Abstract

Tareas para entregar de la asignatura Análisis del Comportamiento Estratégico. Máster en Economía.

1 Ejercicio 1:

En el siguiente Juego a la Cournot la demanda de mercado que enfrentan n empresas es estrictamente convexa con la forma $p(q) = \frac{a}{Q^\alpha}$, donde $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$. Los consumidores se asumen pasivos y vienen descritos por $p(Q) = a - bQ$.

1.1 Empresas producen con $C_i(q_i) = cq_i$

Si consideramos que el número de empresas **n** es 2, podemos calcular las cantidades que maximizan sus beneficios como:

$$max\, \pi_i(q_i) = q_i - cq_i$$

condierando la maximización de los beneficios de la empresa 1 tenemos:

$$max\, \pi_1(q_1) = (\frac{a}{(q_1 + q_2)^\alpha})q_1 - cq_1$$

podemos emplear derivadas parciales para obtener la condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{aq_1}{cq_1 + q_2)^\alpha})$$

derivando podemos llegamos a la expresión:

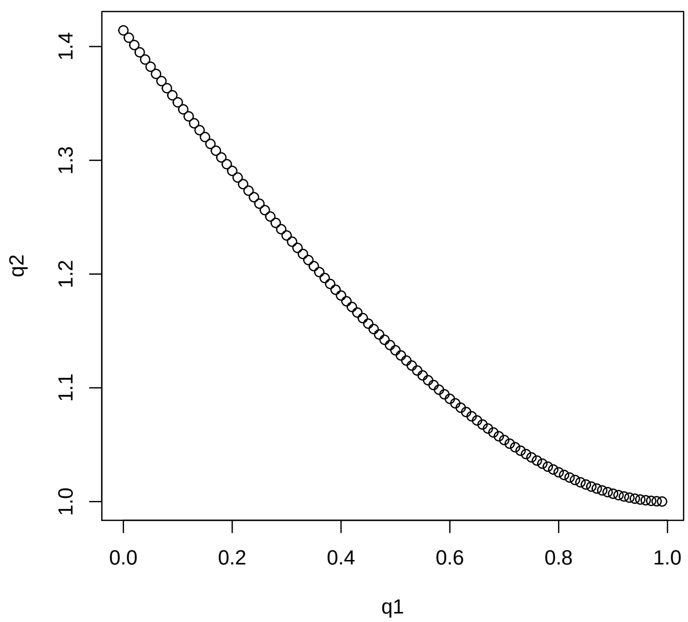
$$-a\alpha q_1(q_1 + q_2)^{-(\alpha+1)} + a(q_1 + q_2)^{-\alpha} - c = 0$$

operando matematicamente podemos obtener $q_2 = q_2(q_1)$:

$$q_2 = \sqrt{\frac{\frac{-c}{a}}{\alpha q_1 - 1}}^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

Esta función puede ser expresada en el espacio $\{q_1, q_2\}$ como se aprecia en la siguiente figura:

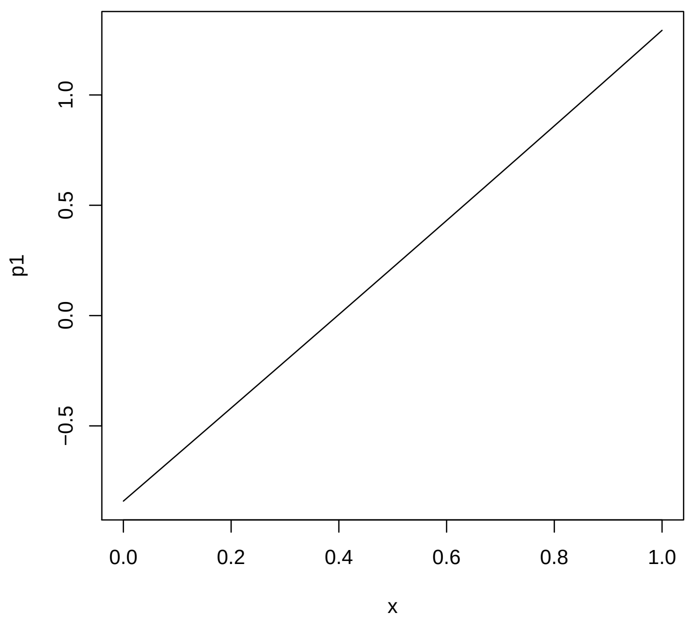
```
> a=0.4; c=0.2; alfa=0.5
> q1=seq(0,0.999,by=0.01)
> q2=-q1+sqrt((-a/c)/(alfa*q1-1))
> plot(q1,q2)
```



