4.2.3 非齐次线性方程解法

------比较系数法与拉普拉斯变换法

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (4.32)$$

$a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数， $f(t)$ 为连续函数。

令 $D=\dfrac{d}{dt}$

$$L=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$$

L 为线性微分算子。

$$L[x]=f(t) \longrightarrow L[x]=0$$

相加

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

特解 $\xleftarrow{\text{常数变易法}}$ 基本解组或通解

比较系数法与拉普拉斯变换法

（一）比较系数法/Comparison Coefficients Method/

类型Ⅰ/Type One/

$$f(t)=(b_0 t^m+b_1 t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)\cdot e^{\lambda t}$$

其中 $\lambda, b_0, b_1, \cdots, b_m$ 为确定的实常数。

结论1 当方程(4.32)中右端函数 $f(t)$为以上类型时，

方程 (4.32) 有一特解为以下形式

$$\tilde{x} = t^k (B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m) \cdot e^{\lambda t}$$

其中 $B_0, B_1, \cdots, B_m$ 为待定系数， k 由(4.32)

对应的特征方程 $F(\lambda) = 0$ 来决定，

λ 是特征根时， k 为 λ 的重数，

λ 不是特征根时， $k = 0$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = e^{-t}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda = 3, \lambda = -1$$

$$\tilde{x} = t\ Ae^{-t} = Ate^{-t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = (t^2 + 1)e^{t}$$

$$\tilde{x} = t^0\ (At^2 + Bt + C)e^{t} = (At^2 + Bt + C)e^{-t}$$

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (4.32)$$

1) $\lambda=0$ $\quad f(t)=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m$

（1） $\lambda=0$ **不是特征根** $F(0)\neq 0 \quad \therefore a_n\neq 0$

要证明(4.32)有解 $\tilde{x}=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m$

即证明 B_i **能由已知条件唯一确定。**

事实上，将其代入方程， 比较同次幂的系数，得

$$\begin{cases} a_n B_0 = b_0 \\ a_n B_1 + a_{n-1} m B_0 = b_1 \\ a_n B_2 + a_{n-1}(m-1)B_1 + a_{n-2} m(m-1) B_0 = b_2 \\ \quad \cdots \\ a_n B_m + a_{n-1} B_{m+1} + 2a_{n-2} B_{m+2} + \cdots = b_m \end{cases}$$

$\because a_n \neq 0$ $\quad B_0, B_1, \cdots, B_m$ 可唯一确定。

（2） $\lambda=0$ 是 *k* 重特征根

$$\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)$$

其特征方程为 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-k}\lambda^k=0$

也就是 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0 \quad a_{n-k}\neq 0$

原方程为 $$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{d^kx}{dt^k}=f(t)$$

令 $$\frac{d^kx}{dt^k}=z$$

$$\frac{d^{n-k}z}{dt^{n-k}} + a_1 \frac{d^{n-k-1}z}{dt^{n-k-1}} + \cdots + a_{n-k}z = f(t) \qquad (4.36)$$

对方程(4.36)， $a_{n-k} \neq 0$

$\lambda = 0$ 不是 (4.36) 的特征根， 有如下形式的特解

$$\tilde{z} = \tilde{B}_0 t^m + \tilde{B}_1 t^{m-1} + \cdots + \tilde{B}_{m-1} t + \tilde{B}_m$$

$$\frac{d^k \tilde{x}}{dt^k} = \tilde{B}_0 t^m + \tilde{B}_1 t^{m-1} + \cdots + \tilde{B}_{m-1} t + \tilde{B}_m$$

$$\frac{d^{k-1}\tilde{x}}{dt^{k-1}} = \frac{\tilde{B}_0}{m+1}t^{m+1} + \frac{\tilde{B}_1}{m}t^{m} + \cdots + \tilde{B}_m t$$

$$\cdots$$

$$\tilde{x} = t^k(\gamma_0 t^m + \gamma_1 t^{m-1} + \cdots + \gamma_m)$$

$\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 为确定的数。

2）如果 $\lambda \neq 0$ 引入 $x = ye^{\lambda t}$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = e^{\lambda t}P_m(t) \qquad (4.32)$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dt} + A_n y = b_0 t^m + \cdots + b_m \qquad (4.37)$$

