ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФИЗТЕХ-ШКОЛА РАДИОТЕХНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Лабораторная работа 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов.

Устюжанина Мария
Группа Б01-107

Цель работы: Изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

В работе используются: Анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов и сигналов специальной формы,осциллограф.

1 Теоретическая часть:

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Метод для описания сигналов. Для него используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье.*

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos{(n\Omega_1 t)} + b_n \sin{(n\Omega_1 t)}\right] \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos{(n\Omega_1 t - \psi_n)} \tag{2}$$

Если сигнал четен относительно $t = 0$, так что $f(t) = f(-t)$ в тригонометрической записи остаются только косинусные члены. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos{(n\Omega_1 t)}\, dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin{(n\Omega_1 t)}\, dt \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \psi_n = \arctan{\frac{b_n}{a_n}} \tag{4}$$

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Введем некоторые величины:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

где T — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos{(n\Omega_1 t)}\, dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin{(n\Omega_1 \tau/2)}}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin{x}}{x} \tag{5}$$

Здесь V_0 - амплитуда сигнала.

Поскольку наша функция четная, то $b_n = 0$.

Пусть у нас τ кратно T. Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедится при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1 \tag{6}$$

Периодическая последовательность цугов

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t)\cdot\cos(n\Omega_1 t)\,dt = V_0\frac{\tau}{T}\left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}}\right) \tag{7}$$

Амплитудно-модулированные колебания

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0\left[1 + m\cos\Omega t\right]\cos\omega_0 t \tag{8}$$

Коэффициентом m называется *глубина модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1-m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1+m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \tag{9}$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (9) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0\cos\omega_0 t + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0 + \Omega)\,t + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0 - \Omega)\,t \tag{10}$$

2 Ход работы:

2.1 А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Исследуем прямоугольные импульсы с $\nu_{rep} = 1$кГц и длительностью импульса $\tau = 100$мкс. Получим на экране спектр сигнала и будем изменять τ и ν_{rep}, наблюдая как изменяется спектр.

