§ 3.1 解的存在唯一性定理和逐步逼近法

/Existence & Uniqueness Theorem & Progressive Method/

内容提要/Constant Abstract/

- **概念和定义**
  - 一阶方程的初值问题
  - 利普希兹条件
- **存在唯一性定理**
  - 定理 1
  - 定理 1的证明
    - 命题 1
    - 命题 2
    - 命题 3
    - 命题 4
    - 命题 5
  - 附注
  - 逐步逼近法的思想
  - 定理 2

- **本节要求/Requirements/**

➢ 深刻理解解的存在唯一性定理的条件与结论

➢ 掌握**逐步逼近**方法的本思想

一 、概念与定义/Concept and Definition/

1．一阶方程的初值问题*(Cauchy problem)*表示

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.1) \\ \varphi(x_0) = y_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.3) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.4) \end{cases}$$

2. 利普希兹条件

函数 $f(x,y)$ 称为在矩形域：

$$R:|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b \cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.5)$$

关于 y 满足利普希兹 (Lipschitz)条件，如果存在常数 $L>0$

使得不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$$

对所有 $(x,y_1),(x,y_2)\in R$ 都成立。

L 称为利普希兹常数。

二 、存在唯一性定理

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ldots\ldots\ldots (3.1.1)$$

定理1

$$R: |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$$

如果 ***f(x,y)*** 在 ***R*** 上连续且关于 y 满足利普希兹条件,

则方程(3.1.1)存在唯一的连续解 $y = \varphi(x)$

定义在区间 $|x - x_0| \le h$,且满足初始条件 $\varphi(x_0) = y_0$

这里 $h = \min(a, \frac{b}{M})$ $\quad M = \max\limits_{(x, y \in R)} |f(x, y)|$

定理1的证明需要证明五个命题:

- 命题 1 求解微分方程的初值问题等价于求解一个积分方程
- 命题 2 构造一个连续的逐步逼近序列
- 命题 3 证明此逐步逼近序列一致收敛
- 命题 4 证明此收敛的极限函数为所求初值问题的解
- 命题 5 证明唯一性

定理1的证明

命题1 设 $y=\varphi(x)$ 是初值问题
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\ldots\ldots\ldots(3.1.1) \\ \varphi(x_0)=y_0\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.2) \end{cases}$$

的解的充要条件是 $y=\varphi(x)$ 是积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \qquad x_0\le x\le x_0+h \quad \cdots\cdots(3.1.6)$$

的定义于 $x_0\le x\le x_0+h$ 上的连续解。

证明:

- 微分方程的初值问题的解满足积分方程（3.1.6）。
- 积分方程（3.1.6）的连续解是微分方程的初值问题的解。

证 明

因为 $y=\varphi(x)$ 是方程(3.1.1)的解，故有:

$\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,\varphi(x))$ 两边从x_0 到 x 积分得到:

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\equiv\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx \qquad x_0\le x\le x_0+h$$

把(3.1.2)代入上式,即有:

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx \qquad x_0\le x\le x_0+h$$

因此, $y=\varphi(x)$是积分方程在 $x_0\le x\le x_0+h$上的连续解.

反之，如果$y=\varphi(x)$ 是 (3.1.6) 的连续解，则有:

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx \qquad x_0\le x\le x_0+h \qquad \cdots\cdots\cdots(3.1.8)$$

微分之，得到: $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,\varphi(x))$

又把 $x=x_0$ 代入(3.1.8)，得到:$\varphi(x_0)=y_0$

因此，$y=\varphi(x)$是方程(3.1.1)定义于 $x_0\le x\le x_0+h$

上，且满足初始条件(3.1.2)的解。

同理，可证在 $x_0-h\le x\le x_0$ 也成立。

命题1证毕.

现在取 $\varphi_0(x) = y_0$ ，构造皮卡逐步逼近函数序列如下:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)) d\xi \quad x_0 - h \le x \le x_0 + h \end{cases} \tag{3.1.9}$$

