§ 3.2 解的延拓定理

/ Theorem on extension of solution/

内容提要/Constant Abstract/

- 解的延拓的引入
  - 局部利普希兹条件
  - 延拓方法
- 解的延拓定理及其推论
  - 解的延拓定理
  - 推论
  - 例子

本节要求/Requirements/

- 理解解的延拓方法。
- 会应用解的延拓性定理估计解的存在区间。

一、 解的延拓的引入

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

右端函数 $f(x, y)$ 在某一有界区域 G 中有意义。

1 局部利普希兹条件

如果称 $f(x, y)$在 G 内满足局部利普希兹条件，即对

区域 G内的每一点，存在以其为中心的完全含于 G 内的

矩形域 R，在 R 上 $f(x, y)$ 满足利普希兹条件。

（注意：点不同，域 R 大小和常数 L 可能不同）

2 解的延拓

设 $y=\varphi(x)\quad x\in[a,b]$ 是

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\ldots\ldots\ldots(3.1.1)\\ \varphi(x_0)=y_0\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.2)\end{cases}$$

的解，若 $y=\psi(x)\quad x\in[a_1,b_1]$ 也是初值问题的解，

$[a,b]\subset[a_1,b_1]$ ，当 $x\in[a,b]$ 时， $\varphi(x)\equiv\psi(x)$

则称解 $\psi(x)$ 是解 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的延拓。

3 延拓方法

设方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的解 $y=\varphi(x)$ 已定义在区间

$|x-x_0|\le h$上，现取 $x_1=x_0+h$　$y_1=\varphi(x_1)=\varphi(x_0+h)$

然后以 $Q_1\ (x_1,y_1)$ 中心，作一小矩形，使它连同其边界

都含在区域 G 的内部，再用解的存在唯一性定理，存在

$h_1>0$ 使得在区间 $|x-x_1|\le h_1$,方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 有过

(x_1,y_1) 的解 $y=\psi(x)$ 且在 $x=x_1$ 处有 $\psi(x)=\varphi(x)$

由于唯一性，显然解 $y=\psi(x)$ 和解 $y=\varphi(x)$

都在定义的区间 $x_1-h\le x\le x_1$ 上，$\psi(x)\equiv\varphi(x)$

区间 $|x-x_1|\le h_1$ 上，$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 有过 (x_1,y_1)