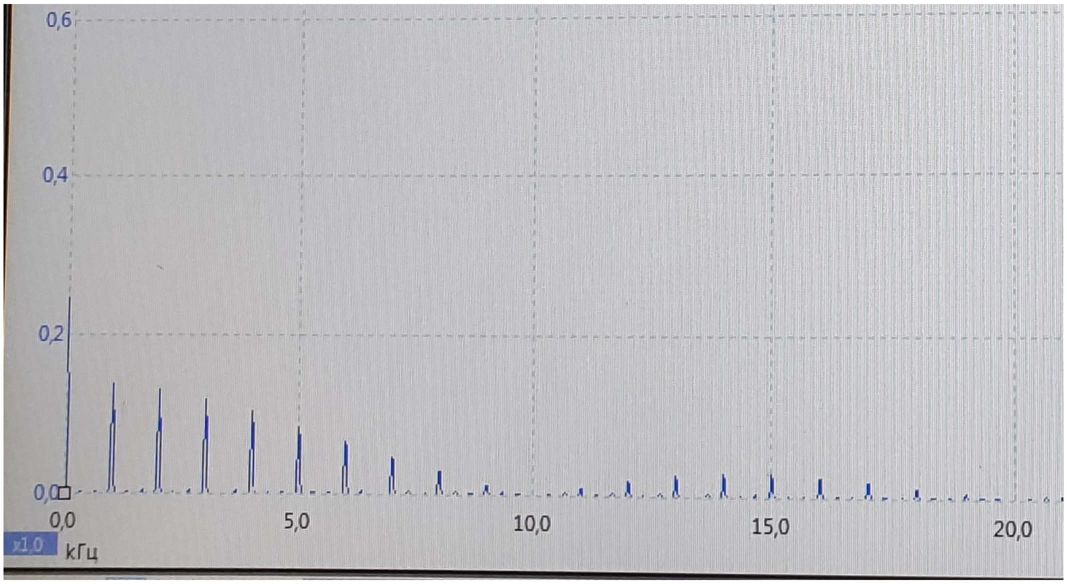

Рис. 1: Спектр при $\nu_{rep} = 1$кГц$, \tau = 100$мкс

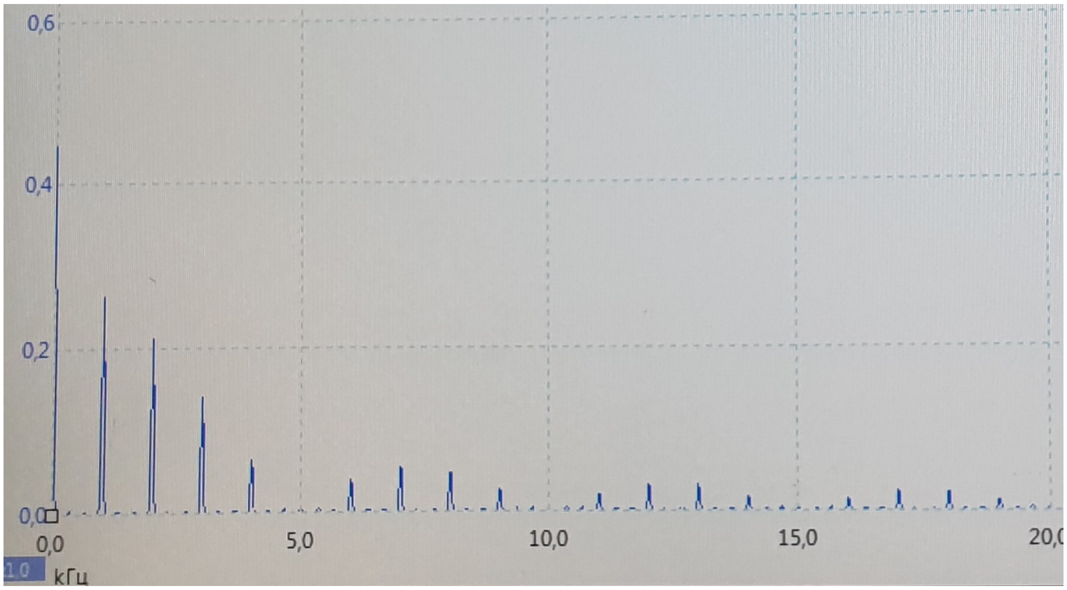

Рис. 2: Спектр при $\nu_{rep} = 1$кГц, $\tau = 200$мкс

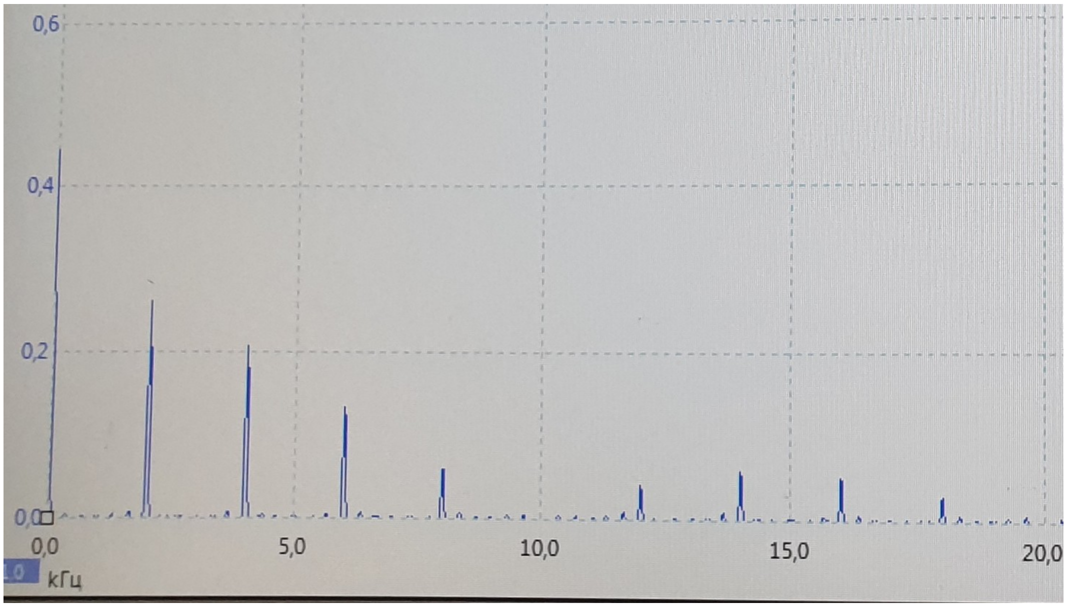

Рис. 3: Спектр при $\nu_{rep} = 2$кГц, $\tau = 100$мкс

Исследуем зависимость ширины спектра от длительности импульса при частоте повторения $\nu_{rep} = 1$кГц

τ, мкс	$\Delta\nu$, кГц
40	25
60	16
80	13
100	10
120	8
140	7
160	6
180	5.5
200	5

Запишем резульаты в таблицу $\Delta\nu(1/\tau)$:

$1/\tau$, кГц	$\Delta\nu$, кГц
25	25
16.67	16
12.5	13
