§ 4.2 常系数线性微分方程的解法

Solving Method of Constant Coefficients Linear ODE

§ 4.1内容回顾

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

解的性质与结构。

♣ ***n*** 阶齐次线性方程的所有解构成一个 ***n*** 维线性空间。

方程(4.2)的一组n个线性无关解称为它的一个基本解组。

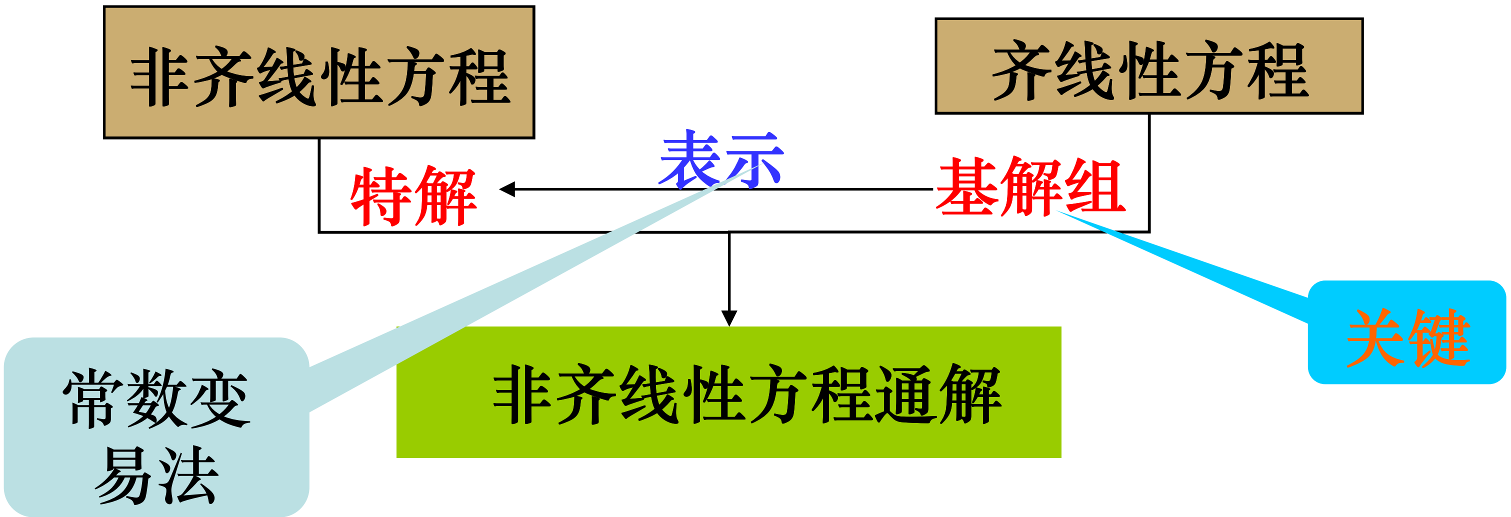
本节要求/Requirements/

- 熟练掌握常系数齐次线性方程的求解方法
- 熟练掌握常系数非齐次线性方程的求解方法
- 熟练掌握欧拉方程的求解方法

结构

齐线性方程的通解可由其基本解组线性表示。

非齐线性方程的通解等于对应齐次方程的通解与自身的一个特解之和。



4.2.1 复值函数与复值解/Complex Function and Complex Solution/

一 定义 $$z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)\quad t\in[a,b],$$

$\varphi(t)$，$\psi(t)$是定义在$[a,b]$上的实函数。

极限 $$\lim_{t\to t_0} z(t)=\lim_{t\to t_0}\varphi(t)+i\lim_{t\to t_0}\psi(t)\quad t_0\in[a,b],$$

连续 $$\lim_{t\to t_0} z(t)=z(t_0)\quad t_0\in[a,b],$$

导数 $$\lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}=\lim\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}+i\lim\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}$$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}=z'(t_0)=\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_0}+i\left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{t=t_0}$$

