§ 5.2 线性微分方程组的一般理论

General Theory of Linear ODEs

本节要求/Requirements/

- 掌握线性齐次微分方程组的解的性质及代数结构。
- 掌握线性非齐次微分方程组的解的代数结构，理解常数变易法的基本思想。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}' = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x} + \boldsymbol{f}(t) \qquad \textbf{(5.14)}$$

如果 $\boldsymbol{f}(t) \neq 0$ 则**(5.14)**称为非齐次线性的。

如果 $\boldsymbol{f}(t) \equiv 0$ 则方程 (5.15）称为齐次线性的。

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x} \qquad \textbf{(5.15)}$$

若 $\boldsymbol{A}(t)$ 为常数矩阵，则称为常系数线性方程组。

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{A}\mathbf{x}$$

5.2.1 齐线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad (5.15)$$

定理2（叠加原理） 如果 $\boldsymbol{u}(t)$和 $\boldsymbol{v}(t)$是(5.15)的解，则它们的线性组合 $\alpha\,\boldsymbol{u}(t)+\beta\,\boldsymbol{v}(t)$ 也是(5.15)的解。

证明: $[\alpha\,\boldsymbol{u}(t)+\beta\,\boldsymbol{v}(t)]' = \alpha\,\boldsymbol{u}'(t)+\beta\,\boldsymbol{v}'(t)$

$$= \alpha\,\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+\beta\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{A}(t)[\alpha\,\boldsymbol{u}(t)+\beta\,\boldsymbol{v}(t)]$$

如果 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 是(5.15)的解，则

$$c_1\mathbf{x}_1(t)+c_2\mathbf{x}_2(t)+\cdots+c_n\mathbf{x}_n(t)$$

也是(5.15)的解。

可验证 $\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}$

是方程组 $x'=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}x$ 的解，则

$\boldsymbol{x}(t)=C_1\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}$ 也是方程组的解。

基本概念/Basic Concept/

定义在区间 $a \le t \le b$ 上的向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_m(t)$$

是线性相关的，如果存在不全为零的常数

$c_1, c_2, \cdots, c_m,$ 使得等式

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m(t) \equiv \boldsymbol{0}, \quad a \le t \le b$$

成立；否则，$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_m(t)$ 为线性无关的。

例 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ t^k \end{bmatrix}$ 线性无关。$-\infty < t < \infty$

设有 n 个定义在区间 $a \le t \le b$ 上的向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{x}_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

由这n个向量函数构成的行列式，

$$W[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]\equiv W(t)\equiv\det\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

称为这些向量函数的伏朗斯基行列式。

定理3 如果向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 在区间

$a\le t\le b$ 上线性相关，则它们的伏朗斯基行列式

$$W(t)\equiv 0,\quad a\le t\le b$$

证明 由假设，存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$

使得

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t) \equiv \boldsymbol{0}, \quad a \le t \le b \tag{5.16}$$

$$\begin{cases} c_1 x_{11}(t) + c_2 x_{12}(t) + \cdots + c_n x_{1n}(t) = 0 \\ c_1 x_{21}(t) + c_2 x_{22}(t) + \cdots + c_n x_{2n}(t) = 0 \\ \cdots\cdots \\ c_1 x_{n1}(t) + c_2 x_{n2}(t) + \cdots + c_n x_{nn}(t) = 0 \end{cases}$$

其系数行列式恰是 $W(t)$

$$W(t) \equiv 0 \quad a \le t \le b$$

证毕

定理4 如果(5.15)的解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关，那么，它们的伏朗斯基行列式

$$W(t) \neq 0, \quad a \leq t \leq b$$

证明 用反证法。

设有某一个 $t_0, \quad a \leq t_0 \leq b$ 使得 $W(t_0) = 0,$

考虑下面的齐次线性代数方程组：

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t_0) + c_2\boldsymbol{x}_2(t_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t_0) = \boldsymbol{0} \qquad \textbf{(5.17)}$$

