§ 5.1 线性微分方程组解的存在唯一性定理

Existence & Uniqueness Theorems of Linear ODEs

本节要求/Requirements/

- 掌握高阶线性微分方程与线性微分方程组的关系。
- 理解线性微分方程组解的存在唯一性定理。
- 熟练掌握解的逐次逼近序列的构造方法。

5.1.1 记号与定义/Symbol and Definition/

一阶微分方程组

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

初值条件 $x_1(t_0) = \eta_1,\ x_2(t_0) = \eta_2, \cdots,\ x_n(t_0) = \eta_n$

一阶线性微分方程组

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_2 + f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \qquad \cdots(5.1)$$

$a_{ij}(t),\ \ f_i(t) \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$ 在$[a,b]$上连续

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad \text{..........(5.2)}$$

$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \text{......(5.3)}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \qquad \text{............(5.4)}$$

$$\boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

在区间$a \le t \le b$ 可定义矩阵与向量函数

$$\boldsymbol{B}(t)=(b_{ij}(t))_{n\times n} \qquad \boldsymbol{u}(t)=(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))^T$$

连续: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ 在区间$a \le t \le b$ 连续。

可微: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ 在区间$a \le t \le b$ 可微。

$$\boldsymbol{B}'(t)=(b'_{ij}(t))_{n\times n} \qquad \boldsymbol{u}'(t)=(u'_1(t), u'_2(t), \cdots, u'_n(t))^T$$

可积: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ 在区间$a \le t \le b$ 可积。

$$\int \boldsymbol{B}(t)dt = \left(\int b_{ij}(t)dt\right)_{n\times n}$$

$$\int \boldsymbol{u}(t)dt = \left(\int u_1(t)dt, \int u_2(t)dt, \cdots, \int u_n(t)dt\right)^T$$

1) $(\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)+\boldsymbol{B}'(t)$

$(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t))' = \boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{v}'(t)$

2) $(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}'(t)$

3) $(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}'(t)$

定义1 设$\boldsymbol{A}(t)$ 是区间$a\le t\le b$上的连续$n\times n$矩阵，

$\boldsymbol{f}(t)$ 是区间$a\le t\le b$上的连续 n 维向量，方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \qquad \text{…………….(5.4)}$$

在某区间$\alpha\le t\le\beta$ $([\alpha,\beta]\subset[a,b])$ 的解就是向量

$\boldsymbol{u}(t)$ 在区间 $\alpha\le t\le\beta$ 上连续且满足

$$\boldsymbol{u}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{f}(t)$$

定义2 初值问题(Cauchy Problem)

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \quad \text{.............(5.5)}$$

的解就是方程组(5.4)在包含 t_0的区间$\alpha \le t \le \beta$

上的解$\boldsymbol{u}(t)$, 使得 $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$

例1 验证向量 $\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$ 是初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

在区间$-\infty<t<+\infty$上的解。

解 $\boldsymbol{u}'(t)=\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$, $\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix} e^{0} \\ -e^{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{u}(t)$ 是给定初值问题的解。

5.1.2 n 阶线性微分方程与一阶线性微分方程组等价

例1 $$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$$

解 令 $x_1 = x, \quad x_2 = x',$

$$x_1' = x' = x_2$$

$$x_2' = x'' = -p(t)x' - q(t)x + f(t)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + f(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t_0)=\eta_1\,,\,x'(t_0)=\eta_2$$

$$x''+p(t)x'+q(t)x=f(t)\xrightarrow{\text{解}}x=\varphi(t)$$

$$\varphi''(t)+p(t)\varphi'(t)+q(t)\varphi(t)=f(t)$$

构造向量

$$\begin{bmatrix}\varphi'(t)\\ \varphi''(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi'(t)\\ -p(t)\varphi'(t)-q(t)\varphi(t)+f(t)\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

满足

$$x_1(t_0)=\eta_1\,,\,x_2(t_0)=\eta_2\qquad \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

$$x(t_0)=\eta_1\,,\,x'(t_0)=\eta_2$$

$$x''+p(t)x'+q(t)x=f(t) \xleftarrow{\text{满足}} x=\varphi_1(t)$$

$$\varphi_1''(t)+p(t)\varphi_1'(t)+q(t)\varphi_1(t)=f(t)$$

$$\begin{bmatrix}\varphi_1'(t)\\ \varphi_2'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi_2(t)\\ -q(t)\varphi_1(t)-p(t)\varphi_2(t)+f(t)\end{bmatrix}$$

解

$$x_1(t_0)=\eta_1\,,\,x_2(t_0)=\eta_2 \qquad \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t)$$

