§ 2.3 恰当方程与积分因子

/Exact ODE and Integrating Factor/

内容提要/Contents Abstract/

- 恰当方程 $\begin{cases}\text{概念}\\ \text{解法}\\ \text{举例}\end{cases}$
- 非恰当方程 $\begin{cases}\text{概念}\\ \text{解法}\\ \text{举例}\end{cases}$

积分因子

本节要求/Requirements/

- 熟练掌握恰当方程的求解方法
- 会用积分因子方法求解非恰当方程

一、恰当方程/Exact ODE/

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad f(x,y)dx = dy \qquad f(x,y)dx - dy = 0$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2.3.1)$$

特点：x，y 处于同等的地位，若视 x 为自变量，则 y 就是 x 的函数；若视 y 为自变量，则 x 就是 y 的函数。

方程(2.3.1)称为对称形式的方程。

如果存在某一二元函数 $u(x, y)$ 使得

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy \qquad (2.3.2)$$

则方程（2.3.1）称为恰当方程（或全微分方程）。

称 **$u(x,y)$**为$M(x, y)dx + N(x, y)dy$ 的一个原函数。

如果 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 为恰当方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du$$

方程可写成 $du(x,y)=0$

则方程的通解为 **u(x,y)=C** 其中 C 是任意常数。

如 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ $xdx+ydy=0$

$$xdx+ydy=d\frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad u(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

方程的通解为 $x^2+y^2=C$

例 $$\left(x^3+y\right)dx+\left(x-y\right)dy=0$$

解 方程各项经过重新组合后，可以看出它是恰当方程，

$$x^3dx-ydy+\left(ydx+xdy\right)=0$$

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right)-d\left(\frac{y^2}{2}\right)+d\left(xy\right)=0$$

$$d\left(\frac{x^4}{4}-\frac{y^2}{2}+xy\right)=0$$

通解为 $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{y^2}{2}+xy=C$

求解恰当方程的关键就是求原函数的问题。

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2.3.1)$$

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (2.3.2)$$

问题

- 如何判断方程（2.3.1）是否为恰当方程?
- 如果方程（2.3.1）是恰当方程，如何求满足条件（2.3.2）的函数 $u(x,y)$，即方程（2.3.1）左端微分式的原函数?

定理 假设函数 $M(x,y)$和$N(x,y)$ 在某区域内连续可微，

则方程（2.3.1）是恰当方程的充分必要条件是：

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

此时，方程（2.3.1）的通解为:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C \qquad (2.3.3)$$

或 $$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C \qquad (2.3.4)$$

其中C是任意常数。

证明　必要条件　$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

即证（2.3.1）为恰当方程时，有 $\dfrac{\partial M}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial N}{\partial x}$ 成立。

若（2.3.1）是恰当方程，则存在某一二元函数 $u(x,y)$，使

$$du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

由条件知　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$　故　$\dfrac{\partial M}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial N}{\partial x}$

充分条件

即证若 $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$ 时，（2.3.1）是恰当方程，即

要找到一个二元函数 $u(x, y)$，使

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

$u(x, y)$ 满足以下方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \\ \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}$

以下推证满足上方程组的 $u(x, y)$ 一定存在。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

从 x_0 到 x 对方程组的第一式进行积分

$$u(x,y) - u(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi'(y)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y)$$

$$= N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y)$$

即 $N(x,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y)$

$$\varphi'(y) = N(x_0,y)$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$$

这就是所求方程（2.3.1）左端微分式的一个原函数。

故（2.3.1）的通解为:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy=C$$

如从方程组的第二式出发，推证，还可得:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy=C$$ 证毕

注意：求解时，x_0, y_0 的选择要尽可能简单， 且使 M, N 有意义。

例1 $$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$$

解 $$M(x,y)=3x^2+6xy^2,\qquad N(x,y)=6x^2y+4y^3$$

有 $$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=12xy$$

故此方程为恰当方程，由（2.3.3）式，得出通解为

$$\int_0^x\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\int_0^y\left(0+4y^3\right)dy=C\quad \left(\text{取}x_0=0,y_0=0\right)$$