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为确定的常数。

当 λ 是(4.32) 的 k 重特征根，

则0就是 (4.37) 的 k 重特征根

当 λ 不是(4.32) 对应齐次方程的特征根，

则 0 就不是(4.37)的特征根。

利用1）的讨论，故 (4.37)有形如以下的特解

$$\tilde{y} = B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m$$

$$x = y e^{\lambda t}$$ **(4.32)有形如**

$$\tilde{x} = e^{\lambda t}(B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m)$$ **的特解**

当 λ 是(4.32) 的 k 重特征根，

则0就是 (4.37) 的 k 重特征根

$$\tilde{y} = t^k (B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m)$$

(4.32)有特解为

$$\tilde{x} = t^k (B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m) \cdot e^{\lambda t}$$

例1 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=3t+1$ 的通解.

解 1° 先求对应齐次方程的通解

$$\lambda^2-2\lambda-3=0 \qquad \lambda=3,\lambda=-1$$

通解 $c_1e^{-t}+c_2e^{3t}$

2° 用比较系数法求一特解

0不是特征根，则方程有形如 $\tilde{x}=At+B$ 的特解

$$-2A-3(At+B)=3t+1$$

$$\begin{cases}-3A=3\\-2A-3B=1\end{cases} \qquad A=-1,B=\frac{1}{3}$$

3° 通解 $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}-t+\frac{1}{3}$

例2 求方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=e^{-t}$ 的通解

解 1° $-1,\ 3$ $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}$

2° -1是特征根， $\tilde{x}=t\,Ae^{-t}=Ate^{-t}$

$$\tilde{x}'=Ae^{-t}-Ate^{-t}$$

$$\tilde{x}''=-Ae^{-t}-Ae^{-t}+Ate^{-t}=-2Ae^{-t}+Ate^{-t}$$

$$-2Ae^{-t}+Ate^{-t}-2(Ae^{-t}-Ate^{-t})-3Ate^{-t}=e^{-t}$$

$$A=-\frac{1}{4} \qquad \tilde{x}=-\frac{1}{4}te^{-t}$$

3° 通解 $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}-\dfrac{1}{4}te^{-t}$

例3 **求方程** $\dfrac{d^3x}{dt^3}+3\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}+x=e^{-t}(t-5)$ **的通解**

解 1° $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$ $\lambda_{1,2,3}=-1$

$$(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}$$

2° 设 $\tilde{x}=t^3(At+B)e^{-t}$

$$A=\frac{1}{24} \quad B=-\frac{5}{6}$$

3° $x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}+\dfrac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}$

例4 求 $t^2x''-4tx'+6x=t$ 的通解.

解 $t=e^s \qquad s=\ln|t|$

变换后，对应齐次方程的特征方程为

$$k(k-1)-4k+6=0 \qquad k^2-5k+6=0$$

变换后，为常系数方程 $\dfrac{d^2x}{ds^2}-5\dfrac{dx}{ds}+6=0$

原方程化为 $\dfrac{d^2x}{ds^2}-5\dfrac{dx}{ds}+6x=e^s$

$$k_1=2,\ k_2=3 \qquad c_1e^{2s}+c_2e^{3s}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}-5\frac{dx}{ds}+6x=e^s$$

$$\tilde{x}=s^0Ae^s=Ae^s$$

$$A-5A+6A=1 \qquad A=\frac{1}{2}$$

$$\tilde{x}=\tfrac{1}{2}e^s=\tfrac{1}{2}t$$

$$x(s)=c_1e^{2s}+c_2e^{3s}+\frac{1}{2}e^s$$

原方程的通解为 $x(t)=c_1t^2+c_2t^3+\tfrac{1}{2}t$

$$L[x]=f_1(t)+f_2(t)$$

若 $L[x]=f_1(t)$ 有特解 $\tilde{x}_1(t)$

$L[x]=f_2(t)$ 有特解 $\tilde{x}_2(t)$

则 $L[x]=f_1(t)+f_2(t)$ 有特解

$$\tilde{x}_1(t)+\tilde{x}_2(t)$$

练习 $$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=3t+1+e^{-t}$$

$$\lambda^2-2\lambda-3=0 \qquad \lambda=3,\lambda=-1$$

特解 $At+B$ $\quad \mathrm{A}=-1,\mathrm{B}=\frac{1}{3}$ $\quad \tilde{x}_1=-t+\frac{1}{3}$

