§5.3 常系数线性微分方程组

Coefficients Linear ODEs

本节主要内容/Main Contents/

1 常系数齐线性微分方程组

$$x' = Ax \qquad (5.33)$$

的基解矩阵的结构，这里 A 是 $n \times n$ 常数矩阵。

2 通过代数的方法，寻求(5.33)的一个基解矩阵。

3 拉普拉斯变换在常系数线性微分方程组中的应用。

5.3.1 矩阵指数 exp$A$ 的定义和性质

无穷矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_k + \cdots$$

$$= (a_{ij}^{(1)})_{n\times n} + (a_{ij}^{(2)})_{n\times n} + \cdots + (a_{ij}^{(k)})_{n\times n} + \cdots$$

$$= (a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(k)} + \cdots)_{n\times n}$$

如果每个 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \quad i, j = 1,2,\cdots,n$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ 收敛。

判断无穷矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ 收敛的法则：

$\forall k \quad \|\boldsymbol{A}_k\| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}\right| \le M_k$ **而级数** $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ **收敛，**

则 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ **收敛。**

同理，可给出 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k(t)$ **在区间** I **上的一致收敛的定义，**

和函数等类似的结果。

定义1 矩阵指数

$$\exp \boldsymbol{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} = E + \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^m}{m!} + \cdots \qquad \textbf{(5.34)}$$

$\boldsymbol{E}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵， $\boldsymbol{A}^m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\boldsymbol{m}$次幂。

$A^0 = E,\quad 0! = 1$ exp $\boldsymbol{A}$是一个确定的矩阵。

对于一切正整数 $\boldsymbol{k}$， $\left\| \dfrac{A^k}{k!} \right\| \le \dfrac{\|A^k\|}{k!} \le \dfrac{\|A\|^k}{k!}$ 而

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \|E\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|\boldsymbol{A}\|} + n - 1$$ 收敛，

则 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}$ 收敛。

定义2　矩阵指数函数 $\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ **(5.35)**

在 t 的任何有限区间上是一致收敛的。

对于一切正整数 k，当 $|t| \le c$ (c是某一正常数)时，有

$$\left\| \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \le \frac{\|A\|^k |t|^k}{k!} \le \frac{\|A\|^k c^k}{k!}$$

而数值级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|A\|c)^k}{k!}$ 是收敛的，

因而(5.35)在 t 的任何有限区间上是一致收敛的。

$\exp \boldsymbol{A}$ 性质

性质1 如果矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是可交换的，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则

$$exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = exp\boldsymbol{A}\cdot exp\boldsymbol{B} \qquad (5.36)$$

证 由于级数 $exp\boldsymbol{A} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}$, $\quad exp\boldsymbol{B} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{B}^k}{k!}$

绝对收敛，由绝对收敛级数的乘法定理，得

$$exp\boldsymbol{A}\cdot exp\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}+\cdots)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}+\frac{\boldsymbol{B}^2}{2!}+\cdots)$$

$$= \boldsymbol{E}+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)+\cdots$$

另一方面，由二项式定理及 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ ，

由绝对收敛级数的乘法定理，得

$$exp\boldsymbol{A}\cdot exp\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}+\cdots)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}+\frac{\boldsymbol{B}^2}{2!}+\cdots)$$

$$=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2)+\cdots$$

另一方面，由二项式定理及 ***AB*=*BA*** ，

$$exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2+\cdots$$

$$=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2)+\cdots$$

$$exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=exp\boldsymbol{A}\cdot exp\boldsymbol{B}$$

性质2 对于任何矩阵$\boldsymbol{A}$,$(exp\boldsymbol{A})^{-1}$ 存在，且

$$(exp\boldsymbol{A})^{-1} = exp(-\boldsymbol{A}) \qquad \textbf{(5.39)}$$

证 $\boldsymbol{A}$与$-\boldsymbol{A}$是可交换的，故在(5.36)中，令$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$ 得

$$\exp\boldsymbol{A}\exp(-\boldsymbol{A}) = \exp(\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})) = \exp\boldsymbol{0} = \boldsymbol{E}$$

$$(\exp\boldsymbol{A})^{-1} = \exp(-\boldsymbol{A})$$

性质3 如果 $\boldsymbol{T}$ 是非奇异矩阵，则

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}(\exp A)T$$

事实上 $$\exp(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^{k}}{k!}$$

$$= \boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{T}}{k!}$$

$$= \boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^{k}}{k!}\right)\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1}(\exp \boldsymbol{A})\boldsymbol{T}$$

$$(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^{2} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^{2}\boldsymbol{T}$$

