

Stochastic Model 02: Algoritmus MCMC (Metropolis–Hastings)

```
In [1]: # Instalace potřebných knihoven
        #%pip install pandas
        #%pip install numpy
        #%pip install seaborn matplotlib
```

```
In [2]: # Import potřebných knihoven
import pandas as pd
import numpy as np

import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
```

Načtení přechodové matice

```
In [3]: # Soubor je načten a přiřazen do proměnné ,df'
other_path = '../data/03_StochModel/transition_matrix.csv'
df = pd.read_csv(other_path, header=0)
P = df.to_numpy()
P
```

```
Out[3]: array([[0.00000000e+00, 9.98657124e-01, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                4.87149817e-05, 1.21787454e-03, 6.93511892e-06, 6.93511892e-05],
               [0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 9.98657124e-01, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                4.87149817e-05, 1.21787454e-03, 6.93511892e-06, 6.93511892e-05],
               [0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 7.48655318e-01, 2.50000000e-01,
                0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                4.87804878e-05, 1.21951220e-03, 6.94444444e-06, 6.94444444e-05],
               [0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 4.98655318e-01,
                5.00000000e-01, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                4.87804878e-05, 1.21951220e-03, 6.94444444e-06, 6.94444444e-05],
               [0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                6.65321985e-01, 3.33333333e-01, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                4.87804878e-05, 1.21951220e-03, 6.94444444e-06, 6.94444444e-05],
               [0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 9.21732242e-01, 7.69230769e-02, 0.00000000e+00,
                4.87804878e-05, 1.21951220e-03, 6.94444444e-06, 6.94444444e-05],
               [0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 7.48655318e-01, 2.50000000e-01,
                4.87804878e-05, 1.21951220e-03, 6.94444444e-06, 6.94444444e-05],
               [7.69230769e-02, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 9.21732242e-01,
                4.87804878e-05, 1.21951220e-03, 6.94444444e-06, 6.94444444e-05],
               [1.66666667e-03, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                9.98333333e-01, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00],
               [8.33333333e-03, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 9.91666667e-01, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00],
               [3.33333333e-04, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 9.99666667e-01, 0.00000000e+00],
               [1.00000000e-03, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00,
                0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 9.99000000e-01]])
```

Výpočet stacionárního rozdělení

```
In [4]: eigvals, eigvecs = np.linalg.eig(P.T)
        idx = np.argmax(np.abs(eigvals-1))
        pi = np.real(eigvecs[:,idx])
        pi = pi / np.sum(pi)
```

Parametry simulace

```
In [5]: n_states = 12

        # počet iteračních kroků (sekund)
        n_iter = 100_000

        # směrodatná odchylka návrhového normálního rozdělení
        sigma = 1.5

        samples = np.zeros(n_iter, dtype=int)

        # počáteční stav S1 (index 0)
        current_state = 0
        samples[0] = current_state

        # nastavení seedu (počátečního stavu generátoru náhodných čísel)
```

```
np.random.seed(122)
```

Metropolis–Hastings simulace

```
In [6]: for t in range(1, n_iter):

        # --- návrh nového stavu ---
        proposal = int(np.round(
            np.random.normal(loc=current_state, scale=sigma)
        ))

        # omezení na interval stavů
        proposal = np.clip(proposal, 0, n_states-1)

        # --- pravděpodobnosti ---
        p_current = pi[current_state]
        p_proposal = pi[proposal]

        # symetrické návrhové rozdělení → zkrácení poměru
        alpha = min(1, p_proposal / p_current)

        # --- přijetí / zamítnutí ---
        if np.random.rand() < alpha:
            current_state = proposal

        samples[t] = current_state
```

Výsledná trajektorie stavů

```
In [7]: # převod na stavy S1-S12
states = samples + 1
```

Empirické rozdělení

```
In [8]: hist = np.bincount(samples, minlength=n_states)
empirical_pi = hist / np.sum(hist)

print("Empirické rozdělení:")
print(empirical_pi)
```

Empirické rozdělení:

```
[0.02457 0.01584 0.0721  0.03811 0.05532 0.2442  0.07553 0.24847 0.02231
 0.1134  0.01406 0.07609]
```

