Lineare Algebra Nachbereitungsaufgabe 2

Khmelyk Oleh

2023

N2.2 Es seien

$$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$$

die Ziffern Ihrer Matrikelnummer. Weiter sei $k := x_6 + x_7 i \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

Matrikelnummer: 5196694 $\Rightarrow x_6 = 9\ x_7 = 4 \Rightarrow k := 9 + 4i$, $A := \begin{pmatrix} 1 & 9+4i \\ 0 & i \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie A^2 und A^3.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1+0 & (9+4i)\cdot(1+i) \\ 0+0 & 0+i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5+13i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5+13i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9+4i \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9+4i+(5+13i)i \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4+9i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

(b) Geben Sie (mit Begründung) eine Vermutung an, wie A^n (für eine beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$) aussieht.

Vermutung: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & (9+4i)\cdot x \\ 0 & i^n \end{pmatrix}$, $x = \begin{cases} 0, n \equiv 0 \mod 4 \\ 1, n \equiv 1 \mod 4 \\ 1+i, n \equiv 2 \mod 4 \\ i, n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$, $n > 0, n \in \mathbb{N}$
Begruende wir unsere Vermutung mithilfe der Vollständige Induktion.
$a11_i$ - Erste Zeile, Erste Spalte, $a12_i$ - Erste Zeile, Zweite Spalte, $a21_i$ - Zweite Zeile, Erste Spalte, $a22_i$ - Zweite Zeile, Zweite Spalte von A^i, $i > 0, i \in \mathbb{N}$.
$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 9+4i \\ 0 & i \end{pmatrix}$
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5+13i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -4+9i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$k \mapsto k+1 : A^{k+1} = A^k \cdot A$

- $a11_{k+1} = a11_k \cdot a11_1 + a12_k \cdot a21_1 = 1 \cdot 1 + x \cdot 0 = 1$
- $a21_{k+1} = a21_k \cdot a11_1 + a22_k \cdot a21_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot i = 0$
- $a22_{k+1} = a21_k \cdot a12_1 + a22_k \cdot a22_1 = 0 \cdot x + i^k \cdot i = i^{k+1}$
- $a12_{k+1} = a11_k \cdot a11_1 + a12_k \cdot a21_1 = 1 \cdot 9 + 4i + x \cdot i$

Falls $k \equiv 0 \mod 4$: $a12_{k+1} = 9 + 4i + 0 \cdot i = (9+4i) \cdot 1$
$k \equiv 1 \mod 4$: $a12_{k+1} = 9 + 4i + (9+4i) \cdot i = (9+4i) \cdot (1+i)$
$k \equiv 2 \mod 4$: $a12_{k+1} = 9 + 4i + (9+4i)(1+i) \cdot i = (9+4i) \cdot (1+i-1) = (9+4i) \cdot (i)$
$k \equiv 3 \mod 4$: $a12_{k+1} = 9 + 4i + (9+4i)i \cdot i = (9+4i) - (9+4i) = 0$ ■

(c) Bestimmen Sie eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, so dass $A \cdot B = E_2$ gilt.

Weil $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sei $B := A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -4+9i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

(d) Bestimmen Sie eine komplexe Zahl $z := x + yi$, so dass $A^3 + zA^2 + iA = 0_{2\times 2}$ gilt.

$A^3+zA^2+iA = \begin{pmatrix} 1 & -4+9i \\ 0 & -i \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 5+13i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 & 9+4i \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4+9i \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 5z+13z\cdot i \\ 0 & -z \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} i & -4+9i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z+i & (5z-8)+(13z+18)i \\ 0 & -(1+z+i) \end{pmatrix}$, muss $0_{2\times 2}$ sein $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+z+i=0 \\ (5z-8)+(13z+18)i=0 \\ -(1+z+i)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} 1+z+i=0 \\ (5z-8)+(13z+18)i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x+yi+i=0 \\ (5x+5y\cdot i-8)+(13x+13y\cdot i+18)i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)+i(y+1)=0 \\ (5x-8-13y)+i(5y+13x+18)= \end{cases}$
$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ 5x-8-13y=0 \\ 5y+13x+18=0 \end{cases} \Rightarrow x=-1;\ y=-1 \Leftrightarrow z=-1-i$