定理9 矩阵 $\Phi(t)=\exp \boldsymbol{A}t$ **(5.41)**

是(5.33) $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准基解矩阵。$\Phi(0)=\boldsymbol{E}$

证明 $\Phi'(t)=(\exp \boldsymbol{A}t)'$

$$=\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2 t}{1!}+\frac{\boldsymbol{A}^3 t^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{\boldsymbol{A}^{k+1} t^k}{k!}+\cdots$$

$$=\boldsymbol{A}\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{A}\Phi(t)$$

$\Phi(t)$是(5.33)的解矩阵，又因为 $\Phi(0)=\boldsymbol{E}$,

因此，$\Phi(t)$是(5.33)的标准基解矩阵。

证毕

例1 如果A是一个对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$ (其中未写出的元素均为零)

试求出 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵。

解 方程组可以写成 $x_k'=a_k x_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$

分别积分 $$\begin{bmatrix} e^{a_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{a_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{a_n t} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & & & \\ & e^{a_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_n t} \end{bmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = E + \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \frac{t}{1!} + \begin{bmatrix} a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$+ \begin{bmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!} + \cdots = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & & & \\ & e^{a_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_n t} \end{bmatrix}$$

据定理9，这就是基解矩阵。

例2 试求 $x' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x$ 的基解矩阵。

解 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

以验证后面的两个矩阵是可交换的，得到

$$\exp \boldsymbol{A}t = \exp \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t \cdot \exp \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \left\{ \boldsymbol{E} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots \right\}$$

但是 $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \{\boldsymbol{E} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t\}$$

因此，基解矩阵就是

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad (5.33)$$

若(5.33）有 $\varphi(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$ $\quad \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ (5.43) 的解，

其中常数 λ 和向量 $\boldsymbol{c}$ 是待定的。

$$\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A} e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$$

因为 $e^{\lambda t} \neq 0$

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \qquad (5.44)$$

反过来，λ 和向量 $\boldsymbol{c}$ 满足方程组 (5.44)

则 $(e^{\lambda t}\boldsymbol{c})' = \boldsymbol{A}(e^{\lambda t}\boldsymbol{c})$

$e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$ 是(5.33)的非零解 $\Longleftrightarrow$

λ和 c 满足方程 $(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ (5.44)

$\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ $p(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 特征方程

λ是 A 的特征值，c 是 A 的属于 λ 的特征向量。

$e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$是(5.33)的非零解 $\Longleftrightarrow$

λ 是 A 的特征值， c 是 A 的属于 λ 的特征向量。

例3 求解 $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

解 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) - 6$

$$= \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 1$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \qquad (\lambda_2 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

$$(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_1=e^{-4t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2=e^{t}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix} e^{-4t} & 3e^{t} \\ -e^{-4t} & 2e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\det\boldsymbol{\Phi}(0)=\det\left(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\right)\Big|_{t=0}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5\neq 0$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} e^{-4t} & 3e^{t} \\ -e^{-4t} & 2e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$=c_1e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1 如果 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的单根，则称

λ_0 是简单特征根，

2 如果 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的 k 重根(即 $p(\lambda)$

具有因子 $(\lambda-\lambda_0)^k$,而没有因子 $(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$)，

则称 λ_0 是 k 重特征根。

求解常系数线性齐次方程组实基解矩阵的方法之一

定理10 如果矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，它们对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (不必各不相同)，那么

$$\Phi(t) = [e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \cdots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n] \quad -\infty < t < +\infty$$