Porovnání se stacionárním rozdělením

```
In [9]: print("Teoretické pi:")
print(pi)
```

Teoretické pi:

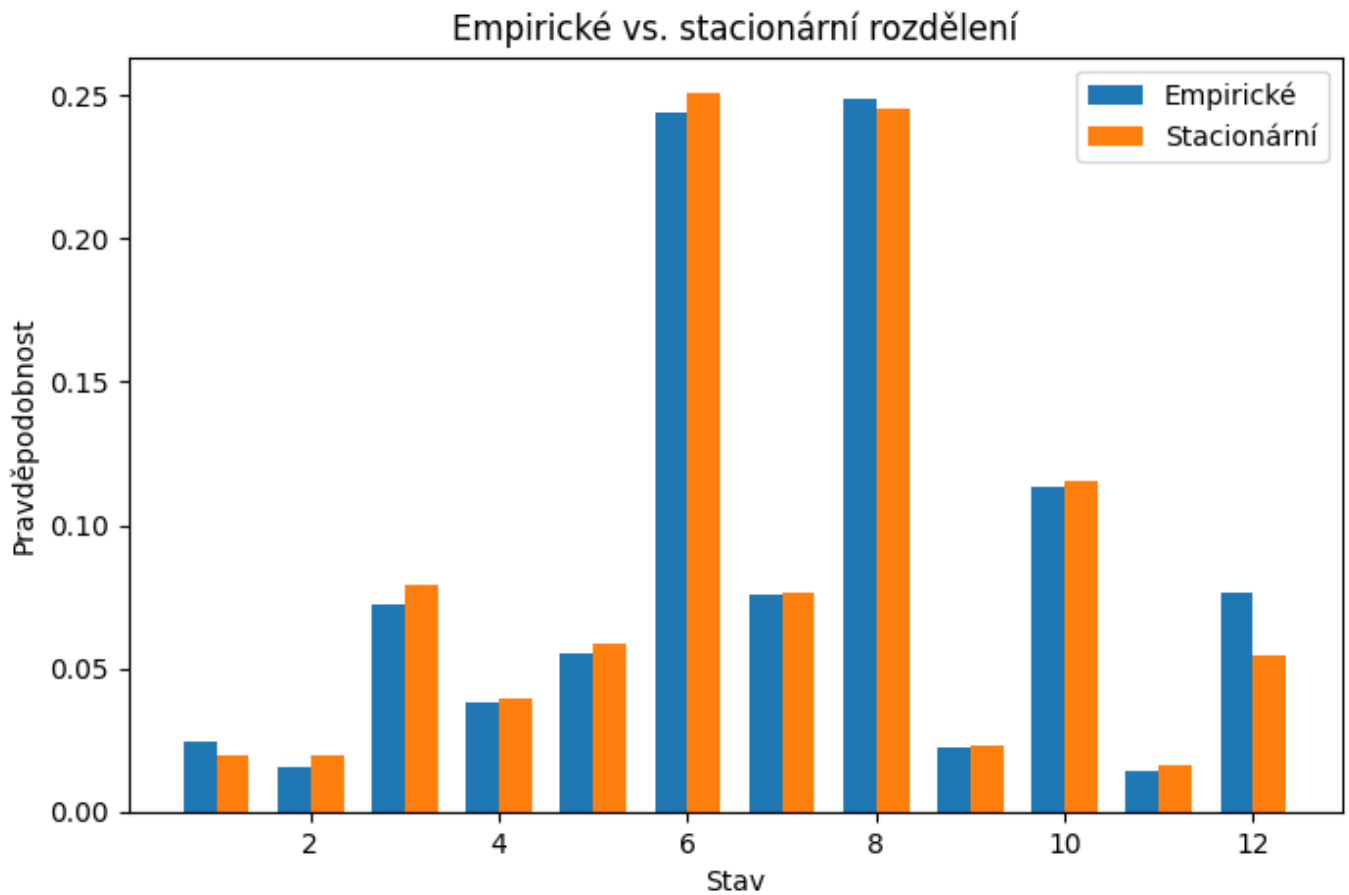
```
[0.01992334 0.01989658 0.07905425 0.03942111 0.05889408 0.25082307
 0.07676344 0.24519496 0.02311953 0.11559766 0.01645661 0.05485537]
```

