Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

# Mathematische Methoden für Informatiker INF-120-1
# Sommersemester 2024

## 1. Übungsblatt für die Woche 15.04. - 21.04.2024

*Zahlenfolgen: Monotonie und Beschränktheit*

V1 Hausaufgabe (Vorbereitung) Abgabemodalitäten siehe OPAL-Kurs.
Lösen Sie die Vorbereitungsaufgabe zur 1. Übung im Opal-Kurs.

Ü1.1 (a) Es sei $(x_n)$ diejenige Zahlenfolge, welche durch

$$x_1 := \frac{1}{1} - \frac{1}{2},\ x_2 := \frac{1}{1+2} - \frac{1}{3+4},\ x_3 := \frac{1}{1+2+3} - \frac{1}{4+5+6} \text{ usw.}$$

gegeben ist.

- Finden Sie eine explizite Formel für das $n$-te Folgenglied $x_n$.
- Ist die Folge monoton und im Falle der Monotonie monoton wachsend oder monoton fallend?

(b) Untersuchen Sie die gegebenen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ darauf, ob sie ab einem Index $n_0$ monoton sind:

(1) $x_n := \dfrac{2n-7}{3n-10}$, (2) $x_n := \dfrac{7n+1}{3n-1}$, (3) $x_n = \dfrac{n}{5} + \dfrac{5}{n}$, $n > 1$

Ü1.2 (a) Skizzieren Sie den Graph der Wurzelfunktion, und betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit $x_n := \sqrt{\frac{1}{n}}$. Welches Monotonieverhalten zeigt $(x_n)$?

(b) Untersuchen Sie die gegebenen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ auf Monotonie:

(1) $x_n := \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right), n > 1$ (2) $x_n := 2 + 3\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (3) $x_n := \sqrt{n}\cdot(1 - \frac{1}{n})$.

(c) Geben Sie zwei streng monoton wachsende Folgen $(x_n)$ und $(y_n)$ an, so dass die Folge der Produkte $(x_n \cdot y_n)$ streng monoton fällt.

Ü1.3 (a) Es wird die Folge $(x_n)$ mit $x_n := \dfrac{2n}{3n+1}$ betrachtet.

- Begründen Sie, dass $m = 0$ eine untere Schranke für $(x_n)$ ist.
- Begründen Sie, dass $M = 1$ eine obere Schranke für $(x_n)$ ist.
- Zeigen Sie, dass gilt:
$$x_n = \frac{2}{3}\cdot\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) .$$
Können Sie damit eine kleinere obere Schranke als $M = 1$ angeben?

(b) Bestimmen Sie obere und untere Schranken für die Folgen $(x_n)$ aus Ü1.1 (b) (1) und (2).

(c) Untersuchen Sie die gegebenen Folgen $(x_n)$ auf Beschränktheit:

(1) $x_n = \ln\left(\dfrac{7n+1}{3n-1}\right)$, $n \geq 1$, (2) $x_n := 4 - 3\ln\left(2 - \frac{1}{n}\right), n \geq 1$.

**Die Nachbereitungsaufgabe ist bis 26.04.2024, 16:00 Uhr, in Opal abzugeben.**

N1 Es werden die reellen Zahlenfolgen $(x_n)$ und $(y_n)$ betrachtet, die durch

$$x_n := \frac{5n+1}{3n-4}\ , \qquad y_n := 1 - e^{x_n}$$

definiert sind.

(a) Untersuchen Sie die Zahlenfolgen $(x_n)$ und $(y_n)$ auf Monotonie.

(b) Zeigen Sie, dass die Zahlenfolgen $(x_n)$ und $(y_n)$ beschränkt sind, indem Sie für beide Folgen jeweils eine obere und eine untere Schranke bestimmen.
(Hinweis: Denken Sie daran, dass 'bestimmen' bedeutet, das Ergebnis zu begründen!)

---

**Aufgaben zum Selbststudium:**

H1.1 Es sei $(x_n)$ eine streng monoton fallende Zahlenfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welches Monotonieverhalten zeigt dann die Folge $(y_n)$ mit

$$y_n = 1 - \frac{1}{x_n^2}\ ?$$

Können Sie Monotonieaussagen für $(y_n)$ treffen, wenn die Voraussetzung $x_n > 0$ durch die schwächere Voraussetzung $x_n \neq 0$ ersetzt wird? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

H1.2 Es wird die Folge $(x_n)$ mit $x_n := \dfrac{2n}{3n-11}$ betrachtet.

(1) Begründen Sie, dass $m = -3$ eine untere Schranke für $(x_n)$ ist.

(2) Ab welchem $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \leq 1$ für alle $n \geq n_0$?
(Ein möglicher Ansatz ist mit $x_n \leq 1$ zu starten, die Definition von $x_n$ einzusetzen und nach $n$ umzustellen. Achtung beim Umgang mit Ungleichungen!)

(3) Finden Sie eine obere Schranke $M$ für die gesamte Folge $(x_n)$.