是常系数线性微分方程组 $x' = Ax$ **(5.33)**

的一个基解矩阵。

证明 每一个向量函数 $e^{\lambda_j i}\mathbf{v}_j\,(j=1,2,\cdots,n)$

都是(5.33)的一个解， $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n$ 是线性无关的，

$$\det\Phi(0)=\det[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n]\neq 0$$

所以

$$\Phi(t)=[e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1,e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n] \qquad -\infty<t<+\infty$$

基解矩阵。

注1　推论 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 $\boldsymbol{n}$ 个互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 它们对应的特征向量分别为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，

那么 $\Phi(t)=[e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n]\quad -\infty<t<+\infty$

是常系数线性微分方程组 $x'=Ax$ 的一个基解矩阵。

注2 标准基解阵的表示 $\exp \boldsymbol{A}t=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)$

$\exp \boldsymbol{A}t$　　$\Phi(t)$　　$\exp \boldsymbol{A}t=\Phi(t)\boldsymbol{C}$　　$\boldsymbol{C}=\Phi^{-1}(0)$

标准基解阵一定为实矩阵。

注3

若实系数线性方程组

$$x' = Ax \qquad (5.33)$$

有复值解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{u}(t)+i\boldsymbol{v}(t)$，则其实部$\boldsymbol{u}(t)$与虚部$\boldsymbol{v}(t)$都是（5.33）的解.

例5 试求解 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

解 **1 求 A 的特征值和特征向量**

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 5i$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -5i & 5 \\ -5 & -5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \qquad \begin{cases} -iu_1 + u_2 = 0 \\ -u_1 - iu_2 = 0 \end{cases}$$

对于任意常数 $\alpha \neq 0$ $u = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ 是对应于

$\lambda_1 = 3 + 5i$ 的特征向量，

类似的，可以求出对应于 $\lambda_2 = 3 - 5i$

的特征向量为 $v = \beta \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ 其中 $\beta \neq 0$

2 求实基解矩阵

$$\boldsymbol{x}_1 = e^{(3+5i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = e^{(3-5i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix}$$

就是一个基解矩阵。

$$\exp \boldsymbol{A}t=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}$$

求实基解矩阵的步骤(利用定理10)

1 计算特征值，特征向量；

2 求解基解矩阵，求标准基解矩阵（实）；

3* 写出方程的通解。

课堂练习

试求解 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 5e^{3it} & 5e^{-3it} \\ (1-3i)e^{3it} & (1-3i)e^{-3it} \end{bmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = \begin{bmatrix} \cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t & -\frac{5}{3}\sin 3t \\ \frac{2}{3}\sin 3t & \cos 3t - \frac{5}{3}\sin 3t \end{bmatrix}$$

作业 **P.236, 第4(a)，(b)题。**

求解常系数线性齐次方程组实基解矩阵的方法之二

假设A是一个 $n\times n$ 矩阵，其不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$

它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$

那么，对于每一个 n_j 重特征值 λ_j ,线性方程组

$$(A-\lambda_j E)^{n_j}u=0 \qquad (5.48)$$

的解全体构成 **n** 维欧几里得空间的一个 n_j 维

子空间 U_j $(j=1,2,\cdots,k)$, 且 **n** 维欧几里得空间 U

$$U=U_1\dot{+}U_2\dot{+}\cdots\dot{+}U_k$$

对于n维欧几里得空间的每一个向量$\boldsymbol{u}$，存在唯一的向量 $\boldsymbol{u}_j \in U_j \ (j=1,2,\cdots,k)$ 使得

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{u}_k \qquad (5.49)$$

$k=n$ $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互不相同，对应的特征向量分别为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$， $\forall \boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{u}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n$

