\boldsymbol{y}$ 一致地满足局部利普希茨条件，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda),$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$ 作为 x,x_0,y_0,λ 的函数在它的存在范围内是连续的。

3.3.3解对初值的可微性定理

若函数 $f(x,y)$ 以及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在区域 G 内连续，则方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

的解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 作为 x, x_0, y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的。

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0}$分别是下列初值问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} z \\ z(x_0) = -f(x_0, y_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} z \\ z(x_0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x, x_0, y_0))$$

证明 由 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在区域 G 内连续，推知 $f(x,y)$在 G 内关于 y 满足局部利普希茨条件。因此，解对初值的连续性定理成立，即

$$y=\varphi(x,x_0,y_0)$$

在它的存在范围内关于 x,x_0,y_0 是连续的。

下面进一步证明对于函数 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 的存在范围内任一点的偏导数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$

存在且连续。

先证 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 存在且连续。

设由初值 (x_0, y_0)和$(x_0+\Delta x_0, y_0)(|\Delta x_0| \le \alpha, \alpha$

为足够小的正数）所确定的方程的解分别为

$$y=\varphi(x, x_0, y_0) \equiv \varphi \text{ 和 } y=\varphi(x, x_0+\Delta x_0, y_0) \equiv \psi$$

即 $\varphi = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi)dx \qquad \psi = y_0 + \int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(x,\psi)dx$

于是 $\psi - \varphi \equiv \int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(x,\psi)dx - \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi)dx$

$$= -\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)dx + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)dx$$

其中 $0<\theta<1.$

注意到 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 及 ψ,φ 的连续性，有

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1$$

其中 r_1 具有性质

当$\Delta x_0\to 0$时 $r_1\to 0$，且当$\Delta x_0=0$时 $r_1=0$。

类似地 $$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)dx=-f(x_0,y_0)+r_2$$

其中 r_2 与 r_1 具有相同的性质，因此对 $\Delta x_0\neq 0$时，有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0} \equiv [-f(x_0,y_0)+r_2]+\int_{x_0}^{x}[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1]\frac{\psi-\phi}{\Delta x_0}dx$$

即 $\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]z \\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)+r\equiv z_0 \end{cases}$$

的解，在这里 $\Delta x_0 \neq 0$ 被视为参数。

显然，当 $\Delta x_0 = 0$ 时上述初值问题仍然有解。

根据解对初值和参数的连续性定理，知 $\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$

是 $x, x_0, z_0, \Delta x_0$ 的连续函数。从而存在

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$$

而 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 是初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} z \\ z(x_0) = -f(x_0, y_0) \end{cases}$ 的解。

且 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) \exp\left(\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx \right)$，显然

它是 x, x_0, y_0 的连续函数。

再证 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续。

设 $y=\varphi(x,x_0,y_0+\Delta y_0)\equiv\tilde{\psi}$ 为初值 $(x_0,y_0+\Delta y_0)$

$(|\Delta y_0|\le\alpha)$ 所确定的方程的解。

类似地可推证 $\dfrac{\tilde{\psi}-\varphi}{\Delta y_0}$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_3\right]z\\ z(x_0)=1\end{cases}$$ 的解。因而

$$\frac{\tilde{\psi}-\varphi}{\Delta x_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_3]dx\right)$$

其中 r_3 具有性质

当$\Delta y_0 \to 0$时 $r_3 \to 0$，且当$\Delta y_0 = 0$时 $r_3 = 0$。

故有 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \lim\limits_{\Delta y_0 \to 0} \dfrac{\tilde{\psi} - \varphi}{\Delta y_0} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx \right)$

显然它是 x, x_0, y_0 的连续函数。$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx \right)$

至于 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ 的存在及连续性，只需注意到 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$

是方程的解，因而 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x, x_0, y_0))$

证毕。

由 f 及 φ 的连续性即直接推的结论。

课堂练习

1 设 $\varphi(x, x_0, y_0)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解，试证明

$$\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial y_0} f(x, x_0, y_0) = 0$$

2　已知方程 $$\frac{dy}{dx}=\sin(xy)$$

试求 $$\left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right]\Bigg|_{\substack{x_0=0\\y_0=0}},\quad \left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right]\Bigg|_{\substack{x_0=0\\y_0=0}}$$

作业：　P.93　第 3，4 题

按照公式，一般有

$$[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}]\Bigg|_{\substack{x_0\\y_0}} = -\sin(x_0 y_0)e^{\int_{x_0}^{x} x\cos(xy(x,x_0,y_0)dx}$$

$$[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}]\Bigg|_{\substack{x_0\\y_0}} = e^{\int_{x_0}^{x} x\cos(xy(x,x_0,y_0)dx}$$

