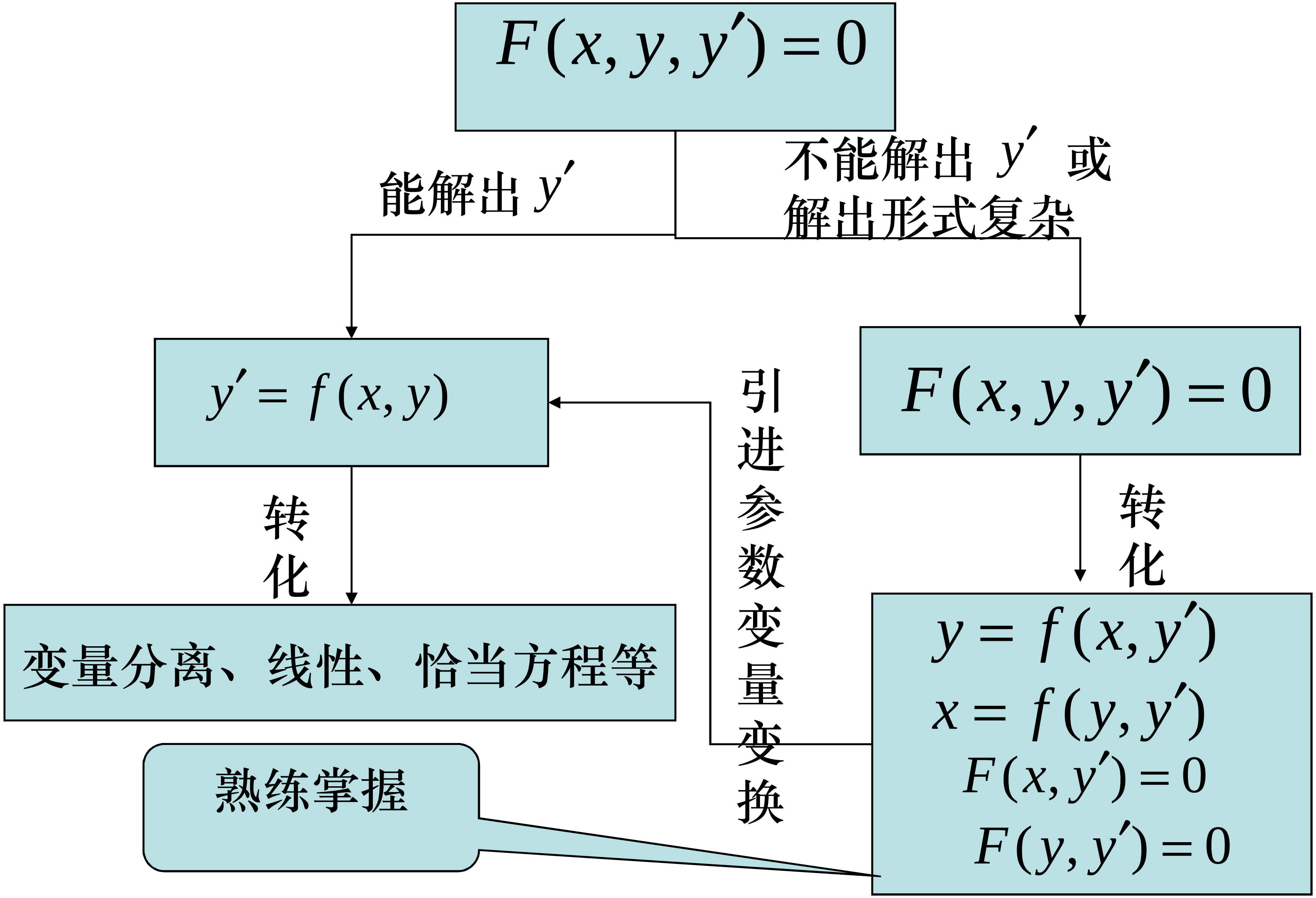
§2.4 一阶隐式微分方程及其参数表示

/Implicit First-Order ODE and

Parameter Representation/

§ 2.4 Implicit First-Order ODE and Parameter representation



一、 能解出 y （或 x ）的方程

1 $y = f(x, \frac{dy}{dx})$ (2.4.1)

