Lineare Algebra Nachbereitungsaufgabe 4

Khmelyk Oleh

2023

N3.2 Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume sind:

(a) $U_a = \{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\} \subseteq Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1) "0": Es gibt $f_0(x) : x \mapsto 0 \in U_a$, weil $f_0(-x) = 0$ auch.
2) Addition: $f_1, f_2 \in U_a : (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_1(-x) + f_2(-x) = (f_1 + f_2)(-x) \in U_a$.
3) Sei $k \in \mathbb{R}$, dann $kf(x) = k \cdot f(-x) \in U_a \blacksquare$.

(b) $U_b = \{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0\} \subseteq Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1) "0": Es gibt $f_0(x) : x \mapsto 0 \in U_b$, weil $f_0(x_0) = 0$ auch.
2) Addition: $f_1, f_2 \in U_b : (f_1 + f_2)(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = 0 + 0 = 0$.
3) Sei $k \in \mathbb{R}$, dann fuer x_0: $kf(x_0) = k \cdot 0 = 0 \blacksquare$.

(c) $U_c = \{p \in \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} | p(2) = 0\} \subseteq Abb\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1) "0": $p_0(x) : a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0 : p_0(x) = 0 + 0x + 0x^2 = 0 \in U_c$, weil $p_0(2) = 0$ auch
.
2) $p_1, p_2 \in U_c : (p_1 + p_2)(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in \mathbb{R}$.
Wenn $x = 2 : (p_1 + p_2)(2) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2 = 2 + 2 = 4 \in \mathbb{R}$
3) Sei $k \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}$: $kp(x) = k(a_0 + a_1x + a_2x^2) = k = a_0 + ka_1x + ka_2x^2 \in \mathbb{R} \blacksquare$