§ 4.1 高阶线性微分方程的一般理论

/General Theory of Higher-Order Linear ODE/

本节要求/Requirements/

- 理解高阶齐次线性方程解的性质和解的结构
- 理解高阶非齐次线性方程解的性质和解的结构

4.1.1 引言 /Introducation/

n 阶微分方程一般形式: $F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0$

n 阶线性微分方程一般形式:

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \quad (4.1)$$

其中 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ **及**$f(t)$**是区间** $a\le t\le b$ **上的连续函数。**

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \quad (4.2)$$

称它为 n 阶齐次线性微分方程，而方程（4.1）为 n 阶非齐次线性微分方程。

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \qquad (4.1)$$

方程（4.1）的解的存在唯一性定理:

定理1 如果 $a_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 都是区间 $a\le t\le b$ 上的连续函数，则对于任一 $t_0\in[a,b]$ 及任意的 $x_0, x_0^{(1)},\cdots x_0^{(n-1)}$，方程（4.1）存在 唯一解 $x=\varphi(t)$，定义于区间 $a\le t\le b$ 上，且满足初始条件：

$$\varphi(t_0)=x_0,\ \frac{d\varphi(t_0)}{dt}=x_0^{(1)},\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}}=x_0^{(n-1)} \qquad (4.3)$$

4.1.2 齐线性方程解的性质与结构

例 **(P.15, 2)** $\frac{d^2y}{dx^2}+w^2y=0 \quad (w>0\text{为常数})$

有解 $y=\cos wx \qquad y=\sin wx$

$y=C_1\cos wx \qquad y=C_2\sin wx$

$y=C_1\cos wx+C_2\sin wx$

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

定理2 （叠加原理）如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ **是方程（4.2）的*k*个解，则它们的线性组合** $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$ **也是（4.2）的解，这里** $c_1,c_2,\cdots,c_k$ **是任意常数。**

证明 $$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

$$[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)]^{(n)}+$$

$$a_1(t)[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)]^{(n-1)}$$

$$+\cdots+a_n(t)[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)]$$

$$c_1[\frac{d^n x_1}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx_1}{dt}+a_n(t)x_1]$$

$$+c_2[\frac{d^n x_2}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_2}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx_2}{dt}+a_n(t)x_2]$$

$$+\cdots+c_k[\frac{d^n x_k}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x_k}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx_k}{dt}+a_n(t)x_k]=0$$

问题：

当 $k=n$ 时，若 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是齐线性方程的解，

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

能否成为方程（4.2）的通解？　不一定

如在上例中　$y_1=\cos wx$　$y_2=5\cos wx$

$$y=C_1\cos wx+C_2 5\cos wx$$

不包含解　$y=C_2\sin wx$

要使 $x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$ 为方程（4.2）的通解

$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$　还需满足一定的条件。

函数线性无关和相关

定义在 $a \le t \le b$ 上的函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$，如果存在

不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 使得恒等式

$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_k x_k(t) \equiv 0$ 对所有 $t \in [a, b]$ 成立，

称这些函数是线性相关的，否则称是线性无关的。

如 $\cos x, \ \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关

$\cos^2 x, \sin^2 x, 1$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性相关

$1, \ t, \ t^2, \cdots, \ t^n$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关

要使得 $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n \equiv 0 \quad t \in (-\infty, +\infty)$

则 $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

伏朗斯基行列式

定义在 $a \le t \le b$ 区间上的 **k** 个可微 **k-1** 次的函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 所作成的行列式

$$W(t) = W\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)\right]$$

$$= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些函数的伏朗斯基行列式。

定理3 若函数$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在区间 $a\le t\le b$ 上线性相关，则在 $[a,b]$上它们的伏朗斯基行列式$W(t)\equiv 0$。

证明 由假设，即知存在一组不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，

使得 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)\equiv 0 \quad a\le t\le b$ (4.6)