由于 $x_0=0, y_0=0$ 时有 $y\equiv 0$ ，因此，我们有

$$[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}]\Bigg|_{\substack{x_0=0\\y_0=0}} = 0 \qquad [\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}]\Bigg|_{\substack{x_0=0\\y_0=0}} = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

3.4 奇解

本节要求：

1 了解奇解的意义；

2 掌握求奇解的方法。

主要内容

- 包络和奇解

- 克莱罗方程（Clairant Equation）

一 包络和奇解的定义

曲线族的包络： 是指这样的曲线，它本身并不包含在曲线族中，但过这条曲线上的每一点，有曲线族中的一条曲线与其在此点相切。

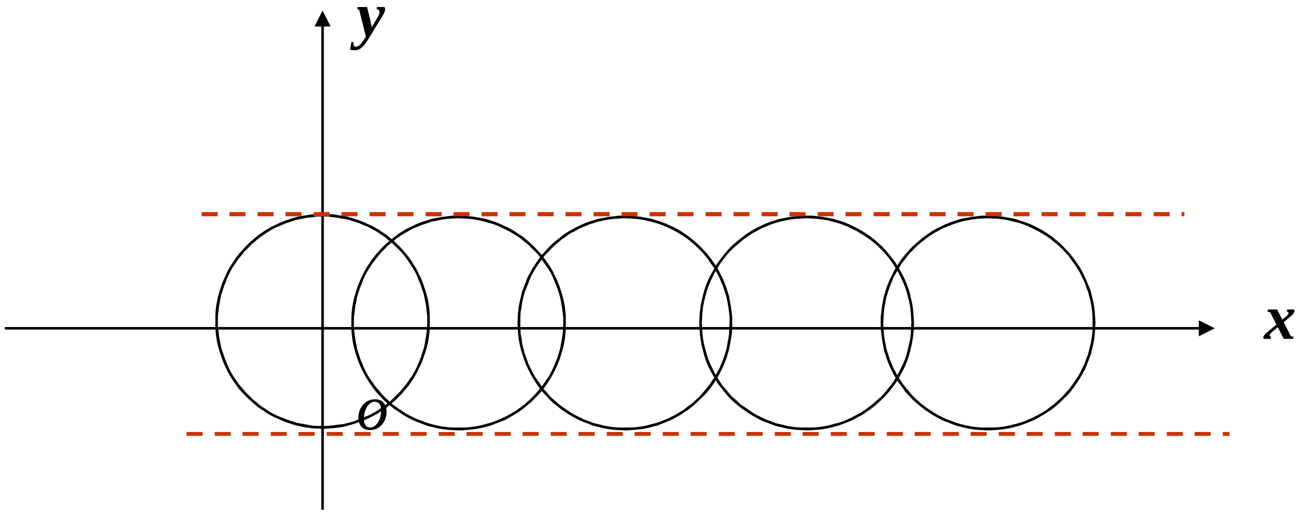
奇解： 在有些微分方程中，存在一条特殊的积分曲线，它并不属于这个方程的积分曲线族，但在这条特殊的积分曲线上的每一点处，都有积分曲线族中的一条曲线与其在此点相切。这条特殊的积分曲线所对应的解称为方程的奇解。

注： 奇解上每一点都有方程的另一解存在。

例 单参数曲线族

$$(x-c)^2+y^2=R^2$$

R是常数，c是参数。



显然，$y=\pm R$ 是曲线族 $(x-c)^2+y^2=R^2$ 的包络。

一般的曲线族并不一定有包络，如同心圆族，平行线族等都是没有包络的。

二 求奇解（包络线）的方法

- **C-判别曲线法**
- **P-判别曲线法**

设一阶方程 $F(x,y,y')=0$ 的通积分为 $\boldsymbol{\Phi}(x,y,C)=0$。

1 C-判别曲线法

结论： 通积分作为曲线族的包络线（奇解）包含在下列方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}(x,y,C)=0 \\ \boldsymbol{\Phi}'_C(x,y,C)=0 \end{cases}$$

消去 C 而得到的曲线中。

设由 $\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}(x, y, C) = 0 \\ \boldsymbol{\Phi}'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$ 能确定出曲线为

$$L: \quad x = x(C), \; y = y(C)$$

则 $\boldsymbol{\Phi}(x(C), y(C), C) \equiv 0$

对参数 C 求导数

$$\boldsymbol{\Phi}'_x(x(C), y(C), C)x'(C) + \boldsymbol{\Phi}'_y(x(C), y(C), C)y'(C)$$
$$+ \boldsymbol{\Phi}'_C(x(C), y(C), C) \equiv 0$$

