§2.1 变量分离方程与变量变换

Separable First-Order ODE & Transform

•内容提要/Main Contents/

变量分离方程与变量变换
- 变量分离方程
  - •特点
  - •解法
  - •举例
- 可化为变量分离的类型
  - 齐次方程
  - 可化为齐次方程的类型

•本节要求/Requirements/

1 熟练掌握变量分离方程，齐次方程的求解方法。

2 熟练掌握运用变量变换将方程化为熟知类型求解的思想方法，求更广泛类型方程的解。

1 变量分离方程/Variables Separated ODE/

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \tag{2.1}$$

其中 $f(x), \varphi(y)$ 分别是 x 与 y 的已知连续函数。

特点

一般的一阶方程 $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ 中的 $\boldsymbol{f(x,y)}$可表示成

$$f(x,y) = f(x)\cdot\varphi(y)$$

例 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$　　　$R' = kR$

解法步骤 /Solving Steps/

如果 $\varphi(y) \neq 0$

(1) 分离变量 $$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$$

(2) 两边积分 $$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx$$

用$G(y)$，$F(x)$分别表示 $\dfrac{1}{\varphi(y)}$ 及$f(x)$

的某一个原函数

(3) 方程（2.1）的通解为$G(y)=F(x)+C$ …………(2.2)

因为将 y 视为 x 的函数，对$G(y)=F(x)+C$ 两端关于x求导，

$$\frac{1}{\varphi(y)}\cdot\frac{dy}{dx}=f(x) \qquad \frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$$

所以，（2.2）为方程(2.1)的通解。

如果存在 y_i ，使得 $\varphi(y_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,k$

直接验证得: $y\equiv y_i$ 为方程(2.1)的常数解。

分离变量方程（2.1）的解为 $\begin{cases} G(y)=F(x)+C \\ y\equiv y_i,\quad i=1,2,\cdots,k \end{cases}$

例1 求解方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

解 $\varphi(y) = \frac{1}{y} \neq 0$

1 分离变量 $ydy = -xdx$

2 两边积分 $\int ydy = -\int xdx$ $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{c}{2}$

3 求通解 $x^2 + y^2 = c$ 或者 $y = \pm\sqrt{c - x^2}$

（c为任意正常数）

例2 求解方程 $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \cos x$

并求出满足初始条件：当 $x=0$时 $y=1$的特解。

解 $y \neq 0$ 时

(1) 分离变量 $\dfrac{dy}{y^2} = \cos x dx$

(2) 两边积分 $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx + c \quad -\frac{1}{y} = \sin x + c$

(3) $y = -\dfrac{1}{\sin x + c}$ （c为任意常数）为方程的通解。

注意 $y=0$ 时，也是方程的解，而其并不包含在通解中，因而方程还有解 $y=0$

所以，原方程的解为 $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{\sin x + c} \\ y \equiv 0 \end{cases}$

求特解

将初始条件 $y(0)=1$ 代入通解中，得 $c = -1$

则满足所给条件的特解为: $y = -\dfrac{1}{\sin x - 1}$

2 可化为变量分离方程的类型
/Classifications of Variable Separated Equation/

(1) 齐次方程/Homogeneous Equation/

(2) 可化为齐次方程的方程类型
/Classifications of Homogenous/

(1) 齐次方程/Homogeneous Equation/

- **形式**: $\dfrac{dy}{dx} = g(\dfrac{y}{x})$ **g (*u*)为 *u* 的连续函数**
- **特点**: 一般方程的右端函数 $f(x,y)$ 是x，y 的零次齐次式。

即 $$f(x,y) = g(\frac{y}{x})$$

$$f(kx,kg) = g(\frac{ky}{kx}) = k^0 g(\frac{y}{x}) = f(x,y) \quad k \neq 0$$

或 $f(x,y)$ 可表示成以 $\dfrac{y}{x}$ 为整体变量的函数。

解法

(1) 作变量变换 $\frac{y}{x}=u$ 即 $y=ux$

(2) 对两边关于 x 求导 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

(3) 将上式代入原方程，得 $x\frac{du}{dx}+u=g(u)$

整理 $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\cdot(g(u)-u)$ ....(2.3) 变量可分离方程