Para resolver asignamos valores arbitrarios as variables (a>c). Vemos unha función decreciente. Ahora si sumonemos que las empresas producen un bien idéntico $q_1 = q_2$ podemos obterner una solución de la produción con un programa de cálculo como R:

```
> p1=function(x){2*x-(sqrt((-a/c)/(alfa*x-1)))^(alfa-1)}
> plot(p1)
> o1=uniroot(p1,c(0.1,1))
> (raiz1=o1$root)
```

```
[1] 0.3977708
```



Vemos que el programa nos arroja un valor de la produción de 0.399 cuando los bienes son homogeneos.

1.2 Empresas producen con $C_i(q_i) = \frac{c}{2}q_i^2$

2 Ejercicio 2: Calcular ECN en condiciones generales

2.1 Para n empresas:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = q_i + \sum_{j \neq i}^{n} q_j$$

$$p'(Q) < 0; p''(Q) \geq 0; p(Q) = a - Q$$

Las n empresas producen lo mismo: $Q = q_i + (n-1)q_{-i}$. La función de beneficio para cada empresa i:

$$\pi_i = p(Q)q_i - q_i c$$

Sustituyendo:

$$\pi_i = q_i(a - (q_i + (n-1)q_i) - c) =$$

$$q_i(a - q_i - (n-1)q_{-i} - c) =$$

$$aq_i - q_i^2 - (n-1)q_{-i}q_i - cq_i$$

Derivando obtenemos la CPO:

$$\partial\pi_i/\partial q_i = a - 2q_i - (n-1)q_{-i} - c = 0$$

Extraemos la función de reacción para cada i:

$$q_i = \frac{a - (n-1)q_{-i} - c}{2}$$

En equilibrio $q_i = q_{-i}$:

$$2q_i + (n-1)q_{-i} = a - c; (n+1)q_i = a - c;$$

$$q_i = \frac{a-c}{(n+1)}$$

$$Q = nq_i \to p = a - Q = a - n(\frac{a-c}{(n+1)}$$

Cuando el número de empresas tiende a infinito el precio tiende hacia el coste marginal:

$$\lim_{n\to\infty} a - n(\frac{a-c}{(n+1)} = a - a + c;$$

$$p = c$$

2.2 Para 2 empresas:

$$Q = q_i + q_j$$

$$p(Q) = a - Q; p(Q) = a - (q_i + q_j)$$

Definimos la función de beneficio para i y j:

$$\pi_i(q_i, q_j) = p(Q)q_i - cq_i = q_i(a - (q_i + q_j)) - cq_i$$

Haciendo la derivada parcial obtenemos la CPO:

$$\partial\pi_i/\partial q_i = a - 2q_i - q_j - c = 0$$

Así, las mejores respuestas son:

$$q_i = \frac{a - c - q_j}{2}$$

$$q_j = \frac{a - c - q_j}{2}$$

Resolviendo:

$$q_i = q_j = \frac{(a-c)}{3}$$

$$p = a - Q = a - 2(\frac{a-c}{3}) = a - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c =$$

ya que $a > c$:

$$\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c > c$$

Por lo tanto, el precio será mayor que el coste marginal generando beneficios extraordinarios para las empresas.

3 Ejercicio 3:

4 Ejercicio 4:

En este ejercicio intentaremos mostrar en juegos dinámicos de Cournot-Stackelberg mover primero no es siempre una ventaja. Vamos a emplear un mode similar al del Ejercicio 1, pero con costes crecientes de la forma cq_i^3.