即 $$x^3+3x^2y^2+y^4=C$$

另解 原方程可改写为:

$$3x^2dx + 4y^3dy + \left(6xy^2dx + 6x^2ydy\right) = 0$$

$$3x^2dx + 4y^3dy + 3\left(y^2dx^2 + x^2dy^2\right) = 0$$

$$d\left(x^3\right) + d\left(y^4\right) + d\left(3x^2y^2\right) = 0$$

$$d\left(x^3 + y^4 + 3x^2y^2\right) = 0$$

故

$$x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = C$$

例2 $$\frac{2xy+1}{y}dx+\frac{y-x}{y^2}dy=0$$

解 $$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial N}{\partial x}$$ 故为恰当（全微分）方程。

根据（2.3.4）式，（选取 $x_0=0, y_0=1)$

$$\int_0^x \frac{2xy+1}{y}dx+\int_1^y \frac{y-0}{y^2}dy=C$$

通解为 $x^2+\frac{x}{y}+\ln y=C$

练习 1

$$(1)\quad xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

$$(2)\quad \left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 3y^2\right)dy = 0$$

(1) $xdx + ydy + \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$

解 方程可写为

$$d\frac{1}{2}x^2 + d\frac{1}{2}y^2 + \frac{d\left(\dfrac{y}{x}\right)}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = 0$$

显见，此为恰当方程，积分之，得通解

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + arc\tan\frac{y}{x} = C$$

(2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

解 $M(x,y)=y^2e^{xy^2}+4x^3, N(x,y)=2xye^{xy^2}-3y^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2ye^{xy^2}+2xy^3e^{xy^2}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

故为恰当方程，根据（2.3.4）式得通解为

$$\int_0^x\left(0+4x^3\right)dx+\int_0^y\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=C$$

即 $x^4+e^{xy^2}-y^3=C$

二、 积分因子/Integrating Factor/

$$
\begin{tikzcd}
ydx - xdy = 0 \arrow[r, "\mu(x,y)=\frac{1}{y^2}"] & \dfrac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \arrow[d] \\
& x = cy \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

问题:

如何将非恰当方程化为恰当方程?

1 积分因子的意义

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (2.3.5)$$

如果存在非零连续可微函数 $\mu(x,y)$ ，使得

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \qquad (2.3.6)$$

为恰当方程，则称$\mu(x,y)$是方程（2.3.5）的一个积分因子。

此时， $dv(x,y)=\mu Mdx+\mu Ndy$

则 $v(x,y)=c$ 是方程（2.3.5）的通解。

思考： $Mdx+Ndy=0$ 与 $\mu Mdx+\mu Ndy=0$ 同解？

求解非恰当方程的关键是求积分因子！

例如

（i）可分离变量方程：$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0$

不一定是恰当方程，但是方程两端乘以$\mu=\dfrac{1}{N_1(x)M_2(y)}$

得到 $$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0$$ 恰当方程。

所以，$\mu=\dfrac{1}{N_1(x)M_2(y)}$ 是可分离变量方程的积分因子。

（ii）方程$ydx-xdy=0$ 有如下积分因子：

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{y^2},\quad \frac{1}{xy},\quad \frac{1}{x^2+y^2},\quad \frac{1}{x^2-y^2}$$ 等等。

$$ydx - xdy = 0$$

这是因为:

$$d\left(-\frac{y}{x}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2} \qquad d\left(arctg\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \qquad d\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2}$$

$$d\left(\ln\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$$

结论　一个非恰当方程的积分因子有无穷多个!

问题　这些积分因子有何关系?　　P.50, 23

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (2.3.5)$$

设 $\mu(x,y)$是方程（2.3.5）的积分因子，从而求得可微函数

$U(x,y)$ ，使得 $dU=\mu(Mdx+Ndy)$ 。试证 $\tilde{\mu}(x,y)$

是方程（2.3.5）的积分因子的充分必要条件是

$\tilde{\mu}(x,y)=\mu\varphi(U)$ 其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数。

$\Rightarrow$ $\tilde{\mu}(x,y)$ 是任意一个积分因子, $\dfrac{\tilde{\mu}(x,y)}{\mu(x,y)}dU=dV(x,y)$

$$\tilde{\mu}(x,y)(Mdx+Ndy)=dV(x,y)$$

$$\int\frac{\tilde{\mu}(x,y)}{\mu(x,y)}dU=V(x,y)$$

$$\frac{\tilde{\mu}(x,y)}{\mu(x,y)}\mu(Mdx+Ndy)=dV(x,y)$$

$$\frac{\tilde{\mu}(x,y)}{\mu(x,y)}=\tilde{\varphi}(U)$$

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (2.3.5)$$

设 $\mu(x,y)$ 是方程（2.3.5）的积分因子，从而求得可微函数 $U(x,y)$ ，使得 $dU=\mu(Mdx+Ndy)$ 。试证 $\tilde{\mu}(x,y)$