令 $x_1=x,\ x_2=x',\ x_3=x'',\cdots,x_n=x^{(n-1)}$

$$\begin{cases} x_1'=x'=x_2 \\ x_2'=x''=x_3 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}'=x^{(n-1)}=x_n \\ x_n'=x^{(n)}=-a_n(t)x_1-a_{n-1}(t)x_2-\cdots-a_1(t)x_n+f(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \\ x(t_0) = \eta_1, x'(t_0) = \eta_2, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(5.6)$$

$$\psi(t) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \psi'(t) \\ \vdots \\ \psi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$ 等价

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}$$

$$\cdots\cdots\cdots(5.7)$$

例2 将初值问题 $\begin{cases} x'' + 3tx' - 5t^2 x = \sin t \\ x(0) = 0 \quad x'(0) = 1 \end{cases}$

化为与之等价的一阶方程组的初值问题。

解 令 $x_1 = x, \quad x_2 = x', \qquad x_1' = x' = x_2$

$$x_2' = x'' = -3tx' + 5t^2 x + \sin t$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 5t^2 x_1 - 3tx_2 + \sin t \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5t^2 & 3t \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin t \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{matrix}$$

例3 将下列方程组化为高阶方程

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

解

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad x_2'' = x_1' - x_2' = x_2 - x_2'$$

$$x_2'' + x_2' - x_2 = 0$$

注意：不是所有方程组都可化为高阶方程

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

5.1.3 存在唯一性定理

初值问题(Cauchy Problem)

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \qquad \text{…………….(5.5)}$$

定理1 如果$\boldsymbol{A}(t)$是$n\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$是 $\boldsymbol{n}$ 维列向量，它们都在区间 $a\le t\le b$ 上连续，则对于区间 $a\le t\le b$ 上的任何数 t_0 及任一常数向量

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\eta}$$

方程组(5.5)存在唯一解 $\varphi(t)$ 定义于整个区间 $a\le t\le b$ 上，且满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$$

现取 $\varphi_0(t)=\eta$ ，构造皮卡逐步逼近向量函数序列:

$$\begin{cases} \varphi_0(t)=\eta \\ \varphi_k(t)=\eta+\int_{t_0}^{t}[A(s)\varphi_{k-1}(s)+f(s)]ds, \end{cases}$$

$$a\leq t\leq b \quad k=1,2,\cdots$$

向量函数 $\varphi_k(t)$ 称为(5.4)的第 k 次近似解。

例4 求方程组的初值问题

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

的二次近似解。

解 令 $\varphi_0(t)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$$\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}+\int_0^t\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right\}dt$$

$$=\int_0^t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} dt$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}t^2 + t \end{pmatrix}$$

5.1.4 简单方程组的消元法

例5 求解方程组 $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

解
$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

关键：保留一个未知函数，消掉另一个未知函数

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2' + x_2) \qquad x_1' = \frac{1}{2}(x_2'' + x_2')$$

$$\frac{1}{2}(x_2'' + x_2') = \frac{3}{2}(x_2' + x_2) - 2x_2 \qquad x_2'' - 2x_2' + x_2 = 0$$

$$x_2'' - 2x_2' + x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2' + x_2)$$

$$x_2(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}[(c_1 + c_2 + c_2 t)e^t + (c_1 + c_2 t)e^t]$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(2c_1 + c_2 + 2c_2 t)e^t$$

方程组的解为

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{2}(2c_1 + c_2 + 2c_2 t)e^t \\ x_2(t) = (c_1 + c_2 t)e^t \end{cases}$$

例6 求解方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}$

解： 保留一个未知函数 x，消掉另一个未知函数 y

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{x}p^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}p^2$$

$$\frac{dx}{dt} = p \qquad p\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p^2 = 0$$

$$p\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p^2=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y^2}{x}\end{cases}$$

$$p=0,\quad \frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=0$$

$$\frac{dp}{p}-\frac{dx}{x}=0$$

$$\begin{cases}x=c_2e^{c_1t}\\ y=c_1c_2e^{c_1t}\end{cases}$$

$$p=c_1x$$

另外，由 $p=0$ $\begin{cases}x=c\\ y=0\end{cases}$

$$\frac{dx}{dt}=c_1x$$

方程组的解为

$$\begin{cases}x=c_2e^{c_1t}\\ y=c_1c_2e^{c_1t}\end{cases}$$

练习:

1　P.184　2 (b)

2　求方程组的初值问题

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的二次近似解。

3　求下列方程组的解

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\sin t} \end{cases}$$

作业：P.184 第2 (c)，3题。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} + x = \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$