$$\varphi_0(x) = y_0$$

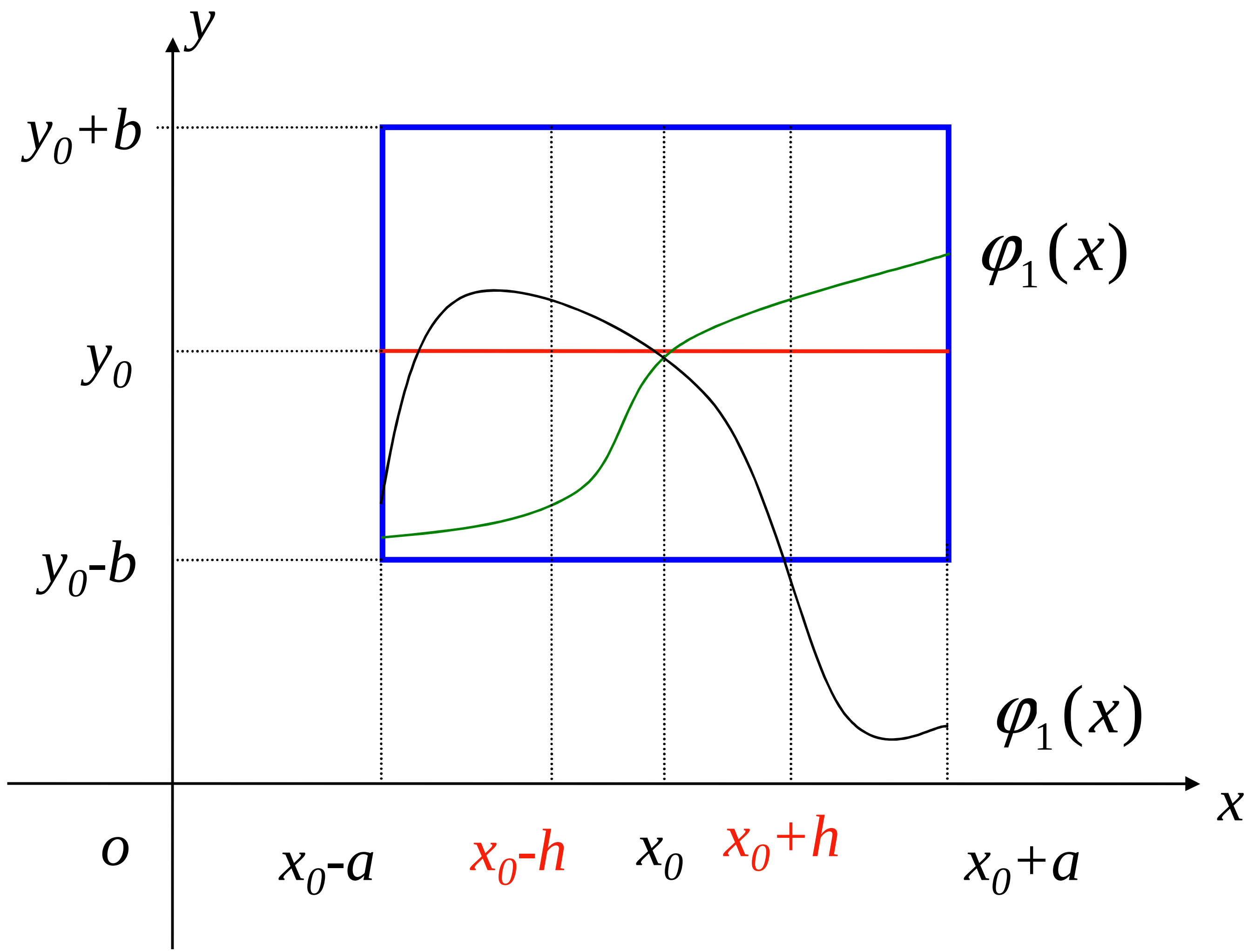
$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi)) d\xi$$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi)) d\xi$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)) d\xi$$

$$\varphi_0(x) = y_0 \qquad \varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi))d\xi$$



$$\begin{cases}\varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi \qquad x_0 \le x \le x_0 + h\end{cases}$$

命题2 对于所有的 (3.1.9) 中函数 $\varphi_n(x)$ 在

$x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义、连续，即满足不等式:

$$|\varphi_n(x) - y_0| \le b \qquad (3.1.10)$$

证 明: （只在正半区间来证明，另半区间的证明类似）

当 n =1 时， $\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi$

$$|\varphi_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi\right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_0)|d\xi \le M(x - x_0) \le Mh \le b$$

$\varphi_1(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义,连续

即命题2 当 $n=1$ 时成立。

现在用数学归纳法证明对于任何正整数 n，命题2都成立。

即 当 $n=k$ 时， $\varphi_k(x)$在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义，连续，

也就是满足不等式 $\left|\varphi_k(x) - y_0\right| \le b$

而当 $n=k+1$ 时， $\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi))d\xi$

$$\left|\varphi_{k+1}(x) - y_0\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|f(\xi, \varphi_k(\xi))\right| d\xi \le M(x - x_0) \le Mh \le b$$

