

## Abstract

Tareas para entregar de la asignatura Análisis del Comportamiento Estratégico. Máster en Economía.

## 1 Ejercicio 1:

En el siguiente Juego a la Cournot la demanda de mercado que enfrentan  $n$  empresas es estrictamente convexa con la forma  $p(q) = \frac{a}{Q^\alpha}$ , donde  $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ . Los consumidores se asumen pasivos y vienen descritos por  $p(Q) = a - bQ$ .

### 1.1 Empresas producen con $C_i(q_i) = cq_i$

Si consideramos que el número de empresas  $n$  es 2, podemos calcular las cantidades que maximizan sus beneficios como:

$$\max \pi_i(q_i) = q_i - cq_i$$

condierando la maximización de los beneficios de la empresa 1 tenemos:

$$\max \pi_1(q_1) = \left(\frac{a}{(q_1 + q_2)^\alpha}\right)q_1 - cq_1$$

podemos emplear derivadas parciales para obtener la condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\pi_1(q_1, q_2))}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{aq_1}{(cq_1 + q_2)^\alpha} \right)$$

derivando podemos llegamos a la expresión:

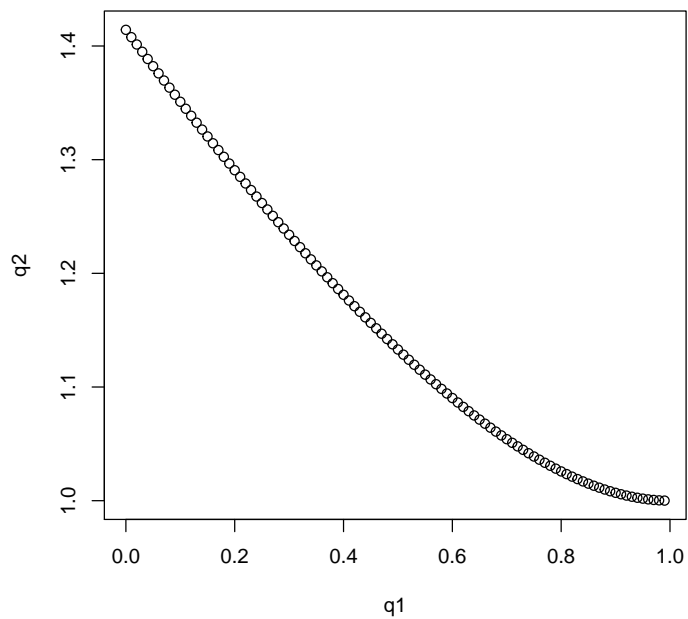
$$-a\alpha q_1(q_1 + q_2)^{-(\alpha+1)} + a(q_1 + q_2)^{-\alpha} - c = 0$$

operando matematicamente podemos obtener  $q_2 = q_2(q_1)$ :

$$q_2 = \sqrt[\frac{1}{\alpha-1}]{\frac{-c}{\frac{a}{\alpha q_1} - 1}}$$

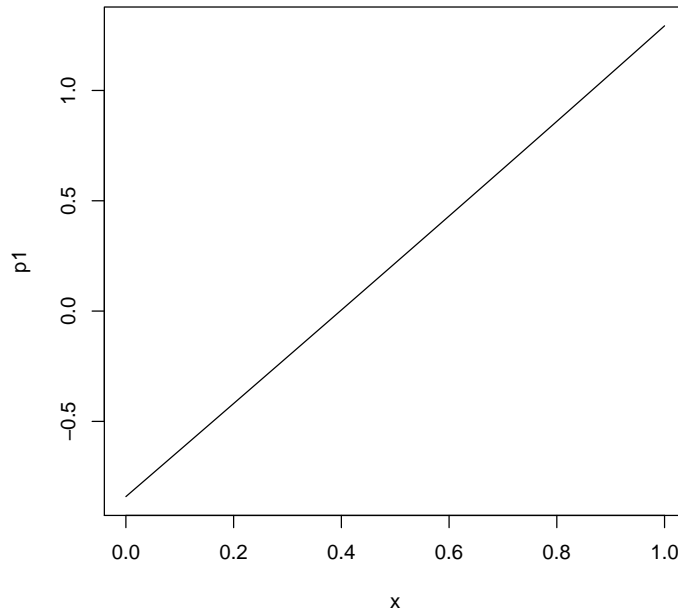
Esta función puede ser expresada en el espacio  $\{q_1, q_2\}$  como se aprecia en la siguiente figura:

```
> a=0.4; c=0.2; alfa=0.5
> q1=seq(0,0.999,by=0.01)
> q2=-q1+sqrt((-a/c)/(alfa*q1-1))
> plot(q1,q2)
```



