5.2.2 非齐线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \qquad \textbf{(5.14)}$$

性质1 如果 $\varphi(t)$ 是(5.14)的解，$\psi(t)$ 是对应齐次方程组(5.15)的解，则 $\varphi(t)+\psi(t)$ 是(5.14)的解。

$$[\varphi(t)+\psi(t)]' = \varphi'(t)+\psi'(t)$$

$$= \boldsymbol{A}(t)\varphi(t) + \boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{A}(t)\psi(t)$$

$$= \boldsymbol{A}(t)[\varphi(t)+\psi(t)] + \boldsymbol{f}(t)$$

性质2 如果 $\tilde{\varphi}(t)$和$\overline{\varphi}(t)$ 是(5.14)的任意两个解，

则 $\tilde{\varphi}(t)-\overline{\varphi}(t)$ 是(5.14)对应齐次线性方程组

(5.15)的解。

$$[\tilde{\varphi}(t)-\overline{\varphi}(t)]'$$

$$=[\boldsymbol{A}(t)\tilde{\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t)]-[\boldsymbol{A}(t)\overline{\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t)]$$

$$=\boldsymbol{A}(t)[\tilde{\varphi}(t)-\overline{\varphi}(t)]$$

定理7 设 $\Phi(t)$ 是(5.15)的基解矩阵，$\overline{\varphi}(t)$ 是(5.14)的某一解，则(5.14)的任一解 $\varphi(t)$ 都可以表示为：

$$\varphi(t)=\Phi(t)c+\overline{\varphi}(t) \quad (5.23)$$

这里 c 是确定的常数列向量。

证明 $\varphi(t)$ 是(5.14)的任一解，$\varphi(t)-\overline{\varphi}(t)$ 是齐次方程组(5.15)的解，因此存在常列向量 c，使得

$$\varphi(t)-\overline{\varphi}(t)=\Phi(t)c$$

$$\varphi(t)=\Phi(t)c+\overline{\varphi}(t)$$

为了寻求(5.14)的通解，只要知道(5.14) 对应齐的齐线性方程组(5.15)的基解矩阵和自身的一个解即可。

已知(5.15)的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，则可用常数变易法求(5.14)的特解 $\varphi(t)$

假设(5.14)存在形如 $\varphi(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$ (5.24) 的解，则

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{f}(t)$$

而 $$\boldsymbol{\Phi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t) \qquad (5.25)$$

$$\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{c}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds, \qquad t_0,t\in[a,b]$$

$\boldsymbol{c}(t_0)=\boldsymbol{0}$ 　这样，(5.24)变为

$$\varphi(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad t_0,t\in[a,b] \qquad \textbf{(5.26)}$$

如果(5.14)有一个形如(5.24)的解 $\varphi(t)$，则 $\varphi(t)$ 由(5.26)决定。反之易证明由(5.26)决定的向量函数 $\varphi(t)$ 一定是(5.14)的解。

反之易证明由(5.26)决定的向量函数 $\varphi(t)$

一定是(5.14)的解。

$$\varphi(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad t_0, t \in [a,b] \qquad \textbf{(5.26)}$$

$$\varphi'(t) = \boldsymbol{\Phi}'(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds + \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)$$

$$\varphi'(t) = \boldsymbol{A}(t)\left(\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds\right) + \boldsymbol{f}(t)$$

$$\varphi'(t) = \boldsymbol{A}(t)\varphi(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

定理8 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.15)的基解矩阵，则向量函数

$$\varphi(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad (5.26)$$

是(5.14)的解，且满足初始条件 $\varphi(t_0)=\boldsymbol{0}$

(5.14) 满足初始条件 $\varphi(t_0)=\eta$ 的解是

$$\varphi(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\eta+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad (5.27)$$

(5.14) 通解

$$\varphi(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

例2 试求下面初值问题的解

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix},\ \text{其中}\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^{-t} \\ x_2' = \qquad\quad x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = \qquad\quad x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ x_2 = c_2 e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ x_2 = c_2 e^t \end{cases}$$

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 0 \qquad \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c_1 = 0 \quad c_2 = 1 \qquad \begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

$$\varphi(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\eta + \boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\,\boldsymbol{f}(s)\,ds$$

$$\varphi(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\eta+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(s)=\frac{1}{e^{2s}}\begin{bmatrix} e^s & -se^s \\ 0 & e^s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}e^{-s} \qquad \Phi^{-1}(0)=E$$

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}e^{-s}\cdot\begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix}ds\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} e^{-2s} \\ 0 \end{bmatrix}ds\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(e^{-2t}+1) \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} te^t-\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix} te^t-\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) \\ e^t \end{bmatrix}$$

课堂练习:

试求下面初值问题的解

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

分析常数变易法/Analytic of Unknown Function Method/

$$\varphi(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{x}_1(t)c_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)c_2(t)+\cdots+\boldsymbol{x}_n(t)c_n(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t) \qquad \textbf{(5.25)}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \cdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}_k(t)=\det\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & f_1(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & f_2(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & f_n(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$c_k'(t)=\frac{\widetilde{W}_k(t)}{W(t)}\qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$c_k(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{\widetilde{W}_k(s)}{W(s)}ds\qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{x}_1(t)c_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)c_2(t)+\cdots+\boldsymbol{x}_n(t)c_n(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\widetilde{W}_k(s)}{W(s)}ds$$