易验证

$$\frac{d}{dt}(z_1(t)+z_2(t))=\frac{dz_1(t)}{dt}+\frac{dz_2(t)}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[cz_1(t)]=c\frac{dz_1(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(z_1(t)\cdot z_2(t))=\frac{dz_1(t)}{dt}z_2(t)+z_1(t)\frac{dz_2(t)}{dt}$$

如 $z_j(t)=\varphi_j(t)+i\psi_j(t) \quad j=1,2 \quad t\in[a,b]$,

$$\frac{d}{dt}(z_1(t)+z_2(t))=\frac{d}{dt}(\varphi_1(t)+i\psi_1(t)+\varphi_2(t)+i\psi_2(t))$$

$$=\frac{d}{dt}\{[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]+i[\psi_1(t)+\psi_2(t)]\}$$

$$=\frac{d}{dt}[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]+i\frac{d}{dt}[\psi_1(t)+\psi_2(t)]$$

$$=(\frac{d\varphi_1}{dt}+i\frac{d\psi_1}{dt})+(\frac{d\varphi_2}{dt}+i\frac{d\psi_2}{dt})=\frac{dz_1(t)}{dt}+\frac{dz_2(t)}{dt}$$

二 关于 e^{kt} $k=\alpha+i\beta$ α,β为实数，t为实变量。

定义 $$e^{kt}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}e^{i\beta t}$$
$$=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$$

$$e^{i\beta t}=\cos\beta t+i\sin\beta t$$

$$e^{-i\beta t}=\cos\beta t-i\sin\beta t$$

$\bar{k}=\alpha-i\beta$ 表示 $k=\alpha+i\beta$ 共轭复数，

$$e^{\overline{kt}}=e^{\overline{(\alpha+i\beta)t}}=e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$$
$$=\overline{e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)}=\overline{e^{kt}}$$

e^{kt}的性质

1) $$e^{(k_1+k_2)t} = e^{k_1 t} \cdot e^{k_2 t}$$

2) $$\frac{de^{kt}}{dt} = ke^{kt}$$

3) $$\frac{d^n e^{kt}}{dt^n} = k^n e^{kt}$$

结论

- 实变量的复值函数的求导公式与实变量的实值函数的求导公式一致。
- 实变量的复指数函数的求导公式与实变量的实指数函数的性质一致。

三 线性方程的复值解/Complex Solution of Linear Higher-Order ODE

如果定义在 $[a,b]$ 上的实变量的复值函数 $x=z(t)$ 满足方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \quad (4.1)$$

则称 $x=z(t)$ 为方程的一个复值解。

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

定理8 如果方程4.2中所有系数 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 都是实值函数，而 $x=z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ 是方程的复数解，则 $z(t)$ 的实部 $\varphi(t)$，虚部 $\psi(t)$ 和共轭复数函数 $\bar{z}(t)$ 也是方程4.2的解。

定理9 若方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)+iv(t)$

有复数解 $x=U(t)+iV(t)$,这里 $a_i(t)(i=1,2,...,n)$ $u(t)$

及 $v(t)$ 都是实函数。那么这个解的实部 $U(t)$ 和虚部

$V(t)$ 分别是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=v(t)$$

的解。

4.2.2 常系数齐线性方程和欧拉方程

/Coefficient Linear Homogenous Higher-Order ODE And Euler Equation/

n 阶常系数齐次线性方程　其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为常数。

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(4.19)$$

为了求方程(4.19)的通解，只需求出它的基本解组。

$$x = e^{\lambda t} \qquad L[e^{\lambda t}] = e^{\lambda t} F(\lambda) \qquad x = e^{\lambda t}$$

$$L[e^{\lambda t}] \equiv \lambda^n e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \cdots + a_{n-1}\lambda e^{\lambda t} + a_n e^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t}$$