10	10
8.33	8
7.14	7
6.25	6
5.56	5.50
5	5

Получим график:

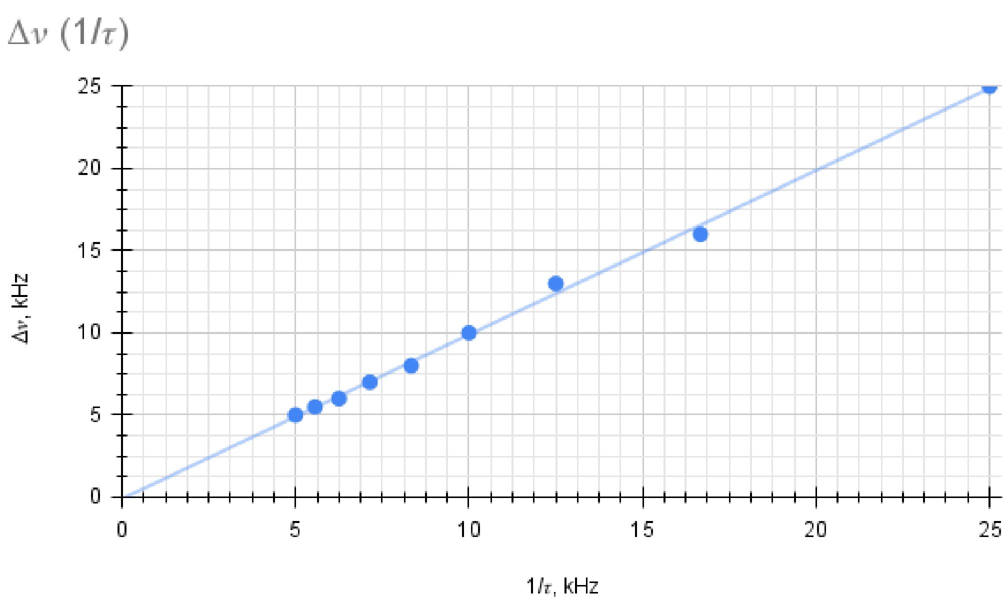

Рис. 4: График $\Delta\nu(1/\tau)$ для прямоугольных импульсов с $\nu_{rep} = 1$кГц

Тогда зависимость:

$$\Delta\nu = (0.998 \pm 0.016) \cdot \frac{1}{\tau} + (0.094 \pm 0.098)\text{кГц}$$

Выполняется соотношение определённости:

$$\Delta\nu \cdot \tau \simeq 1$$

2.2 B. Исследование спктра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Исследуем последовательность цугов, для этого установим частоту несущей $\nu_0 = 25$кГц и получим на экране осциллографа устойчивую картину.