Primero empezaremos por maximizar los beneficios de la empresa 2:

$$max\, \pi_2(q_1, q_2) = aq_2 - b(q_2 + q_1)q_2 - cq_2^3$$

obteniendo ahora la condición de primer orden:

$$(\frac{\partial}{\partial q_1})(aq_2 - b(q_2 + q_1)q_2 - cq_2^3)$$

obtenemos como solución:

$$q_2 = \frac{2b + \sqrt{4b^2 + 12c(-q_1 b + a)}}{6c}$$

esta es la cantidad de producción que maximiza los beneficios de la empresa dos. Ahora maximizaremos los beneficios de la empresa uno considerando la produción de la empresa dos que maximiza sus pripios beneficios (q_2):

$$max\, \pi_1(q_1, q_2) = aq_1 - b(q_1 + \frac{2b + \sqrt{4b^2 + 12c(-q_1 b + a)}}{6c} q_1 - cq_1^3$$

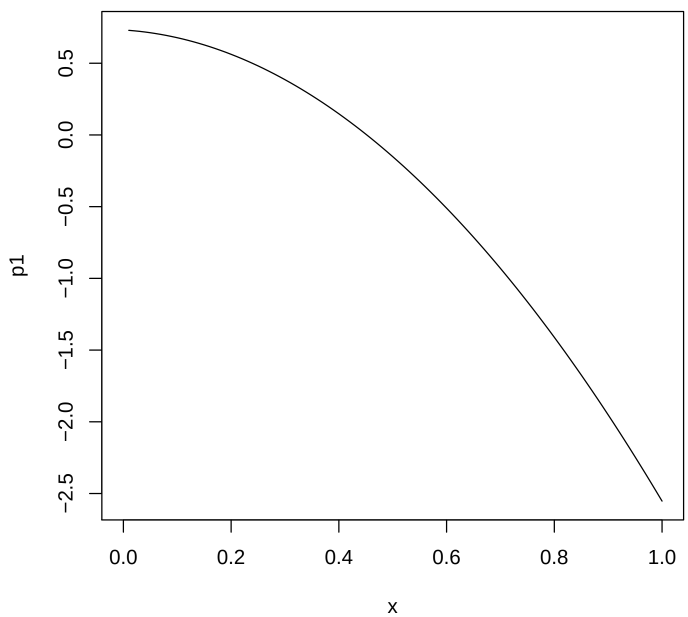
realizando la derivada parcial, con respecto a $q1$, y reordenando obtenemos la siguiente ecuación:

$$a - 2bq_1 + \frac{2b^2}{6c} + \frac{b}{6c}\frac{q_1(a + 2b(9q_1 + 2))}{\sqrt{q_1^2(a + 4(3bq_1 + b))}} - 3q_1^2 = 0$$

Para resolver esta ecuación anterior utilizaremos el siguiente Script de R:

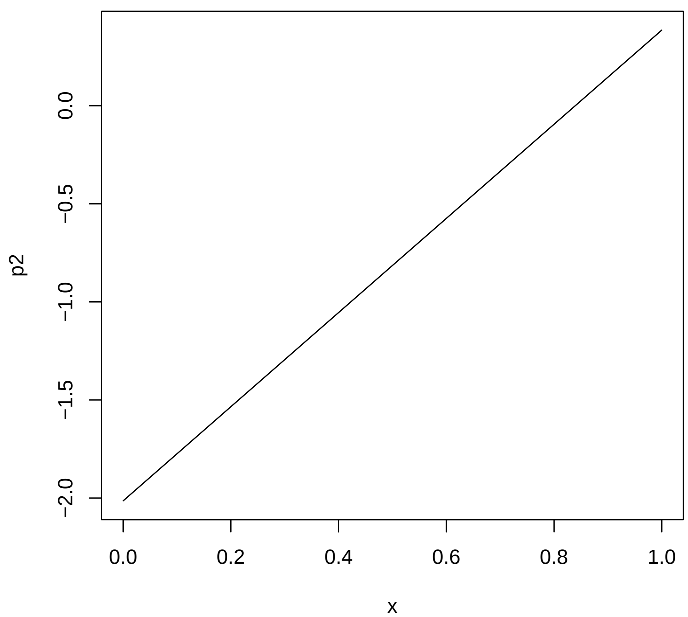
```
> a=0.6 ;b=0.2 ;co=0.4
> p1=function(x){a-2*b*x+2*b^2/(6*co)+(b/(6*co)*(x*(a+2*b*(9*x+2)))/
+ +                                         (sqrt((x^2)*(a+4*(3*b*x+b)))))-3*x^2}
> plot(p1)
> o1=uniroot(p1,c(0.1,1))
> (raiz1=o1$root)
```

```
[1] 0.4518852
```




```
> p2=function(x){6*co*x-2*b-sqrt(4*b^2+12*co*(-raiz1*b+a))}
> o2=uniroot(p2,c(0.1,1))
> plot(p2)
> (raiz2=o2$root)
```

```
[1] 0.8393208
```



