§4.3 高阶方程的降阶法

和幂级数解法

Step-down Order Method and Series Method

§4.2 内容回顾

方程类型

1 $$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0$$

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

2 $$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f(t)$$

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\tilde{x}(t)$$

求解方法

$$L[x]=f(t) \longrightarrow L[x]=0$$

相加

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

特解 $\longleftarrow$ 基本解组或通解

常数变易法

比较系数法　　拉普拉斯变换法

本节内容/Contents/

1．几类可降阶高阶方程

2．幂级数解法（求特解）

4.3.1 可降阶的方程的类型

n 阶方程的一般形式 $F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0$

1) 方程不显含未知函数 x 及 $x',x'',\cdots,x^{(k-1)}$

$$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0 \quad 1\le k\le n$$

则方程可降为 $n-k$ 阶的方程，即可降 k 阶

方法 令 $x^{(k)}=y$ 则

$$F(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)})=0 \qquad (4.58)$$

若可求得 (4.58) 的通解

$$y=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$$

$$x^{(k)}=y=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$$

逐次积分 k 次，可得原方程的通解。

特别，对于二阶方程 $F(t,x',x'')=0$

$$x' = y, \quad x'' = y'$$

$$F(t,y,y')=0$$

$$y=\varphi(t,c_1) \qquad x' = \varphi(t,c_1)$$

积分，可得原方程的通解

$$x=\Phi(t,c_1,c_2)$$

例1 求方程 $\frac{d^5x}{dt^5}-\frac{1}{t}\frac{d^4x}{dt^4}=0$ 的通解。

解 令 $\frac{d^4x}{dt^4}=y$ $\qquad y'-\frac{1}{t}y=0$

$$y=c_1e^{\int\frac{1}{t}dt}=c_1t \qquad x^{(4)}=c_1t \qquad x^{(3)}=\frac{c_1}{2}t^2+c_2$$

$$x^{(2)}=\frac{c_1}{6}t^3+c_2t+c_3 \quad x'=\frac{c_1}{24}t^4+\frac{c_2}{2}t^2+c_3t+c_4$$

$$x=c_1't^5+c_2't^3+c_3't^2+c_4't+c_5'$$

2)不显含自变量 t 的方程

$$F(x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0 \qquad (4.59)$$ 可降低一阶

方法　令　$x' = y$

$$x'' = \frac{d}{dt}(x') = \frac{d}{dt}y = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$x''' = \frac{d}{dt}(y\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(y\cdot\frac{dy}{dx})\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= y((\frac{dy}{dx})^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}) = y(\frac{dy}{dx})^2 + y^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

假定 $x^{(n-1)} = f(y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}})$

$$x^{(n)} = \frac{d}{dt} f(y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}) = \frac{d}{dx} f \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= y \frac{d}{dx}(f(y, y'_x, \cdots, y_x^{(n-2)}))$$

$$= f_1(y, y'_x, \cdots, y_x^{(n-1)})$$

将 $x', x'', \cdots, x^{(n)}$ 代入原方程 (4.59)

$$G(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}) = 0$$ 降低一阶

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})$$

$$y = \frac{dx}{dt} = x' = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})$$

分离变量，可得原方程的解。

例2 求解方程 $xx'' + (x')^2 = 0$

解 令 $x' = y$ $\qquad x'' = y \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$$x \cdot y \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$y = 0$ 或 $x\dfrac{dy}{dx} = -y \qquad \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c_1' \qquad y = \frac{c_1}{x}$$

$$x' = \frac{c_1}{x} \qquad xdx = c_1 dt$$

$$\frac{1}{2}x^2 = c_1 t + c_2 \qquad x^2 = 2c_1 t + 2c_2$$

$$y = 0 \qquad x' = 0 \qquad x = c$$

$$x^2 = 2c_1 t + 2c_2$$

3) 齐次线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

结论

已知 (4.2)的 k 个线性无关的特解，则(4.2)可降低 k 阶，即可得到 n-k 阶的齐次线性方程。特别地，如果已知(4.2)的 n-1 个线性无关的解，则(4.2)的基本解组可以求得。

