МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа радиотехники и кибернетики.

Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.4.1

Изучение физического маятника.

Автор:
Устюжанина Мария Алексеевна
Б01-107

Долгопрудный 2021

Введение

Цель работы:

1. на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями;

2. проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения;

3. убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника;

4. оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

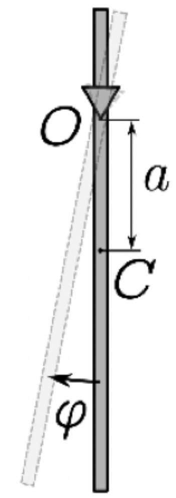


Рис. 1: Стержень как физический маятник

В работе используются: металлический стержень с опорной призмой; закреплённая на стене консоль; подставка с острой гранью для определения цента масс маятника; секундомер; линейки металлические различной длины; электронные весы.

Теоритические сведения

Физический маятник - твёрдое тело, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, при подвешивании за одну из точек в поле тяжести.

В данной работе в качестве физического маятника используется однородный стальной стержень длинной 1 метр (L). На стержне закреплена опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстаяние от точки опоры маятника до его центра масс.

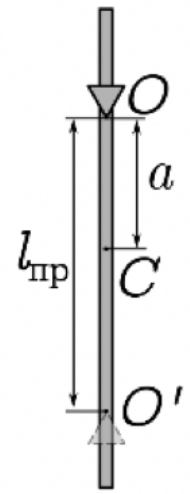


Рис. 2: К теореме Гюйгенса

Закон движения твердого тела для материальной точки, вращающейся на расстоянии r от оси:

$$M = J\frac{d\omega}{dt};$$

в котором $M = Fr$ - момент силы, относительно оси вращения; $J = mr^2$ - момент инерции точечного тела; ω - угловая скорость вращения.

Закон вращательного движения для твердого тела, состоящего из совокупности материальных точек:

$$J = \sum_i m_i r_i^2;$$

где r_i - расстояние от точки массойm_i до оси вращения.

Момент инерции стержня, подвешанного на расстоянии a от центра масс, по теореме Гюйгенса-Штейнера определяется:

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2$$

Период колебаний произвольного физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{a \cdot g}};$$

где l - длина стержня, a - расстояние от оси вращения до центра масс.

Учитывая влияние подвесной призмы, можно найти ускорение свободного падения:

$$T == 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{стер}} - J_{\text{призм}}}{m_{\text{стер}} g a_{\text{стер}} - m_{\text{призм}} g a_{\text{призм}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g(1 + \frac{m_{\text{призм}}}{m_{\text{стер}}})x_c}};$$

где $x_c = \frac{m_{\text{стер}} a_{\text{стер}} - m_{\text{призм}} m_{\text{призм}}}{m_{\text{стер}} + m_{\text{призм}}}$- расстояние от центра масс системы до точки подвеса. Пусть $1 + \frac{m_{\text{призм}}}{m_{\text{стер}}} = \beta$, тогда:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g \cdot \beta \cdot x_c}}$$

$$g = \frac{4\pi^2(\frac{l^2}{12} + a^2)}{T^2 \cdot \beta \cdot x_c}$$

Результаты измерений и обработка данных

1. Абсолютная погрешность линейки $\sigma_{\text{лин}} = 0,5$мм и секундомера $\sigma_{\text{сек}} = 0,01$с.

2. Длина стержня $l = (1000,0 \pm 0,5)$мм.

   Масса призмы $m_{\text{призмы}} = (74,0 \pm 0,5)$г.

   Масса штанги $m_{\text{штанги}} = (1022,5 \pm 0,5)$г.

   $\beta = 1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}} \approx 1,07$

3. Положение острия призмы относительно ц.м. стержня в первом эксперименте: $a = (250 \pm 0,5)$мм. Положение ц.м. относительно острия призмы $x_{\text{ц.м.}} = (235,0 \pm 0,5)$мм.

4. Предварительный опыт по измерению периода колебаний:

   Количество колебаний: $n = 10$;

   Время: $t = (15,42 \pm 0,01)$с;

   Период колебаний $T = \frac{t}{n} = 1,54$с.

