Diskrete Strukturen Nachbereitungsaufgabe 12

Khmelyk Oleh

2023

(a) Aequivalenzrelationen

(i) $R_1 := \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(2,1),(2,3),(3,2)\} \subseteq \{1,2,3\}^2$
Reflexiv: $1,2,3 \in \{1,2,3\}$ und $(1,1),(2,2),(3,3) \in R_1$
Symmetrie: $(1,2)$ und $(2,1) \in R_1 \quad (2,3)$ und $(3,2) \in \{1,2,3\}$
Transitiv: $(1,2),(2,3) \in R_1$ aber $(1,3) \notin R_1 \Rightarrow R_1$ ist keine Aequivalenzrelationen

(ii) $R_2 := \{(1,1)\} \cup \{(n,m) \in \mathbb{N}^2|$ es existiert p prim mit p teilt n und p teilt m$\}$
Reflexiv: $n_1 \in \mathbb{N}$ und $n_1 > 1 \Rightarrow \exists p-$prim: p teilt $n_1 \Rightarrow (n_1,n_1) \in R_2$ Sei $n_1 = 1$: $(1,1) \in R_2$
Symmetrie: Sei $(n_2,n_3) \in R_2 \Rightarrow \exists p_1 : p_1|n_2 \quad p_1|n_3 \Rightarrow (n_3,n_2) \in R_2$, da $p_1|n_3 \quad p_1|n_2$
Transitiv: Gegenbeispiel: $(2,6) \in R_2$, da 2 teil 2 und 2 teilt 6 $(6,3) \in R_2$, da 3 teil 6 und 3 teil 6, aber $(2,3) \notin R_2$, da $ggT(2,3) = 1 \Rightarrow R_2$ ist keine Aequivalenzrelationen

(iii) $R_G := \{(g_1,g_2) \in G^2|$ es existiert $h \in S_3$ mit $h \cdot g_1 \cdot h^{-1} = g_2\}$
Reflexiv: h kann einfach neutrale element sein.
Symmetrie: $(g_1,g_2) \in R_G \Rightarrow \exists h_1 \in S_3$ mit
$h_1 \cdot g_1 \cdot h_1^{-1} = g_2 \Rightarrow \quad h_1^{-1} \cdot h_1 \cdot g_1 \cdot h_1^{-1} = h_1^{-1} g_2 \Rightarrow \quad g_1 \cdot h_1^{-1} = h_1^{-1} \cdot g_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad g_1 \cdot h_1^{-1} \cdot h_1 = h_1^{-1} \cdot g_2 \cdot h_1 \Rightarrow \quad g_1 = h_1^{-1} \cdot g_2 \cdot h_1 \Rightarrow$ Sei $h_2 = h_1^{-1}$
Transitiv: $(g_1,g_2),(g_2,g_3) \in R_G \Rightarrow \quad \exists a,b \in S_3 : a \cdot g_1 \cdot a^{-1} = g_2 \quad b \cdot g_2 \cdot b^{-1} = g_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad b \cdot (a \cdot g_1 \cdot a^{-1}) \cdot b^{-1} = g_3 \Rightarrow \quad (b \cdot a) \cdot g_1 \cdot (a \cdot b)^{-1} = g_3$
R_G ist eine Aequivalenzrelationen.

(b) $\preceq$