这里假设函数 $f(x, \frac{dy}{dx})$ 有连续的偏导数。

解法： 引进参数 $\frac{dy}{dx} = P$ ，则(2.4.1)变为

$$y = f(x, p) \tag{2.4.2}$$

两边关于 x 求导，并把 $p = \frac{dy}{dx}$ 代入，得

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \tag{2.4.3}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}}$$

关于 x 和 p 显式方程

(i) 若已得出(2.4.3)的通解形式为, $p=\varphi(x,c)$ 代入(2.4.2)得

$$y = f(x,p)$$

$y=f(x,\varphi(x,c))$ 就是(2.4.1)的通解。

(ii) 若得出(2.4.3)通解形式为 $x=\psi(p,c)$ ，则原方程(2.4.1)

有参数形式的通解 $\begin{cases} x=\psi(p,c) \\ y=f(\psi(p,c),p) \end{cases}$

其中 p 是参数，c为任意常数。

(iii) 若求得(2.4.3)通解形式 $\Phi(x,p,c)=0$，则原方程(2.4.1)

有参数形式通解 $\begin{cases} \Phi(x,p,c)=0 \\ y=f(x,p) \end{cases}$

其中p是参数,c为任意常数。

2 $x = f(y, \frac{dy}{dx})$ (2.4.4) $\frac{dy}{dx} = p$

解法 $x = f(y, p)$ (2.4.5)

两边对 y 求导 $\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$ (2.4.6)

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}$$

若求得为 $p = \psi(y, c)$

则(2.4.4)的通解为 $x = f(y, \psi(y, c))$

若求得为 $\Phi(y, p, c) = 0$

则(2.4.4)的通解为 $\begin{cases} x = f(y, p) \\ \Phi(y, p, c) = 0 \end{cases}$

例1　求解方程　$(\frac{dy}{dx})^3 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$

解法1： 解出 y　令 $\frac{dy}{dx} = p$

得　$y = p^3 + 2xp$　两边对 x 求导

$$p = 3p^2\frac{dp}{dx} + 2x\frac{dp}{dx} + 2p$$

$$3p^2dp + 2xdp + pdx = 0$$

当 $p \neq 0$ 时，上式乘以 p，得

$$3p^3dp + 2xpdp + p^2dx = 0$$

积分，得　$\frac{3p^4}{4} + xp^2 = c$

解出 x，得 $x=\dfrac{c-\dfrac{3}{4}p^4}{p^2}$

将它代入 $y=p^3+2xp$

$$y=p^3+\frac{2(c-\frac{3}{4}p^4)}{p}$$

因此，方程参数形式通解 $\begin{cases} x=\dfrac{c}{p^2}-\dfrac{3}{4}p^2 \\ y=\dfrac{2c}{p}-\dfrac{1}{2}p^3 \end{cases}$ $(p\neq 0)$

当 p=0 时，由 $y=p^3+2xp$ 可知，y=0也是方程的解。

解法2: 解出 x，并把 $\frac{dy}{dx}=p$，得 $x=\frac{y-p^3}{2p} \quad (p\neq 0)$

两边对 y 求导

$$\frac{1}{p}=\frac{p(1-3p^2\frac{dp}{dy})-(y-p^3)\frac{dp}{dy}}{2p^2}$$

$$pdy+ydp+2p^3dp=0 \qquad 2yp+p^4=c$$

$$y=\frac{c-p^4}{2p} \qquad x=\frac{\frac{c-p^4}{2p}-p^3}{2p}=\frac{c-3p^4}{4p^2}$$

所以，方程的通解为:

$$\begin{cases} x=\frac{c}{4p^2}-\frac{3}{4}p^2 \\ y=\frac{c}{2p}-\frac{p^3}{2} \end{cases} \qquad p\neq 0$$