是方程（2.3.5）的积分因子的充分必要条件是

$\tilde{\mu}(x,y)=\mu\varphi(U)$ 其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数。

$$\Leftarrow \quad \mu\varphi(U)(Mdx+Ndy)=0$$

$$\varphi(U)dU=0$$

$$d\int\varphi(U)dU=0$$

$\tilde{\mu}(x,y)$ 是积分因子。

2 寻求积分因子的方法

（1）**观察法**:利用已知的或熟悉的微分式的原函数求积分因子。

例1 解方程 $xdx + ydy + 4y^3(x^2 + y^2)dy = 0$

解 $\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) + 4y^3(x^2 + y^2)dy = 0$ $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + y^2}d(x^2 + y^2) + 4y^3dy = 0$$

$$d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right] + d[y^4] = 0$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + y^4 = C$$

例2　解方程 $\left(2x^3-y^3-3x\right)dx+3xy^2dy=0$

解　将方程改写为 $\left(2x^3-3x\right)dx-\left(y^3dx-3xy^2dy\right)=0$

$$\left(2x^3-3x\right)dx-\left(y^3dx-xdy^3\right)=0$$

由此看出 $\mu=\dfrac{1}{x^2}$ 是积分因子，于是方程化为：

$$\left(2x-\frac{3}{x}\right)dx+\frac{xdy^3-y^3dx}{x^2}=0$$

故方程的通解为 $x^2-3\ln|x|+\dfrac{y^3}{x}=C$

练习 **求积分因子**

1. $xdy - ydx - (1 - x^2)dx = 0$ $\qquad \dfrac{1}{x^2}$

2. $x^2 \dfrac{dy}{dx} + xy + \sqrt{1 - x^2 y^2} = 0$ $\qquad \dfrac{1}{x\sqrt{1-(xy)^2}}$

3. $(x - y^2)dx + 2xydy = 0$ $\qquad \dfrac{1}{x^2}$

1. $xdy - ydx - (1 - x^2)dx = 0$

解 由观察法得 $\frac{1}{x^2}$ 为积分因子，故方程化为:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} - \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx = 0$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + d\left(\frac{1}{x} + x\right) = 0$$

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{x} + x = C$$

2. $x^2\dfrac{dy}{dx}+xy+\sqrt{1-x^2y^2}=0$

解 将方程改写为 $x(xdy+ydx)+\sqrt{1-x^2y^2}\,dx=0$

$$xd(xy)+\sqrt{1-x^2y^2}\,dx=0$$

由观察得 $\mu=\dfrac{1}{x\sqrt{1-(xy)^2}}$ 为积分因子

于是方程化为: $\dfrac{d(xy)}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\dfrac{dx}{x}=0$

$$d\arcsin(xy)+d\ln|x|=0$$

故通解为 $\arcsin(xy)+\ln|x|=C$

3. $\left(x-y^2\right)dx+2xydy=0$

解 $$xdx-(y^2dx-xdy^2)=0$$

显然 $u=\dfrac{1}{x^2}$ 是积分因子，于是方程化为:

$$\frac{1}{x}dx+\frac{xdy^2-y^2dx}{x^2}=0$$

故通解为 $\ln|x|+\dfrac{y^2}{x}=C$

（2）公式法　利用积分因子满足的微分方程来求积分因子。

若 $\mu(x,y)$ 是方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的积分因子

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$ 恰当方程

则有 $$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

即 $$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0 \qquad (2.58)$$

反过来，满足(2.58)的函数 $\mu(x,y)$ 一定是方程的积分因子。

若 $\mu(x,y)$ 是方程的积分因子的充要条件 $\mu(x,y)$ 满足

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0 \qquad (2.58)$$

结论1：若 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (2.3.5)$

有只与 x 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x)$$ 此时， $$\mu(x,y)=e^{\int\varphi(x)dx}$$