Пронаблюдаем изменение спектра:

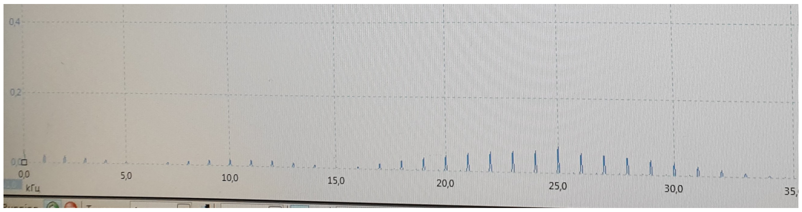

Рис. 5: Спектр при $\nu_{rep} = 1$кГц$, \nu_0 = 25$кГц$, \tau = 100$мкс

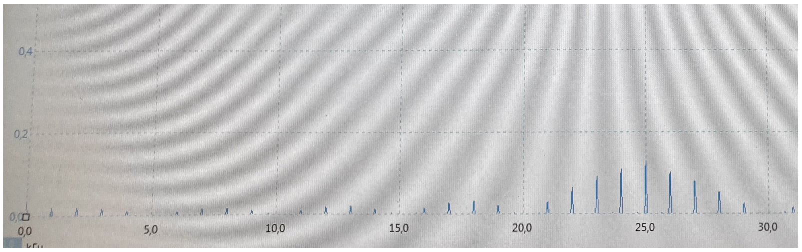

Рис. 6: Спектр при $\nu_{rep} = 1$кГц$, \nu_0 = 25$кГц$, \tau = 200$мкс

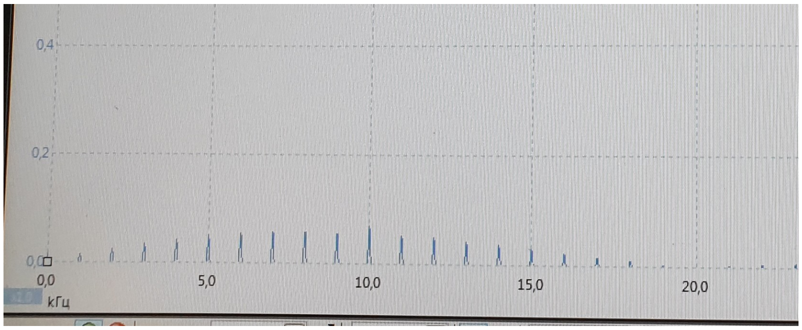

Рис. 7: Спектр при $\nu_{rep} = 1$кГц$, \nu_0 = 10$кГц$, \tau = 100$мкс

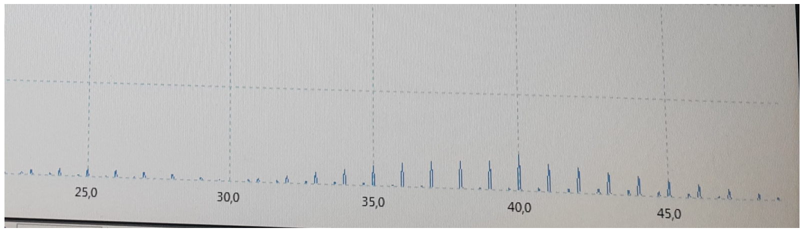

Рис. 8: Спектр при $\nu_{rep} = 1$кГц$, \nu_0 = 40$кГц$, \tau = 100$мкс

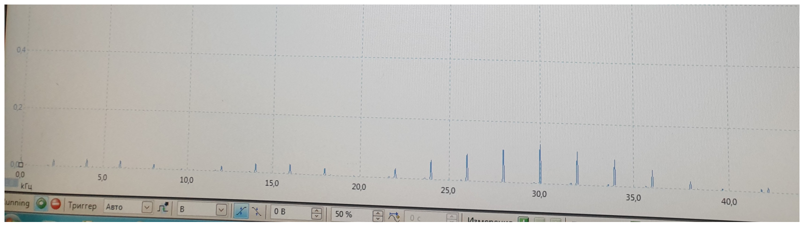

Рис. 9: Спектр при $\nu_{rep} = 2$кГц$, \nu_0 = 30$кГц$, \tau = 100$мкс

Получим зависимость $\delta\nu(\nu_{rep})$ при $\tau = 100$ мкс и $\nu_0 = 25$ кГц:

$\delta\nu$, кГц	ν_{rep}, кГц
0.5	0.5
1	1
2	2
4	4
5	5

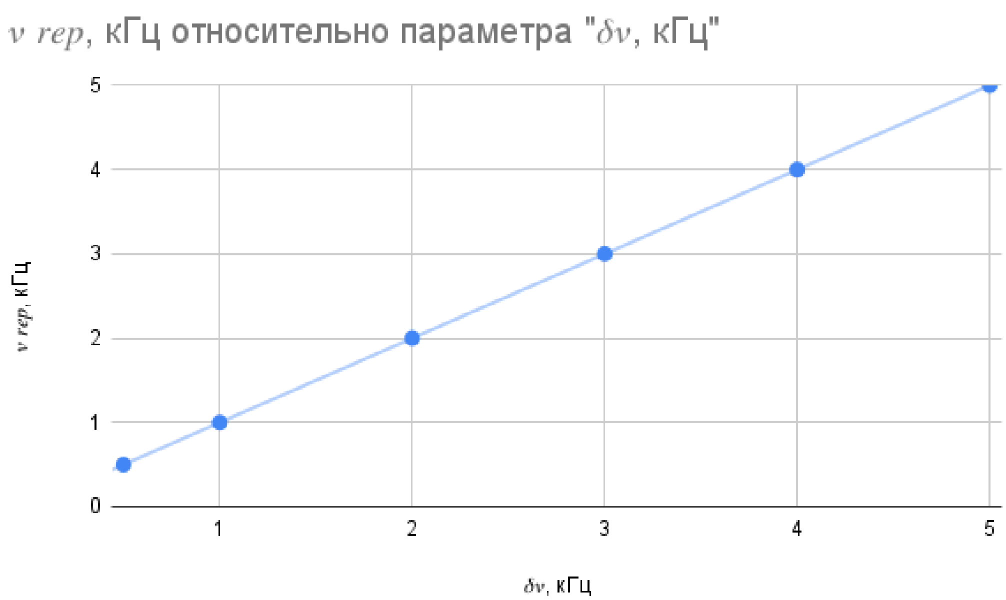

Рис. 10: График $\delta\nu(\nu_{rep})$ для прямоугольных импульсов с $\nu_0 = 25$ кГц и $\tau = 100$ мкс

Получим зависимость:

$$\delta\nu = (1.0 \pm 0.1) \cdot \nu_{rep} + (0.0 \pm 0.1)\text{кГц}$$

Тоже выполняется соотношение неопределённости:

$$\delta\nu \cdot T \simeq 1$$

2.3 C. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Получим спектр исследуемого сигнала. Для этого установим частоту несущей $\nu_0 = 25$ кГц и частоту модуляции $\nu_{mod} = 1$ кГц.