依次对 t 微分此恒等式，得到

$$\begin{cases} c_1x_1'(t)+c_2x_2'(t)+\cdots+c_nx_n'(t)\equiv 0 \\ c_1x_1''(t)+c_2x_2''(t)+\cdots+c_nx_n''(t)\equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t)+c_2x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_nx_n^{(n-1)}(t)\equiv 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

关于$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的齐次线性代数方程组，

它的系数行列式 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$，由线性代数理论方程存在非零解的充要条件是系数行列式必须为零，即

$$W(t) \equiv 0 \qquad a \le t \le b$$

证毕

其逆定理是否成立? 不一定

即由其构成的伏朗斯基行列式为零，但它们也可能是线性无关的。

例如：

$$x_1(t) = \begin{cases} t^2 & -1 \le t \le 0 \\ 0 & 0 \le t \le 1 \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & -1 \le t \le 0 \\ t^2 & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$x_1(t)=\begin{cases} t^2 & -1\le t\le 0 \\ 0 & 0\le t\le 1 \end{cases} \qquad x_2(t)=\begin{cases} 0 & -1\le t\le 0 \\ t^2 & 0\le t\le 1 \end{cases}$$

$$W[x_1(t),x_2(t)]=\begin{cases} \begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 0 \end{vmatrix}=0 & -1\le t\le 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & 2t \end{vmatrix}=0 & 0\le t\le 1 \end{cases}$$

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=\begin{cases} c_1t^2+c_2\cdot 0\equiv 0 & -1\le t\le 0 \\ c_1\cdot 0+c_2t^2\equiv 0 & 0\le t\le 1 \end{cases}$$

$$c_1=c_2=0$$

故 $x_1(t),x_2(t)$ $t\in[-1,1]$ 是线性无关的。

定理4 如果方程(4.2)的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性无关，则 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$ 在这个区间的任何点上都不等于零，即 $W(t) \neq 0 \quad a \le t \le b$

证明 反证法 设有某个 t_0, $a \le t_0 \le b$，使得 $W(t_0) = 0$

考虑关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的齐次线性代数方程组

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + \cdots + c_n x_n(t_0) = 0 \\ c_1 x_1'(t_0) + c_2 x_2'(t_0) + \cdots + c_n x_n'(t_0) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 x_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n x_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

其系数行列式$W(t_0)=0$ ，故（4.9）有非零解 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$

构造函数 $x(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t) \qquad a\le t\le b$

根据叠加原理，$x(t)$ 是方程（4.2）的解，且满足初始条件

$$x(t_0)=x'(t_0)=\cdots=x^{(n-1)}(t_0)=0 \qquad (4.10)$$

另 $x=0$ 也是方程(4.2)的解，也满足初始条件（4.10）

由解的唯一性知 $x(t)\equiv 0 \quad a\le t\le b$，即

$$\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)\equiv 0 \qquad a\le t\le b$$

因为 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$不全为0，与$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 线性无关

的假设矛盾。

证毕

$$\exists t_0,\quad a \le t_0 \le b \xrightarrow{\text{定理4}} x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$$

$$W[x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)] = 0 \xleftarrow[\text{定理3}]{} \text{线性相关}$$

重要结论

方程(4.2)的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ **在区间** $a \le t \le b$ **上线性无关**

的充分必要条件是 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \ne 0 \qquad a \le t \le b$

定理5 n **阶齐线性方程(4.2)一定存在** n **个线性无关的解，**

且任意 $n+1$ **个解都线性相关。**

证明 $a_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ **在** $a \le t \le b$ **上连续，取** $t_0 \in [a,b]$

则满足条件 $x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0',\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$

存在唯一。

$$x(t_0)=1,\ x'(t_0)=0,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0)=0 \qquad x_1(t)$$

$$x(t_0)=0,\ x'(t_0)=1,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0)=0 \qquad x_2(t)$$

$$\cdots\cdots$$

$$x(t_0)=0,\ x'(t_0)=0,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0)=1 \qquad x_n(t)$$

$$W\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right]\Big|_{t_0}=|\mathbf{E}|=1\neq 0$$