$k=1$ $\boldsymbol{A}$ 有一个n重特征值 λ

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \qquad (5.48)$$

的解全体就构成n维欧几里得空间， $\forall \boldsymbol{u}$ 不必分解。

设 $\varphi(t)$ 是(5.33)的满足 $\varphi(t_0)=\eta$ 的解，η 是 n 维向量

则存在唯一的 $v_j \in U_j \ (j=1,2,\cdots,k)$ 使得

$$\eta = v_1 + v_2 + \cdots + v_k \qquad (5.50)$$

且 $v_j \ (j=1,2,\cdots,k)$ 满足

$$(A - \lambda_j E)^{n_j} v_j = 0 \qquad (5.48)$$

由此可推得

$$(A-\lambda_j E)^l v_j = 0 \quad l \ge n_j, \quad j=1,2,\cdots,k \qquad (5.51)$$

$$\varphi(t) = (\exp At)\eta = (\exp At)(v_1 + v_2 + \cdots + v_k)$$

$$e^{\lambda_j t}\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E} t)$$

$$= e^{\lambda_j t}\begin{bmatrix} e^{-\lambda_j t} & & & \\ & e^{-\lambda_j t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-\lambda_j t} \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}$$

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j = (\exp \boldsymbol{A}t)[e^{\lambda_j t}\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E}t)]\cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$= e^{\lambda_j t}\exp[(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})t]\cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$= e^{\lambda_j t} \exp[(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})t] \cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$= e^{\lambda_j t}[\boldsymbol{E} + t(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E}) + \frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^2 + \cdots$$

$$+ \frac{t^{n_j - 1}}{(n_j - 1)!}(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^{n_j - 1}] \cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j = e^{\lambda_j t}[\sum_{i=0}^{n_j - 1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^i] \cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j = e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^i\right]\cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta} = (\exp \boldsymbol{A}t)(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^i\right]\cdot \boldsymbol{v}_j$$

(5.33)的满足 $\varphi(t_0)=\eta$ **的解：**

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^i\right]\cdot \boldsymbol{v}_j$$

(5.52)

$\boldsymbol{v}_j \ (j=1,2,\cdots,k)$ **满足**

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{0} \qquad \text{(5.48)}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_i$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = [\boldsymbol{\varphi}_1(t), \boldsymbol{\varphi}_2(t), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_n(t)]$$

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{E}$$

$$= [(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_1, (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_2, \cdots, (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_n]$$

当 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征根时，无需将特征向量分解为(5.50)。这时对于任何 $\boldsymbol{u}$ 都有

$$(A-\lambda E)^n u = 0$$

$$\exp \boldsymbol{A} t = e^{\lambda t} \exp(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})t$$

$$= e^{\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^i\right] \qquad \textbf{(5.53)}$$

例4 试求解 $\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ \varphi(0) = \eta \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$

解 **1** 求 A 的特征值

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3$$

2 代入公式，求初值问题的解

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^i\right] \cdot \eta$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^i\right] \cdot \boldsymbol{u}$$

$$= e^{3t}[\boldsymbol{E} + t(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E})] \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)\right] \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

3 求 A 的标准基解矩阵 $\varphi(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$

$$\varphi_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} 1-t \\ -t \end{bmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} t \\ 1+t \end{bmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$$

例5

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

试求满足初始条件 $\varphi(0) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \eta$ **的解** $\varphi(t)$

并求expAt。

解 1 求 A 的特征值

$$\det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 2$$

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \qquad \text{和} \qquad (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

2 确定 η 的分解

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$$

或

$$\begin{cases}2u_1-u_2+u_3=0\\ 2u_1-u_2+u_3=0\\ u_1-u_2+u_3=0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$$

其中α为任意常数。子空间 U_1 是由向量$\boldsymbol{u}_1$ 所生成的。

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-u_1+u_2=0\\ -u_1+u_2=0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}\beta\\ \beta\\ \chi\end{bmatrix}$$

其中 β,χ 是任意常数。子空间 U_2 是由向量

$\boldsymbol{u}_2$ 所张成的。

$$\mathbf{v}_1 \in U_1 \quad \mathbf{v}_2 \in U_2 \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \chi \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \chi \end{bmatrix} \qquad \beta = \eta_1 \quad \alpha + \beta = \eta_2, \quad \alpha + \chi = \eta_3$$

解之得到

$$\alpha = \eta_2 - \eta_1, \quad \beta = \eta_1, \quad \chi = \eta_3 - \eta_2 + \eta_1$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

