（二）拉普拉斯变换法 /Laplace Transform /

附录1 拉普拉斯变换

§1拉普拉斯变换定义/Definition of Laplace Transform/

对于在 $[0,\infty)$ 上有定义的函数 $f(t)$

若

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt$$

对于已给的一些 S（一般为复数）存在，则称

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，记为 $L[f(t)]=F(s)$

$f(t)$称为Laplace Transform 的原函数，$F(s)$称为$f(t)$的象函数.

拉普拉斯变换法存在性/Existence of Laplace Transform/

假若函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 的每一个有限区间上是分段连续的, 并且∃常数 $M > 0$ $\sigma \geq 0$ 使对于所有的 $t \geq 0$ 都有 $|f(t)| < Me^{\sigma t}$ 成立

则当 $\mathrm{Re}\, s > \sigma$ 时, $f(t)$ 的Laplace Transform是存在的。

例1 $f(t)=1 \quad (t \geq 0)$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \lim_{T\to\infty}[-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^T]$$

$$= \lim_{T\to\infty}[-\frac{1}{s}e^{-sT}+\frac{1}{s}] = \frac{1}{s}$$ 当 $\operatorname{Re} s > 0$

即 $L[1]=\frac{1}{s} \quad (\operatorname{Re} s > 0)$

例2 $f(t)=e^{zt}$(z 是给定的实数或复数)

$$L[e^{zt}]=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{zt}dt$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-(s-z)t}dt=\frac{1}{s-z}\quad (\mathrm{Re}(s-z)>0)$$

$$L[e^{zt}]=\frac{1}{s-z}\qquad (\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,z)$$

§ 2 拉普拉斯变换的基本性质/ Properties of Laplace Transform/

1 线性性质 如果 $f(t), g(t)$ 是原函数，α 和 β 是任意两个常数(可以是复数)，则有

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)]$$

$$左 = \int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]dt$$

$$= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

$$= \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)] = 右$$

例1 如果原函数为 $f(t)=u(t)+iv(t)$, u,v 为实函数，则 $L[f(t)]=L[u(t)]+iL[v(t)]$

显然，若 S 为实函数，

$$L[f(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}\cdot f(t)dt=\int_0^{\infty}e^{-st}u(t)dt+i\int_0^{\infty}e^{-st}v(t)dt$$

$$=L[u(t)]+iL[v(t)]$$

则 $L[u(t)]=\operatorname{Re}L[f(t)]$

$$L[v(t)]=\operatorname{Im}L[f(t)]$$

$$f(t) = e^{iwt} = \cos wt + i\sin wt$$

$$L[\cos wt] + iL[\sin wt] = \quad L[e^{iwt}]$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{iwt} dt = \int_0^\infty e^{-(s-wi)t} dt \quad = \frac{1}{s-iw} \qquad (s>0)$$

$$= \frac{s}{s^2+w^2} + i\frac{w}{s^2+w^2}$$

$$L[\cos wt] = \frac{s}{s^2+w^2} \qquad L[\sin wt] = \frac{w}{s^2+w^2}$$

$$L[\cos t] = \frac{s}{s^2+1} \qquad L[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

2 原函数的微分性质

如果 $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)$ 都是原函数，则有

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0)$$ 或

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

如果 $f^{(k)}(t)$ 在 $t=0$ 处不连续，则

$f^{(k)}(0)$ 理解为 $\lim\limits_{T \to 0^+} f^{(k)}(T)$

证 $L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f'(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st} df(t)$

$$= \lim_{T\to\infty}[(e^{-st} f(t)\big|_0^T + s\int_0^T e^{-st} f(t)dt] = sL[f(t)] - f(0)$$

$$(\operatorname{Re} s > \sigma \geq 0)$$

假定

$$L[f^{(n-1)}(t)] = s^{(n-1)}L[f(t)] -$$

$$s^{n-2} f(0) - s^{n-3} f'(0) - \cdots - f^{(n-2)}(0)$$

成立

$$L[f^{(n)}(t)] = sL[f^{(n-1)}(t)] - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots$$

$$- sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

证毕

3 象函数的微分性质

$$F(s) = L[f(t)] \qquad F'(s) = -\int_0^{\infty} te^{-st} f(t)dt$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n e^{-st} f(t)dt$$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[f(t)]$$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[f(t)]$$

另外，令 $f(t) = 1$

$$L[t^n] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\operatorname{Re} s > 0)$$

