Diskrete Strukturen Nachbereitungsaufgabe 1

Khmelyk Oleh

24. Oktober 2023

Aufgabe a Defenieren A:= $\{\{n+2, n+3\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ und B:= $\{\{n^2, 2^n\} \mid n \in \mathbb{N},\}$. Geben Sie jeweils Elemente in den Menge $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \backslash (A \cup B)$

A: $\{\{n, n+1\} \mid n \geq 2, n \in \mathbb{N}\ \}$
$\forall k \geq 5 : 2^k > k^2 + 1$
Fuer k=5: {25,32} und $\forall$k+1 falls fuer k ist das richtig :
$2^{k+1} - (k+1)^2 = 2 \cdot 2^k - k^2 - 2 \cdot k - 1 = (2^k - k^2) + (2^k - 2 \cdot k - 1)$, und das ¿ 0, weil $(2^k - k^2) > 0$ und $(2^k - 2 \cdot k - 1) > 0$, weil $\forall k > 5k^2 > k + 1$ ■

Fuer $n < 5$:
B:{ {0,1}, {1,2}, {4,4}, {9,8}, {16,16} }
Nur 8,9 passt, weil in A $n \geq 2$

$A \cap B = \{8{,}9\}$

$A \backslash B = A \cap \overline{B} = \{\{n, n+1\} \mid n \geq 2, n \neq 8, n \in \mathbb{N}\ \}$

$B \backslash A = B \cap \overline{A} = \{\{n^2, 2^n\} \mid n \neq 3, n \in \mathbb{N},\}$

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \backslash (A \cup B) = \{L | L \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}), L \nsubseteq A \cup B\}$

Aufgabe b Fuer beliebiges $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ wird die Menge

$$M_n := \{A | A \subseteq \{0, ..., n-1\} \text{ und } |A| \text{ gerade } \}$$

betrachtet.
i. Geben Sie M_4 und $(M_4 \cap M_3) \backslash M_2$ als Mengen konkreter Elemente an.
ii. Bestimmen Sie f¨ur die Anzahl der Elemente von M_n eine Formel in Abh¨angigkeit von n. Begr¨unden Sie warum die von Ihnen gefundene Formel richtig ist.

(i) M_4 = { Ø, {0,1}, {0,1,2,3} }
M_3 = { Ø, {0,1} }
M_2 = { Ø, {0,1} }
$(M_4 \cap M_3) \backslash M_2$ = { Ø, {0,1} } \ { Ø, {0,1} } = Ø

(ii) $|M_n| = n - n(\text{mod } 2) = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot 2$
Fuer n = 1: M_n = {Ø}
n = 2: M_n = {Ø {0,1}}
n = 3: M_n = {Ø {0,1}}
n = 4: M_n = {Ø {0,1},{0,1,2,3}}
Fuer jede k+1, falls $k \equiv 0(\text{mod } 2)$ gibt es keine neue Elemente, weil Mächtichkeit der {0,1...,(k+1)-1} ist k+1 - ungerade $\Rightarrow |M_{k+1}| = |M_k| = \left[\frac{k}{2}\right] \cdot 2 = \left[\frac{k+1}{2}\right] \cdot 2$, weil k+1 ungerade ist.
Fuer jede k+1, falls $k \equiv 1(\text{mod } 2)$ gibt es neues Element, weil Mächtichkeit der {0,1...,(k+1)-1} ist k+1 - gerade $\Rightarrow |M_{k+1}| = |M_k| + 1 = \left[\frac{k}{2}\right] \cdot 2 + 1 = \left[\frac{k+1}{2}\right] \cdot 2$, weil k+1 gerade ist. ■

Aufgabe c Beweisen Sie anhand der Definition des Binomialkoeffizienten, dass fuer alle Zahlen $n \in \mathbb{N}, n > 8$ gilt:

$$\binom{n}{8} > \binom{n-1}{7}$$

$\begin{pmatrix} n \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-8)!8!} - \frac{(n-1)!}{(n-8)!7!} = \frac{n!-(n-1)!\cdot 8}{(n-8)!8!} = \frac{(n-1)!(n-8)}{(n-8)!8!}, n > 8 \Rightarrow (n-1)!(n-8) > 0$
und $(n-8)!8! > 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} n \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 \\ 7 \end{pmatrix} > 0$ ■