$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ **线性无关。**

即齐线性方程(4.2)一定存在 *n* 个线性无关的解。

任取方程(4.2)的*n*+ 1个解， $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), x_{n+1}(t)$

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_{n+1}(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_{n+1}'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \cdots & x_{n+1}^{(n)}(t) \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_{n+1}(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_{n+1}'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_1^{(n-i)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{n+1}^{(n-i)}(t) \end{vmatrix}=0$$

任意 n+1个解都线性相关。

•n 阶齐线性方程的所有解构成一个 n 维线性空间。

•方程(4.2)的一组n个线性无关解称为它的一个基本解组。

定理6（通解结构）

如果$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是方程（4.2）的n个线性无关的解，则方程（4.2）的通解可表为

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \qquad (4.11)$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是任意常数，且通解（4.11）包括方程（4.2）的所有解。

作业：P.112，6，7，8

4.1.3 非齐线性方程与常数变易法

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \quad (4.1)$$

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=0 \quad (4.2)$$

性质1 如果 $\overline{x}(t)$ 是方程（4.1）的解，而 $x(t)$ 是方程（4.2）的解，则 $\overline{x}(t)+x(t)$ 也是方程（4.1）的解。

性质2 方程（4.1）的任意两个解之差必为方程（4.2）的解。

$$(\overline{x}+x)^{(n)}+a_1(t)(\overline{x}+x)^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)(\overline{x}+x)'+a_n(t)(\overline{x}+x)$$

$$=[\overline{x}^{(n)}+a_1(t)\overline{x}^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)\overline{x}'+a_n(t)\overline{x}]$$

$$+[x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x]=f(t)$$

定理7 设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 为方程（4.2）的基本解组，$\overline{x}(t)$ 是方程（4.1）的某一解，则方程（4.1）的通解为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\overline{x}(t) \qquad (4.14)$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意常数，且通解（4.14）包括方程（4.1）的所有解。

证明 1)（4.14）一定是方程（4.1）的解，且含有n个独立的任意常数，是通解。

2) $\tilde{x}(t)$ 是方程（4.1）的任一个解，则

$\tilde{x}(t)-\overline{x}(t)$ 是方程（4.2）的解 $\exists\ \tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$

$$\tilde{x}(t)-\overline{x}(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)$$

$$\tilde{x}(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)+\overline{x}(t)$$ 证毕

非齐线性方程

齐线性方程

特解 ← 表示 ← 基解组

关键

非齐线性方程通解

常数变易法

$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为方程（4.2）的基本解组，

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \qquad (4.15)$$

为（4.2）的通解。设

$$x = c_1(t) x_1(t) + c_2(t) x_2(t) + \cdots + c_n(t) x_n(t) \qquad (4.16)$$

为（4.1）的解。

$$x' = c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + \cdots + c_n(t)x_n'(t)$$

$$+ x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) + \cdots + x_n(t)c_n'(t)$$

令 $$x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) + \cdots + x_n(t)c_n'(t) = 0 \qquad (4.17)_1$$

$$x' = c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + \cdots + c_n(t)x_n'(t) \qquad (4.18)_1$$

$$x'' = c_1(t)x_1''(t) + c_2(t)x_2''(t) + \cdots + c_n(t)x_n''(t)$$

$$+ x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) + \cdots + x_n'(t)c_n'(t)$$

$$\boldsymbol{x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) + \cdots + x_n'(t)c_n'(t) = 0} \qquad (4.17)_2$$

$$x'' = c_1(t)x_1''(t) + c_2(t)x_2''(t) + \cdots + c_n(t)x_n''(t) \qquad (4.18)_2$$

$$x_1^{(n-2)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-2)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-2)}(t)c_n'(t)=0 \quad (4.17)_{n-1}$$

$$x^{(n-1)}=c_1(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n-1)}(t) \quad (4.18)_{n-1}$$

$$x^{(n)}=c_1(t)x_1^{(n)}(t)+c_2(t)x_2^{(n)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n)}(t)$$

$$+x_1^{(n)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n)}(t)c_n'(t) \quad (4.18)_n$$