Sloupcový density graf

```
In [10]: width = 0.35
states = np.arange(1,13)
plt.figure(figsize=(8,5))
```

```
plt.bar(states - width/2, empirical_pi, width, label='Empirické')
plt.bar(states + width/2, pi, width, label='Stacionární')

plt.xlabel("Stav")
plt.ylabel("Pravděpodobnost")
plt.title("Empirické vs. stacionární rozdělení")
plt.legend()
plt.show()
```



Ilustrační graf simulace

```
In [11]: time = np.arange(len(samples))
states = samples + 1 # převod na S1-S12
```

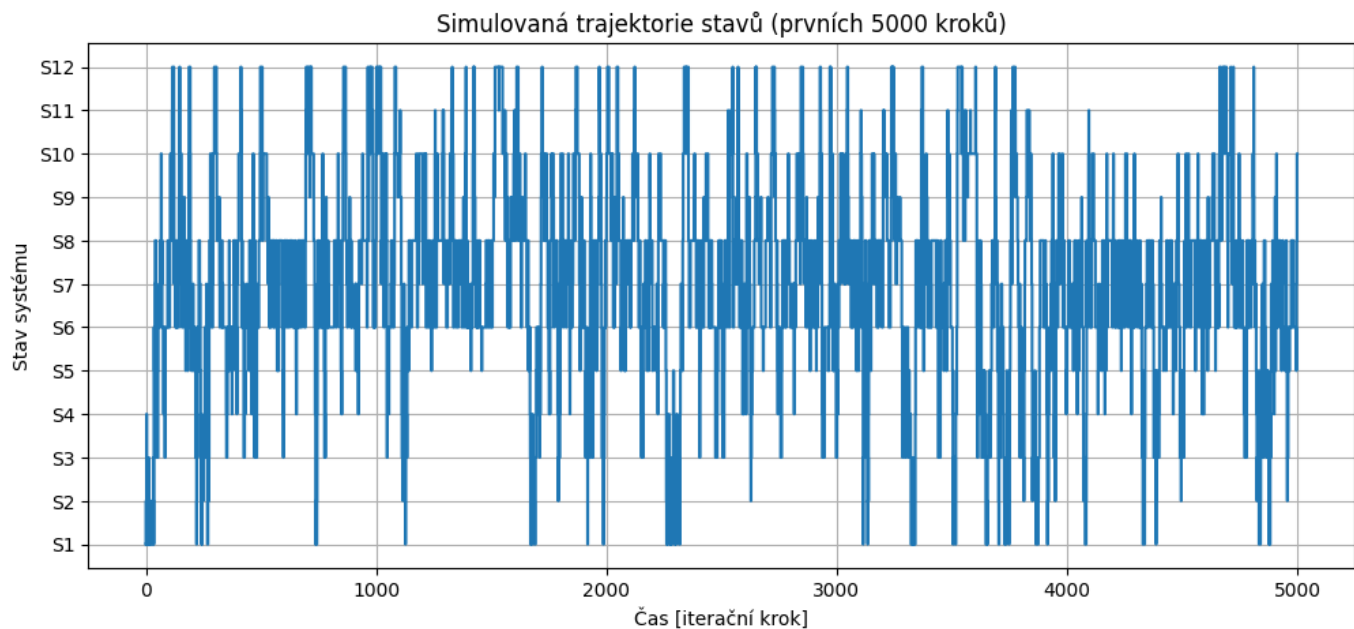
```
In [12]: N = 5000

plt.figure(figsize=(12,5))
plt.step(time[:N], states[:N], where='post')

plt.xlabel("Čas [iterační krok]")
plt.ylabel("Stav systému")
plt.title("Simulovaná trajektorie stavů (prvních 5000 kroků)")

plt.yticks(np.arange(1,13), [f"S{i}" for i in range(1,13)])
plt.grid(True)

plt.show()
```

