Mathe Nachbereitungsaufgabe 1

Khmelyk Oleh

2024

N1 Es werden die reellen Zahlenfolge (x_n) und (y_n) betrachtet, die durch

$$x_n := \frac{5n+1}{3n-4}, \qquad y_n := 1 - e^{x_n}$$

definiert sind.

(a) Untersuchen Sie die Zahlenfolgen (x_n) und (y_n) auf Monotonie.

(b) Zeigen Sie, dass die Zahlenfolgen (x_n) und (y_n) beschraenkt sind, indem Sie fuer beide Folgen jeweils eine obere und eine untere Schranke bestimmen. (Hinweis: Denken Sie daran, dass 'bestimmen' bedeutet, das Ergebnis zu begruenden!

(a) $x_n : n \neq \frac{4}{3}$
$x_n = \dfrac{5n+1}{3n-4} = \dfrac{5(n+\frac{1}{5})}{3(n-\frac{4}{3})} = \dfrac{5}{3} \cdot (1 + \dfrac{\frac{23}{15}}{n-\frac{4}{3}}) = \dfrac{5}{3} + \dfrac{23}{9n-12} = \dfrac{5}{3} + \dfrac{23}{9} \cdot \dfrac{1}{n-\frac{4}{3}}$
Es ist einfach $\dfrac{1}{n}$ mit Konstanten, deswegen x_n ist monoton fallende Zahlenfolgen fuer
$(n - \dfrac{4}{3}) > 0 \Leftrightarrow n > \dfrac{4}{3}$ und monoton wachsende fuer $n < \dfrac{4}{3}$. Aber $n \geq 0$, so seit $n = 2$ ist Zahlenfolge monoton wachsend.
$y_n : n \neq \dfrac{4}{3}$
$n > \dfrac{4}{3}$: x_n ist einfach $\dfrac{1}{n}$ mit Konstanten, deswegen Grad von e in y_n ist monoton sinkt $\Rightarrow e^{x_n}$ ist auch monoton fallende, dann $1 - e^{x_n}$ ist monoton wachsende Zahlenfolge, weil wir haben "-". (1 ist Konstante)

(b) $x_n = \dfrac{5}{3} + \dfrac{23}{9} \cdot \dfrac{1}{n-\frac{4}{3}}$
x_n bewegt sich wie eine $\dfrac{1}{n}$, so um eine Grenze zu finden koenen wir mit Konstanten $\dfrac{5}{3}$ und $-\dfrac{4}{3}$ arbeiten: in Graphen ist x_n vershieben $+\dfrac{4}{3}$ beim x-Achse und $+\dfrac{5}{3}$ beim y-Achse. Wir weisen, dass beim $\dfrac{1}{n}$ Grenze ist 0, so beim x_n ist es einfach $\dfrac{5}{3}$: $x_n \neq \dfrac{5}{3}$
Zeigen wir, dass $x_n \geq \dfrac{5}{3}$: $\quad (\dfrac{5}{3} + \dfrac{23}{9} \cdot \dfrac{1}{n-\frac{4}{3}}) - (\frac{5}{3}) = \dfrac{23}{9} \cdot \dfrac{1}{n-\frac{4}{3}} \geq 0 \quad \forall n \geq 2$
keine obere schrenke
y_n : Zeigen wir dass $1 - e^{\frac{5}{3}}$ fuer $n \geq 2$ ist Grenze y_n :
$1 - e^{\frac{5}{3} + \frac{23}{9} \cdot \frac{1}{n-\frac{4}{3}}} - 1 + e^{\frac{5}{3}} =$
$= -e^{\frac{5}{3}} \cdot e^{\frac{23}{9} \cdot \frac{1}{n-\frac{4}{3}}} + e^{\frac{5}{3}} \leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 - e^{\frac{23}{9} \cdot \frac{1}{n-\frac{4}{3}}} \leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 \leq e^{\frac{23}{9} \cdot \frac{1}{n-\frac{4}{3}}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ln(1) \leq ln(e^{\frac{23}{9} \cdot \frac{1}{n-\frac{4}{3}}}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{23}{9} \cdot \frac{1}{n-\frac{4}{3}} \blacksquare$ (sehe oben)
Keine untere schrenke.