此外，还有解 $y=0$

例2 求解方程 $y=(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$

解 令 $\frac{dy}{dx}=p$ 得 $y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$

两边对 x 求导，得 $p=2p\frac{dp}{dx}-x\frac{dp}{dx}-p+x$

$(\frac{dp}{dx}-1)(2p-x)=0$ $\frac{dp}{dx}-1=0$ $p=x+c$

将它代入 $y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$

得方程的通解 $y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2$

方程的通解 $y=\dfrac{x^2}{2}+cx+c^2$

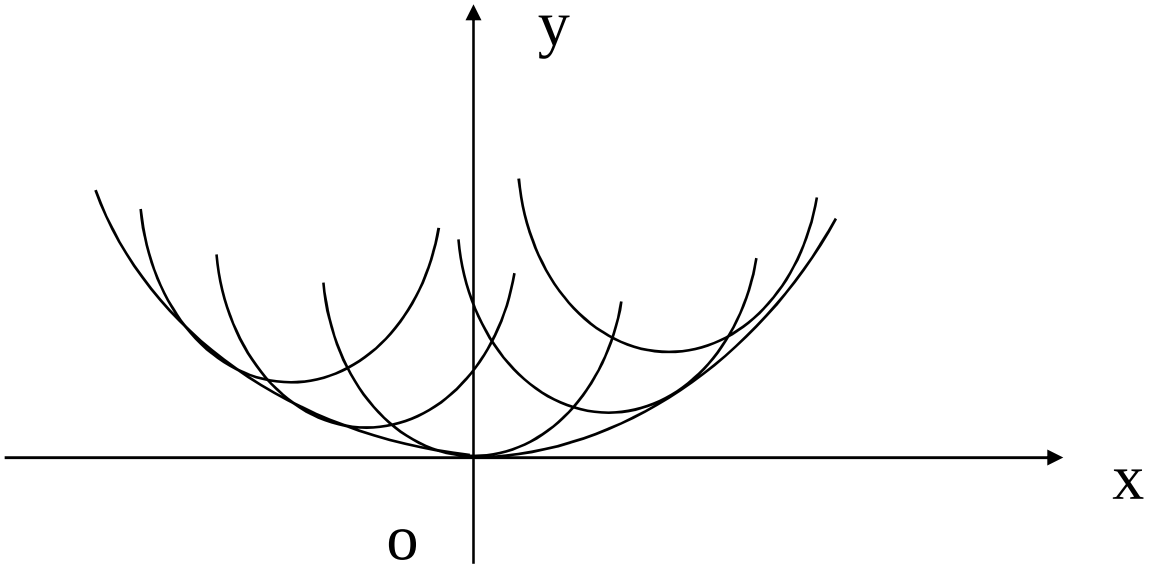
再由 $2p-x=0$ 得 $p=\dfrac{x}{2}$

将它代入 $y=p^2-xp+\dfrac{x^2}{2}$，又得方程的一个解 $y=\dfrac{x^2}{4}$

注意: 此解与通解 $y=\dfrac{x^2}{2}+cx+c^2$ 中的每一条积分曲线均相切(如图)(P54)这样的解我们称之为奇解,下一章将给出奇解的确切含义。

§ 2.4 Implicit First-Order ODE and Parameter Representation

$$y = \frac{x^2}{2} + cx + c^2 \qquad\qquad y = \frac{x^2}{4}$$



二、 不显含 y (或 x 的方程)

3 $F(x, y') = 0$ 关键 (2.4.7)

解法: 引入变换 $x = \varphi(t)$ 从(2.4.7)得到 $y' = \dfrac{dy}{dx} = \psi(t)$

(or 引入变换 $y' = \psi(t)$ 从(2.4.7)得到 $x = \varphi(t)$)

$$dy = \psi(t)dx = \psi(t)\varphi'(t)dt$$

$$\int dy = \int \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c$$

则，方程的参数形式通解为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c \end{cases}$$

3 $F(x, y') = 0$ (2.4.7)

特殊情形 令 $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$

$$x = \varphi(p)$$

$$dy = p dx = p\varphi'(p)dp$$

$$y = \int p\varphi'(p)dp + c$$

通解为 $\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \int p\varphi'(p)dp + c \end{cases}$

关键

4 $F(y,y')=0$ (2.4.8)

解法： 引入变换 $y=\varphi(t)$ 从(2.4.7)得到 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\psi(t)$

(or 引入变换 $y'=\psi(t)$ 从(2.4.7)得到 $y=\varphi(t)$)

$$dy=\psi(t)dx \qquad dx=\frac{1}{\psi(t)}dy=\frac{1}{\psi(t)}\varphi'(t)dt$$

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c$$

则，方程的参数形式通解为
$$\begin{cases} x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c \\ y=\varphi(t) \end{cases}$$