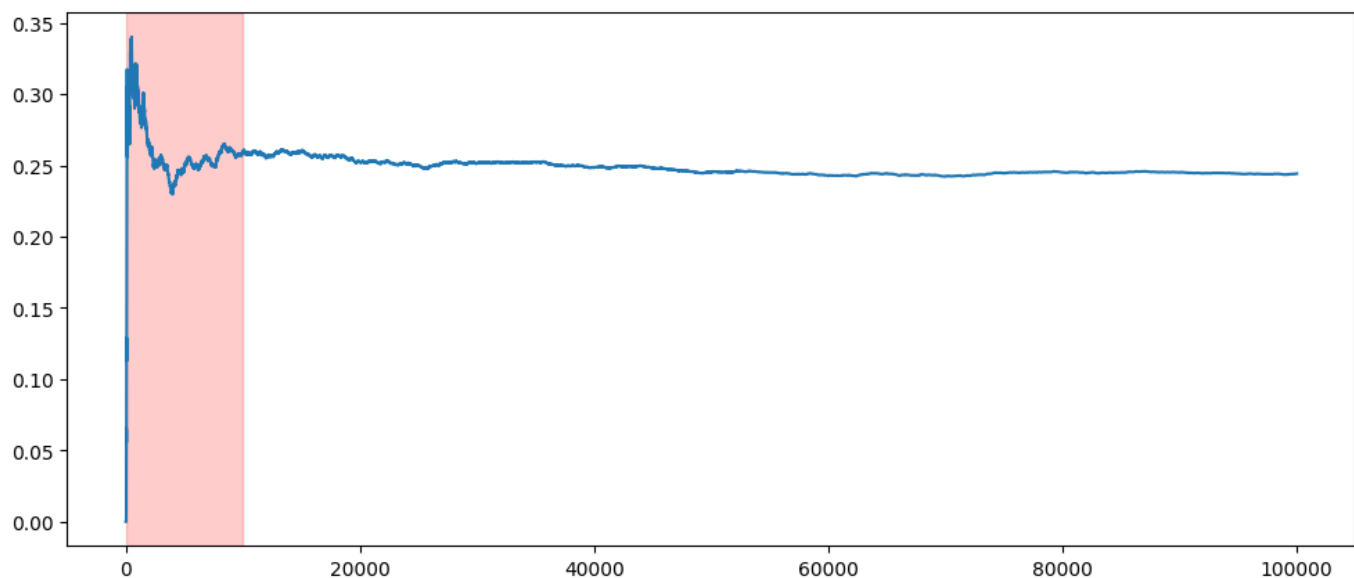


Spálení počáteční části simulace (Burn-in)

Počáteční transientní fáze simulace (burn-in) byla identifikována a odstraněna z další analýzy. Tato oblast je v grafu vyznačena červeně.

```
In [13]: burn_in = 10_000
running_mean = np.cumsum(samples==5)/np.arange(1,len(samples)+1)
plt.figure(figsize=(12,5))
plt.axvspan(0, burn_in, color='red', alpha=0.2, label='Burn-in')
plt.plot(running_mean)
```