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(4.21)$$

特征方程

$$e^{\lambda t}$$

$$F(\lambda) = 0 \xleftarrow{\lambda\text{满足}}$$

特征根

结论： $x = e^{\lambda t}$ 是方程(4.19)的解的充要条件 λ 满足 $F(\lambda) = 0$

下面根据特征根的不同情况分别进行讨论。

$$F(\lambda)=\boxed{\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0}$$

1)特征根为单根的情况

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程（4.21）的n个互不相等的根，

则相应的方程（4.19）有如下n个解

$$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}$$

这n个解在区间 $-\infty<t<+\infty$ 上线性无关，从而组成方程

的基本解组。事实上，

$$W(t) \equiv \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdot & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdot & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdot & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

范德蒙(Vandermonde)行列式

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j)$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdot & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots\cdot & \lambda_n \\ \cdots & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots\cdot & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ **是方程的基本解组。**

方程4.19的通解可表示为 $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$

如果特征方程有复根，则因方程的系数是实常数。复根将成对共轭的出现，设 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 方程的一个特征根

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$ 也是一个特征根

则方程（4.19）有两个复值解

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

对应两个实值解 $e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t$

例1 求方程 $\dfrac{d^4x}{dt^4} - x = 0$ 的通解。

解 第一步：求特征根

$$F(\lambda) = \lambda^4 - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i$$

第二步：求出基本解组

$$e^t,\ e^{-t},\quad \cos t,\ \sin t$$

第三步：写出通解

$$x(t) = c_1 e^t + c_2\, e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

例2 求方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3}+x=0$ 的通解。

解 第一步：求特征根

$$F(\lambda)=\lambda^3+1=0 \qquad \lambda_1=-1, \quad \lambda_{2,3}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

第二步：求出基本解组

$$e^{-t}, \qquad e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

第三步：写出通解

$$x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

2) 特征根有重根的情况

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \qquad \text{.......(4.19)}$$

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad \text{.......(4.21)}$$

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是特征方程（4.21）的m个互不相等的根。

$k_1, k_2, \cdots, k_m$ 重数 $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, \quad k_i \geq 1$

I. 设 $\lambda_1 = 0$ 是 k_1 重特征根

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-k_1} \lambda^{k_1} = 0 \qquad a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k_1+1} = 0$$

$$a_{n-k_1} \neq 0$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-k_1} \frac{d^{k_1} x}{dt^{k_1}} = 0$$

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k_1}\frac{d^{k_1}x}{dt^{k_1}}=0$$

显然 $1,t,t^2,\cdots,t^{k_1-1}$ 是方程的 k_1 个线性无关的解，

方程(4.19)有 k_1 重零特征根

方程恰有 k_1 个线性无关的解 $1,t,t^2,\cdots,t^{k_1-1}$

II. 设 $\lambda_1 \neq 0$ 是 k_1 重特征根

令 $x = ye^{\lambda_1 t}$

$$L[x]\equiv\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0$$

…….(4.19)

$$x^{(m)}=(ye^{\lambda_1 t})^{(m)}=$$

$$y^{(m)}e^{\lambda_1 t}+\lambda_1 m y^{(m-1)}e^{\lambda_1 t}+\frac{m(m-1)}{2!}\lambda_1^2 y^{(m-2)}e^{\lambda_1 t}+\cdots+\lambda_1^m y e^{\lambda_1 t}$$

$$L[ye^{\lambda_1 t}]=$$

$$e^{\lambda_1 t}(y^{(n)}+b_1 y^{(n-1)}+b_2 y^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}y'+b_n y)=0$$

$$L_1[y]=y^{(n)}+b_1 y^{(n-1)}+b_2 y^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}y'+b_n y=0$$

$$\ldots\ldots.(4.23)$$

$$L[ye^{\lambda_1 t}]=e^{\lambda_1 t}L_1[y]$$

特征方程 $G(\mu)=\mu^n+b_1\mu^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\mu+b_n=0\cdots\cdots(4.24)$