若 $F(y,0)=0$有实根 $y=k$ 则 $y=k$ 也是方程的解。

4 $F(y, y')=0$ (2.4.8)

特殊情形 令 $y'=\dfrac{dy}{dx}=p$

$$y=\varphi(p)$$

$$dx=\frac{1}{p}dy=\frac{1}{p}\varphi'(p)dp$$

$$x=\int\frac{1}{p}\varphi'(p)dp+c$$

通解为 $\begin{cases} x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(p)}{p}dp+c \\ y=\varphi(p) \end{cases}$

若 $F(y,0)=0$有实根 $y=k$ 则 $y=k$ 也是方程的解。

例4 求解方程 $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$ 这里$y' = \dfrac{dy}{dx}$

解 令 $y' = p = tx$

则 由方程，得 $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$ 从而 $p = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$

于是 $dy = \dfrac{3t^2}{1+t^3}dx = \dfrac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt$

$$y = \int \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt = \frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + c$$

通解为
$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3(1+4t^3)}{2(1+t^3)^2} + c \end{cases}$$

例5 求解方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$

解 令 $2-y'=yt$ 把 $y'=2-yt$代入原微分方程

得 $y^2(yt-1)=y^2t^2$

由此得 $y=\dfrac{1}{t}+t$ 且 $y'=1-t^2$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{1}{1-t^2}d(\frac{1}{t}+t)=-\frac{1}{t^2}dt \qquad x=\frac{1}{t}+c$$

方程的参数形式的通解为 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}+c \\ y=\dfrac{1}{t}+t \end{cases}$

此外, $y=\pm 2$ 也是方程的解。

练习 求解方程 $y = xy' + \varphi(y')$ $\quad y' = \frac{dy}{dx} = p$

克莱洛方程 Clairant Equation

注意观察方程的解的特点

解

$$p = p + xp' + \varphi'(p)p'$$

$$(x + \varphi'(p))p' = 0$$

$$p' = 0 \qquad x = -\varphi'(p)$$

$$p = c \qquad y = cx + \varphi(c)$$

通解

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p) \\ y = -\varphi'(p)p + \varphi(p) \end{cases}$$

奇解

作业: P.59 第 1，3，4题

三 利用变量代换的微分方程积分法

有时方程 $F(x,y,y')=0$ 就 x,y,y' 都不易解出,

或者虽能解出,但积分计算比较复杂，这时，除了引用

适当的参数外，还可以先进行适当的变量代换后再

求解，这种方法称为利用变量代换的微分方程积分法。

但是，如何选择适当的变量来代换，没有一定的规律,

需要在做大量的练习中积累经验.

例6 求解方程

$$(y')^2\cos^2 y + y'\sin x\cos x\cos y - \sin y\cos^2 x = 0$$

解 令 $\sin y = u \quad \sin x = v$

则 $du = \cos y dy, \quad dv = \cos x dx \quad y' = \dfrac{\cos x}{\cos y}\dfrac{du}{dv}$

代入原方程，得 $(\dfrac{du}{dv})^2 + v\dfrac{du}{dv} - u = 0$

即 $u = v\dfrac{du}{dv} + (\dfrac{du}{dv})^2$ 克莱洛方程

通解 $u = c^2 + vc$ 奇解 $u = -\dfrac{v^2}{2}$

$\sin y = c^2 + c\sin x \qquad \sin y = -\dfrac{\sin^2 x}{2}$

例7 求方程 $(xy'-y)(yy'+x)=2y'$ 的通解.

解 令 $y^2=u,\quad x^2=v$

则 $du=2ydy,\quad dv=2xdv$ 于是 $y'=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{du}{dv}$

代入原方程，得 $(v\dfrac{du}{dv}-u)(\dfrac{du}{dv}+1)=2\dfrac{du}{dv}$

$\dfrac{du}{dv}=p$ $\quad vp^2-up+vp-u=2p$

$u=vp-\dfrac{2p}{1+p}$ 克莱洛方程

通解 $y^2=cx^2-\dfrac{2c}{1+c}$ 奇解 $\begin{cases} x^2=\dfrac{2}{(1+p)^2} \\ y^2=\dfrac{2p^2}{(1+p)^2} \end{cases}$