Out[13]: [

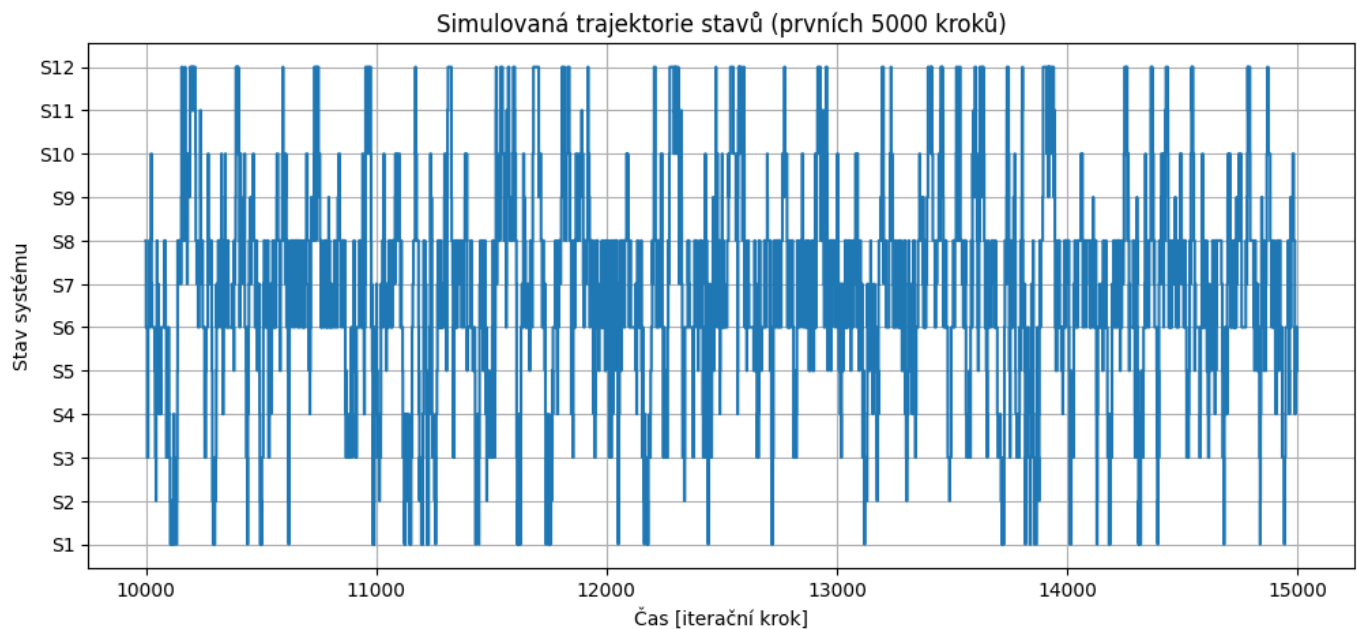


```
In [14]: plt.figure(figsize=(12,5))
plt.step(time[burn_in:burn_in+N], states[burn_in:burn_in+N], where='post')

plt.xlabel("Čas [iterační krok]")
plt.ylabel("Stav systému")
plt.title("Simulovaná trajektorie stavů (prvních 5000 kroků)")

plt.yticks(np.arange(1,13), [f"S{i}" for i in range(1,13)])
plt.grid(True)

plt.show()
```



Odstranění burn-in

```
In [15]: samples_burned = samples[burn_in:]
```

Empirické rozdělení

```
In [16]: hist = np.bincount(samples_burned, minlength=n_states)
empirical_pi = hist / np.sum(hist)

print("Empirické rozdělení:")
print(empirical_pi)
```

Empirické rozdělení:

```
[0.02516667 0.01613333 0.07256667 0.0387      0.05548889 0.24255556
 0.07536667 0.24865556 0.02216667 0.11356667 0.01414444 0.07548889]
```

Porovnání se stacionárním rozdělením

```
In [17]: print("Teoretické pi:")
print(pi)
```

Teoretické pi:

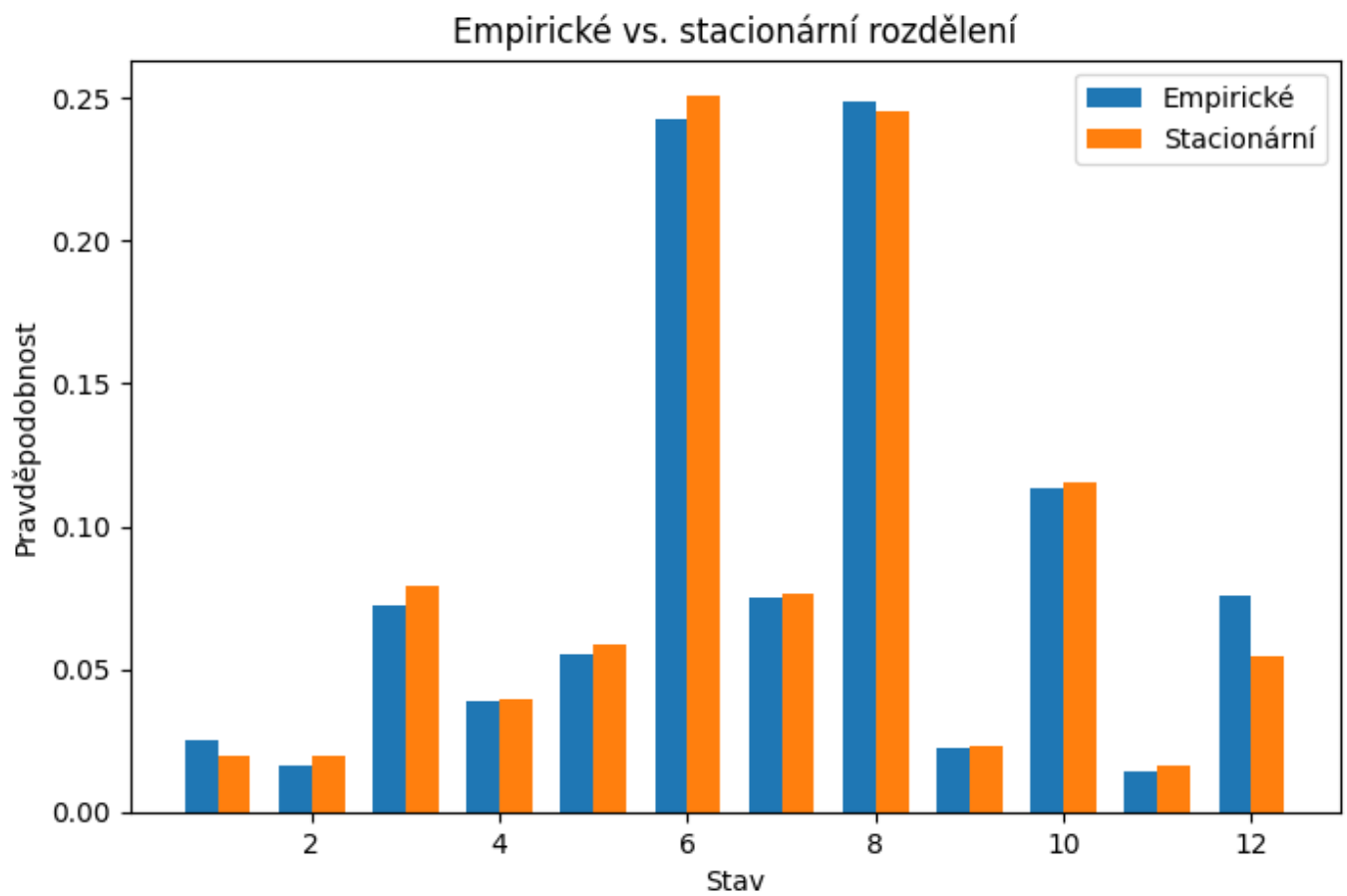
```
[0.01992334 0.01989658 0.07905425 0.03942111 0.05889408 0.25082307
 0.07676344 0.24519496 0.02311953 0.11559766 0.01645661 0.05485537]
```

Sloupcový density graf

```
In [18]: width = 0.35
states = np.arange(1,13)
plt.figure(figsize=(8,5))

plt.bar(states - width/2, empirical_pi, width, label='Empirické')
plt.bar(states + width/2, pi, width, label='Stacionární')

plt.xlabel("Stav")
plt.ylabel("Pravděpodobnost")
plt.title("Empirické vs. stacionární rozdělení")
plt.legend()
plt.show()
```



Export matice formátu CSV

```
In [19]: df_sim = pd.DataFrame({  
    "time": np.arange(len(samples_burned)),  
    "state_index": samples_burned,  
    "state": samples_burned + 1  
})
```

```
In [20]: df_sim.to_csv('../data/03_StochModel/simulation_MCMC_MH.csv', index=False)
```

Autor / Organizace / Datum

Vjačeslav Usmanov, ČVUT v Praze, Fakulta stavební

Přehled změn

Datum (YYYY-MM-DD)	Verze	Autor změny	Popis změny
2026-01-25	1.1	Vjačeslav Usmanov	added SM_02_MCMC_MH.ipynb
2026-02-15	1.2	Vjačeslav Usmanov	changed SM_02_MCMC_MH.ipynb