

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
ФИЗТЕХ-ШКОЛА РАДИОТЕХНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

---

Лабораторная работа 3.2.4  
**Свободные колебания в электрическом контуре**

---

**Цель работы:** Исследование свободных колебаний в электрическом колебательном контуре.

**В работе используются:** генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин емкостей, катушка индуктивности, электронный осциллограф, измеритель LRC.

## 1 Теоретическая часть:

### Свободные колебания

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых конденсатора  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и резистора  $R$ . Обозначим разность потенциалов на конденсаторе  $U_C$ , а ток, текущий в контуре, через  $I$ . Второе правило Кирхгофа:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (1)$$

Вводя обозначения  $\gamma = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , получим уравнение

$$\ddot{I} + 2\gamma \dot{I} + \omega_0^2 I = 0. \quad (2)$$

Его решение в общем виде:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \operatorname{sh}(\kappa t), \quad (3)$$

где  $\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ ,  $U_0 = U_C$  – начальное напряжение на конденсаторе.

### Затухающие колебания

В случае, когда  $\gamma < \omega_0$ , имеем  $\kappa = i\omega$ , где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  – частоты свободных (собственных) колебаний. Тогда ток

$$I = -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t) \quad (4)$$

затухает и имеет колебательный характер. Величина  $\gamma$  определяет затухание колебаний:  $\gamma = \frac{1}{\tau}$ , где  $\tau$  – время затухание амплитуды в  $e$  раз. Формулы для наряжение на конденсаторе и тока в цепи можно переписать иначе:

$$U_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta), \\ I = -\frac{U_0}{L} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta). \quad (5)$$

### Апериодические колебания

В случае  $\gamma > \omega_0$ , формулы для тока и напряжения на конденсаторе имеют следующий вид:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \operatorname{sh}(\kappa t),$$

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} \left( \frac{\gamma}{\kappa} \operatorname{sh}(\kappa t) + \operatorname{ch}(\kappa t) \right).$$

Процесс в этом случае не является колебательным, его называют апериодическим. Режим, соответствующий  $\gamma = \omega_0$ , называются *критическим*. В этом случае предельный переход  $\omega \rightarrow 0$  в (5) даст

$$I = -\frac{U_0}{L} t e^{-\gamma t},$$

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} (1 + \gamma t).$$

Сопротивление в этом случае

$$R_{kp} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6)$$

называется *критическим сопротивлением* контура.

*Добротность* контура по определению

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W},$$

где  $W$  – запасённая энергия,  $\Delta W$  – потери за период. Тогда

$$Q = 2\pi \frac{CU_0^2/2 \cdot e^{-2\gamma t}}{CU_0^2/2 \cdot (e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(T+t)})} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