$\varphi_{k+1}(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义，连续。

即命题 2 在 $n=k+1$ 时也成立。

由数学归纳法得知命题 2 对于所有 n 均成立。

命题 2 证毕

命题 3 函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$在$x_0 \le x \le x_0+h$上是一致收敛的。

考虑级数:

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)] \quad x_0 \le x \le x_0+h \qquad (3.1.11)$$

它的部分和为: $\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]=\varphi_n(x)$

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)] \quad x_0 \le x \le x_0+h$$

为此，进行如下的估计，由逐步逼近序列(3.1.9)有:

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad x_0-h \le x \le x_0+h$$

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_0(\xi))\right|d\xi \le M(x-x_0) \qquad (3.1.12)$$

$$\left|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_0(\xi))\right|d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_1(\xi)-\varphi_0(\xi)\right|d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x} M(\xi-x_0)d\xi \le \frac{ML}{2!}(x-x_0)^2$$

设对于正整数 n，不等式

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\right| \le \frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$$ 成立，

$$\left|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\right|d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)\right|d\xi$$

$$\le \frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n d\xi = \frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

于是，由数学归纳法得到：对于所有的正整数 k，有如下的估计:

$$\left|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}(x-x_0)^k \qquad x_0 \le x \le x_0+h \qquad (3.1.13)$$

由此可知，当 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 时

$$\left|\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)\right| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}h^k \qquad (3.1.14)$$

(3.1.14)的右端是正项收敛级数 $\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}$ 的一般项，

由维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法(简称维氏判别法)，

级数(3.1.11) 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上一致收敛，

因而序列$\{\varphi_n(x)\}$ 也在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上一致收敛。

命题3证毕

现设 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$ $\quad|\varphi_n(x)-y_0|\le b \qquad (3.1.10)$

则 $\varphi(x)$ 也在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上连续，且由(3.1.10)

又可知 $|\varphi(x)-y_0|\le b$

命题4 $\varphi(x)$ 是积分方程(3.1.6)的定义于 $x_0\le x\le x_0+h$ 上的连续解。

证 明: 由利普希兹条件

$$|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi(x))|\le L|\varphi_n(x)-\varphi(x)|$$

以及 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上一致收敛于$\varphi(x)$

即知序列 $\{f(x,\varphi_n(x))\}\to f(x,\varphi(x))$

在 $x_0\le x\le x_0+h$ 一致收敛

因而，对(3.1.9)两边取极限,得到:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi$$

即 $$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi$$

这就是说, $\varphi(x)$ 是积分方程(3.1.16)的定义于 $x_0\le x\le x_0+h$ 上的连续解。 **命题4 证毕**

命题5 若 $\psi(x)$ 也是积分方程(3.1.6)的定义于

$x_0 \le x \le x_0 + h$ 上的一个连续解, 则

$$\varphi(x) \equiv \psi(x), \quad x_0 \le x \le x_0 + h$$

证明

首先证明 $\psi(x)$ 也是序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的一致收敛极限函数。

为此，从 $\varphi_0(x) = y_0$ $\quad \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad (n \ge 1)$

$$\psi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi))d\xi$$

进行如下的估计

$$|\varphi_0(x) - \psi(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \psi(\xi))| d\xi \le M(x - x_0)$$

$$\left|\varphi_0(x)-\psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\psi(\xi))\right|d\xi \le M(x-x_0)$$

$$\left|\varphi_1(x)-\psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_0(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))\right|d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_0(\xi)-\psi(\xi)\right|d\xi$$

$$\le ML\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)d\xi=\frac{ML}{2!}(x-x_0)^2$$

现设 $\left|\varphi_{n-1}(x)-\psi(x)\right| \le \dfrac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$

则有 $\left|\varphi_n(x)-\psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))\right|d\xi$

有 $$\left|\varphi_n(x)-\psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))\right|d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_{n-1}(\xi)-\psi(\xi)\right|d\xi$$

$$\le \frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n\,d\xi$$

$$=\frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

故由数学归纳法得知对于所有的正整数 n，有下面的估计式

$$\left|\varphi_n(x)-\psi(x)\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (3.1.15)$$

因此，在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有:

$$\left|\varphi_n(x) - \psi(x)\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1} \qquad (3.1.16)$$

$\dfrac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}$ 是收敛级数的公项，故 $n \to \infty$ 时 $\dfrac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1} \to 0$