   Вычислим значение предварительное g по одному измерению:

$$g = \frac{4\pi^2(\frac{l^2}{12} + a^2)}{T^2 \cdot \beta \cdot x_{\text{ц}}} = \frac{4 \cdot 3,14^2(\frac{1^2}{12} + 0,25^2)}{1,54^2 \cdot 1,07 \cdot 0,235} \approx 9,62\text{м}/c^2$$

   Полученное значение для ускорения свободного падения отличается не более, чем на 10% от табличного.

5. Для определения случайной погрешности измерения времени с помощью секундомера проведем 10 измерений. Результат этого эксперимента занесем в таблицу:

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, сек	15,42	15,25	15,38	15,49	15,19	15,44	15,34	15,37	15,21	15,29

6. Среднее значение полученных : $\underline{t} = 15,42$с;

   Случайная погрешность: $\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(t_i - \bar{t})^2} \approx 0,1c$;

   Систематическая погрешность секундомера: $\sigma_t^{\text{сист}} \approx 0,01c$;

   Полная погрешность: $\sigma_t^{\text{полн}} \approx 0,1c$.

7. Оценим число колебаний n, по которому следует измерять в период, чтобы относительная погрешность измерения периода соответствовала точности измерений $\mathcal{E} = 0,1\%$:

   Погрешность периода $\sigma_T = \frac{\sigma_t}{n} \approx 0,01c$;

   Относительная погрешность: $\mathcal{E}_t = \frac{\sigma_T}{T} \approx 0,0066$;

   Необходимое число колебаний: $n = \frac{\sigma_T}{T \cdot \mathcal{E}_T} \approx 10$.

8. Проведем опыты для 10 разных значений a и рассчитаем ускорение свободного падения. Результат вычислений:

№ опыта	a, мм	x, мм	n	t, сек	T, сек	g, м/с^2
1	50	45	10	26,31	2,63	10,17
2	120	110	10	18,09	1,81	10,2
3	220	205	10	15,62	1,56	9,72
4	300	280	10	15,16	1,52	9.94
5	460	430	10	16,13	1,61	9,73
6	350	315	10	15,6	1,56	9,91
7	250	235	10	15,34	1,53	9,73
8	180	168	10	16,34	1,63	9,57
9	100	92	10	19,53	1,95	9,81
10	30	28	10	33,91	3,39	9,65

9. Определим приведенную длину маятника:

   а) $l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12 \cdot a} = 0,25 + \frac{1^2}{12 \cdot 0,25} \approx 0,583$м;

   б) Для физического маятника: $T = 1,53c$

   Для математического: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}} = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{0,583}{9,8}} \approx 1,5c$;

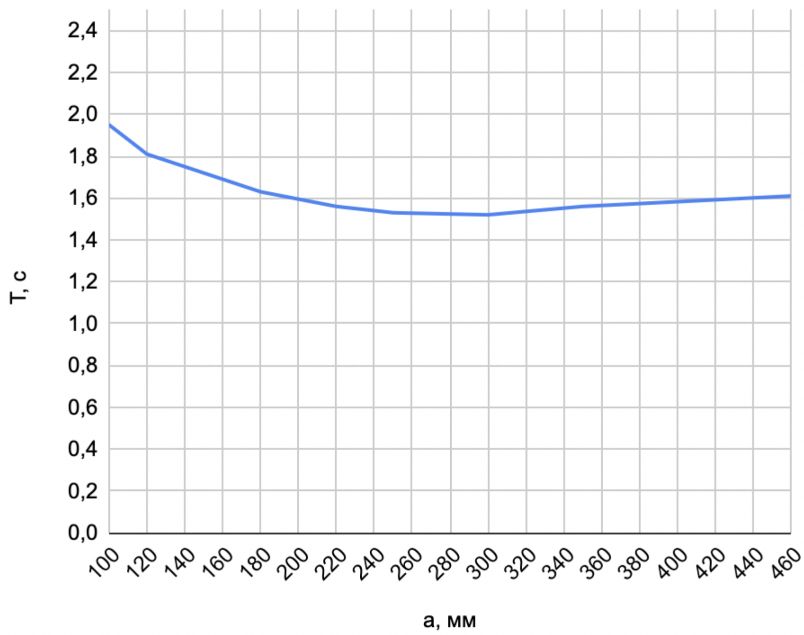
   в) Проверим справедливость теоремы Гюйгенса: поместим призму в центр качания и перевернем маятник; измерим период $T = 1,6c$. Период колебаний в пределе погрешности опыта, следовательно, теорема справедлива.