$$L[ye^{\lambda_1 t}] = e^{\lambda_1 t} L_1[y]$$

$$F(\mu+\lambda_1)e^{(\mu+\lambda_1)t} = L[e^{(\mu+\lambda_1)t}] = L[e^{\mu t}e^{\lambda_1 t}]$$

$$= e^{\lambda_1 t} L_1[e^{\mu t}] = e^{(\lambda_1+\mu)t} G(\mu)$$

$$F(\mu+\lambda_1) = G(\mu) \qquad F^{(j)}(\lambda_1) = 0, \quad j = 1,2,\cdots,k_1-1$$

$$F^{(k_1)}(\lambda_1) \neq 0,$$

$$\frac{dF^{j}(\mu+\lambda_1)}{d\mu^j} = \frac{dG^{j}(\mu)}{d\mu^j}, \quad j = 1,2,\cdots,k_1$$

(4.19)的 k_1重特征根λ_1 $\longleftrightarrow$ **(4.23)的 k_1 重特征根零**

方程(4.23)恰有 k_1 个线性无关的解 $1, t, t^2, \cdots, t^{k_1-1}$

由 $x = ye^{\lambda_1 t}$

方程(4.19)恰有 k_1 个线性无关的解 $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}$

类似地

$$\left.\begin{array}{lll}
\lambda_1 & k_1 & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t} \\
\lambda_2 & k_2 & e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, t^2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda_m & k_m & e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, t^2 e^{\lambda_m t}, \cdots, t^{k_m-1} e^{\lambda_m t}
\end{array}\right\} \text{基本解组} \quad \textbf{(4.26)}$$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, \quad k_i \geq 1$$

证明 假若这些函数线性相关，则存在不全为零的数$A_j^{(r)}$使得

$$(A_0^{(1)} + A_1^{(1)}t + \cdots + A_{k_1-1}^{(1)}t^{k_1-1})e^{\lambda_1 t} +$$

$$(A_0^{(2)} + A_1^{(2)}t + \cdots + A_{k_2-1}^{(2)}t^{k_2-1})e^{\lambda_2 t} + \cdots +$$

$$(A_0^{(m)} + A_1^{(m)}t + \cdots + A_{k_m-1}^{(m)}t^{k_m-1})e^{\lambda_m t} \equiv 0$$

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + P_m(t)e^{\lambda_m t} \equiv 0 \qquad \textbf{(4.27)}$$

假定多项式$P_m(t)$ 至少有一个系数不为零，则 $P_m(t)$

不恒为零，

$$P_1(t) + P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \cdots + P_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t} \equiv 0$$

微分 k_1 次

$$[P_r(t)e^{(\lambda_r-\lambda_1)t}]^{(k_1)}$$

$$=[P_r^{(k_1)}(t)+k_1(\lambda_r-\lambda_1)P_r^{(k_1-1)}(t)+\cdots+(\lambda_r-\lambda_1)^k P_r(t)]e^{(\lambda_r-\lambda_1)t}$$

$$=Q_r(t)e^{(\lambda_r-\lambda_1)t} \qquad \partial(Q_r(t))=\partial(P_r(t))$$

$$Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+\cdots+Q_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t}\equiv 0$$

$\partial(Q_m(t))=\partial(P_m(t))$ $\qquad$ $Q_m(t)$ 不恒为零，

$$\vdots$$

$$R_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t}\equiv 0 \qquad \partial(R_m(t))=\partial(P_m(t))$$

$R_m(t)$ 不恒为零， $\qquad$ $e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t}\neq 0$ $\qquad$ 矛盾！

(4.26) 中函数线性无关，其构成的解本解组。

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 方程的一个k 重特征根

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$ 也是一个k 重特征根

它们对应2k个线性无关的实解是

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\cdots,t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t,\cdots,t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