Hemos dados valores aleatorios a las variables a, b y c y obtenemos la raiz de q_1. OS valores otorgados as variables son aleatorios pero teñen certa coherencia. a (máima disposición a pagar) es mayor que el coste marginal c. Por otro lado, como $b = 0,2$ la pendiente de la demanda es muy pequeña por lo que la eslasticidade precio-demanda es muy grande.

Vemos de esta manera que la produción de la empresa 1 ($q_1 = 0.45$) es inferior a la de la empresa 2 ($Q_2 = 0.83$) (supuesto que las empressas son homogeneass)

5 Ejercicio 6:Generalización de juego estático con información incompleta

Consideremos las siguientes situación:

1/2	a	b	c
A	4,2	4,2	4,0
B	6,6	0,10	0,0

Table 1: Jugador 2 de tipo x

La probabilidad de que el jugador 2 sea de tipo x es p, así mismo, la pobabilidad de que sea de tipo z es (1-p).

1/2	a	b	c
A	4,2	4,0	4,3
B	6,6	0,0	0,10

Table 2: Jugador 2 de tipo z

5.1 Los dos jugadores tienen información incompleta y simétrica (por lo tanto ambos asignan las probabilidades p y (1-p))

Al ser un juego simultáneo, el conjunto de estrategias coincide con el conjunto de acciones para cada jugador:

$$S_1 = A_1 = [A, B]$$

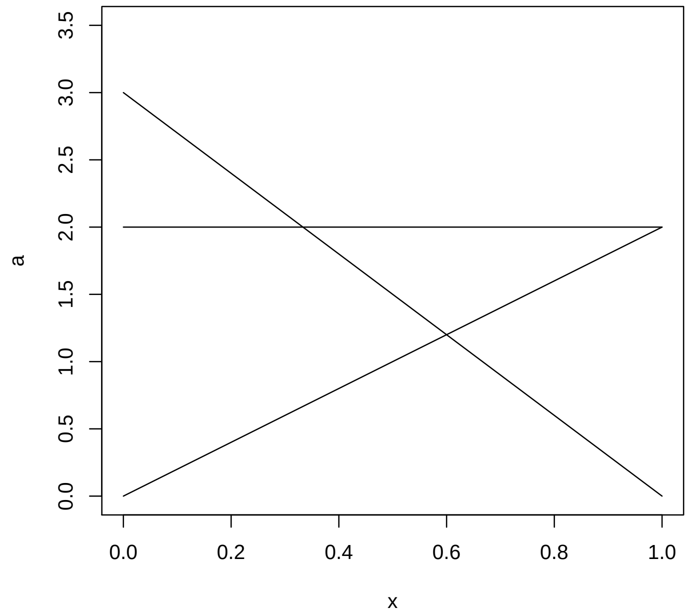
$$S_2 = A_2 = [a, b, c]$$

Supongamos, en primer lugar, que 1 juega A. Los valores esperados de jugar sus posibles acciones para el jugador 2 son:

$$VE^2_{(a)} = 2p + (1-p)2 = 2$$
$$VE^2_{(b)} = 2p + (1-p)0 = 2p$$
$$VE^2_{(c)} = 0p + (1-p)3 = 1 - 3p$$

Programando estas funciones en R resulta fácil visualizar el VE para el jugador 2:

```
> a=function(p){2*p+(1-p)*2}
> b=function(p){2*p+(1-p)*0}
> d=function(p){p*0+(1-p)*3}
> plot(a, ylim=c(0,3.5))
> plot(b,add=TRUE)
> plot(d,add=TRUE)
```



