Lineare Algebra Nachbereitungsaufgabe 1

Khmelyk Oleh

27. Oktober 2023

(a) Bestimmen Sie $z := (1+i)^6$ in Eulerscher Darstellung auf 2 Arten:

- Berechnen Sie zuerst z in arithmetischer Darstellung und rechnen Sie dann in Polarkoordinaten um.
- Bestimmen Sie zuerst die Eulersche Darstellung von $(1+i)$ und berechnen Sie dann die 6. Potenz.

(i) $(1+i)^6 = (2i)^3 = -8i : r = 8, \psi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow (8, -\frac{\pi}{2})$
(ii) $1+i : r = \sqrt{2}, \psi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1+i)^6 = 8 \cdot e^{3\frac{\pi}{2}} = 8e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow (8, -\frac{\pi}{2})$

(b) Berechnen Sie $y := \overline{(1+i)}^{-1} = (1-i)^{-1} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

(c) Beweisen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $x \neq 0$ Gleichung $\overline{x}^{-1} = \overline{x^{-1}}$ gilt.

Sei $x = a + bi$, dann:

- $\overline{x}^{-1} = \overline{a+bi}^{-1} = (a-bi)^{-1} = \frac{1}{a-bi} = \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$
- $\overline{x^{-1}} = \overline{(a+bi)^{-1}} = \overline{\frac{1}{a+bi}} = \overline{\frac{a-bi}{a^2+b^2}} = \overline{\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$ ■