3 求满足初始条件 $\varphi(0)=\eta$ 的解为

根据公式(5.52)，

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^i\right]\cdot \boldsymbol{v}_j$$

$$\varphi(t)=e^t\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}_1+e^{2t}(\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}))\boldsymbol{v}_2$$

$$=e^t\begin{bmatrix}0\\ \eta_2-\eta_1\\ \eta_2-\eta_1\end{bmatrix}+e^{2t}\left(\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_1\\ \eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1+t & -t & t \\ 2t & 1-2t & t \\ t & -t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

4 求出 exp *A*t

依次令 η $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

得到三个线性无关的解。以这三个解作为列，得

$$\exp \boldsymbol{A}t = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^{t}+(1+t)e^{2t} & e^{t}-te^{2t} & te^{2t} \\ -e^{t}+e^{2t} & e^{t}-e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

5 求通解 $x(t)=(\exp At)c$

作业 P.236, 第4(c)，5(b)题。

求解常系数线性齐次方程组实基解矩阵的方法之三

利用若当标准型计算基解矩阵Axp(At)

根据线性代数知识,对每一个n阶矩阵A,存在n阶非奇异矩阵P,使得

$$A = PJP^{-1}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix}$$

为若当标准型. 假设若当块

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & \mathbf{1} & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & \mathbf{1} \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}$$

是 n_i 阶的 $i=\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots,m;\ n_{\mathbf{1}}+n_{\mathbf{2}}+\cdots+n_m=n$

则 J_i 有如下分解式

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & \ddots & \mathbf{1} \\ & & & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

第一个矩阵具有 $\lambda_i E$ 形式,第二个矩阵是幂铃矩阵,由于矩阵$\lambda_i E$ 和任何矩阵可以交换,因此有

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t} E \left\{ E + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\frac{x^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$
\left. + \frac{t^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \right\}
$$

由此得到它的初等函数有限和的形式,即

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \cdots & \cdots & \dfrac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \cdots & \dfrac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \dfrac{t^2}{2!} \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

根据分块对角矩阵的运算可得到

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_m} \end{pmatrix}$$

因此基解矩阵为 $e^{At} = e^{PJtP^{-1}} = Pe^{Jt}P^{-1}$

$$e^{At} = p\begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_m} \end{pmatrix}p^{-1}$$

求解常系数线性齐次方程组实基解矩阵的方法之四

利用递推法计算基解矩阵

结论
$$\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j$$

其中
$$\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{E}\,,\ \boldsymbol{P}_j = \prod_{k=1}^{j}(\boldsymbol{A}-\lambda_k \boldsymbol{E}),\ j = 1,2,\cdots,n$$

$r_1(t), r_2(t), \cdots, r_n(t)$ 是下列初值问题的解

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1 \\ r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j \qquad (j = 2,3,\cdots,n) \\ r_1(0) = 1, r_j(0) = 0 \end{cases}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j = (P_0, P_1, \cdots, P_{n-1})\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\left\{(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1})\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}\right\}' = (\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1})\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}'$$

$$= (\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1})\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1})\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{P}_1, \lambda_2 \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2, \cdots, \lambda_n \boldsymbol{P}_{n-1})$$

$$= (\lambda_1 \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{P}_1, \lambda_2 \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2, \cdots, \lambda_n \boldsymbol{P}_{n-1} + \boldsymbol{P}_n)$$

$$= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{n-1}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1})$$

$$\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{E}, \ \boldsymbol{P}_j = \prod_{k=1}^{j}(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{E}), \ j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\lambda_j \boldsymbol{P}_{j-1} + \boldsymbol{P}_j = (\lambda_j \boldsymbol{E} + A - \lambda_j \boldsymbol{E})\boldsymbol{P}_{j-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{j-1}$$

$$\left\{(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_{n-1})\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}\right\}' = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_{n-1})\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j = (P_0,P_1,\cdots,P_{n-1})\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\exp(\mathbf{A}0) = (P_0, P_1, \cdots, P_{n-1})\begin{pmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \\ \cdots \\ r_n(0) \end{pmatrix}$$

$$= (P_0, P_1, \cdots, P_{n-1})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j \qquad \text{为标准基本解矩阵}$$