Punto de corte entre d y a:

```
> t=function(p){(p*0+(1-p)*3)-2}
> (cortead=uniroot(t,c(0,1))$root) #punto de corte entre d y a

[1] 0.3333333

>
```

Punto de corte entre a y c:

```
> g=function(p){(2*p+(1-p)*2)-(2*p+(1-p)*0)}
> (corteab=uniroot(g,c(0,1))$root)

[1] 1
```

Dando lugar a la siguiente función de reacción para el jugador 2:

$$\left\{ \begin{array}{c} b, si p < 1/3 \\ a, si 1/3 < p < 1 \\ b, a, si : p = 1 \end{array} \right.$$

Si 1 juega B:

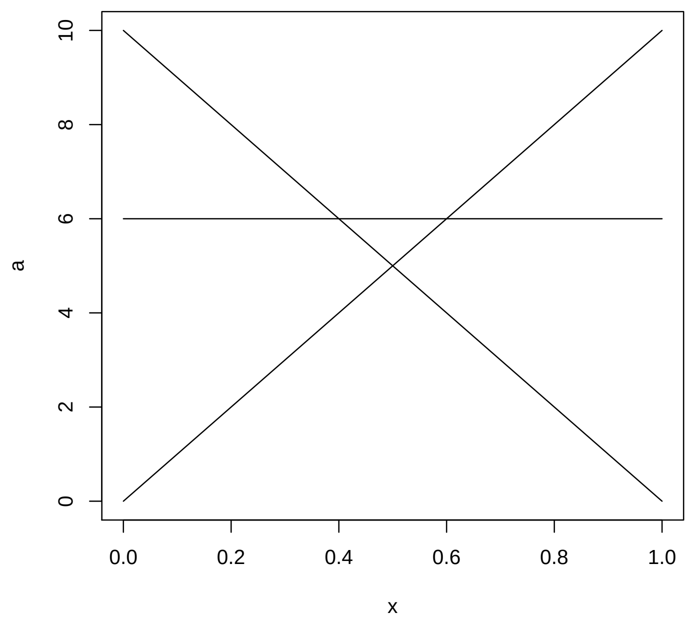
$$VE^2_{(a)} = 6p + (1-p)6 = 6$$

$$VE^2_{(b)} = 10p + (1-p)0 = 10p$$

$$VE^2_{(c)} = 0p + (1-p)10 = 1 - 10p$$

Graficando el VE para el jugador 2:

```
> a=function(p){6*p+(1-p)*6}
> b=function(p){10*p+(1-p)*0}
> d=function(p){p*0+(1-p)*10}
> plot(a, ylim=c(0,10))
> plot(b,add=TRUE)
> plot(d,add=TRUE)
```



Puntos de corte:

```
> k=function(p){(p*0+(1-p)*10)-(6*p+(1-p)*6)}
> (corte1=uniroot(k,c(0,1))$root)

[1] 0.4
```

Y:

```
> m=function(p){(10*p+(1-p)*0)-(6*p+(1-p)*6)}
> (corte2=uniroot(m,c(0,1))$root)

[1] 0.6
```

Obtenemos la función de reacción para el jugador 2 cuando el jugador 1 juega B:

$$\left\{ \begin{array}{c} b, si p < 0.4 \\ a, si 0.4 < p < 0.6 \\ c, si : p > 0.6 \end{array} \right.$$

Así, podemos obtener los Equilibrios de Nash correspondientes a todo el espectro de posibles probabilidades subjetivas p y (1-p):

Para p<1/3; El jugador 2 juega: c si 1 juega A b si 1 juega B

Puesto que en esta situaci???n A es una estrategia dominante para el jugador 1, el Equilibrio de Nash sería (c,A).

Para 1/3<p<0.4; Existen 2 equilibrios de Nash: (a,A) y (b,B).

Para 0.4<p<0.6; El jugador 2 juega siempre a y el jugador 1 B; Equilibrio de Nash: (a,B).

Para p>0.6; Equilibrio de Nash: (a,A), (c,B).

