Diskrete Strukturen Nachbereitungsaufgabe 6

Khmelyk Oleh

2023

A Es wird die folgende Menge von 2×2-Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ betrachtet:

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x & 0 \\ y & x \end{array} \right) \mid x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

(a) Geben Sie alle Elemente von M an.

Es gibt 2 variante fuer jeden Koeffizient $\Rightarrow$ es gibt $2 \cdot 2 = 4$ Elemente in M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie, dass M mit der üblichen Matrizenaddition eine Gruppe bildet. Stellen Sie dazu die Verknüpfungstafel auf. Diese können Sie für Ihre Argumentation verwenden.

$+$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Assoziativ - koenen wir das aus Verknuepfungstafel sehen.
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - ist ein neutralis elemen.
$\forall m \in M : -m = m \Rightarrow$ M eine additives Gruppe bildet.

(c) Untersuchen Sie, ob M mit der üblichen Matrizenmultiplikation ebenfalls eine Gruppe bildet.

$\cdot$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Assoziativ - koenen wir das aus Verknuepfungstafel sehen.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - ist ein neutralis elemen.
Es gibt kein inverses Element fuer $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ M ist keine multiplikatives Gruppe bildet.

(d) Berechnen Sie $\left((2^{-1} \cdot 5) \div 3\right)^5 \bmod 11$.

$2^{-1} \bmod 11 \equiv 6$

$(2^{-1} \cdot 5) \bmod 11 \equiv (6 \cdot 5) \bmod 11 \equiv 30 \bmod 11 \equiv 8.$

$\frac{8}{3} \bmod 11 \equiv 8 \cdot (3^{-1}) \bmod 11 \equiv 8 \cdot 4 \bmod 11 \equiv 32 \bmod 11 \equiv 10$

$(10^5) \bmod 11 \equiv 100000 \bmod 11 \equiv 1$