Para resolver asignamos valores arbitrarios as variables ( $a > c$ ). Vemos unha función decreciente. Ahora si suponemos que las empresas producen un bien idéntico  $q_1 = q_2$  podemos obtener una solución de la producción con un programa de cálculo como R:

```
> p1=function(x){2*x-(sqrt((-a/c)/(alfa*x-1)))^(alfa-1)}
> plot(p1)
> o1=uniroot(p1,c(0.1,1))
> (raiz1=o1$root)
[1] 0.3977708
```



```
> a=0
> b=0
> a+b
[1] 0
```

Vemos que el programa nos arroja un valor de la producción de 0.399 cuando los bienes son homogéneos.

## 1.2 Empresas producen con $C_i(q_i) = \frac{c}{2}q_i^2$

## 2 Ejercicio 4:

En este ejercicio intentaremos mostrar en juegos dinámicos de Cournot-Stackelberg mover primero no es siempre una ventaja. Vamos a emplear un modo similar al del Ejercicio 1, pero con costes crecientes de la forma  $cq_i^3$ .

Primero empezaremos por maximizar los beneficios de la empresa 2:

$$\max \pi_2(q_1, q_2) = aq_2 - b(q_2 + q_1)q_2 - cq_2^3$$

obteniendo ahora la condición de primer orden:

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\right)(aq_2 - b(q_2 + q_1)q_2 - cq_2^3)$$

obtenemos como solución:

$$q_2 = \frac{2b + \sqrt{4b^2 + 12c(-q_1b + a)}}{6c}$$

esta es la cantidad de producción que maximiza los beneficios de la empresa dos. Ahora maximizaremos los beneficios de la empresa uno considerando la producción de la empresa dos que maximiza sus propios beneficios ( $q_2$ ):

$$\max \pi_1(q_1, q_2) = aq_1 - b(q_1 + \frac{2b + \sqrt{4b^2 + 12c(-q_1b + a)}}{6c})q_1 - cq_1^3$$

realizando la derivada parcial, con respecto a  $q_1$ , y reordenando obtenemos la siguiente ecuación:

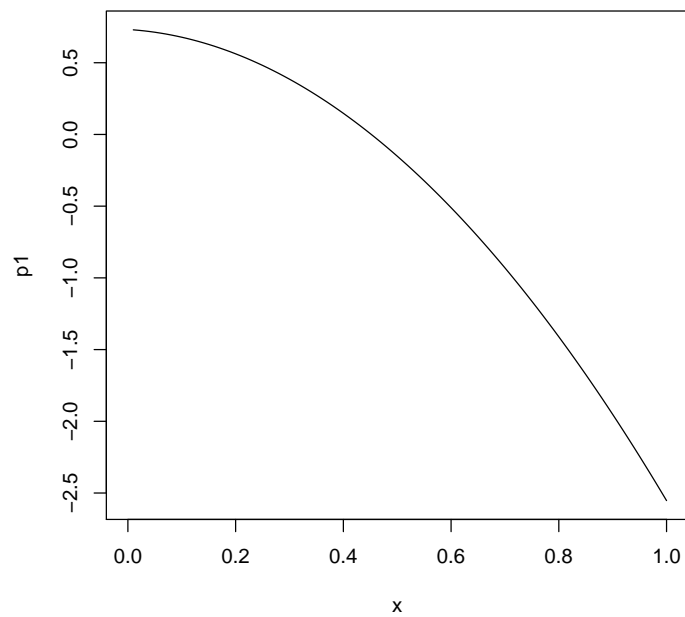
$$a - 2bq_1 + \frac{2b^2}{6c} + \frac{b}{6c} \frac{q_1(a + 2b(9q_1 + 2))}{\sqrt{q_1^2(a + 4(3bq_1 + b))}} - 3q_1^2 = 0$$