5.2 solo el jugador 1 desconoce el tipo del jugador 2

Si 2 es de tipo x, mejor respuesta de 2:

$$MR^2_{(A)} = a, b$$

$$MR^2_{(B)} = b$$

Mejor respuesta de 1:

$$MR^1_{(a)} = B$$

$$MR^1_{(b)} = A$$

$$MR^1_{(c)} = A$$

Así, el Equilibrio de Nash si 2 es de tipo x es (b,A)

Si 2 es de tipo z, mejor respuesta de 2:

$$MR^2_{(A)} = c$$

$$MR^2_{(B)} = c$$

Mejor respuesta de 1:

$$MR^1_{(a)} = B$$

$$MR^1_{(b)} = A$$

$$MR^1_{(c)} = A$$

Así, el Equilibrio de Nash si 2 es de tipo z es (C,A)

6 Ejercicio 7: Competencia Bertrand con información incompleta

Competencia Bertrand con producto homogéneo, es decir, $d = 1$:

El coste marginal de la empresa 1 puede ser $\bar{c}$ o $\underline{c}$. El coste marginal de la empresa 2 es c con certeza. Se cumple:

$$0 < \underline{c} < c < \bar{c}$$

La empresa 2 conoce la distribución de probabilidad del coste marginal de la empresa 1, es decir, sabe que el coste la empresa 1 es $\underline{c}$ con probabilidad γ; $0 < \gamma < 1$ y $\bar{c}$ con probabilidad $(1 - \gamma)$.

La función de demanda residual de la empresa es $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + dp_j$. Sabiendo que $d = 1$ para productos homogéneos (máximo grado de substitución) obtenemos:

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + p_j$$

$$i, j = 1, 2$$

$$i \neq j$$

La estrategia óptima para cada empresa es decidir el precio que constituya la mejor respuesta apra cada uno de los tipos en los que podría encarnarse. Así, sus mejores respuestas provendrán de la maximización de sus funciones de beneficios.

Para 1 si su tipo es $\underline{c}$:

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - \underline{c})(a - p_1 + p_2)$$

CPO:

$$p_1(\underline{c}; p_2) = \frac{a + \underline{c} + dp_2}{2}$$

Para 1 si su tipo es $\bar{c}$:

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - \bar{c})(a - p_1 + p_2)$$

CPO:

$$p_1(\bar{c}; p_2) = \frac{a + \bar{c} + dp_2}{2}$$

Para la empresa 2, la función de beneficios esperados será:

$$E[\pi_2] = (p_2 - c)[\gamma(a - p_2 + p_1(\underline{c}) + (1 - \gamma)(a - p_2 + p_1(\bar{c}))]$$

El precio óptimo que fijará la empresa 2 de acuerdo con sus creencias sobre los costes de la empresa 1 será:

$$p_2(c; p_1(\underline{c}), p_1(\bar{c})) = \frac{a + c + (\gamma p_1(\underline{c}) + (1 - \gamma)p_1(\bar{c}))}{2}$$

Resolviendo, el EB de el duopolio con bien homogéneo e información incompleta de Bertrand es el perfil de estrategias:

$$(p_1^*(\underline{c}), p_1^*(\bar{c}), p_2^*) = (\frac{6a - (4 - (1 + \gamma))\underline{c} + (1 - \gamma)\bar{c} + c}{6}, \frac{6a + (4 - \gamma)\bar{c} + \gamma\underline{c} + 2c}{6}, \frac{3a + 2c + (\gamma\underline{c} + (1 - \gamma)\bar{c})}{3})$$

7 Ejercicio 8:Subastas

7.1 Sobre cerrado segundo precio.

Investigar qué suedería con la estrategia $b_i^{`}(v_i) < v_i$, es decir, cuando el jugador puja una cantidad de dinero superior a su valoración.

Se pueden presentar los siguientes casos:

1.-Gana la subasta si $b_i'(v_i) > \bar{b}$, obteniendo un pago de $v_i - b_i'(v_i) < 0$.

2.-Gana la subasta si $b_i'(v_i) > \bar{b}$, pero obtiene un pago negativo de $v_i - b_i'(v_i) < 0$. Esto sucede cuando $b_i'(v_i) - \bar{b} > v_i - \bar{b}$.