的解 $y=\psi(x)$ 且在 $x=x_1$ 处有 $\psi(x)=\varphi(x)$

由于唯一性，显然解 $y=\psi(x)$ 和解 $y=\varphi(x)$

都在定义的区间 $x_1-h\le x\le x_1$ 上，$\psi(x)\equiv\varphi(x)$

但是在区间 $x_1-h\le x\le x_1$ 上，解 $y=\varphi(x)$

向右方的 延拓， 即将延拓要较大的区间

$x_0-h\le x\le x_0+h+h_1$ 。再令

$x_2=x_1+h,\quad y_2=\psi(x_1+h)$ 如果，$(x_2,y_2)\in G$

我们又可以取 (x_2,y_2) 为中心，作一小矩形，

$$x_2 = x_1 + h, \quad y_2 = \psi(x_1 + h)$$

可以取 (x_2, y_2)为中心，作一小矩形,使它连同其边界

都含在区域G 内。仿前,又可以将解延拓到更大的区间

$x_0 - h \le x \le x_0 + h + h_1 = x_0 + h + h_1 + h_2$ 上，其中 h_2

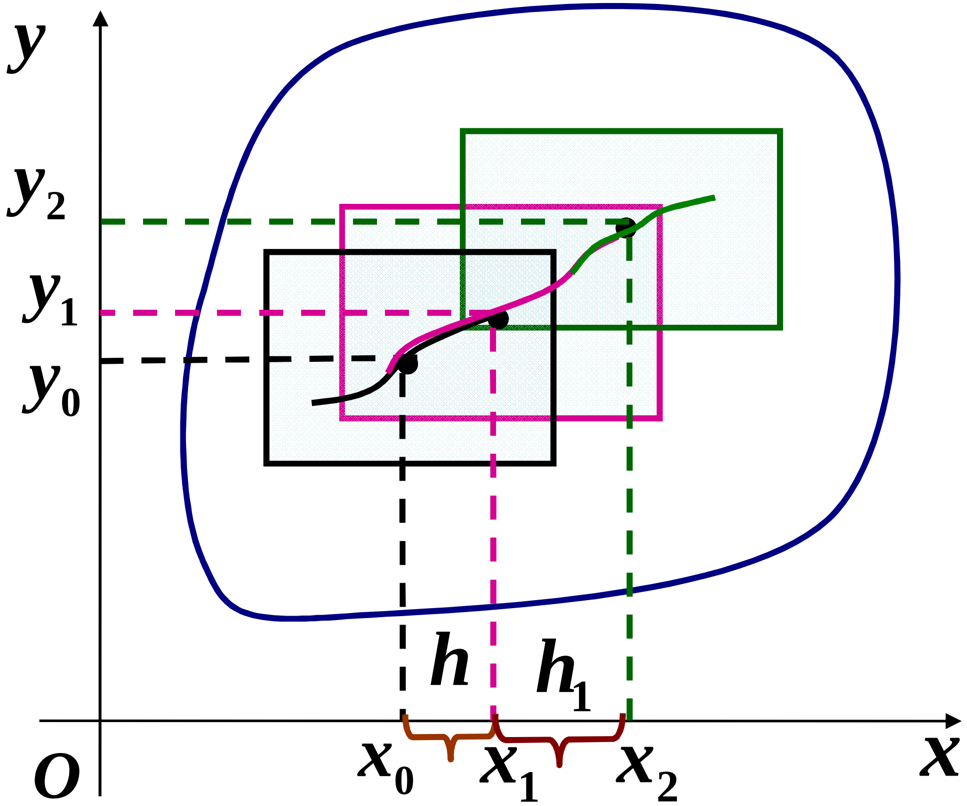
是某一个正常数。对于 x 值减小的一边可以进行同样讨论,

使解向左方延拓。就是在原来的积分曲线 $y = \varphi(x)$

左右端个接上一个积分的曲线段。上述解的延拓的方法还

可继续进行。那么，$y = \varphi(x)$ 向两边延拓的最终情况如何呢?

§ 3.2 Extension Theorem



$$P(x_0, y_0)$$

$$Q(x_1, y_1)$$

$$x_1 = x_0 + h$$

$$y_1 = \varphi(x_0 + h)$$

$$x_2 = x_1 + h_1$$

$$y_2 = y(x_1 + h_1)$$

$$y = \varphi(x) \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

3 延拓方法

$$y = \begin{cases} \varphi(x) & x \in [x_0 - h, x_0 + h] \\ \psi(x) & x \in (x_0 + h, x_0 + h + h_1] \end{cases}$$

二、 解的延拓定理及其推论

1 解的延拓定理

如果方程(3.1)右端的函数 $f(x,y)$ 在有界区域 G 中连续，且在 G 内满足局部利普希兹条件，那么方程(3.1)通过G 内任何一点(x_0,y_0)的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓。直到点$(x,\varphi(x))$任意接近区域G 的边界。

以向 x 增大的一方的延拓来说，如果 $y=\varphi(x)$ 只能延拓的区间 $x_0\le x<m$ 上，则当 $x\to m$时，$(x,\varphi(x))$ 趋近于区域 G 的边界。

2 推论

如果 G 是无界区域，在上面解的延拓定理的条件下，方程(3.1)的通过点 (x_0, y_0)的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓，以向 x 增大的一方的延拓来说，有下面的两种情况:

(1) 解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓到区间 $[x_0,+\infty)$

(2) 解 $y=\varphi(x)$只可以延拓到区间 $[x_0, m)$

其中m 为有限数，则当 $x\to m$ 时，或者 $y=\varphi(x)$ 无界，或者 $(x,\varphi(x))$ 趋于区域 G 的边界。

例1 讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-1}{2}$ 的通过点(0,0)的解

以及通过点 ($ln2$,-3) 的解的存在区间。

解 方程右端函数在整个 xy 平面上满足解的存在唯一性定理及解的延拓定理的条件。

方程的通解为 $y=\dfrac{1+ce^x}{1-ce^x}$

通过点(0,0)的解为 $y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ 其存在区间为 $(-\infty,+\infty)$