*Логарифмическим декрементом затухания* называются число

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T$$

или

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}.$$

## 2 Экспериментальная установка

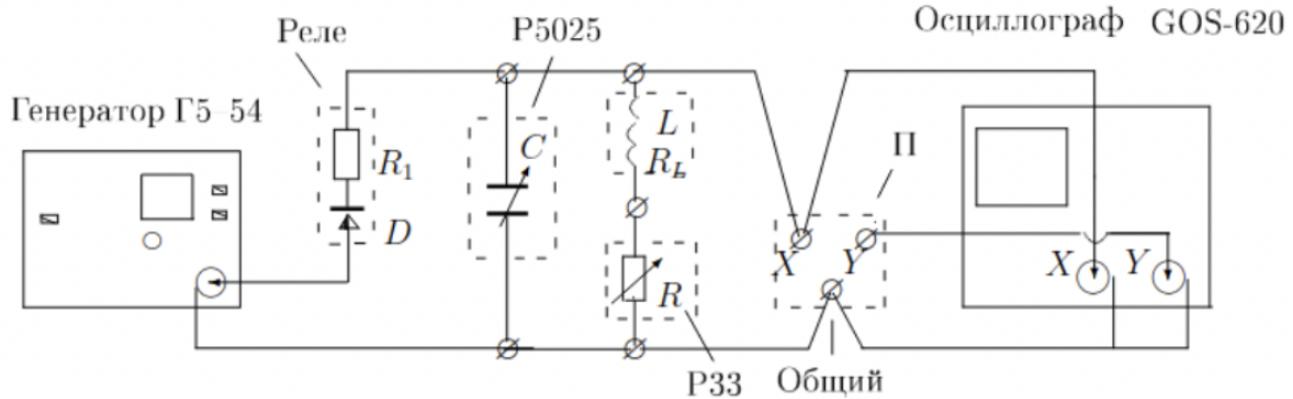


Рис. 1: Схема экспериментальной установки

## 3 Ход работы:

### 3.1 Измерение периодов свободных колебаний

Соберём схему, изображённую на Рис. 1. Установим на магазине сопротивлений  $R = 0$ ; На магазине емкостей величину  $C = 0.02 \text{ мкФ}$ . Установим выходное напряжение генератора на  $28 \text{ V}$ . По ЭО измерим расстояние между соседними импульсами ( $x_0 = 2.1 \cdot 5 \text{ мс} = 10.5 \text{ мс}$ ).

Будем измерять по ЭО расстояние  $x$ , которое занимают  $n$  полных периодов колебаний. Зная период задающих колебания импульсов ( $T_0 = 0.01 \text{ с}$ ) и  $x_0$  можно расчитать период колебаний контура  $T$  по формуле:

$$T = T_0 x / (n x_0)$$

Проведём эти измерения изменяя емкость  $C$  от  $0.02 \text{ мкФ}$  до  $0.9 \text{ мкФ}$ :

$C, \text{ мкФ}$	$x_0, \text{ см}$	$scale, \text{ мс}$	$n$	$x, \text{ см}$	$scale, \text{ мс}$	$T, \text{ с}$
0.02	2.1	5	3	1	1	0.0006
0.13	2.1	5	7	3	2	0.0106
0.24	2.1	5	5	3	2	0.0274
0.35	2.1	5	5	3.6	2	0.0480
0.46	2.1	5	5	4.1	2	0.0718
0.57	2.1	5	5	4.6	2	0.0999
0.68	2.1	5	4	4	2	0.1295
0.79	2.1	5	3	3.1	2	0.1555
0.9	2.1	5	4	4.6	2	0.1971

### 3.2 Критическое сопротивление и декремент затухания

Приняв  $L = 200 \text{ мГн}$  рассчитаем ёмкость  $C$ , при которой собственная частота колебаний контура  $\nu_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$  составляет  $5 \text{ kHz}$ :

$$C = 0.005 \text{ мкФ}$$

Для полученных значений  $L$  и  $C$  рассчитаем критическое сопротивление контура  $R_{cr}$  по формуле:

$$R_{cr} = 2\sqrt{L/C} = 12600 \text{ Ом}$$

Установим на магазине ёмкость, близкую к рассчитанной. Будем увеличивать  $R$  от 0 до  $R_{cr}$ . Определим сопротивление магазина  $R_0$ , при котором контур переходит в апериодический режим:

$$R_0 = 7400 \text{ Ом}$$

Установим сопротивление  $R \simeq 0.1R_0$  и будем измерять логарифмический декремент затухающих колебаний по формуле:

$$d = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}$$

Повторим эти измерения для разных  $R$  от  $0.1R_0$  до  $0.3R_0$ :

$R$ , Ом	$n$	$U_k$ , см	$U_{k+n}$ , см	$d$
740	3	4	1	0.462
986	3	3	0.5	0.597
1232	2	2.2	0.5	0.741
1478	2	4	0.6	0.949
1724	2	3.4	0.4	1.070
1970	2	3	0.3	1.151

### 3.3 Свободные колебания на фазовой плоскости

Подключим на ЭО канал Y, на который подано напряжение  $U_R$ . Зафиксируем картину:

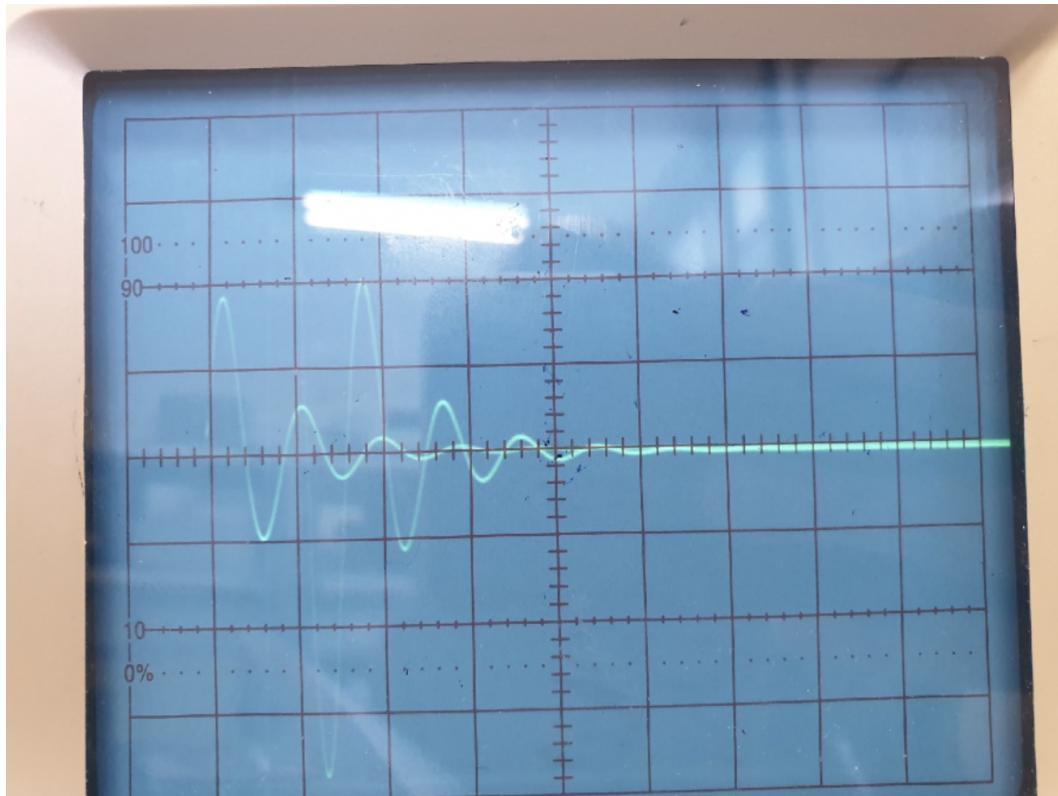


Рис. 2: Сигналы X и Y в развёртке по времени

Отключим развёртку по времени, переведы ручку "TIME/DIV" в положение "X-Y". Будем наблюдать за изменением картины при изменении  $R$  от  $0.1R_0$  до  $0.3R_0$ :