Para resolver esta ecuación anterior utilizaremos el siguiente Script de

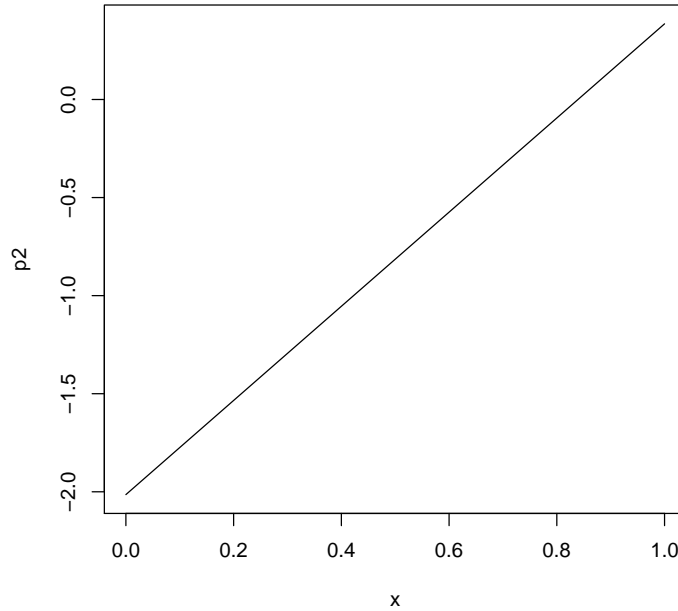
R:

```
> a=0.6 ;b=0.2 ;co=0.4
> p1=function(x){a-2*b*x+2*b^2/(6*co)+(b/(6*co)*(x*(a+2*b*(9*x+2)))/
+ + (sqrt((x^2)*(a+4*(3*b*x+b)))))-3*x^2}
> plot(p1)
> o1=uniroot(p1,c(0.1,1))
> (raiz1=o1$root)

[1] 0.4518852
```



```
> p2=function(x){6*co*x-2*b-sqrt(4*b^2+12*co*(-raiz1*b+a))}
> o2=uniroot(p2,c(0.1,1))
> plot(p2)
> (raiz2=o2$root)
[1] 0.8393208
```



Hemos dados valores aleatorios a las variables  $a$ ,  $b$  y  $c$  y obtenemos la raíz de  $q_1$ . OS valores otorgados as variables son aleatorios pero teñen certa coherencia.  $a$  (máima disposición a pagar) es mayor que el coste marginal  $c$ . Por otro lado, como  $b = 0,2$  la pendiente de la demanda es muy pequeña por lo que la elasticidad precio-demanda es muy grande.

Vemos de esta manera que la producción de la empresa 1 ( $q_1 = 0.45$ ) es inferior a la de la empresa 2 ( $Q_2 = 0.83$ ) (supuesto que las empresas son homogeneass)

### 3 Ejercicio 6:

### 4 Ejercicio 7: Competencia Bertrand

Competencia Bertrand con producto homogéneo, es decir,  $d = 1$ :

El coste marginal de la empresa 1 puede ser  $\bar{c}$  o  $\underline{c}$ . El coste marginal de la empresa 2 es  $c$  con certeza. Se cumple:

$$0 < \underline{c} < c < \bar{c}$$

La empresa 2 conoce la distribución de probabilidad del coste marginal de la empresa 1, es decir, sabe que el coste la empresa 1 es  $\underline{c}$  con probabilidad  $\gamma$ ;  $0 < \gamma < 1$  y  $\bar{c}$  con probabilidad  $(1 - \gamma)$ .

La función de demanda residual de la empresa es  $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + dp_j$ . Sabiendo que  $d = 1$  para productos homogéneos (máximo grado de

substitución) obtenemos:

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + p_j$$

$$i, j = 1, 2$$

$$i \neq j$$

La estrategia óptima para cada empresa es decidir el precio que constituya la mejor respuesta para cada uno de los tipos en los que podría encarnarse. Así, sus mejores respuestas provendrán de la maximización de sus funciones de beneficios.

Para 1 si su tipo es  $\underline{c}$ :

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - \underline{c})(a - p_1 + p_2)$$

CPO:

$$p_1(\underline{c}; p_2) = \frac{a + \underline{c} + dp_2}{2}$$

Para 1 si su tipo es  $\bar{c}$ :

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - \bar{c})(a - p_1 + p_2)$$

CPO:

$$p_1(\bar{c}; p_2) = \frac{a + \bar{c} + dp_2}{2}$$

Para la empresa 2, la función de beneficios esperados será:

$$E[\pi_2] = (p_2 - c)[\gamma(a - p_2 + p_1(\underline{c})) + (1 - \gamma)(a - p_2 + p_1(\bar{c}))]$$

El precio óptimo que fijará la empresa 2 de acuerdo con sus creencias sobre los costes de la empresa 1 será:

$$p_2(c; p_1(\underline{c}), p_1(\bar{c})) = \frac{a + c + (\gamma p_1(\underline{c})) + (1 - \gamma)p_1(\bar{c})}{2}$$

Resolviendo, el EB de el duopolio con bien homogéneo e información incompleta de Bertrand es el perfil de estrategias:

$$(p_1^*(\underline{c}), p_1^*(\bar{c}), p_2^*) = \left( \frac{6a - (4 - (1 + \gamma))\underline{c} + (1 - \gamma)\bar{c} + c}{6}, \frac{6a + (4 - \gamma)\bar{c} + \gamma\underline{c} + 2c}{6}, \frac{3a + 2c + (\gamma\underline{c} + (1 - \gamma)\bar{c})}{3} \right)$$

## 5 Ejercicio 8:Subastas

### 5.1 Sobre cerrado segundo precio.

Investigar qué sucedería con la estrategia  $b_i^*(v_i) < v_i$ .