3.-Pierde la subasta si $b_i'(v_i) < \bar{b}$.

7.2 Sobre cerrado al primer precio

En este tipo de subastas, el ganador es aquel jugador que ofreciese la puja más alta. El pago será su ropia oferta. Además, los jugadores no pueden ver las pujas de los demás.

Calcular la MRi y obtener EBN.

Conjunto de acciones posibles para cada jugador: $i = 1, .., n$. Se corresponde con el conjunto de pujas que puede ofertar. El conjunto de acciones y de estrategias coincide al ser un juego simultáneo:

$$A_i = S_i = [0, +\infty)$$

Los tipos de cada jugador i son las distintas valoraciones que puede tener del objeto subastado:

$$T_i = [0, \bar{v}]$$

Cada i cree que el resto de valoraciones v_j está uniformemente distribuida en $[0, \bar{v}]$.

El pago de cada jugador es su beneficio esperado.

El objetivo de cada jugador es maximizar el beneficio.

En esta situación, el EB será el perfil de pujas:

$$(b_1^*, ..., b_n^*) = (\frac{n-1}{n} v_1, ..., \frac{n-1}{n} v_n)$$

No hay estrategia dominante, cada jugador debe determinar su mejor respuesta frente a la estrategia de los demás.

Definimos la probabilidad de que i puje por debajo de b:

$$Pr(B_i \leq b) = Pr(v_i \leq B^{-1}(b)) = F(B^{-1}(b)) = \frac{B^{-1(b)}}{\bar{v}}$$

Todo jugador distinto de i puede saber con quṕrobabilidad ganará la subasta conociendo la probabilidad anterior, esto se debe a que cuando puja b, conoce la probabilidad de que i puje menos que b.

La probabilidad de que todos los jugadores menos el jugador 1 pujen menos que b es:

$$Pr(B_i \leq b, \forall i = 2, 3, ..., n) = (\frac{B^{-1(b)}}{\bar{v}})^{n-1}$$

Por lo tanto, esta es la probabilidad de que 1 gane la subasta puando b.

La utilidad esperada de 1 pujando b es:

$$E[u_1] = (v_1 - b)(\frac{B^{-1(b)}}{\bar{v}})^{n-1}$$

Teniedo en cuenta que si gana obtiene $v_1 - b$, y si pierde obtiene 0.

Maximizando la utilidad esperada obtenemos la siguiente CPO:

$$\partial E[u_1]/\partial b = 0 = (-1)(\frac{B^{-1(b)}}{\bar{v}})^{n-1} + (v_1 - b)(n-1)(\frac{B^{-1(b)}}{\bar{v}})^{n-2} \frac{1}{\bar{v}} \frac{dB^{-1}(b)}{db}$$

Reescribiendo:

$$(\frac{B^{-1(b)}}{\bar{v}})^{n-1} = (v_1 - b)(n-1)(\frac{B^{-1(b)}}{\bar{v}})^{n-2} \frac{1}{\bar{v}} \frac{dB^{-1}(b)}{db}$$

Simplificando:

$$B^{-1}(b)\frac{dB}{dv}(B^{-1}(b)) = (v_1 - b)(n-1)$$

Asumiendo todos los jugadores simétricos: $B^{-1}(b) = v_1$ y $b = B(v_1)$; Así:

$$\frac{dB}{dv}(v) = (1 - \frac{B(v)}{v})(n-1)$$

Esta expresión es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Fijando la condición $B(0) = 0$ (La puja de un jugador con valoración nula es igual a 0) se obtiene:

$$B(v) = \frac{n-1}{n}v$$

Esta expresión denota la relación existente entre la puja de cada jugador y su valoración. Como $\frac{n-1}{n} < 1$, los jugadores pujan por debajo de sus verdaderas valoraciones en el EB.