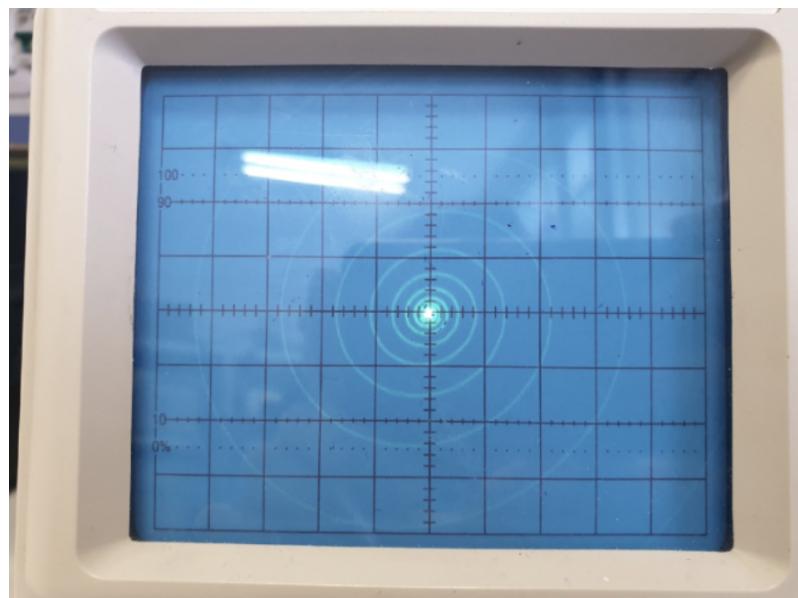


Рис. 3: Фазовая картина при  $R = 740$  Ом

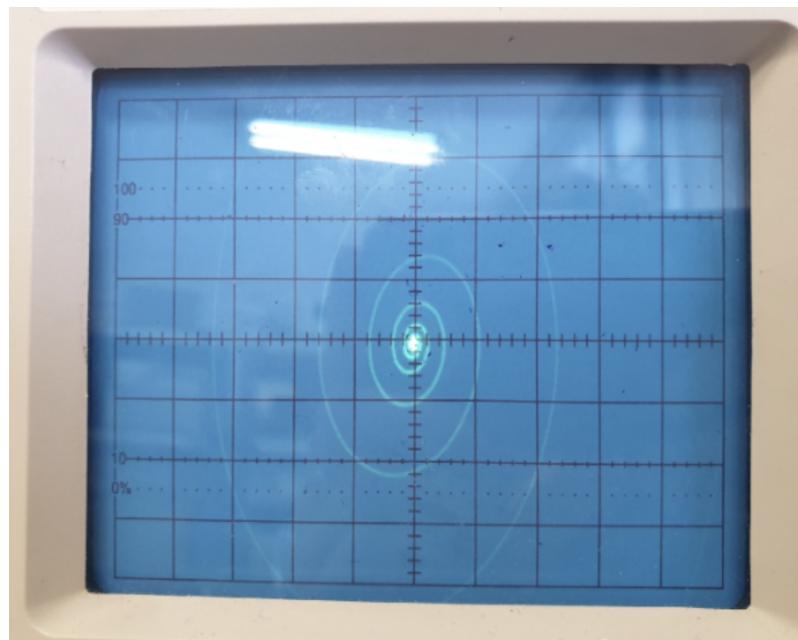
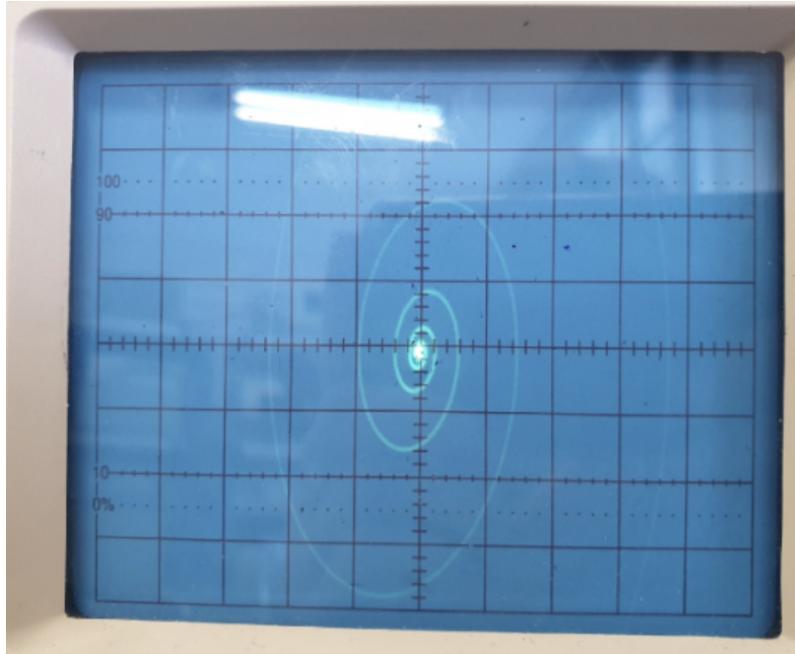


Рис. 4: Фазовая картина при  $R = 1478$  Ом

Рис. 5: Фазовая картина при  $R = 1970$  Ом

Измерим логарифмический декремент  $d$  контура для максимального и минимального значений  $R$  по формуле:

$$d = \frac{1}{n} \ln \frac{x_k}{x_{k+n}}$$

$R$ , Ом	$n$	$X_k$ , см	$X_{k+n}$ , см	$d$
740	2	3.5	1.4	0.458
1970	1	2.0	0.6	1.204