## 5.2 Sobre cerrado al primer precio

En este tipo de subastas, el ganador es aquel jugador que ofreciese la puja más alta. El pago será su propia oferta. Además, los jugadores no pueden ver las pujas de los demás.

Calcular la MRI y obtener EBN.

Conjunto de acciones posibles para cada jugador:  $i = 1, \dots, n$ . Se corresponde con el conjunto de pujas que puede ofertar. El conjunto de acciones y de estrategias coincide al ser un juego simultáneo:

$$A_i = S_i = [0, +\infty)$$

Los tipos de cada jugador  $i$  son las distintas valoraciones que puede tener del objeto subastado:

$$T_i = [0, \bar{v}]$$

Cada  $i$  cree que el resto de valoraciones  $v_j$  está uniformemente distribuida en  $[0, \bar{v}]$ .

El pago de cada jugador es su beneficio esperado.

El objetivo de cada jugador es maximizar el beneficio.

En esta situación, el EB será el perfil de pujas:

$$(b_1^*, \dots, b_n^*) = (\frac{n-1}{n}v_1, \dots, \frac{n-1}{n}v_n)$$

No hay estrategia dominante, cada jugador debe determinar su mejor respuesta frente a la estrategia de los demás.

Definimos la probabilidad de que  $i$  pujan por debajo de  $b$ :

$$Pr(B_i \leq b) = Pr(v_i \leq B^{-1}(b)) = F(B^{-1}(b)) = \frac{B^{-1}(b)}{\bar{v}}$$

Todo jugador distinto de  $i$  puede saber con qué probabilidad ganará la subasta conociendo la probabilidad anterior, esto se debe a que cuando pujan  $b$ , conoce la probabilidad de que  $i$  pujan menos que  $b$ .

La probabilidad de que todos los jugadores menos el jugador 1 pujan menos que  $b$  es:

$$Pr(B_i \leq b, \forall i = 2, 3, \dots, n) = (\frac{B^{-1}(b)}{\bar{v}})^{n-1}$$

Por lo tanto, esta es la probabilidad de que 1 gane la subasta cuando  $b$ .

La utilidad esperada de 1 pujando  $b$  es:

$$E[u_1] = (v_1 - b)(\frac{B^{-1}(b)}{\bar{v}})^{n-1}$$

Teniendo en cuenta que si gana obtiene  $v_1 - b$ , y si pierde obtiene 0.

Maximizando la utilidad esperada obtenemos la siguiente CPO:

$$\partial E[u_1] / \partial b = 0 = (-1)(\frac{B^{-1}(b)}{\bar{v}})^{n-1} + (v_1 - b)(n-1)(\frac{B^{-1}(b)}{\bar{v}})^{n-2} \frac{1}{\bar{v}} \frac{dB^{-1}(b)}{db}$$

Reescribiendo:

$$(\frac{B^{-1}(b)}{\bar{v}})^{n-1} = (v_1 - b)(n-1)(\frac{B^{-1}(b)}{\bar{v}})^{n-2} \frac{1}{\bar{v}} \frac{dB^{-1}(b)}{db}$$



Simplificando:

$$B^{-1}(b) \frac{dB}{dv}(B^{-1}(b)) = (v_1 - b)(n - 1)$$

Asumiendo todos los jugadores simétricos:  $B^{-1}(b) = v_1$  y  $b = B(v_1)$ ; Así:

$$\frac{dB}{dv}(v) = (1 - \frac{B(v)}{v})(n - 1)$$

Esta expresión es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Fijando la condición  $B(0) = 0$  (La puja de un jugador con valoración nula es igual a 0) se obtiene:

$$B(v) = \frac{n-1}{n}v$$

Esta expresión denota la relación existente entre la puja de cada jugador y su valoración. Como  $\frac{n-1}{n} < 1$ , los jugadores pujan por debajo de sus verdaderas valoraciones en el EB.

## 6 Ejercicio 9:Provisión de bien público

**6.1** Modificación de pagos para que ninguno de los dos agentes tenga estrategia dominante.

**6.2** Generalizar el modelo con el sistema de creencias  $(p, 1 - p)$ .

## 7 Ejercicio 10: