МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа радиотехники и кибернетики.

Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.2.3

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса.

Автор:
Устюжанина Мария Алексеевна
Б01-107

Долгопрудный 2021

Введение

Цель работы:

Измерение момента инерции тела и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам. Проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

Идея: В эксперименте используется связь между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. В качестве маятника используется трифилярный подвес, круглая платформа, подвешенная в поле тяжести на трех длинных нитях. Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси. На платформу помещаются тела различной формы, измеряются периоды колебаний маятника и определяются значения моментов инерции этих тел. Теорема Гюйгенса-Штейнера проверяется по соответствию между экспериментальной и теоретической зависимостями моментов инерции грузов от их расстояния до центра платформы.

В работе используются: Трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых необходимо измерить.

1 Теоретические данные.

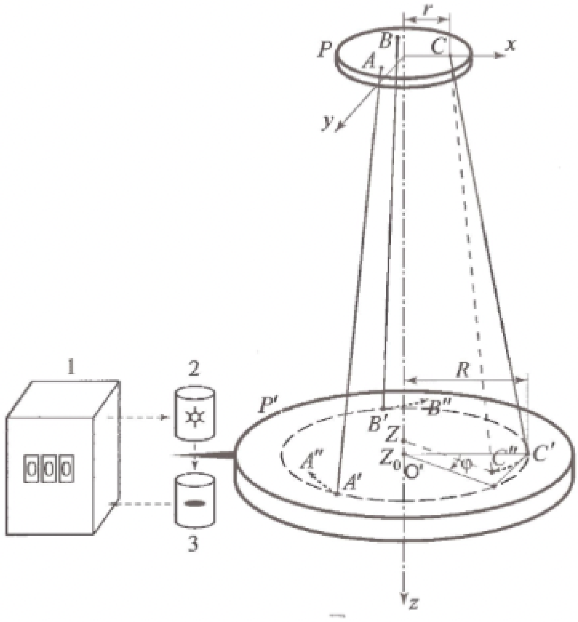


Рис. 1: Трифилярный подвес

Перед началом работы кратко изложим теоретический материал, связанный с данной темой.

Формула для нахождения момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения:

$$I = \int r^2 dm, \tag{1}$$

где r - расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Интегрирование производиться по всей массе тела.

Уравнение сохранения энергии при колебаниях:

$$\frac{I\ddot{\phi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E$$

$$(R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 = L^2$$

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\phi \approx z_0^2 - 2Rr(1-\cos\phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2$$

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0}$$

Трифилярный подвес состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформе Р и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA', BB', CC' вращающейся платформы Р'.

Подставляя данное уравнение в уравнение Закона Сохранения Энергии и дважды дифференцируя по времени, после сокращений, получаем:

$$I\ddot{\phi}^2 + mg\frac{Rr}{z_0}\phi = 0 \tag{2}$$

Решая уравнение (2) относительно ϕ, получаем:

$$\phi = \phi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta\right) \tag{3}$$

Из (3) следует, что

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \tag{4}$$

$$I = kmT^2, \qquad k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \tag{5}$$

2 Выполнение работы

1. Перед началом работы я проверила исправность установки для измерений, то есть проверила, что при возбуждении крутильных колебаний не возникают маятникообразные движения платформ и исправно работает счетчик числа колебаний.

2. Найдем рабочий диапазон амплитуд колебаний. Для этого найдем такой диапазон, на котором амплитуда уменьшается больше чем в 2 раза, а период одинаков. Он получился равен 15-5 градусов($T_{15} = 4,37 \approx 4,36 = T_5$).

3. Найдем все параметры установки $z_0, m, R и r$ по ним вычислим константу k, входящую в формулу 4, а также вычислим её погрешность σ_k:

$$R = (0,1146 \pm 0,0005)\text{м}$$

$$r = (30,2 \pm 0,3)\text{мм}$$

$$m = (965,7 \pm 0,5)\text{г}$$

Вычислим z_0, измерив расстояние от края нижней платформы до центра верхней(l = 2163 мм) и применив теорему Пифагора. Данное значение сошлось со значением полученным с помощью лазерного дальномера.

$$z_0 = (2,166 \pm 0,0007)\text{м}$$

Найдем k и σ_k:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} = \frac{9,8\text{м/с}^2 \cdot 0,1146\text{м} \cdot 0,0302\text{м}}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 2,166\text{м}} = 3,97 \cdot 10^{-4} \approx 0,4 \cdot 10^{-3}\text{м}^2/c^2$$

$$\frac{\sigma_k}{k} = \sqrt{(\frac{\sigma_R}{R})^2 + (\frac{\sigma_r}{r})^2 + (\frac{\sigma_{z_0}}{z_0})^2} = \sqrt{(\frac{0,5}{114,6})^2 + (\frac{0,3}{30,2})^2 + (\frac{7}{2166})^2} \approx 0,011$$

$$\sigma_k \approx 4 \cdot 10^{-6}(\text{м/с})^2$$

4. Определим момент инерции ненагруженной платформы:

$$T = 4,36 \pm 0,01c$$

$$I_0 = kmT^2 = 0,4 \cdot 10^{-3}(\text{м/с})^2 \cdot \frac{965,7}{1000}\text{кг} \cdot 4,36^2\text{с}^2 \approx 0,0073\text{кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\sigma_{I_0} = I_0\sqrt{(\frac{\sigma_k}{k})^2 + (\frac{\sigma_m}{m})^2 + (\frac{\sigma_T}{T})^2} \approx 0,0001$$

5. Измерим моменты инерции двух тел, сначала порознь, потом вместе, помещая тела на платформу так, чтобы центр масс находился на оси вращения. Мерить будем по 10 колебаний. Результаты запишем в таблицу:

	Кольцо	Диск	Вместе
$m_{\text{платформы}}$, кг	0,9657	0,9657	0,9657
$m_{\text{тела}}$, кг	0,748	1,1229	1,8709
t, с	41,6	36	36,7
T,с	4,16	3,6	3,67
$I + I_0$	0,0119	0,0108	0,0152
I	0,0046	0,0035	0,0080

$$\sigma_{I_к+I_0} \approx 0,0001кг \cdot м^2$$
$$\sigma_{I_к} \approx 0,0001кг \cdot м^2$$
$$\sigma_{I_д+I_0} \approx 0,0001кг \cdot м^2$$
$$\sigma_{I_д} \approx 0,0001кг \cdot м^2$$
$$\sigma_{I_{общ}+I_0} \approx 0,0002кг \cdot м^2$$
$$\sigma_{I_{общ}} \approx 0,0002кг \cdot м^2$$

$$I_{общ} = I_{цил} + I_{диска} = 0,0046 + 0,0035 = 0,0081 \approx 0,0080 = I_{общ.измер.}$$

Это доказывает аддитивность моментов инерции. Расхождение значений в пределах погрешности.

6. Рассчитаем теоретически моменты инерции тел (используя формулу (1)):

7. Рассчитаем теоретически моменты инерции тел (используя формулу 1):

$$I'_{кольца} = m_к \cdot R_к^2 = 0,748кг \cdot 0,08^2 м^2 \approx 0,0048кг \cdot м^2$$

$$I'_{диска} = \frac{m_д \cdot R_д^2}{2} = \frac{1,1229кг \cdot 0,08^2 м^2}{2} \approx 0,0036кг \cdot м^2$$

$$I'_{общ} = I'_к + I'_д = 0,0048 + 0,0036 = 0,0084кг/м^2$$

$$\sigma_{I'_к} = I'_к \cdot \sqrt{(\frac{\sigma_{m_к}}{m_к})^2 + 4(\frac{\sigma_{R_к}}{R_к})^2} \approx 0,0006кг/м^2$$

$$\sigma_{I'_д} = I'_д \cdot \sqrt{(\frac{\sigma_{m_д}}{m_д})^2 + 4(\frac{\sigma_{R_д}}{R_д})^2} \approx 0,0005кг/м^2$$

$$\sigma'_I = \sqrt{\sigma^2_{I'_к} + \sigma^2_{I'_д}} \approx 0,0008кг/м^2$$

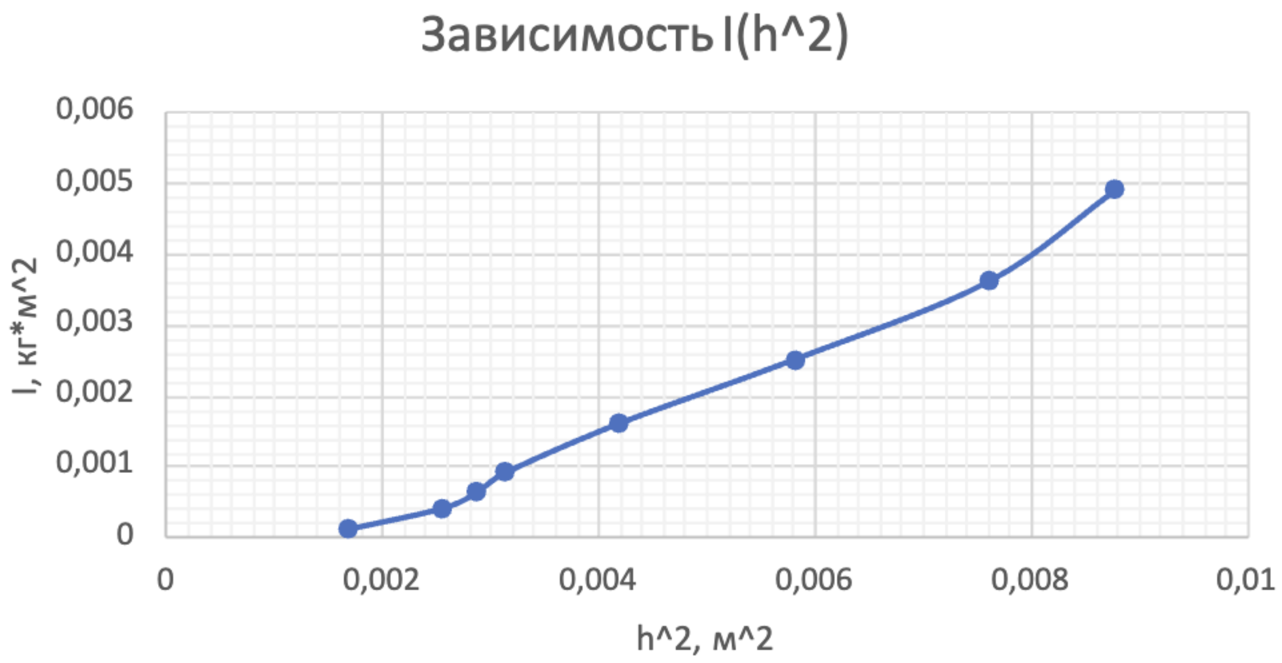
Получается, что экспериментальные и теоретические данные совпадают (с учетом погрешностей):

$$I_{общ} = 0,0080 \pm 0,0002кг/м^2$$

$$I'_{общ} = 0,0084 \pm 0,0008кг/м^2$$

8. Поместим на платформу диск, разрезанный по диаметру. И будем постепенно раздвигать половинки диска так, чтобы их центр масс находился на оси вращения платформы. В результате измерений получили зависимость момента инерции системы I от расстояния h каждой из половинок до оси вращения.

   Построим график зависимости $I(h^2)$ по полученным значениям:



С помощью метода наименьших квадратов найдем массу системы тел и сравним ее со значением, полученным с помощью весов:

	Эксперимент	Теория
m, г	$1536,5 \pm 0,5$	1516 ± 54
I, кг $\cdot$ м^2	$0,0015 \pm 0,0001$	$0,0017 \pm 0,0001$

Из таблицы видно, что результаты эксперемента согласуются с теоретическими вычислениями.

3 Выводы

1. Величину момента инерции можно определить с помощью трифилярного подвеса. Результаты такого измерения совпадут с теоретическими предсказаниями в рамках погрешности. Довольно большая точность результатов при помощи подвеса обеспечивается малой погрешностью измерения времени, а также выбором условий, при которых крутильные колебания подвеса можно считать слабозатухающими.

2. В ходе эксперимента была подтверждена аддитивность момента инерции. А также была еще раз проверена теорема Гюйгенса-Штейнера.