这是因为 $$M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0 \qquad (2.58)$$

$$N\frac{d\mu}{dx}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x)$$

$$\mu(x,y)=e^{\int\varphi(x)dx}$$

反过来，可证 $e^{\int\varphi(x)dx}$ 满足(2.58)，即有只与 x 有关积分因子。

结论2： 若 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (2.3.5)$

有只与 y 有关的积分因子的充要条件是

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\psi(y)$$ 此时， $\mu(x,y)=e^{\int \psi(y)dy}$

思考 推证方程有只与 $x\pm y,\ xy,\ x^2\pm y^2$ 有关的积分因子的充要条件。

例3 试用积分因子法求解线性方程 $\dfrac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$

解 $(P(x)y+Q(x))dx-dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=P(x),\quad \frac{\partial N}{\partial x}=0$$

是非恰当方程。

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-P(x)$$

$$\mu(x,y)=e^{-\int P(x)dx}$$

$$e^{-\int P(x)dx}(P(x)y+Q(x))dx-e^{-\int P(x)dx}dy=0$$

$$(e^{-\int P(x)dx}P(x)ydx-e^{-\int P(x)dx}dy)+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0$$

$$(yde^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}dy)-Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0$$

$$d(ye^{-\int P(x)dx})-d\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0$$

$$ye^{-\int P(x)dx}-\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=C$$

$$y=e^{\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C)$$

（3）分组组合法　　用P.50，23的结论

$$\left(M_1dx+N_1dy\right)+\left(M_2dx+N_2dy\right)=0$$

$$\mu_1(x,y)\left(M_1dx+N_1dy\right)=dU_1(x,y)$$

$$\mu_2(x,y)\left(M_2dx+N_2dy\right)=dU_2(x,y)$$

$$\mu_1\left(x,y\right)\varphi_1(U)\qquad \mu_2\left(x,y\right)\varphi_2(U)$$

寻去适当的 $\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$使得

$$\mu_1\left(x,y\right)\varphi_1(U)=\mu_2\left(x,y\right)\varphi_2(U)$$

则原方程的积分因子 $\mu_1\left(x,y\right)\varphi_1(U)=\mu_2\left(x,y\right)\varphi_2(U)$

例4 解方程 $(x-y)dx+(x+y)dy=0$

解 $\frac{\partial M}{\partial y}=-1, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=1$ 不是恰当方程

$$(xdx+ydy)+(xdy-ydx)=0$$

$$\frac{1}{2}(xdx+ydy)=d(x^2+y^2) \qquad \mu_1(x,y)=\frac{1}{2}\varphi_1(x^2+y^2)$$

$$\frac{1}{x^2+y^2}(xdy-ydx)=d\arctan\frac{y}{x} \qquad \varphi_1(t)=\frac{2}{t}$$

$$\mu_2(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}\varphi_2(\arctan\frac{y}{x}) \qquad \varphi_2(t)=1$$

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\left(xdx + ydy\right) + (xdy - ydx) = 0$$

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + d\arctan\frac{y}{x} = 0$$

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} + \arctan\frac{y}{x} = C$$

练习

(1) $\left(x^2+y\right)dx+(x-2y)dy=0$

(2) $2\left(3xy^2+2x^3\right)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0$

(3) $2x\left(ye^{x^2}-1\right)dx+e^{x^2}dy=0$

(4) $\left(y-x^2\right)dx-xdy=0$

思考 推证方程的积分因子只与 $x\pm y$，xy，$x^2\pm y^2$ 有关。

结论3：若 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (2.3.5)$

有只与 $x+y$ 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x+y)$$ 此时，$\mu(x,y)=e^{\int\varphi(x+y)dx}$

这是因为 $$M\frac{d\mu}{dt}-N\frac{d\mu}{dt}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0 \qquad (2.58)$$

$$M\frac{d\mu}{dt}-N\frac{d\mu}{dt}=-\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$ $$\mu(x,y)=e^{\int\varphi(t)dt}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}=\frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x+y)\triangleq\varphi(t) \quad (x+y\triangleq t)$$

反过来，也可推知(2.58)确有只与 $x+y$ 有关的解。

结论4：若 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (2.3.5)$

有只与 xy 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{1}{Ny-xM}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(xy)$$ 此时， $$\mu(x,y)=e^{\int\varphi(xy)dx}$$

这是因为 $$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0 \qquad (2.58)$$

$$Mx\frac{d\mu}{dt}-Ny\frac{d\mu}{dt}=-\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad \mu(x,y)=e^{\int\varphi(t)dt}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}=\frac{1}{Ny-xM}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(xy)\triangleq\varphi(t) \qquad (xy\triangleq t)$$