从而得到恒等式

$$\boldsymbol{\Phi}'_x(x(C), y(C), C)x'(C) + \boldsymbol{\Phi}'_y(x(C), y(C), C)y'(C) \equiv 0$$

$$\Phi'_x(x(C),y(C),C)x'(C)+\Phi'_y(x(C),y(C),C)y'(C)\equiv 0$$

当 $\Phi'_x(x,y,C),\Phi'_y(x,y,C)$ 至少有一个不为零时

有 $$\frac{y'(C)}{x'(C)}\equiv-\frac{\Phi'_x(x(C),y(C),C)}{\Phi'_y(x(C),y(C),C)},$$ 或

$$\frac{x'(C)}{y'(C)}\equiv-\frac{\Phi'_y(x(C),y(C),C)}{\Phi'_x(x(C),y(C),C)},$$

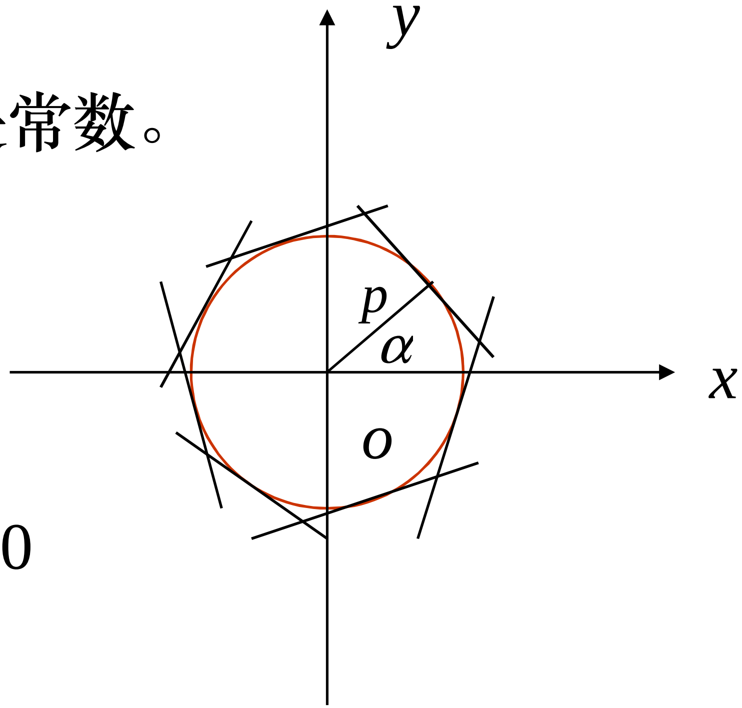
这表明曲线 L 在其上每一点 $(x(C),y(C))$ 处均与曲线族中对应于C的曲线 $\Phi(x,y,C)\equiv 0$ 相切。

注意： **C-判别曲线中除了包络外，还有其他曲线，尚需检验。**

例1 求直线族

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

的包络，这里 α 是参数，p 是常数。



解: 对参数 α 求导数

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0$$

联立 $\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \end{cases}$

$$x^2\cos^2\alpha + y^2\sin^2\alpha + 2xy\sin\alpha\cos\alpha = p^2$$

$$x^2\sin^2\alpha + y^2\cos^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

相加，得 $x^2 + y^2 = p^2$ ，经检验，其是所求包络线。

例2 求直线族

$$(y-c)^2-\frac{2}{3}(x-c)^3=0$$

的包络，这里 c 是参数。

解： 对参数 c 求导数 $y-c-(x-c)^2=0$

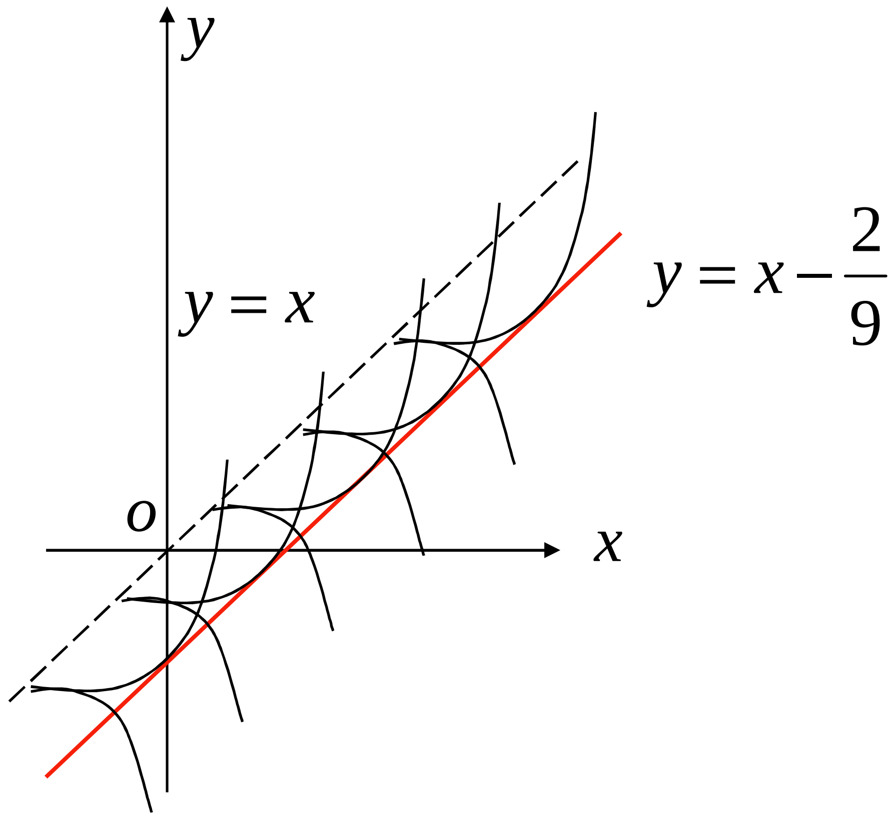
联立 $\begin{cases}(y-c)^2-\dfrac{2}{3}(x-c)^3=0\\ y-c-(x-c)^2=0\end{cases}$