Разберём цепь, отключим катушку и измерим её индуктивность  $L$  и омическое сопротивление  $R_L$  при помощи RLC-метра. Получим значения:

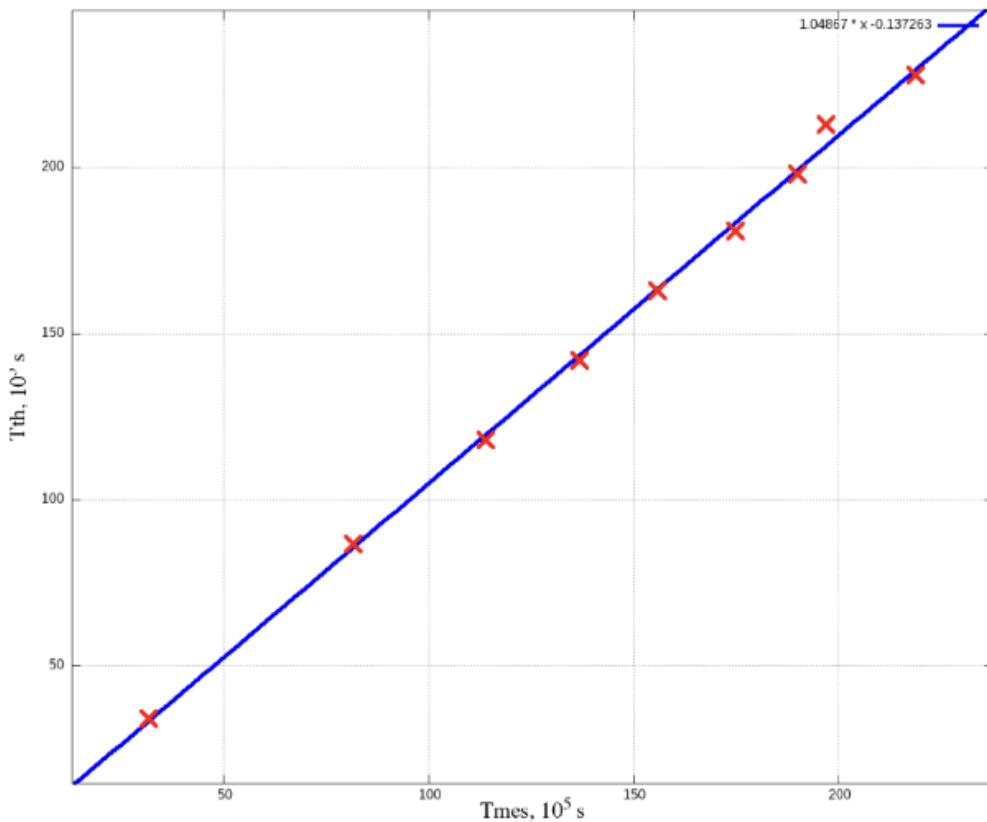
$$L = 146 \text{ мГн}; R_L = 14 \text{ Ом}$$

## 4 Обработка экспериментальных данных

### 4.1 Сравнение экспериментальных и теоретических значений периода Т

По формуле  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  рассчитаем теоретические значения периодов для контура. и сравним с экспериментальными, измеренными в пункте 3.1:

$T_{mes}, 10^5 \text{c}$	$T_{th}, 10^5 c$
31.7	33.8
81.6	86.5
114	118
137	142
156	163
175	181
190	198
197	213
219	228

