Lineare Algebra Nachbereitungsaufgabe 8

Khmelyk Oleh

2023

(a) (i) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und E die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Weiter seien $B = (b_1, b_2, b_3)$ sowie $C = (c_1, c_2, c_3)$ zwei Basen von V mit

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} b_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} c_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} c_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} c_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $A_{BE}(id)$, $A_{CB}(id)$ und $A_{BC}(id)$.

Loesung :

$E = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A_{BE}(id) = ((b_1)_E, (b_2)_E, (b_3)_E) = ((1,0,0)^T, (1,1,0)^T, (0,0,1)^T) = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A_{CB}(id) = ((c_1)_B, (c_2)_B, (c_3)_B) = ((1,0,0)^T, (1,0,1)^T, (-1,1,0)^T) = \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$A_{BC}(id) = ((b_1)_C, (b_2)_C, (b_3)_C) = ((1,0,-1)^T, (1,0,0)^T, (-1,1,1)^T) = \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

(ii) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix $A_{BB}(id)$ (siehe unten) gegeben. Bestimmen Sie für den Vektor u (siehe unten) den Koordinatenvektor u_B (bzgl. B) und berechnen Sie den Koordinatenvektor $(f(u))_B$ von $f(u)$ bzgl. B.

$$A_{BB}(f) = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad u = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Loesung :

$u_B = -1 \cdot (1,0,0)^T + 1 \cdot (1,1,0)^T + 1 \cdot (0,0,1)^T = (-1,1,1)^T_B$

$(f(u))_B = f(u_B) = \frac{3}{2} \cdot (0,1,1)^T - \frac{1}{2} \cdot (1,0,1)^T - \frac{1}{2} \cdot (1,1,0)^T = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

(b) Es seien U, V, W K-Vektorräume über einem Körper K und $g : U \to V$ sowie $f : V \to W$ seien lineare Abbildungen.

Beweisen Sie: Die Komposition $f \circ g : U \to W$ ist ebenfalls eine lineare Abbildung.

Loesung :

$g : U \to V$ ist eine lineare Abbildung $\Rightarrow \quad \forall b \in V : \exists a \in U : f(a) = b$, anal. fuer $f \circ g : V \to W$
$\Rightarrow \quad \exists x_1 \in V : f(x_1) = 0_K$ und $\exists x_2 \in U : g(x_2) = x_1 \Rightarrow \exists x_2 \in U : (f \circ g)(x_2) = f(g(x_2)) = 0_K$ (Nullvektor)

$(f \circ g)(\lambda \cdot x_3 + x_4) | \lambda, x_3, x_4 \in K| = f(g(\lambda \cdot x_3 + x_4)) = f(g(\lambda \cdot x_3) + g(x_4)) = f(\lambda \cdot g(x_3) + g(x_4)) = f(\lambda \cdot g(x_3)) + f(g(x_4)) = \lambda \cdot f(g(x_3)) + f(g(x_4))$ (additiv + die Konstante)