方法　设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是(4.2)的 k 个线性无关的解

$$x_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, k \qquad 令$$

$$a_n \quad x = x_k y$$

$$a_{n-1} \quad x' = x_k y' + x_k' y$$

$$a_{n-2} \quad x'' = x_k y'' + 2x_k' y' + x_k'' y$$

$$\cdots$$

$$a_1 \quad x^{(n-1)} = x_k y^{(n-1)} + \cdots + x_k^{(n-1)} y$$

$$x^{(n)} = x_k y^{(n)} + n x_k' y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} x_k'' y^{(n-2)} + \cdots + x_k^{(n)} y$$

$$x_k y^{(n)} + (n x_k' + a_1(t) x_k) y^{(n-1)} + \cdots$$

$$+ [x_k^{(n)} + a_1(t) x_k^{(n-1)} + a_2(t) x_k^{(n-2)} + \cdots + a_n(t) x_k] y = 0$$

令 $y' = z$

$$z^{(n-1)} + b_1(t) z^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}(t) z = 0 \qquad (4.67)$$

***n*-1阶线性方程**

$$z = y' = \left(\frac{x}{x_k}\right)' \qquad 或 \qquad x = x_k \int z dt$$

可将 (4.2) 化为 $n-1$ 阶线性方程

$$z^{(n-1)} + b_1(t) z^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}(t) z = 0 \quad (4.67)$$

同理，对于(4.67)就知道了$k-1$个非零解

$$z_i = \left(\frac{x_i}{x_k}\right)' \quad i = 1, 2, \cdots, k-1$$ 且其线性无关，

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_{k-1} z_{k-1} \equiv 0$$

$$\alpha_1 \left(\frac{x_1}{x_k}\right)' + \alpha_2 \left(\frac{x_2}{x_k}\right)' + \cdots + \alpha_{k-1} \left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)' \equiv 0$$

$$\left[\frac{1}{x_k}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1})\right]' \equiv 0$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1} \equiv -\alpha_k x_k$$

$x_i, i = 1, 2, \cdots, k$ 线性无关，$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$

类似地,令 $u=\left(\dfrac{z}{z_{k-1}}\right)'$ 或 $z=z_{k-1}\int u\,dt$

$$u^{(n-2)}+c_1(t)u^{(n-3)}+\cdots+c_{n-2}(t)u=0$$

$u_i=\left(\dfrac{z_i}{z_{k-1}}\right)'\quad i=1,2,\cdots,k-2$ 线性无关的解,

继续下去，得到一个 ***n*-*k*** 阶的线性齐次方程

若 ***k*= *n*-1**，则可得到 1 阶线性齐次方程，则可求得通解。

特别，对于二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0$$

若知其一非零解 $x=x_1\neq 0$ ，则可求得通解。

令 $y=(\frac{x}{x_1})'$ $\qquad x=x_1\int ydt$

$$x'=x_1'\int ydt+x_1y$$

$$x''=x_1''\int ydt+x_1'y+x_1'y+x_1y'$$

$$=x_1''\int ydt+2x_1'y+x_1y'$$

$$x_1''\int y dt + 2x_1' y + x_1 y' + p(t)x_1'\int y dt + p(t)x_1 y + q(t)x_1\int y dt = 0$$

$$x_1 y' + [2x_1' + p(t)x_1]y = 0$$

$$y' = -\frac{2x_1' + p(t)x_1}{x_1}y$$

$$y = c_1 e^{-\int \frac{2x_1' + p(t)x_1}{x_1}dt} = c_1 e^{-[2\int \frac{1}{x_1}dx_1 + \int p(t)dt]}$$

$$= c_1 e^{-\ln x_1^2} \cdot e^{-\int p(t)dt} = \frac{c_1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt}$$

$$y = \frac{c_1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt} \qquad x = x_1 \int y dt$$

基解组为 x_1, $\quad x_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt} dt$

通解 $$x(t) = x_1 [c_1 + c_2 \int \frac{1}{x_1^2} e^{\int p(t)dt} dt]$$

P.113

例4 已知 $x=\dfrac{\sin t}{t}$ 是方程 $x''+\dfrac{2}{t}x'+x=0$ 的解，试求方程的通解。

解 $$p(t)=\frac{2}{t}$$

$$x=\frac{\sin t}{t}\left(c_1+c_2\int\frac{t^2}{\sin^2 t}\cdot e^{-2\int\frac{1}{t}dt}dt\right)$$

$$=\frac{\sin t}{t}\left(c_1+c_2\int\frac{1}{\sin^2 t}dt\right)$$

$$=\frac{\sin t}{t}(c_1-c_2 ctgt)=\frac{1}{t}(c_1\sin t-c_2\cos t)$$

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)