通过点($ln2$,-3)的解为 $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

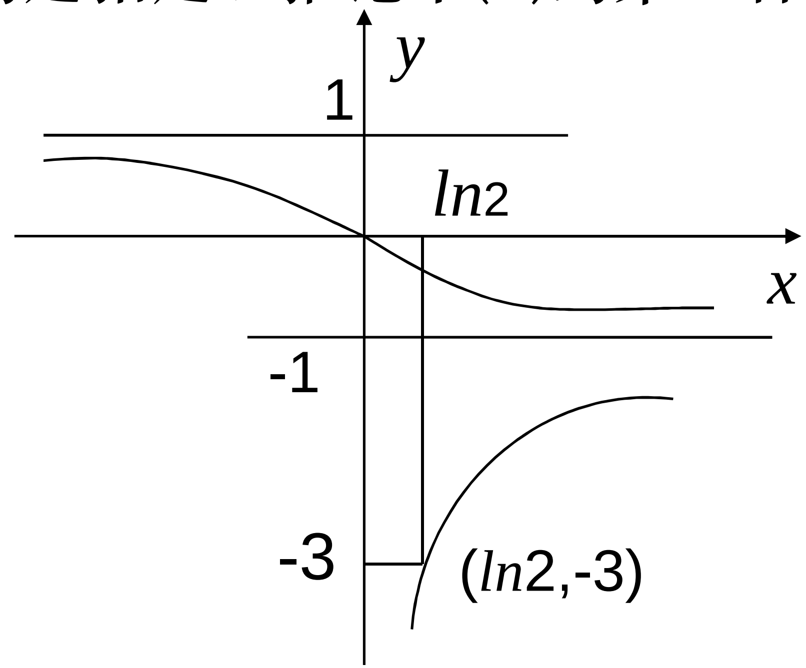
其存在区间为 $0<x<+\infty$

注意:

过点(ln2,-3)的解 $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ 向右可以延拓到 $+\infty$

但向左方只能延拓到 0, 因为当 $x\to 0_+$ 时, $y\to -\infty$ (无界)

这相当于解的延拓定理推论中(2)的第一种情况。



例2 讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=1+\ln x$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解的存在区间。

解 方程右端函数右半平面 $x>0$ 上定义且满足解的存在唯一性定理及解的延拓定理的条件。

通过点(1,0)的解为 $y=x\ln x$ 其存在区间为 $(0,+\infty)$

向右可以延拓到 $+\infty$，但向左方只能延拓到 0,

因为当 $x\to 0_+$ 时，$y=x\ln x\to 0$ (趋于G的边界 $y=0$)

这相当于解的延拓定理推论中(2)的第二种情况。

例3 用解的延拓定理证明

如果 $f(x,y)$ 在整个 xy 平面上定义、连续和有界，存在关于 y 的一阶连续偏导数，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