8 Ejercicio 9:Provisión de bien público

8.1 Modificación de pagos para que ninguno de los dos agentes tenga estrategia dominante.

En este ejercicio en un caso de provisión de un bien público consideramos: Una familia formada por los individuos 1 y 2 los cuales deben decidir simultaneamente y puede decidir contribuir o no contribuir, $\{C, N\}_i, i = 1, 2$. El bien público se suministrará si alguno de los individuos o ámbos eligen contribuir. Contribuir a financiar el bien públio le supone al jugador 1 un coste de c_1 y al individuo 2 un coste que puede ser $\overline{c_2}$ o $\underline{c_2}$. El individuo 2 los costes que le supone al individuo 1 pero este último no conoce los costes para le individuo 2(lo único que sabe es que ouede ser $\overline{c_2}$ con probabilidad $\frac{1}{3}$ o $\underline{c_2}$ con probabilidad $\frac{2}{3}$).

La tarea propuesta es considerando el caso de los apuntes, modificar los pagos (los cuales mostraremos tabulados) para que el individuo 2 no posea una estrategia dominante como es la de contribuir. Para eso modificamos los pagos de la forma:

El principal cambio realizado es el pago de 2 cuando es de tipo $\overline{c_2}$ y 1 elige no contribuir. Con este cambio el individuo 2 cunando es de tipo $\overline{c_2}$ tendrá la estrategia dominante de no contribuir. Con estes pagos si analizamos los valores esperados con la finalidad de obtener la mejor respuestas del individuo 2 vemos que:

Si el individuo 2 es de tipo $\overline{c_2}$:

$$E(u_2, \overline{c_2}, 1C) \Longrightarrow (1 - c\overline{c_2})\gamma + (1-\gamma)$$
$$E(u_2, \overline{c_2}, 1N) \Longrightarrow (1 - c\overline{c_2})\gamma + 2(1-\gamma)$$

Si el individuo 2 es de tipo $\underline{c_2}$:

1 \ 2	C	N
C	$1-c_1, 1-\underline{c_2}$	1-$c-1$,1
N	1,1-$\overline{c_2}$	0,2

Table 3: Jugador 2 del tipo $\overline{c_2}$

1 \ 2	C	N
C	1-c_1,1-$\underline{c_2}$	1-c_1,1
N	1,1-$\underline{c_2}$	0,0

Table 4: Jugador 2 del tipo $\underline{c_2}$

$$E(u_2, \underline{c_2}, 1C) \Longrightarrow (1 - c\underline{c_2})\gamma + (\gamma - 1)$$
$$E(u_2, \underline{c_2}, 1N) \Longrightarrow (1 - c\underline{c_2})\gamma + 0$$

Vemos con esto los valores esperados el individuo 2 tendrá una estrategia dominante dependiente de su tipo.

Ahora analizaremos los pagos esperados del individuo 1, que asigna una probabilidad μ a que le individuo 2 sea de tipo $\bar{c_2}$ y elija N y una probabbilidad λ a que el ndividuo 2 sea de tipo $\underline{c_2}$ y elija C.

Si el individuo 1 elige C

$$E(u_1, C) = \frac{2}{3}(1-\mu)(1-c_1)+\frac{1}{3}\lambda(1-c_1)+\frac{2}{3}(1-c_1)+\frac{1}{3}(1-\lambda)(1-c_1) = 1-c_1$$

Si el individuo q elije N

$$E(u_1, N) = \frac{2}{3}(1-\mu)(1-c_1) + \frac{1}{3}\lambda$$

Las mejores respestas del individuo 1 son:

$$\begin{cases} Csic_1 < \frac{1}{3}(2\mu - \lambda + 1) \\ Nsic_1 > \frac{1}{3}(2\mu - \lambda + 1) \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos que si c es suficientemente bajo

-Si el individuo 1 toma la estrategia i$S_1^* = C$ el individuo 2 tiene las estrategias $S_2^*(\underline{c_2} = C$

$$S_2^*(\overline{c_2} = N$$

. Si $S_1^* = N$

-Si el individuo 1 toma la estrategia i$S_1^* = N$ el individuo 2 tiene las estrategias $S_2^*(\underline{c_2} = C$

$$S_2^*(\overline{c_2} = N$$

. Si $S_1^* = N$

Y si c es suficientemente grande y el individuo 2 es de tipo $\overline{c_2}$ ninguno de los individuos optará por contribuir.

8.2 Generalizar el modelo con el sistema de creencias $(p, 1-p)$.