得 $(x-c)^3[(x-c)-\dfrac{2}{3}]=0$

从 $x-c=0$ 得到 $y=x$

从 $(x-c)-\dfrac{2}{3}=0$ 得到 $y=x-\dfrac{2}{9}$

因此，C-判别曲线中包括了两条曲线，易检验，$y=x-\dfrac{2}{9}$ 是所求包络线。



y
$y = x$
$y = x - \frac{2}{9}$
o
x

2 *p*-判别曲线

结论： 方程 $F(x, y, y')=0$ 的奇解包含在下列方程组

$$\begin{cases} F(x, y, p)=0 \\ F'_p(x, y, p)=0 \end{cases}$$

消去 p 而得到的曲线中。

注意： ***p*-判别曲线中除了包络外，还有其他曲线，尚需检验。**

例3 求方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - 1 = 0$ 的奇解。

解： 从

$$\begin{cases} p^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2p = 0 \end{cases}$$

消去 p，得到 p-判别曲线

$$y = \pm 1$$

经检验，它们是方程的奇解。

因为易求得原方程的通解为 $y = \sin(x + c)$

而 $y = \pm 1$ 是方程的解，且正好是通解的包络。

例4 求方程 $y = 2x\dfrac{dy}{dx} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ 的奇解。

解： 从

$$\begin{cases} y = 2xp - p^2 \\ 2x - 2p = 0 \end{cases}$$

消去 p，得到 p-判别曲线

经检验，$y = x^2$ 不是方程的解，故此方程没有奇解。

注意： **以上两种方法，只提供求奇解的途径，所得*p*-判别曲线和C-判别曲线是不是奇解，必需进行检验。**

3 克莱罗方程

形式 $y = xp - f(p)$

其中 $p = \dfrac{dy}{dx}$, $f(p)$ 是 p 的连续函数。

解法

$$p = p + xp' + f'(p)p'$$

$$(x + f'(p))p' = 0$$

$$p' = 0 \qquad p = c$$

$$y = cx + f(c)$$ 通解

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -f'(p)p + \varphi(p) \end{cases}$$ 奇解

例5 求解方程 $y = xp + \dfrac{1}{p}$

解: 这是克莱罗方程，因而其通解为 $y = xc + \dfrac{1}{c}$

从
$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{c^2} = 0 \\ y = xc + \dfrac{1}{c} \end{cases}$$

消去 c，得到奇解

$$y^2 = 4x$$

例6 求一曲线，使在其上每一点的切线截割坐标轴而成的直角三角形的面积都等于2。

解 设要求的曲线为 $y = y(x)$

过曲线任上一点 (x, y) 的切线方程为

$$Y = y'(x)(X - x) + y$$

其与坐标轴的交点为 $(-\frac{y}{y'} + x,\ -xy' + y)$

切线截割坐标轴而成的直角三角形的面积为

$$\frac{1}{2}(-\frac{y}{y'} + x)(-xy' + y) = 2$$

$$\frac{1}{2}(-\frac{y}{y'}+x)(-xy'+y)=2$$

$$(y-xy')^2=-4y'$$

$$y-xy'=\pm 2\sqrt{-y'} \qquad y=xy'\pm 2\sqrt{-y'}$$

这是克莱罗方程，因而其通解为

$$y=c_1x\pm 2\sqrt{-c_1}=2c-c^2x$$

从 $\begin{cases} y=2c-c^2x \\ 2-2cx=0 \end{cases}$ 消去 c，得到奇解 $xy=1$

这是等腰双曲线，显然它就是满足要求的曲线。

课堂练习:

1 求一曲线，使在其上每一点的切线截割坐标轴的两截距之和等于常数 a 。

2 求解方程，并划出积分曲线图。

$$(1)\quad y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$(2)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

作业: （一）1，2，7，8， （二）1，3， （四）