特解 Ate^{-t} $\quad A=-\frac{1}{4}$ $\quad \tilde{x}_2=-\frac{1}{4}te^{-t}$

$$x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-t+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}te^{-t}$$

类型Ⅱ /Type Two/

$$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

其中 α,β 为实数， $A(t),B(t)$ 是 t

的实系数多项式

$$\max(\partial A(t),\partial B(t))=m$$

结论2

方程(4.32)有特解

$$\tilde{x} = t^k [P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t] e^{\alpha t}$$

$P(t), Q(t)$ 是次数不高于 m 的多项式，

k 由 $\alpha + i\beta$ 决定

当 $\alpha + i\beta$ 是特征方程 $F(\lambda) = 0$ 的根时，k 为重数

当 $\alpha + i\beta$ 不是特征方程 $F(\lambda) = 0$ 的根时，$k = 0$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = [\cos\beta t + i\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = [\cos\beta t - i\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}}{2}$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t = \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i}$$

$$= -\frac{1}{2}i(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t})$$

$$f(t) = [A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$f(t) = A(t)\frac{e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}}{2} -$$

$$i\frac{B(t)}{2}(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t})$$

$$= \frac{A(t) - iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{A(t) + iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$= f_1(t) + f_2(t)$$

显然 $$\overline{f_1(t)} = \frac{A(t)+iB(t)}{2} e^{(\alpha-i\beta)t} = f_2(t)$$

$$L[x] = f_1(t) \qquad\qquad L[x] = f_2(t)$$

$$\tilde{x}_1 = t^k D(t) e^{(\alpha+i\beta)t} \qquad \tilde{x}_2 = t^k \overline{D}(t) e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

$$\tilde{x}(t) = t^k D(t) e^{(\alpha+i\beta)t} + t^k \overline{D}(t) e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$\tilde{x}(t) = t^k D(t) e^{(\alpha + i\beta)t} + t^k \overline{D}(t) e^{(\alpha - i\beta)t}$$

$$= t^k e^{\alpha t} [D(t) e^{i\beta t} + \overline{D}(t) e^{-i\beta t}]$$

$$= t^k e^{\alpha t} [D(t)(\cos\beta t + i \sin\beta t) +$$

$$\overline{D}(t)(\cos\beta t - i \sin\beta t)]$$

$$=t^k e^{\alpha t}[D(t)(\cos\beta t+i\sin\beta t)+\overline{D}(t)(\cos\beta t-i\sin\beta t)]$$

$$=t^k e^{\alpha t}[(D(t)+\overline{D}(t))\cos\beta t+i(D(t)-\overline{D}(t))\sin\beta t)]$$

$$=t^k e^{\alpha t}[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t)]$$

$P(t),Q(t)$ 是次数不高于 m 的多项式。

例5 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$ 的通解

解 $\lambda^2+4\lambda+4=0 \qquad \lambda_{1,2}=-2$

齐次方程的通解为 $(c_1+c_2t)e^{-2t}$

设方程的特解形如: $\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$

$$\begin{cases} 4A+8B+4A=1 \\ 4B-8A-4B=0 \end{cases}$$

$$A=0,\ B=\frac{1}{8}$$

$$\tilde{x}=\frac{1}{8}\sin 2t$$

原方程的通解为 $x(t)=(c_1+c_2t)e^{-2t}+\frac{1}{8}\sin 2t$

练习 试求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t+2\sin t$ 的特解.

解

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=2\sin t$$