(4.16) $(4.18)_1$ $(4.18)_2$ $(4.18)_{n-1}$ $(4.18)_n$

代入方程（4.1）

$$x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t)=f(t) \quad (4.17)_n$$

$$\begin{cases} x_1(t)c_1'(t)+x_2(t)c_2'(t)+\cdots+x_n(t)c_n'(t)=0 & (4.17)_1 \\ x_1'(t)c_1'(t)+x_2'(t)c_2'(t)+\cdots+x_n'(t)c_n'(t)=0 & (4.17)_2 \\ \\ x_1^{(n-2)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-2)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-2)}(t)c_n'(t)=0 & (4.17)_{n-1} \\ x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t)=f(t) & (4.17)_n \end{cases}$$

$W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\neq 0$ 方程组有唯一的解，设为

$$c_i'(t)=\varphi_i(t)\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$c_i(t)=\int\varphi_i(t)dt+\gamma_i\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$x=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t)\qquad (4.16)$$

特解 $\gamma_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

$$x = x_1(t)\int \varphi_1(t)dt + x_2(t)\int \varphi_2(t)dt + \cdots + x_n(t)\int \varphi_n(t)dt$$

通解

$$x = x_1(t)\int \varphi_1(t)dt + x_2(t)\int \varphi_2(t)dt + \cdots + x_n(t)\int \varphi_n(t)dt$$

$$+ \gamma_1 x_1(t) + \gamma_2 x_2(t) + \cdots + \gamma_n x_n(t)$$

结构: 非齐线性方程的通解等于对应齐次方程的通解与自身的一个特解之和。

例1 求方程 $x''+x=\dfrac{1}{\cos t}$ 的通解，已知它对应齐线性方程的基本解组为 $\cos t$ ，$\sin t$

解 令 $x=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t$

$$c_1'(t)\cos t+c_2'(t)\sin t=0$$

$$-c_1'(t)\sin t+c_2'(t)\cos t=\frac{1}{\cos t}$$

解得 $c_1'(t)=-\dfrac{\sin t}{\cos t}$ $\quad c_2'(t)=1$

$$c_1(t)=\ln|\cos t|+\gamma_1 \quad c_2(t)=t+\gamma_2$$

原方程的通解为 $x=\gamma_1\cos t+\gamma_2\sin t+\cos t\ln|\cos t|+t\sin t$

例2 求方程 $tx''-x'=t^2$ 于域 $t\neq 0$ 上的所有解。

解 对应的齐线性方程为 $tx''-x'=0$

$$\frac{x''}{x'}=\frac{1}{t} \qquad \frac{dx'}{x'}=\frac{1}{t}dt$$

得 $x'=At$ $\quad x=\frac{1}{2}At^2+B$ 这里 A、B 为任意常数。

易见有基本解组 1, t^2 $\qquad x''-\frac{1}{t}x'=t$

设 $x=c_1(t)+c_2(t)t^2$ 为方程的解

$$c_1'(t)+t^2c_2'(t)=0 \qquad c_1(t)=-\frac{1}{6}t^3+\gamma_1$$

$$2tc_2'(t)=t \qquad c_2(t)=\frac{1}{2}t+\gamma_2$$

故得原方程的通解

$$x=\gamma_1+\gamma_2t^2+\frac{1}{3}t^3 \qquad (\ \gamma_1,\gamma_2\ \text{为任意常数})$$

思考题 常数变易法中待定函数的条件如何选择?

练习题

1 验证$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 的基本解组为e^t， e^{-t} ，并求方程

$\frac{d^2x}{dt^2}-x=\cos t$的通解。

2 求方程$x''+4x=t\sin 2t$的通解，已知它对应齐线性

方程的基本解组为 $\cos 2t$， $\sin 2t$

作业：P.112，第4， 6，7，8，9题