例5 求方程 $\frac{dy}{dx}=y-x$ 的满足初始条件 $y(0)=0$ 的解。

解 设 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 为方程的解

$$y(0)=0 \qquad a_0=0$$

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$$

$$=(a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)-x$$

$$=(a_1-1)x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots$$

$$= (a_1 - 1)x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$a_1 = 0, \quad 2a_2 = -1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$(n+1)a_{n+1} = a_n \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n = \frac{1}{(n+1)n} a_{n-1} = \frac{1}{(n+1)n\cdots 3} a_2 = -\frac{1}{(n+1)!}$$

$$a_n = -\frac{1}{n!} \qquad n = 2, 3, \cdots$$

$$a_n = -\frac{1}{n!} \qquad n = 2, 3, \cdots$$

$$y = -\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)$$

$$= -\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) + 1 + x$$

$$= 1 + x - e^x$$

$$y = e^{\int dx}\left(-\int e^{-\int dx} \cdot x dx + c\right) = e^x\left(-\int e^{-x} x dx + c\right)$$

$$= e^x\left(e^{-x} x - e^{-x} + c\right) = x + 1 + ce^x$$

$$1 + c = 0, c = -1 \qquad y = -e^x + x + 1$$

例8 求方程 $y''-2xy'-4y=0$ 的满足初始条件

$y(0)=0 \quad y'(0)=1$ 的解。

解 设级数解为

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

由于 $y(0)=0 \quad y'(0)=1$ 所以 $a_0=0,\ a_1=1$

$$y=x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$y'=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x(1+\sum_{n=2}^{\infty} na_n x^{n-1}) - 4(x+\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n) = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x - \sum_{n=2}^{\infty} (2na_n + 4a_n)x^n = 0$$

0次项系数 $2!a_2 = 0$ $a_2 = 0$

1次项系数 $3!a_3 - 6 = 0$ $a_3 = 1$

≥ 2 次项系数 $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+4)a_n = 0$

$$a_{n+2}=\frac{(2n+4)}{(n+2)(n+1)}a_n=\frac{2}{(n+1)}a_n$$

n **为偶数时，即 *n* = 2 *k* ，由上述递推公式得**

$$a_{2k}=a_2=0$$

n **为奇数时，即 *n* = 2 *k*+1**

$$a_{2k+3}=\frac{2}{2(k+1)}a_{2k+1}=\frac{1}{k+1}a_{2k+1}$$

$$a_{2(k+1)+1}=\frac{1}{(k+1)}a_{2(k+1)-1} \qquad a_{2k+1}=\frac{1}{k}a_{2k-1}$$

$$a_{2k+1}=\frac{1}{k}a_{2k-1}=\frac{1}{k(k-1)}a_{2k-3}=\cdots=\frac{1}{k!}a_3=\frac{1}{k!}$$

$$a_{2k}=0 \qquad a_{2k+1}=\frac{1}{k!}$$

$$y=x+(\frac{1}{1!}x^3+\frac{1}{2!}x^5+\frac{1}{3!}x^7+\cdots+\frac{1}{k!}x^{2k+1}+\cdots)$$

$$=x(1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\cdots+\frac{1}{k!}x^{2k}+\cdots)$$

$$=xe^{x^2}$$

例7 求初值问题 $x^2\dfrac{dy}{dx}=y-x \qquad y(0)=0$

解 设 $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n \qquad y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-x$$

1次项系数 $a_1=1$ $\qquad \geq 2$ 次项系数 $na_n=a_{n+1}$

$$a_n=(n-1)a_{n-1}=(n-1)!a_1=(n-1)!$$

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!x^n=x+x^2+2!x^3+\cdots+n!x^{n+1}+\cdots$$

对任给 $x\neq 0$ 级数发散，因此不存在幂级数形式之解。

存在性：P157—158　　　　定理10，定理11

练习:

1） 求解方程 $x'' + \sqrt{1-(x')^2} = 0$

2） 用幂级数方法，求方程满足条件的特解

$$x'' + tx = 0 \quad x(0) = 1, x'(0) = 0$$

3） 若方程 $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$

有一特解为 $x \equiv t$ ，则方程系数满足什么

关系，其中 $p(t), q(t)$ 连续。

若方程有形式为 $x = e^{mt}$ 的解，则 m 满足什么关系.

思考:

1） 求解方程 $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$

2） 若两方程 $x'' + p_i(t)x' + q_i(t)x = 0 \quad i = 1,2$

有一个公共解，试求出此解，并分别求出这两个方程的通解。

作业 P.165 第2，6题；P.166 第7题。