反过来，也可推知(2.58)确有只与 xy 有关的解。

小结/Conclusion/

- 恰当方程
  - 恰当方程的判断定理
  - 恰当方程的求解方法

- 积分因子
  - 积分因子意义
  - 寻求积分因子方法
    - 1 > 观察法
      - 直接法
      - 变量代换法
    - 2 > 公式法(由公式（2.58)确定的积分因子)
      $u(x, y) = \varphi(x)$, 或 $\varphi(y)$ 或 $\varphi(xy)$ 或 $\varphi(x^2 + y^2)$ 等
    - 3 > 分组组合法

作业： P.50: 第7，9，11，14，16，17， 19，22题

作业： P.50: 第 19题 参考解答

解 假设 $M(x,y), N(x,y)$ 是m次齐次函数，则令 $y=ux$ 有

$$M(x,y)=M(x,xu)=x^m M(1,u),\ \ N(x,y)=N(x,xu)=x^m N(1,u)$$

$dy=xdu+udx$ 代入 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 得

$$x^m\{[M(1,u)+N(1,u)u]dx+xN(1,u)du\}=0$$

要分离变量，只要乘积分因子

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x^{m+1}[M(1,u)+uN(1,u)]}=\frac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$$

另解 直接验证

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$$

是方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的积分因子。

$$\frac{M(x,y)}{xM(x,y)+yN(x,y)}dx+\frac{N(x,y)}{xM(x,y)+yN(x,y)}dy=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{M(1,\frac{y}{x})}{xM(1,\frac{y}{x})+yN(1,\frac{y}{x})}dx+\frac{N(1,\frac{y}{x})}{xM(1,\frac{y}{x})+yN(1,\frac{y}{x})}dy=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M(1,\frac{y}{x})}{xM(1,\frac{y}{x})+yN(1,\frac{y}{x})}\right)=\frac{M_2'(1,\frac{y}{x})\frac{1}{x}[xM(1,\frac{y}{x})+yN(1,\frac{y}{x})]}{[xM(1,\frac{y}{x})+yN(1,\frac{y}{x})]^2}$$

$$-\frac{M(1,\frac{y}{x})[xM_2'(1,\frac{y}{x})\frac{1}{x}+N(1,\frac{y}{x})+yN_2'(1,\frac{y}{x})\frac{1}{x}]}{[xM(1,\frac{y}{x})+yN(1,\frac{y}{x})]^2}$$

$$= \frac{\frac{y}{x}[M_2'(1,\frac{y}{x})N(1,\frac{y}{x}) - N_2'(1,\frac{y}{x})M(1,\frac{y}{x})] - M(1,\frac{y}{x})N(1,\frac{y}{x})}{[xM(1,\frac{y}{x}) + yN(1,\frac{y}{x})]^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N(1,\frac{y}{x})}{xM(1,\frac{y}{x}) + yN(1,\frac{y}{x})}\right) = \frac{-\frac{y}{x^2}N_2'(1,\frac{y}{x})[xM(1,\frac{y}{x}) + yN(1,\frac{y}{x})]}{[xM(1,\frac{y}{x}) + yN(1,\frac{y}{x})]^2}$$

$$- \frac{N(1,\frac{y}{x})[M(1,\frac{y}{x}) + xM_2'(1,\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2}) + yN_2'(1,\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})]}{[xM(1,\frac{y}{x}) + yN(1,\frac{y}{x})]^2}$$

$$= \frac{\frac{y}{x}[M_2'(1,\frac{y}{x})N(1,\frac{y}{x}) - N_2'(1,\frac{y}{x})M(1,\frac{y}{x})] - M(1,\frac{y}{x})N(1,\frac{y}{x})}{[xM(1,\frac{y}{x}) + yN(1,\frac{y}{x})]^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M(1,\frac{y}{x})}{xM(1,\frac{y}{x})+yN(1,\frac{y}{x})}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N(1,\frac{y}{x})}{xM(1,\frac{y}{x})+yN(1,\frac{y}{x})}\right)$$

因此，齐次方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$有积分因子

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}。$$

问题：1.齐次方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

是否有其它积分因子?

2.函数

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x[M(1,u)+uN(1,u)]}=\frac{x^m}{xM(x,y)+yN(x,y)}$$

是积分因子吗?