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)]$$

因而 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上一致收敛于 $\psi(x)$

根据极限的唯一性，即得: $\varphi(x) \equiv \psi(x) \quad x_0 \le x \le x_0 + h$

命题5证毕

综合命题1-5，即得到存在唯一性定理的证明。

例 求初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的第三次近似解。

$\varphi_0(x) = 0$ $\qquad \varphi_1(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_0^2(x)]dx = \dfrac{x^3}{3}$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_1^2(x)]dx = \int_0^x [x^2 + \frac{x^6}{3^2}]dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_2^2(x)]dx = \int_0^x [x^2 + \frac{x^6}{3^2} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969}]dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$

附 注/Remark/

1）如果在 R 上 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 存在且连续, 则 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上关于 $\boldsymbol{y}$ 满足利普希兹条件，反之不成立。

证 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上连续，则在 R 上有界，记为 L

$\forall (x, y_i) \in R \quad i = 1,2$ 由中值定理

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| = \left| f_y'(x,\xi) \right| \cdot \left| y_1 - y_2 \right| \quad \xi \text{ 在 } y_1,\ y_2 \text{ 之间}$$

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|$$

故 $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足利普希兹条件。

这条件是充分条件，而非必要条件。

例1 $\dfrac{dy}{dx} = |y|$ R 为中心在原点的矩形域

$f(x, y) = |y|$ 在 $y = 0$（x轴上）无导数

但 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le \big||y_1| - |y_2|\big| \le |y_1 - y_2|$

故 $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足利普希兹条件。

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上存在且有界 $\longrightarrow$ $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足利普希兹条件。

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上存在且无界 $\longrightarrow$ $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 不满足利普希兹条件。

2) 定理1 中的两个条件是保证 Cauchy P 存在唯一的充分条件，而非必要条件。

例2 当连续条件不满足时，解也可能存在唯一。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \begin{cases} a & y = ax \qquad a \neq 0 \\ 0 & y \neq ax \end{cases}$$

$f(x,y)$ 在以原点为中心的矩形域中不连续，但解存在唯一

$$\begin{cases} 当 \quad y = ax \quad \dfrac{dy}{dx} = a \quad y = ax \\ 当 \quad y \neq ax \quad \dfrac{dy}{dx} = 0 \quad y = C \end{cases}$$

例3 当 Lipscitz 条件不满足时，解也可能存在唯一。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \begin{cases} y\ln|y| & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$f(x,y)$ 在 $(x,0)$ 的任何邻域内不满足Lipscitz 条件，但解存在唯一

$$|f(x, y_1) - f(x,0)| = |y\ln|y_1| - 0| = |\ln|y_1|| |y_1 - 0|$$

$$y \to 0, \qquad |\ln|y_1|| \to \infty \qquad \text{不可能有界}$$

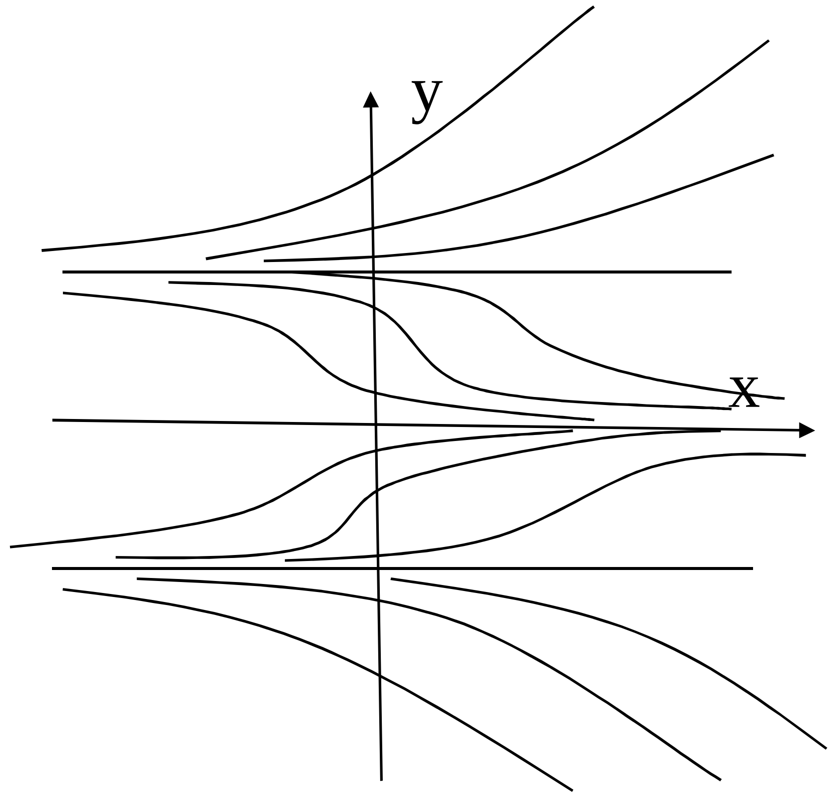
$$\frac{dy}{dx} = y\ln|y| \qquad \frac{dy}{y\ln|y|} = dx$$

