Lineare Algebra Nachbereitungsaufgabe 4

Khmelyk Oleh

2023

 ${f N3.2}~$ Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen ${\Bbb R}$ -Vektorräume sind:

- (a) $U_a = \{ f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x) \} \subseteq Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \}$
- 1) "0": Es gibt $f_0(x): x \mapsto 0 \in U_a$, weil $f_0(-x) = 0$ auch.
- 2) Addition: $f_1, f_2 \in U_a$: $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_1(-x) + f_2(-x) = (f_1 + f_2)(-x) \in U_a$.
- 3) Sei $k \in \mathbb{R}$, dann $kf(x) = k \cdot f(-x) \in U_a \blacksquare$.
- **(b)** $U_b = \{ f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0 \} \subseteq Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- 1) "0": Es gibt $f_0(x): x \mapsto 0 \in U_b$, weil $f_0(x_0) = 0$ auch.
- 2) Addition: $f_1, f_2 \in U_b$: $(f_1 + f_2)(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = 0 + 0 = 0$.
- 3) Sei $k \in \mathbb{R}$, dann fuer x_0 : $kf(x_0) = k \cdot 0 = 0 \blacksquare$.
- (c) $U_c = \{ p \in \{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \} | p(2) = 0 \} \subseteq Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- 1) "0": $p_0(x)$: $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0$: $p_0(x) = 0 + 0x + 0x^2 = 0 \in U_c$, weil $p_0(2) = 0$ auch
- 2) $p_1, p_2 \in U_c$: $(p_1 + p_2)(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in \mathbb{R}$. Wenn x = 2: $(p_1 + p_2)(2) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2 = 2 + 2 = 4 \in \mathbb{R}$
- 3) Sei $k \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}$: $kp(x) = k(a_0 + a_1x + a_2x^2) = k = a_0 + ka_1x + ka_2x^2 \in \mathbb{R}$