10. Среднее значение для ускорения свободного падения:

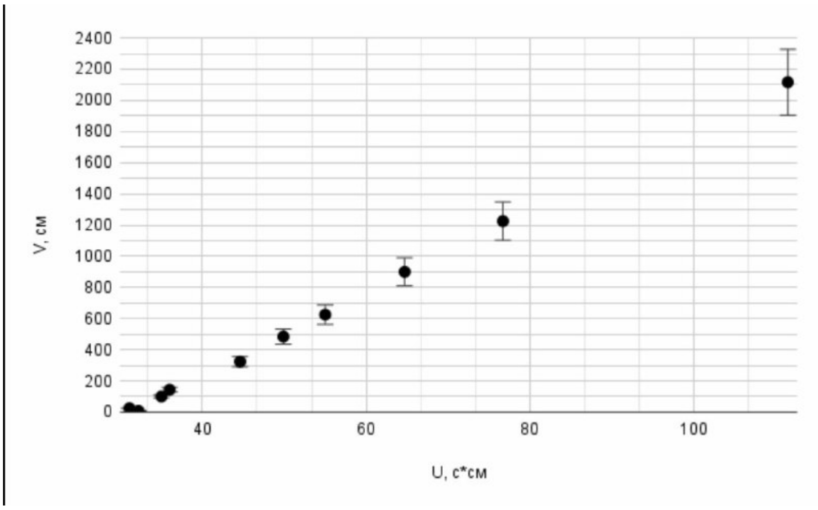
$$\overline{g} \approx 9,83\text{м/с}^2$$

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(g_i - \overline{g})} \approx 0,18\text{м/с}^2$$

11. График зависимости периода колебаний T от расстояния подвеса a:



12. Построим график, откладывая по оси абсцисс величину $U = T^2 \cdot x_{\text{ц}}$, а по оси ординат величину $V = a^2$



13. С помощью метода наименьших квадратов определим параметры k, b наилучшей прямой $V = b + kU$ и их погрешность σ_k, σ_b:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g\beta x_{ц}}}$$

$$a^2 = \frac{T^2 g\beta x_{ц}}{4\pi^2} - \frac{l^2}{12}$$

$$V = \frac{g\beta U}{4\pi^2} - \frac{l^2}{12} = kU + \beta$$

Следовательно,

$$k = \frac{g\beta}{4\pi^2}$$

$$g = \frac{4\pi^2 k}{\beta}$$

По графику найдем значения k:

$$k = \frac{< UV > - < U > \cdot < V >}{< U^2 > \cdot < U >^2} \approx 26,46 \text{см/с}^2 \approx 0,26 \text{м/с}^2$$

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{\frac{< UV > - < U > \cdot < V >}{< U^2 > \cdot < U >^2} - k^2} \approx 0,053 \text{м/с}^2$$

Найдем ускорение свободного падения:

$$g \approx 9,75 \text{м/с}^2$$

$$\sigma_g = g \cdot \frac{\sigma_k}{k} \approx 0,19 \text{м/с}^2$$

Итак,

$$g \approx (9,75 \pm 0,19) \text{м/с}^2$$

Вывод

При помощи усреднения значений ускорения свободного падения получили результат с погрешностью около 1,8%.

При вычислении через наименьшие квадраты - около 1,9%.

Данные получены с примерно равной точностью, и ответ близок к табличному.

Также в ходе работы была проверена т. Гюйгенса-Штейнера об обратимости точек опоры и центра качания маятника.