它的系数行列式 $W(t_0)=0$ **，所以(5.17)有非零解**

$$\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n, \qquad \tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{0}$$

以这个非零解作向量函数

$$\boldsymbol{x}(t)\equiv \tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t) \qquad \textbf{(5.18)}$$

易知 $\boldsymbol{x}(t)$ **是(5.15)的解，且满足初始条件**

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{0} \qquad \textbf{(5.19)}$$

而在 $a\le t\le b$ **上恒等于零的向量函数** $\boldsymbol{0}$ **也是(5.15)的满足初始条件(5.19)的解。**

由解的唯一性，知道 $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{0}$ 即

$$\tilde{c}_1 \boldsymbol{x}_1(t) + \tilde{c}_2 \boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n \boldsymbol{x}_n(t) = \boldsymbol{0}, \quad a \le t \le b$$

因为 $\tilde{c}_{1,} \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$ 不全为零，这就与

$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关矛盾。

定理得证。

结论 由(5.15) 的解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 作成的伏朗斯基行列式 $W(t)$ 或者恒等于零，或者恒不等于零。

定理5 (5.15)一定存在 n 个线性无关的解。

$$\boldsymbol{x}_1(t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t_0)=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n(t_0)=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_1(t),\qquad \boldsymbol{x}_2(t),\qquad \cdots \qquad \boldsymbol{x}_n(t)$$

$W(t_0)=1\neq 0,\quad \boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关

定理得证。

定理6 如果 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 是 **(5.15)** $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的解，则(5.15)的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t)$$

这里 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是相应的确定常数。

证明 任取(5.15)的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$，它满足

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad t_0 \in [a, b]$$

令 $$\boldsymbol{x}(t_0) = c_1\boldsymbol{x}_1(t_0) + c_2\boldsymbol{x}_2(t_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t_0) \qquad \textbf{(5.20)}$$

上式看作是以 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为未知量的线性代数方程组，

系数行列式就是 $W(t_0)$,因为$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$

线性无关，则 $W(t_0) \neq 0$ ，(5.20)有唯一解

$\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$ 使得 $\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0)$

作向量函数 $\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t)$

它显然是(5.15)的解，且满足条件

$$\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0)$$

$\boldsymbol{x}(t)$与 $\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t)$ 具有相同的

初始条件，因此由解的存在唯一性条件可知

$$x(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)$$

证毕

推论1 (5.15)线性无关解的最大个数等于 n 。

基本解组： (5.15)的 n 个线性无关解。

解矩阵： 由(5.15) n 个解的列构成的矩阵。

基解矩阵： 由(5.15) n 个线性无关解的列构成的矩阵。

标准基矩阵： $\det \Phi(t) \neq 0$ $\quad \Phi(0) = \boldsymbol{E}$

定理5和定理6的另一种形式

定理1*(5.15)一定存在基解矩阵；若 $\psi(t)$ 是(5.15)

任一解，则 $\psi(t)=\Phi(t)\boldsymbol{c}$

$$\psi(t)=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$$

定理2* 一个解矩阵是基解矩阵的充要条件是

$$\det\Phi(t)\neq 0 \quad (a\leq t\leq b)$$

而且，如果对某一个 $t_0\in[a,b], \det\Phi(t_0)\neq 0,$

则 $\det\Phi(t)\neq 0, \quad a\leq t\leq b$

例1 验证 $\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ 是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x},\ \text{其中}\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

的基解矩阵。

解 首先证明$\Phi(t)$是解矩阵。令 $\varphi_1(t)$ 表示 $\Phi(t)$ 的第一列，$\varphi_2(t)$表示 $\Phi(t)$ 的第二列

$$\varphi_1'(t)=\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\varphi_1(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_2'(t)=\begin{bmatrix} e^t+te^t \\ e^t \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\varphi_2(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^t+te^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

