

Diskrete Strukturen Nachbereitungsaufgabe 8

Khmelyk Oleh

2023

A Es wird die Diedergruppe $(D_4; \circ)$, d.h. die Gruppe aller Symmetrieabbildungen eines regelmäßigen Vierecks mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen, betrachtet. Die Eckpunkte des Vierecks seien mit den Zahlen 1 bis 4 entgegen dem Uhrzeigersinn beschriftet.

(a) Geben Sie alle Elemente der Diedergruppe D_4 durch Permutationen der Eckpunkte in Zykelschreibweise an.

$id : (1)(2)(3)(4)$

Drehung um 90: (1234)

Drehung um 180: $(13)(24)$

Drehung um 270: (1432)

Vertikale Spiegelung: $(14)(23)$

Horizontale Spiegelung: $(12)(34)$

Spiegelung mit Achse "13": (24)

Spiegelung mit Achse "24": (13)

(b) Welche Ordnungen können die Untergruppen von D_4 nach dem Satz von Lagrange besitzen? Bestimmen Sie alle Untergruppen, die von genau einem Element erzeugt werden, und geben sie deren Ordnung an.

Wir haben 8 Elementen in $(D_4; \circ)$, deswegen koennen nur $\{1, 2, 4, 8\}$ in Untergruppe sein.

Untergruppen	Ordnung
$\langle id \rangle = \{id\}$	1
$\langle \text{Drehung um } 90 \rangle = \{(1234), (13)(24), (1432), id\}$	4
$\langle \text{Drehung um } 180 \rangle = \{(13)(24), id\}$	2
$\langle \text{Drehung um } 270 \rangle = \{(1432), (1234), id\}$	4
$\langle \text{Vertikale Spiegelung} \rangle = \{(14)(23), id\}$	2
$\langle \text{Horizontale Spiegelung} \rangle = \{(12)(34), id\}$	2
$\langle \text{Spiegelung mit Achse "13"} \rangle = \{(24), id\}$	2
$\langle \text{Spiegelung mit Achse "24"} \rangle = \{(13), id\}$	2

(c) Geben Sie für eine Untergruppe U von $(D_4; \circ)$ mit 4 Elementen die Menge aller Linksnebenklassen von U an.

Untergruppe mit 4 Elementen: $\langle \text{Drehung um } 90^\circ \rangle = \{id, (1234), (13)(24), (1432)\}$
 Alle linksnebenklassen:

	LNK
$\langle \text{Drehung um } 90^\circ \rangle = \{id, (1234), (13)(24), (1432)\}$	fuer $(12)(34)$ und $(14)(23)$: $\{(12)(34), (24), (14)(23), (13)\}$ fuer (13) und (24) : $\{(13), (12)(34), (1432), (12)(34)\}$

Insgesamt: $\{\{id, (1234), (13)(24), (1432)\}, \{(12)(34), (24), (14)(23), (13)\}\}$