§3 拉普拉斯逆变换 /Inverse of Laplace Transform /

已知象函数，求原函数 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$

也具有线性性质

$$L^{-1}[c_1F_1(s) + c_2F_2(s)] = c_1L^{-1}[F_1(s)] + c_2L^{-1}[F_2(s)]$$

$$L^{-1}[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)]$$

$$=L^{-1}[c_1\int_0^{\infty}e^{-st}f_1(t)dt+c_2\int_0^{\infty}e^{-st}f_2(t)dt]$$

$$=L^{-1}[\int_0^{\infty}e^{-st}(c_1f_1(t)+c_2f_2(t))dt]$$

$$=c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$$

$$=c_1L^{-1}[F_1(s)]+c_2L^{-1}[F_2(s)]$$

由线性性质可得

如果 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 可分解为

$$F(s) = F_1(s) + \cdots + F_n(s)$$

并假定 $F_i(s)$ 的拉普拉斯变换容易求得，即

$$F_i(s) = L[f_i(t)]$$

则 $$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + \cdots + L^{-1}[F_n(s)]$$

$$= f_1(t) + \cdots + f_n(t)$$

例1 求 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$ **的Laplace 反变换**

解 $$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{2}{s+1}]-L^{-1}[\frac{1}{s+2}]$$

$$=2e^{-t}-e^{-2t} \qquad t\geq 0$$

例2 求 $F(s)=\dfrac{s^2-5s+s}{(s-1)(s-2)^2}$ 的**Laplace 反变换**

解 $$F(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$f(t)=L^{-1}[\frac{1}{s-1}]-L^{-1}[\frac{1}{(s-2)^2}]$$

$$=e^t-te^{2t}\quad(t\geq 0)$$

(二)拉普拉斯变换法(求非齐次线性方程的特解)

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t) \quad (4.32)$$

$$x(0)=x_0, x'(0)=x_0', x''(0)=x_0'', \cdots, x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$$

a_i 为常数

令 $X(s)=L[x(t)] \equiv \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt$

$$L[x'(t)]=sX(s)-x_0$$

$$\cdots$$

$$L[x^{(n)}(t)]=s^nX(s)-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_0'-\cdots-sx_0^{(n-2)}-x_0^{(n-1)}$$

给(4.32)两端施行Laplace Transform

$$s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x_0' - \cdots - s x_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}$$
$$+ a_1[s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - s^{n-3}x_0' - \cdots - x_0^{(n-2)}] +$$
$$\cdots + a_{n-1}[sX(s) - x_0] + a_n X(s) = F(s)$$

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)X(s) = F(s) + B(s)$$

$$X(s) = \frac{F(s)+B(s)}{A(s)}$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[\frac{F(s)+B(s)}{A(s)}]$$

例3 求 $\dfrac{dx}{dt} - x = e^{2t}$ 满足初始条件$x(0)=0$的特解

解 令 $L[x(t)] = X(s)$ $\quad L(\dfrac{dx}{dt}) - L[x] = L[e^{2t}]$

$$sX(s) - x(0) - X(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[\frac{1}{s-2}] - L^{-1}[\frac{1}{s-1}] = e^{2t} - e^{t}$$

例 4 求 $x'' + 2x' + x = e^{-t}$ 满足初始条件 $x(1) = x'(1) = 0$ 的特解

解 令 $\tau = t - 1$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{d\tau^2} \qquad e^{-t} = e^{-\tau} \cdot e^{-1}$$

$$x(\tau+1)\Big|_{\tau=0} = 0 \quad x'(\tau+1)\Big|_{\tau=0} = 0$$

$$L[x(\tau)] = X(s)$$

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+2sX(s)-x(0)+X(s)=\frac{1}{s+1}\frac{1}{e}$$

$$(s^2+2s+1)X(s)=\frac{1}{s+1}\frac{1}{e}$$

$$X(s)=\frac{1}{e(s+1)(s^2+2s+1)}=\frac{2!}{e(s+1)^3}\frac{1}{2}$$

$$x(\tau)=\frac{1}{2e}\tau^2e^{-\tau}$$

$$x(t)=\frac{1}{2e}(t-1)^2e^{-(t-1)}=\frac{1}{2}(t-1)^2e^{-t}$$

例 5 求 $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$ 满足初始条件

$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ 的特解

解 令 $X(s) = L[x(t)]$

$$s^3 X(s) + 3s^2 X(s) + 3sX(s) + X(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} = 1 - \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2)e^{-t}$$

练习

求方程 $$x'' + a^2 x = \sin at$$

满足初始条件

$$x(0) = x'(0) = 0$$

的特解，其中 a 为非零常数。

作业:用**Laplace Transform** 求 P.146

第 25, 26 题