这表示 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 是方程组的解，因此

$$\Phi(t)=[\varphi_1(t),\varphi_2(t)]$$

是解矩阵。 又因为 $\det\Phi(t)=e^{2t}\neq 0$ ，所以

$\Phi(t)$ 是基解矩阵。

结论: $X(t)$是方程组(5.15) $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \quad a \le t \le b$

的一解矩阵的充要条件是 $X(t)$ 必满足关系

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t) \quad a \le t \le b$$

$$\boldsymbol{X}'(t) = (\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t))'$$

$$= (\boldsymbol{x}_1'(t), \boldsymbol{x}_2'(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n'(t))$$

$$= (\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_n)$$

$$= \boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)$$

推论1 如果 $\Phi(t)$ 是(5.15)在区间 $a \le t \le b$ 上的基解矩阵，C 非奇异 $n \times n$ 常数矩阵，那么，

$\Phi(t)C$ 也是(5.15)在区间 $a \le t \le b$ 上的基解矩阵。

证明 令 $\Psi(t) \equiv \Phi(t)C \quad (a \le t \le b)$

$$\Psi'(t) \equiv \Phi'(t)C \equiv A(t)\Phi(t)C \equiv A(t)\Psi(t)$$

$\Psi(t)$ 是解矩阵。

$$\det\Psi(t) = \det\Phi(t) \cdot \det C \neq 0 \quad a \le t \le b$$

$\Psi(t)$即$\Phi(t)C$ 是(5.15)的基解矩阵。

证毕

推论2 如果 $\Phi(t),\Psi(t)$在区间 $a\le t\le b$ 上是方程组(5.15)的两个基解矩阵，那么，存在一个非奇异 $n\times n$ 常数矩阵C，使得在区间 $a\le t\le b$ 上 $\Psi(t)=\Phi(t)\boldsymbol{C}$

证明 $\Phi(t)$ 基解矩阵， $\Phi^{-1}(t)$ 存在，

令 $\Phi^{-1}(t)\cdot\Psi(t)=\boldsymbol{X}(t)$ 或 $\Psi(t)=\Phi(t)\boldsymbol{X}(t)$

$$\boldsymbol{A}(t)\Psi(t)\equiv\Psi'(t)\equiv\Phi'(t)\cdot\boldsymbol{X}(t)+\Phi(t)\cdot\boldsymbol{X}'(t)$$

$$=\boldsymbol{A}(t)\Phi(t)\cdot\boldsymbol{X}(t)+\Phi(t)\cdot\boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\Psi(t)+\Phi(t)\cdot\boldsymbol{X}'(t)$$

$$\Phi(t)\cdot\boldsymbol{X}'(t)=0 \qquad \boldsymbol{X}'(t)=0 \qquad \boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{C}$$

$$\Psi(t)=\Phi(t)\boldsymbol{C} \qquad \det\boldsymbol{C}=\det\Phi^{-1}(0)\cdot\Psi(0)\neq 0$$

证毕

推论3 如果 $\Phi(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上是某方程组的基解矩阵，那么，这个方程组为

$$\boldsymbol{x}' = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{x} \quad a \le t \le b$$

证明 设所求方程组为 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$

则 $$\Phi'(t) = \boldsymbol{A}(t)\Phi(t) \quad a \le t \le b$$

故 $$\boldsymbol{A}(t) = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t) \quad a \le t \le b$$

例 已知一个一阶线性齐次方程组的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$，求该方程组。

解 $$\Phi^{-1}(t)=\frac{1}{e^{4t}}\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(t)=\Phi'(t)\Phi^{-1}(t)=\frac{1}{e^{4t}}\begin{bmatrix} 2e^{2t} & e^{2t}+2te^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1+2t \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

所求方程组为 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

练习

1 已知一个一阶线性齐次方程组的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$$ ，求该方程组。

作业

P.184，第2(c)，3题。

P.200，第2，4题。