(4) 求解方程(2.3),若其解为: $u=\varphi(x,c)$ 或 $\Phi(u,x,c)=0$

(5) 原方程的通解为: $y=x\varphi(x,c)$或$\Phi(\frac{y}{x},x,c)=0$

例3 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$

解

令 $u=\dfrac{y}{x}$, 或 $y=ux$

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u \qquad x\frac{du}{dx}+u=u+\tan u$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\tan u}{x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4)$$

$$\frac{du}{\tan u}=\frac{dx}{x} \qquad \int\frac{d\sin u}{\sin u}=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+\tilde{c} \qquad (\tilde{c}\text{为任意常数})$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \tilde{c} \qquad (\tilde{c}\text{ 为任意常数})$$

$$|\sin u| = e^{\tilde{c}}|x| \qquad \sin u = \pm e^{\tilde{c}} x$$

令 $c = \pm e^{\tilde{c}}$ 得:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\tan u}{x}$$

$$Sinu = cx \qquad (c\text{ 为非零任意数})$$

另当 $tanu = 0$ 时，$u = 0$ 即 $u = 0$ 也是方程(2.4)的解

故 （2.4）的通解为 $sinu = cx$（c 为任意常数）

代回原来的变量，原方程的通解为: $\sin\dfrac{y}{x} = cx$

(2)可化为齐次方程的类型

/Classifications of Homogenous/

- 形式: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ ……………(2.5)

$a_i,b_i,c_i, i=1,2$ 均为常数，且c_1,c_2 不同时为零.

1.若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 即 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$

设 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$ $a_1=ka_2,\quad b_1=kb_2$

则原方程可化为: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$$

令 $u=a_2x+b_2y$ $\qquad \frac{du}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}$

$\frac{du}{dx}=a_2+b_2f(u)$ （变量分离方程，即可求解）

2.若 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 则 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ ....(2.6)

有唯一的解:(α,β) 令 $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases}$

则方程 (2.5) 化为:

$$\frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx}=\frac{a_1(X+\alpha)+b_1(Y+\beta)+c_1}{a_2(X+\alpha)+b_2(Y+\beta)+c_2}$$

$$=\frac{a_1X+b_1Y+(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)}{a_2X+b_2Y+(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)}$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g\left(\frac{Y}{X}\right)$$ 为齐次方程，即可求解。

- 特别地，当 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时，方程(2.5)的求解方法

(1) 解代数方程组 $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$ ....(2.6)

其解为： $x = \alpha, y = \beta$

(2) 作变换 $x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta$

将方程(2.5)化为齐次方程 $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}$

(3) 再作变换 $U = \dfrac{Y}{X}$ 将其化为变量分离方程

(4) 求解上述变量分离方程，最后代回原变量即可得原方程的解。

- 类似的方法，可求解更广泛的方程 P.26

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

例4 求解方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 1}{x + y - 3}$ .....(2.17)

解 解方程组 $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ 得 $x = 1, y = 2$

令 $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$ $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{X - Y}{X + Y}$..........(2.18)

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.18)$$

再令 $u=\dfrac{Y}{X}$ 即 $Y=uX$ $\quad \dfrac{dY}{dX}=X\dfrac{du}{dX}+u$

$$X\frac{du}{dX}+u=\frac{1-u}{1+u} \qquad X\frac{du}{dX}=\frac{1-u}{1+u}-u=\frac{1-u-u(1+u)}{1+u}$$

即(2.18)可化为: $\dfrac{dX}{X}=\dfrac{1+u}{1-2u-u^2}du=-\dfrac{1}{2(1-2u-u^2)}d(1-2u-u^2)$

两边积分，得: $\quad \ln X^2=-\ln\left|u^2+2u-1\right|+\tilde{c}$

因此 $\quad X^2(u^2+2u-1)=\pm e^{\tilde{c}}$

记 $\pm e^{\tilde{c}}=c_1$ 并代回原变量，得: $\quad X^2(u^2+2u-1)=c_1$

并代回原变量，得:

$$Y^2+2XY-X^2=c_1$$

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=c_1$$

此外，容易验证: $u^2+2u-1=0$

即 $$Y^2+2XY-X^2=0$$

也是方程(2.18)的解。

因此原方程(2.17)的通解为:

$y^2+2xy-x^2-6y-2x=c$ 其中 c 为任意常数。

本节小结/Conclusion/

变量分离方程与变量变换

- 变量分离方程
  - •特点
  - •解法
  - •举例
- 可化为变量分离的类型
  - 齐次方程
  - 可化为齐次方程的类型

注意/Note/： **通解的形式及其中任意常数的意义。**

• 课堂练习/Exercise/

1 $\dfrac{dy}{dx} = p(x)y$ 2 $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$

3 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x+y)^2}$ 4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^3+3xy^2+x}{3x^2y+2y^3-y}$

• 思考以下方程的求解方法

1 $\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ 2 $x^2\dfrac{dy}{dx} = f(xy)$

3 $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ 4 $\dfrac{dy}{dx} = xf(\dfrac{y}{x^2})$

• 作业：P.31. 第 2, 3, 5, 8, 11, 13, 16, 18(1), 21题。