例6 求 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准基本解矩阵$\exp At$。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

解 1 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

$$\det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 2$$

2 解方程组

$$\begin{cases} r_1' = r_1 \\ r_2' = r_1 + 2r_2 \\ r_3' = r_2 + 2r_3 \\ r_1(0) = 1, r_2(0) = 0\ , r_3(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1(t) = e^t \\ r_2(t) = -e^t + e^{2t} \\ r_3(t) = e^t + (t-1)e^{2t} \end{cases}$$

3 确定 $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$

$$\exp \boldsymbol{A}t = r_1(t)\boldsymbol{P}_0 + r_2(t)\boldsymbol{P}_1 + r_3(t)\boldsymbol{P}_2$$

$$\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{E}\ , \qquad \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = (\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = r_1(t)\boldsymbol{P}_0 + r_2(t)\boldsymbol{P}_1 + r_3(t)\boldsymbol{P}_2$$

$$= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + (1+t)e^{2t} & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

例7 求 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准基本解矩阵$\exp At$。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解 1 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

$$\det(\lambda E - A) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = -1$$

2 解方程组

$$\begin{cases} r_1' = 2r_1 \\ r_2' = r_1 - r_2 \\ r_3' = r_2 - r_3 \\ r_1(0) = 1, r_2(0) = 0, r_3(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1(t) = e^{2t} \\ r_2(t) = \frac{1}{3}(-e^{-t} + e^{2t}) \\ r_3(t) = \frac{1}{3}[(1+t)e^{-t} + e^{2t}] \end{cases}$$

3 确定 $\boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$

$$\exp \boldsymbol{A}t = r_1(t)\boldsymbol{P}_0 + r_2(t)\boldsymbol{P}_1 + r_3(t)\boldsymbol{P}_2$$

$$\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{E}\ ,\quad \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + 1\boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t \ = r_1(t)\boldsymbol{P}_0 + r_2(t)\boldsymbol{P}_1 + r_3(t)\boldsymbol{P}_2$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{2t} + 2e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} + 2e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

关于常系数非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \qquad (5.60)$$

$\boldsymbol{A}$常矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$ 为连续的向量函数。

常数变易法公式　设(5.60)有解如 $(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t)$

$$\boldsymbol{A}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t) + (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}'(t)$$

$$= \boldsymbol{A}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{f}(t) \quad \boldsymbol{c}'(t) = [\exp(-\boldsymbol{A}t)]\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{c}(t) = \int_{t_0}^{t} [\exp(-\boldsymbol{A}s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)\int_{t_0}^{t}[\exp(-\boldsymbol{A}s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

$$= \int_{t_0}^{t}[\exp \boldsymbol{A}(t-s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

方程(5.60)的满足 $\varphi(t_0)=\eta$ **的解：**

$$\varphi(t)=\exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)]\cdot\eta+\int_{t_0}^{t}[\exp\boldsymbol{A}(t-s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

例8 试求方程 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$ 满足初始条件

$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解。 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$

解 齐次方程的基解矩阵

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = \exp(\boldsymbol{A}t) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t [\exp \boldsymbol{A}(t-s)] \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$$\varphi(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$\int_0^t e^{3(t-s)}\begin{bmatrix} \cos 5(t-s) & \sin 5(t-s) \\ -\sin 5(t-s) & \cos 5(t-s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$$\varphi(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{bmatrix} + \int_0^t e^{3(t-s)}\begin{bmatrix} e^{-s}\cos 5(t-s) \\ -e^{-s}\sin 5(t-s) \end{bmatrix} ds$$

$$\varphi(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{bmatrix} +$$

$$e^{3t}\int_0^t e^{4s}\begin{bmatrix} \cos 5t\cos 5s + \sin 5t\sin 5s \\ -\sin 5t\cos 5s + \cos 5t\sin 5s \end{bmatrix} ds$$

$$= \frac{1}{41}e^{3t}\begin{bmatrix} 4\cos 5t + 46\sin 5t - 4e^{-4t} \\ 46\cos 5t - 4\sin 5t - 5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

作业　P.236，第6(a)题。