是(5.14)的满足 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{0}$ **的解。**

应用到n阶线性方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 \qquad \textbf{(5.21)}$$

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = f(t) \qquad \textbf{(5.28)}$$

推论3 **如果** $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t), f(t)$ **是区间** $a \le t \le b$ **上的连续函数，** $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ **是对应齐次方程的基本解组，那么，非齐次线性方程（5.28）满足初始条件**

$$\varphi(t_0) = 0, \varphi'(t_0) = 0, \cdots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = 0 \qquad t_0 \in [a, b]$$

的解为

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\{\frac{W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots x_n(s)]}{W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}\}f(s)ds \qquad \textbf{(5.29)}$$

$$W(t)=\det\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

$$W_k(t)=\det\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & 0 & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & 0 & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & 1 & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

(5.28)的常数变易公式是

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots x_n(s)]}{W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}\right\}f(s)ds$$

(5.28)的通解可以表示为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\varphi(t)$$

思考

1 推论3的推导过程

2 到目前为止 *n* 阶线性方程求特解的方法有多少?

当n=2时，公式(5.29)就是

$$\varphi(t)=x_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_1[x_1(s),x_2(s)]}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)ds$$

$$+x_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_2[x_1(s),x_2(s)]}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)ds$$

$$W_1[x_1(s),x_2(s)]=\begin{vmatrix}0 & x_2(s)\\ 1 & x_2'(s)\end{vmatrix}=-x_2(s)$$

$$W_2[x_1(s),x_2(s)]=\begin{vmatrix}x_1(s) & 0\\ x_1'(s) & 1\end{vmatrix}=x_1(s)$$

因此，当n=2时常数变易公式变为

$$\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{x_2(t)x_1(s)-x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)ds \qquad \textbf{(5.31)}$$

而通解就是 $x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\varphi(t)$ **(5.32)**

这里 c_1,c_2 任意常数。

例3 试求方程 $x'' + x = tgt$ 的一个特解。

解 易知对应的齐线性方程 $x'' + x = 0$ 的基本解组为，

$$x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t$$

利用公式(5.31)来求方程的一个解，

$$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \equiv 1$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{x_2(t)x_1(s) - x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s), x_2(s)]} f(s)ds$$

$$= \int_0^t (\sin t \cos s - \cos t \sin s) \tan s ds$$

$$\int_0^t (\sin t\cos s - \cos t\sin s)\tan s ds$$

$$= \sin t\int_0^t \sin s ds - \cos t\int_0^t \sin s\tan s ds$$

$$= \sin t(1-\cos t) + \cos t(\sin t - \ln|\sec t + \tan t|)$$

$$= \sin t - \cos t\ln|\sec t + tgt|$$

注意，因为sint是对应的齐线性方程的解，所以函数

$$\overline{\varphi}(t) = -\cos t\ln|\sec t + tgt|$$

也是原方程的一个解。

作业 **P.202, 第6，8，9(a) 题。**

求齐次线性方程组的解的另一方法：消元法

保留一个未知函数 x_1，消掉另一个未知函数 x_2

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = \qquad x_2 \end{cases}$$

$$x_1'' = x_1' + x_2'$$

$$x_1'' = x_1' + x_2$$

$$x_2 = x_1' - x_1$$

$$x_1'' = 2x_1' - x_1$$

$$x_1'' - 2x_1' + x_1 = 0$$

$$x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

$$x_2 = c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t - c_1 e^t - c_2 t e^t$$

$$x_2 = c_2 e^t$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ \qquad x_2 = c_2 e^t \end{cases}$$

求非齐次线性方程组的另一方法：消元法

保留一个未知函数 x_1，消掉另一个未知函数 x_2

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^{-t} \\ x_2' = \qquad\quad x_2 \end{cases}$$

$$x_1'' = x_1' + x_2' - e^{-t}$$

$$x_1'' = x_1' + x_2 - e^{-t}$$

$$x_2 = x_1' - x_1 - e^{-t}$$

$$x_1'' = 2x_1' - x_1 - 2e^{-t}$$

$$x_1'' - 2x_1' + x_1 = -2e^{-t}$$

$$x_1 = c_1 e^t + c_2 te^t - \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$x_2 = c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 te^t + \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$-c_1 e^t - c_2 te^t + \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-t}$$

$$x_2 = c_2 e^t$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t - \dfrac{1}{2} e^{-t} \\ x_2 = c_2 e^t \end{cases} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = t e^t - \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \\ x_2 = e^t \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

练习:

利用消元法，求下列方程组的通解

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + 1 \\ x_2' = -x_1 + \dfrac{1}{\sin t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_3 + x_1 \\ x_3' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 x_2 \\ x_2' = 2x_1 \end{cases}$$