的任一解均可以延拓到区间 $(-\infty,+\infty)$。

证明

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\qquad y=\varphi(x)$$

$$\left|f(x,y)\right|\le K\qquad -K\le\varphi'(x)\le K$$

所以 $y=\varphi(x)$ 值域在如图的阴影区内，否则

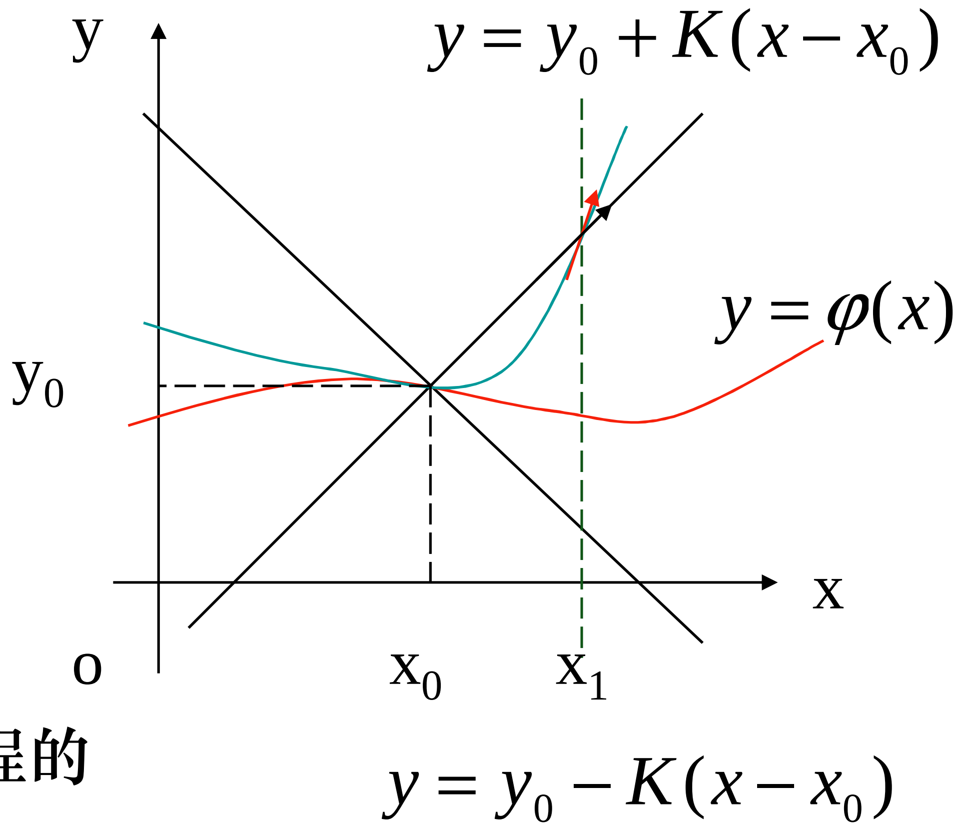
$y=\varphi(x)$ 将穿过直线

$y=y_0+K(x-x_0)$

$y=y_0-K(x-x_0)$

则会有 $|\varphi'(x)|>K$

与 $|f(x_1,y_1)|\le K$ 矛盾。



由解的延拓定理推论，方程的

任一解均可以延拓到区间 $(-\infty,+\infty)$。

练习

1 讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ 在 $-1<x<3$ 上满足条件

$y(1)=1$ *and* $y(1)=-1$ 的解的存在区间。

$(-1,2),\quad (0,3)$

2 设线性方程 $\dfrac{dy}{dx}=p(x)y+Q(x)$

当 $\boldsymbol{P(x),Q(x)}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，则由任一初值

$(x_0,y_0)\quad x_0\in(-\infty,+\infty)$ 所确定的解在整个区间

$(-\infty,+\infty)$上都存在。

思考题

1）求方程 $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$满足条件 $y(0)=0$

的解的逐次逼近 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$,

以及 h 的最大值。

2）设$f(x,y)$在整个 xy 平面上连续，证明从

两曲线 $y=\pm e^x$ 之间任一点(x_0,y_0) 出发

的且满足方程 $\dfrac{dy}{dx}=(y^2-e^{2x})f(x,y)$的解必

可延拓到半无限区间$(x_0,+\infty)$ 。

3） 求具有性质 $x(t+s)=\dfrac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$ 的函数 $x(t)$，

已知 $x'(0)$存在。

解 $t=s=0$ $\qquad x(0)=\dfrac{2x(0)}{1-x^2(0)}$ $\qquad x(0)=0$

$$\frac{x(t+s)-x(t)}{s}=\frac{\dfrac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}-x(t)}{s}$$

$$=\frac{\dfrac{x(t)+x(s)-x(t)+x^2(t)x(s)}{1-x(t)x(s)}}{s}=\frac{1}{s}\frac{x(s)(1+x^2(t))}{1-x(t)x(s)}$$

$$\frac{x(t+s)-x(t)}{s}=\frac{1}{s}\frac{x(s)(1+x^2(t))}{1-x(t)x(s)}$$

$$x'(t)=(1+x^2(t))\lim_{s\to 0}\frac{x(s)-x(0)}{s}=(1+x^2(t))x'(0)$$

$$x'(t)=(1+x^2(t))x'(0) \qquad \frac{dx}{1+x^2}=x'(0)dt$$

$$x(t)=\tan(x'(0)t+c) \qquad x(0)=0$$

$$\arctan x=x'(0)t \qquad x(t)=\tan(x'(0)t)$$