$$\frac{dy}{y\ln|y|}=dx \qquad \frac{d\ln|y|}{\ln|y|}=dx$$

$$\ln\left|\ln|y|\right|=x+c_1$$

$$\ln|y|=c_2e^x$$

$$\begin{cases} y=\pm e^{c_2e^x} \\ y=0 \end{cases}$$



3） 若$f(x,y)$在带域$\alpha \le x \le \beta \ (-\infty < x < +\infty)$中连续，

且对y满足Lipschitz条件，则在整个区间 $[\alpha,\beta]$

中存在唯一满足条件 $\varphi(x_0)=y_0$ 的方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

的解 $\varphi(x)$。记 $M=\max\limits_{(x\in[\alpha,\beta])}\left|f(x,y_0)\right|$

例4 设方程(3.1)为线性方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)y+Q(x)$

则当$P(x),Q(x)$在区间$[\alpha,\beta]$上连续，则由任一初值

(x_0,y_0) $x_0\in[\alpha,\beta]$ 所确定的解在整个区间 $[\alpha,\beta]$

上都存在。

4) 一阶隐式方程的解的存在唯一性

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.3) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.4) \end{cases}$$

定理 2 如果在点 (x_0, y_0, y_0') 的某一邻域中，

$a)$ $F(x, y, y')$ 对所有的变元 (x, y, y') 连续，且存在连续的偏导数；

$b)$ $F(x_0, y_0, y_0') = 0$

$c)$ $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \neq 0$

则上述初值问题的解在 x_0 的某一邻域存在。

事实上，由条件知 $F(x,y,y')=0$ 所确定的隐函数

$y'=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域内存在且连续，且

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_{y'}}$ 在 (x_0,y_0) 邻域内连续，在以 (x_0,y_0)

为中心的某一闭矩形区域 D 中有界，所以 $f(x,y)$

在D 中关于 y 满足Lipschitz条件。

由解的存在唯一性定理， $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的解 $y(x)$ 存在唯一，

存在区间中的 h 可足够小。同时，有

$$y(x_0)=y_0 \qquad y'(x_0)=y'_0=f(x_0,y_0)$$

三、 近似计算和误差估计

第 n 次近似解

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad x_0 \le x \le x_0 + h \end{cases}$$

第 n 次近似解的误差公式

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}$$

例4 方程 $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 定义在矩形域

$R:-1\le x\le 1,\ \ -1\le y\le 1,$ 试确定经过点

$(0,0)$ 的解的存在区间，并求在此区间上与真

正解的误差不超过0.05 的近似解的表达式。

解 满足解的存在唯一性定理的条件

$$M=\max_{(x,y)\in R}\left|x^2+y^2\right|=2 \qquad h=\min(a,\frac{b}{M})=\min(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

Lipschitz 常数取为 ***L=2***，因为 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|=\left|2y\right|\le 2=L$

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} = \frac{M}{L}\frac{1}{(n+1)!}(Lh)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} < 0.05 \qquad n=3$$

$$\varphi_0(x)=0 \qquad \varphi_1(x)=\int_0^x [x^2+\varphi_0^2(x)]dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x [x^2+\varphi_1^2(x)]dx = \int_0^x [x^2+\frac{x^6}{3^2}]dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^x [x^2+\varphi_2^2(x)]dx = \int_0^x [x^2+\frac{x^6}{3^2}+\frac{2x^{10}}{189}+\frac{x^{14}}{3969}]dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}$$

思考:

1、 求方程 $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$，满足条件 $y(0) = 0$

的解的最大存在区间，即 h 的最大值。

2、证明下列初值问题的解在指定的区间上存在且唯一:

$$(1)\quad y' = y^2 + \cos x^2,\quad y(0) = 0,\quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$$

$$(2)\quad y' = x + y^2,\quad y(0) = 0,\quad 0 \le x \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$$

$$(3)\quad y' = e^{-x} + \ln(1 + y^2),\quad y(0) = 0,\quad 0 \le x < \infty$$

作业 P.78 第1，3，4，7题