Типы диффуров

Tuesday, 21 February 2023 22:21

1. ***Уравнения с разделяющими переменными:***
- Тут нечего добавить, решается интуитивно
2. ***Однородные уравнения:***
- Вид: Степень каждого слагаемого совпадает.
- Решение:
  - Замена: $y = tx$, где $y' = t'x + tx'$
  - После замены, должно получиться уравнение с разделяющимися переменными, решаем и получаем решение вида $F(t, x, C) = 0$, делаем обратную замену $t = \frac{y}{x}$.
3. ***Приводимые к однородным уравнениям:***
- Вид: $y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$
- Решаем систему $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ получим решение (x_0, y_0)
- Делаем замену $\begin{cases} x = x^1 + x_0 \\ y = y^1 + y_0 \end{cases}$ после замены, уравнение примит однорный вид
4. ***Линейные неоднородные:***
- Вид: $y' + p(x)y = q(x)$
- Решение:
  - Сначала решим однородное $y' + p(x)y = 0$
  - Применим метод вариации постоянной:
    - В получившимся решении однородного, заменим C на $C(x)$
    - Подставим получившийся y, в исходное уравнение, решив которое найдём чему равно $C(x)$
  - Подставим C(x) в решение однородного, и получим ответ)
5. ***Уравнение Бернулли:***
- Вид: $y' + p(x)y = q(x)y^n$
- Решение:
  - Делим на y^n
  - Замена: $z = y^{1-n}$
  - После замены, уравнение в большинстве случаев приобретает линейно неоднородный вид
6. ***Уравнение Рикатти:***
- Вид: $y' + p(x)y + q(x)y^2 = C(x)$
- Решение:
  - Необходимо найти решение любое частное решение данного уравнения(Оно должно иметь вид $C(x)$)
  - Если y_1 - решение, данного уравнения, то делаем замену: $y = y_1 + z$
  - Подставив в исходное уравнение, получим уравнение Бернули.
7. ***Уравнение, являющееся полным дифференциалом:***
- Вид: $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$
- Проверка(НУЖНА): $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$. Если данное равенство не выполняется, то уравнение не является полным дифференциалом, и данный способ не подходит!

- Решение:
    - Решаем систему: $\begin{cases} \frac{dF}{dx} = p(x,y) \\ \frac{dF}{dy} = q(x,y) \end{cases}$. Где F - и есть решение данного уравнения.
    - Для решения системы, сначала решаем один из дифуров(Например первый, и получаем $F\ = u(x,y) + C(y)$) в результате которого должна получиться константа зависящая от одной из переменных.
    - Затем подставляем полученную F в другой диффур (В котором мы находим чему равна C(y))
    - Подставляем полученную константу в решение первого дифура. Поскольку $dF\ =\ 0$, то приравниваем полученное выражение к константе.

8. **Приводимые к полному дифференциалу:**

- Способ 1) Нужно найти функцию $\mu(x,y)$ - интегрирующий множитель, умножив на которую дифференциал становится полным. Однако найти такую функцию очень сложно и нет чёткого алгоритма нахождения данной функции, однако если нам повезёт, и функция $\mu(x,y)$ имеет вид $\mu(x)$ или $\mu(y)$ (Которые зависят только от одной из этих переменных), то такую фунцкию мы можем найти по формуле(Считаем дифур относительно μ, если получаем зависимость одновременно по (x,y), значит такой функции нет):
  $$\frac{d\mu(x)}{dx}Q(x,y) = \mu(x)\left(\frac{dP(x,y)}{dy} - \frac{dQ(x,y)}{dx}\right)$$
  $$\frac{d\mu(y)}{dy}P(x,y) = -\mu(y)\left(\frac{dP(x,y)}{dy} - \frac{dQ(x,y)}{dx}\right)$$
- Способ 2) Просто расписываем наш дифур делаем некоторые преобразования и замены. Часто встречающиеся преобразования:
    1) $xdy + ydx = dxy$, с заменой $xy = t$
    2) $xdx + ydy = \frac{d(x^2+y^2)}{2}$, с заменой $(x^2+y^2) = t$
    3) $xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$, с заменой $\frac{y}{x} = t$
    4) $\frac{1}{x}dx = dln(x)$