Рис. 6: График  $T_{th}$  от  $T_{mes}$ 

Получили зависимость:

$$T_{th} = a \cdot T_{mes} + b$$

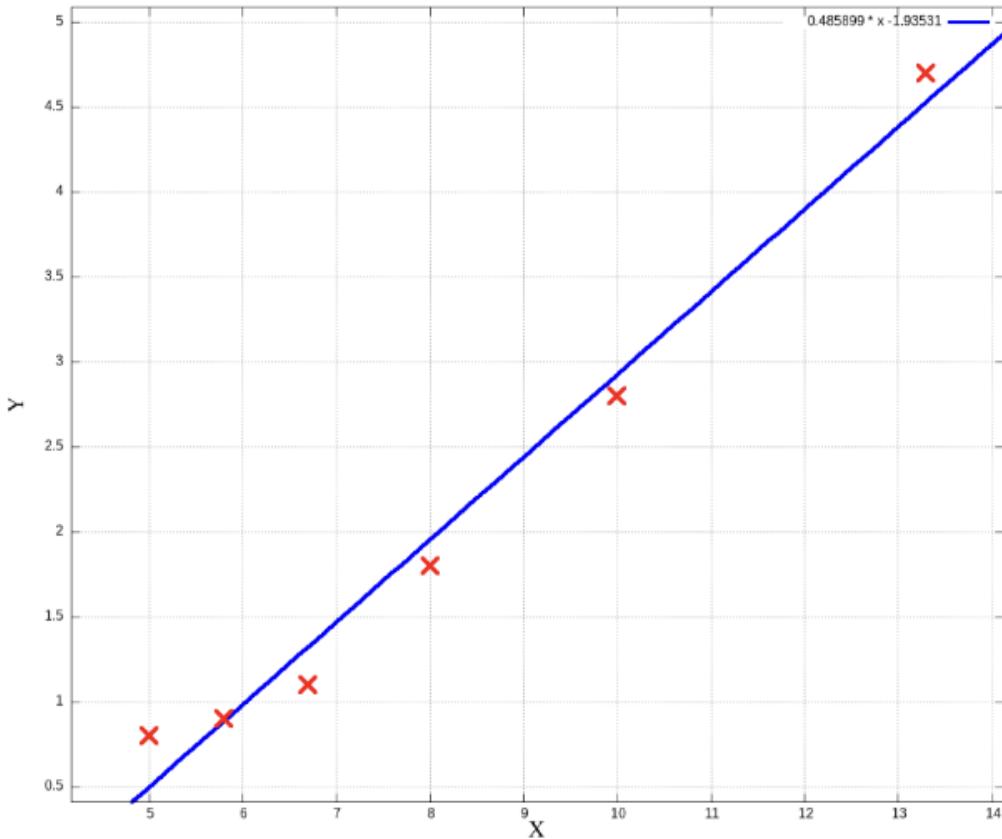
$$a = 1.05 \pm 0.01$$

$$b = -0.137 \pm 0.8 \text{ c}$$

Из аппроксимации видно, что экспериментальные данные практически идеально совпадают с теоретическими.

## 4.2 Декремент затухания и $R_{cr}$

Используя данные из пункта 3.3 построим зависимость  $Y = f(X)$ ,  $Y = 1/d^2$   $X = 1/R_\Sigma$ :

Рис. 7: График  $Y$  от  $X \cdot 10^4$ 

По наклону графика в начале координат определим  $R_{cr}$ :

$$R_{cr} = 2\pi\sqrt{\Delta Y / \Delta X} = 264 \text{ Ом}$$

Видно, что это значение очень плохо совпадает со значениями, полученными в пункте 3.2. что говорит о том, что данные способ определения критического сопротивления слабо соответствует реальности.

### 4.3 Добротность

Расчитаем добротность для минимального и максимального значения  $R$ , измеренных в пункте 3.3. Используем формулу:

$$Q = \frac{\pi}{d}$$

$R$ , Ом	$d$	$Q_{mes}$	$Q_{th}$
740	0.458	6.9	8.5
1970	1.204	2.6	3.2

Видим, что экспериментальные данные довольно точно совпадают с теоретическими.

## 5 Выводы

В ходе лабораторной работы были измерены периоды колебания контура, полученные значения совпадают с теоретическими в пределах погрешности; был проверен способ определения критиче-

ского сопротивления  $R_{cr}$  через коэффициент наклона графика  $1/d^2$  от  $1/R_\Sigma$ . Полученные значения не совпадают с теоретическими (264 Ом vs 12600 Ом). Были экспериментально получены значения добротности для контура при двух значениях  $R$ . Полученные значения примерно совпадают с теоретическими.