例3　求方程 $\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-x=0$ 的通解。

解　第一步：求特征根

$$F(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \qquad \lambda_{1,2,3}=1,$$

第二步：求出基本解组

$$e^t,\quad te^t,\quad t^2e^t,$$

第三步：写出通解

$$x(t)=c_1\,e^t+c_2\,te^t+c_3\,t^2e^t$$

例4 求方程 $\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$ 的通解。

解 第一步：求特征根

$$F(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^2+1=0 \qquad \lambda_{1,2}=\pm i \quad \text{二重根}$$

第二步：求出基本解组

$$\cos t,\ t\cos t,\ \sin t,\ t\sin t,$$

第三步：写出通解

$$x(t)=c_1\cos t+c_2\,t\cos t+c_3\sin t+c_4\,t\sin t$$

作业：P.113，第4， 6，7，8，9题

P.145，第2， 3，4，5，6题

可化为常系数线性方程的方程 -------欧拉(Euler) 方程

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \quad (4.29)$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为常数。

引入自变量代换 $x = e^t$ $\quad \ln x = t$ $\quad dx = e^t dt$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^{-t} \frac{dy}{dt}\right) = \left(-e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \frac{dt}{dx}$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

假设 **自然数 m 有以下关系式成立，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$为常数**

$$\frac{d^m y}{dx^m}=\frac{1}{x^m}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^m}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\left[e^{-mt}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)\right]\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\left[-me^{-mt}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)+\right.$$

$$\left.e^{-mt}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)\right]e^{-t}$$

$$=\frac{1}{x^{m+1}}\left(\frac{d^{m+1} y}{dt^{m+1}}+\beta_1\frac{d^{m}y}{dt^{m}}+\cdots+\beta_{m}\frac{dy}{dt}\right)$$

对一切自然数 m 均有以下关系是成立,

$$\frac{d^m y}{dx^m}=\frac{1}{x^m}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)$$

原方程 $x=e^t$

$$x^n\frac{d^n y}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_n y=f(x)\quad(4.29)$$

可化为常系数线性方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_n y=f(e^t)\quad(4.30)$$

求解欧拉方程的过程

欧拉方程 $\xrightarrow{x=e^t}$ 常系数线性方程 $\longrightarrow F(k)=0$

$y=x^k \longleftarrow y=e^{kt}$

确定 $F(k)=0$

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

设 $y=x^k$ 是欧拉方程的解

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)x^k+\cdots+a_{n-2}k(k-1)x^k+a_{n-1}kx^k+a_nx^k=0$$

$$[k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n]x^k=0$$

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0$$

$$F(k)=k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n$$

解齐次欧拉方程的步骤

第一步：写出特征方程，并求特征根

第二步：求出的基本解组

先求出变换以后方程的基本解组

再求出原方程的基本解组

第三步：写出原方程的通解

例5 求方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 的通解。

解 第一步：写出特征方程，并求特征根

$$F(k)=k(k-1)-k+1=0 \qquad k_{1,2}=1,$$

第二步：求出基本解组

$$e^t,\quad te^t \xrightarrow{x=e^t} x,\ x\ln|x|$$

第三步：写出通解

$$y(x)=c_1x+c_2x\ln|x|$$

例6　求方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+5y=0$ 的通解。

解　**第一步：写出特征方程，并求特征根**

$$F(k)=k(k-1)+3k+5=0 \quad k^2+2k+5=0$$

$$k_{1,2}=-1\pm 2i$$

第二步：求出基本解组

$$e^{-t}\cos 2t,\ e^{-t}\sin 2t \xrightarrow{x=e^t} \frac{1}{x}\cos 2\ln|x|,\ \frac{1}{x}\sin 2\ln|x|$$

第三步：写出通解　$y(x)=\dfrac{1}{x}(c_1\cos 2\ln|x|+c_2\sin 2\ln|x|)$

作业：P.146，第12—26题。