Lineare Algebra Nachbereitungsaufgabe 5

Khmelyk Oleh

2023

N5.2 (a) Die Ziffern Ihrer 7-stelligen Immatrikulationsnummer seien (von links nach rechts gelesen) die Zahlen $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$.
Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$(x_1, x_2, x_3)^T, (x_4, a, x_5)^T, (x_6, x_7, a)^T \in \mathbb{R}^3$$

linear abhängig bzw. linear unabhängig sind.
Machen Sie die Probe, indem Sie die von Ihnen gefundenen Zahlen a einsetzen! (Nur dafür dürfen Sie einen Taschenrechner benutzen.)

Matrikelnummer: 5196694 $\Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 1, x_3 = 9, x_4 = 6, x_5 = 6, x_6 = 9, x_7 = 4$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 1 & a & 4 \\ 9 & 6 & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 5 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 0 & 6-5a & -11 \\ 0 & 6-9a & a-36 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 0 & 6-5a & -11 \\ 0 & -4a & a-25 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 0 & 6-5a & -11 \\ 0 & -a & \frac{a}{4}-\frac{25}{4} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 0 & 6 & \frac{-5a}{4}+\frac{81}{4} \\ 0 & -a & \frac{a}{4}-\frac{25}{4} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-5a}{24}+\frac{27}{8} \\ 0 & -a & \frac{a}{4}-\frac{25}{4} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-5a}{24}+\frac{27}{8} \\ 0 & 0 & \frac{-5a^2}{24}+\frac{29a}{8}-\frac{25}{4} \end{pmatrix},$$ muss 3 Vektoren linear unabhaendig sein $\Rightarrow \frac{-5a^2}{24}+\frac{29a}{8}-\frac{25}{4} \neq 0$

$\frac{-5a^2}{24}+\frac{29a}{8}-\frac{25}{4} \neq 0 \Leftrightarrow -5a^2 + 29\cdot 3a - 25\cdot 6 \neq 0 \Leftrightarrow 5a^2 - 87a + 150 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{87 \pm \sqrt{87\cdot 87 - 4\cdot 5\cdot 150}}{10} \Leftrightarrow a \neq \frac{87\pm\sqrt{4569}}{10}$

(b) Wir betrachten in dieser Aufgabe den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{2x2}$.

(i) Zeigen Sie, dass durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine angeordnete Basis $F := (A, B, C, D)$ von $\mathbb{R}^{2x2}$ gegeben ist. Welche Dimension hat dieser Vektorraum?

Pruefen wir, dass A, B, C, D linear unabhaendig sein, dann muss:
$\alpha_1 \cdot A + \alpha_2 \cdot B + \alpha_3 \cdot C + \alpha_4 \cdot D = 0_v, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ nur wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = 0$
Sei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oder $\alpha_4 \neq 0$, dann:

$$0_v = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 & \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 & \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3+\alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$ $\Leftrightarrow \alpha_4 = 0, \quad \alpha_4+\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ Widerspruch.$\Rightarrow A, B, C, D$ sind 4 linear unabhaendige Vektoren in $\mathbb{R}^{2x2} \Rightarrow (A, B, C, D)$ - eine Basis.

(ii) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor M_F der Matrix $M := \begin{pmatrix} x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 \end{pmatrix}$, dabei seien x_4, x_5, x_6, x_7 die letzten 4 Ziffern Ihrer Immatrikulationsnummer.

$$M := \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = 4\cdot D + 5\cdot C - 3\cdot B + 0\cdot A \Rightarrow M_F = (0, -3, 5, 4)^T$$

(iii) Ist auch das Tupel $\tilde{F} := (B, C, D, M)$ eine Basis von $\mathbb{R}^{2x2}$?

Nein, weil $M = 4 \cdot D + 5 \cdot C - 3 \cdot B \Rightarrow$ sind B, C, D, M linear abhaendig $\Rightarrow$ ist (B, C, D, M) keine Basis.