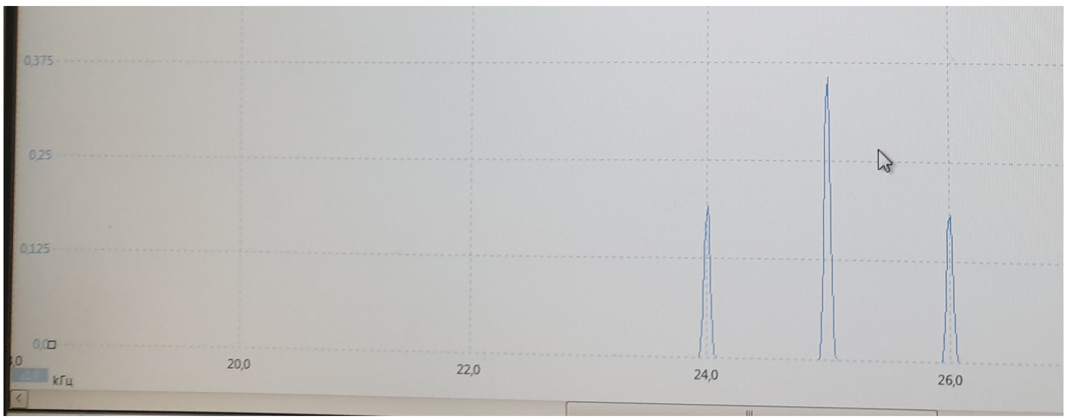

Рис. 11: Спектр модулированного сигнала при $m = 1$.

Изучим зависимость отношения амплитуд $k = A_s/A_m$ боковой и основной частоты от параметра $m = (A_{max} - A_{min})/(A_{max} + A_{min})$.

A_m, mV	A_s, mV	m	k
322	16	0.1	0.050
322	47	0.3	0.146
322	75	0.5	0.233
322	107	0.7	0.332
322	139	0.9	0.431
322	153	1.0	0.475

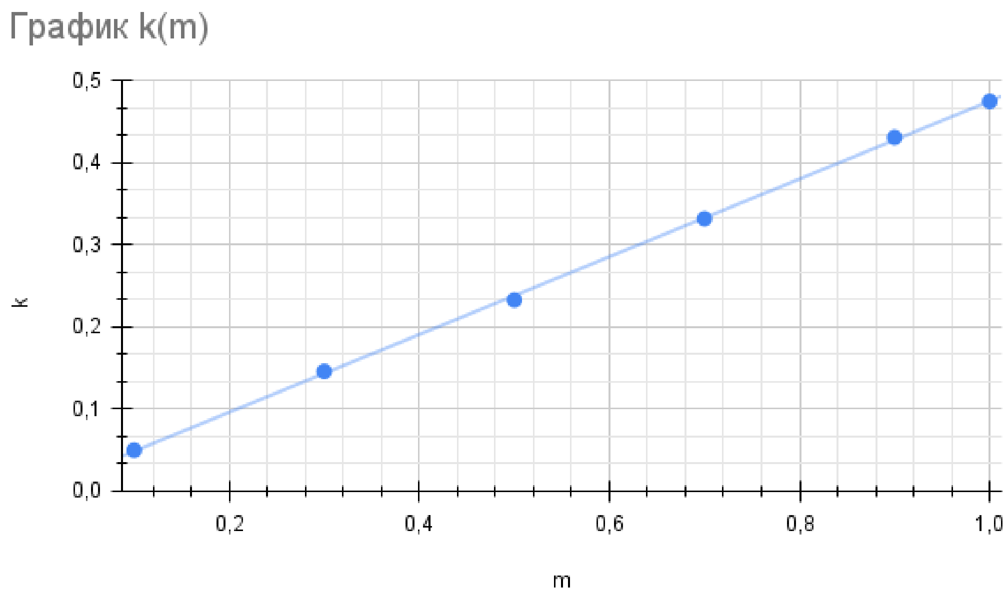

Рис. 12: График $k(m)$ для модулированного сигнала с $\nu_0 = 25$ кГц, $\nu_{mod} = 1$ кГц

Получим зависимость:

$$k = (0.474 \pm 0.004) \cdot m + (0.001 \pm 0.001)$$

Установим, что

$$\frac{k}{m} = 0.474 \pm 0.04$$

Это почти сходится с теорией (0,5).

3 Выводы

В лабараторной работе былт изучена зависимость спектра прямогольных сигналов, гармонических цугов и амплитудно модулированного гармонического сигнала. Также были прверены соотношения неорпеделенности, проверены справедливость разложения сигналов в ряд Фурье. Все сошлось с теорией.