Подготовка к диктанту!

Monday, April 3, 2023 7:55 PM

Главные вопросы:

Определение несовместных событий.
События А и В называются несовместными, если $A \cap B = \emptyset$
Как вычисляется Р(А) согласно классическому определению вероятности?
$P(A) = \frac{|A|}{|\omega|}$
Как вычисляется Р(А) согласно геометрическому определению вероятности?
$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\omega)}, \lambda -$ мера Лебега
Если события А и В несовместны, то чему равна вероятность объединения события A ∪ B**?**
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Чему равна вероятность суммы двух произвольных событий?
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Определение условной вероятности?
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Формула полной вероятности.
Пусть $H_1, H_2, \dots$ - полная группа событий ($H_i \cap H_j = \emptyset$, $\cup_i H_i = \omega$, $P(H_i) \neq 0\ \forall i, j$), то $P(A) = \sum_i P(A|H_i)P(H_i)$
Формула Байеса.
$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_j P(A|H_j)P(H_j)}$, где $H_{1,2,\dots}$- ПГС
Какие события называют независимыми?
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$
Что такое схема Бернулли?
Если выполняются три условия:
Производится серия независимый испытаний
У каждого события два исхода(Успех и Неудача)
P(У) = p = const
Выписать формулу Бернулли.
$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
Что такое плотность распределения?
$f_x(t) = F_x'(t)$, где F_x(t) - функция распределения. Только в абсолютно непрерывном распределении.
Перечислите характеристические свойства плотности.
$f_X(t) \geq 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) = 1$
Определение функции распределения случайной величины?
Пусть X - случайная величина, то $F_X(t) = P(X < t)$ - функция распределения случайной величины X.
Перечислите характеристические свойства функции распределения.
Если $F_X(t)$ - функция распределения, то:
$F_X(t)$ - неубывающая функция
$F_X(t)$ - непрерывная слева функция
$\lim_{t \to \infty} F_x(t) = 1$, $\lim_{t \to -\infty} F_x(t) = 0$
Чему для любого x равна P(ξ = x), если ξ имеет абсолютно непрерывное распределение?
Нулю(Как вероятность в точке на кривой, или интеграл с одинаковыми пределами интегрирования)
Как плотность распределения находится по функции распределения?
$f_X(t) = \frac{dF_X(t)}{dt} = F_X'(t)$
Перечислите основные дискретные распределения. Запишите таблицу распределения (P(X=k)=?) для каждого.
(См таблицу дискретных распределений)
Перечислите основные абсолютно непрерывные распределения. Запишите плотность и функцию распределения каждого.
(См таблицу абсолютно непрерывных распределений)
Если случайная величина ξ имеет нормальное распределение ($\xi \sim N_{0,1}$), то какое распределение будет иметь случайная величина ξ^2?

$F_{\xi^2}(t) = P(\xi^2 < t) =^{t>0} \mathrm{P}(-\sqrt{t} < \xi < \sqrt{t}) = \mathrm{P}(\sqrt{t} < \xi) - \mathrm{P}(-\sqrt{t} < \xi) = \mathrm{F}_\xi(\sqrt{t}) - \mathrm{F}_\xi(-\sqrt{t})$
При $t \le 0 : F_{\xi^2}(t) = 0$

$$f_{\xi^2}(\mathrm{t}) = \mathrm{F}'_{\xi^2}(\mathrm{t}) = \mathrm{F'}_\xi(\sqrt{t}) - F'_\xi(-\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t}{2}} * \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t}{2}} * \frac{-1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} = \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t)$$

Получили гамма-распределение (Примечание: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$))
т.е. если $X \in N_{0,1}$, и $Y = X^2$, то $Y \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$

Дать определение математического ожидания случайной величины с дискретным распределением.

$$EX = \sum_k x_k * P(X = x_k)$$

Мат. ожидание является средним значением случайных величин!

Дать определение математического ожидания случайной величины с абсолютно непрерывным распределением.

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt$$

!При этом нельзя забывать, что $\sum$ и $\int$ должны быть абсолютно непрерывны!

Перечислите свойства математического ожидания.
$EC = C, E(CX) = CEX$, где C = const
$E(X \pm Y) = EX \pm EY$
$E(XY) =^{\text{независимость}} EX * EY$
Если $X > Y$, то $EX > EY$

Дайте определение дисперсии.
$DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$

Какой физический смысл имеет дисперсия?
Дисперсия отвечает за "Разброс" случайной величины.
К примеру если у нас есть равномерное распределение от -10 до 10 (EX = 0) и равномерное распределение от -1000 до 1000 (EX = 0), видно что мат ожидание одинаковое, но вот разброс во втором случае больше, поэтому эта характеристика нам важна!

Что такое среднеквадратическое отклонение?
$\sigma = \sqrt{\mathrm{DX}}$
Именно эта величина чаще используется для анализа на разброс случайной величины.

Перечислите свойства дисперсии.
$DX \ge 0$
$DC = 0, D(X + C) = DX$, где C = const
$D(CX) = C^2 DX$
$D(X \pm Y) =^{\text{независимость}} DX + DY$ (Только +)

Дать определение совместной функции распределения.
$F_{X,Y}(t,s) = P(X < t, Y < s)$
Совместная(Многомерная) функция распределения для абсолютно непрерывных распределений X и Y:
$F_{X,Y}(t,s) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{s} f_{X,Y}(t,s) dt\, ds$, где f_{XY} - совместная плотность

Как по совместной функции распределения найти одномерные распределению случайных величин.
Как мы делали на семинаре(Частный случай, когда всего два дискретных распределения):
Строим таблицу X\Y

X \ Y	0	1
0	21/36	4/36
1	6/36	4/36
2	0	1/36

Объединяем(суммируем) соответствующий столбец(строку) чтобы остался только Y(X)

X	0	1	2
p	25/36	10/36	1/36

Y	0	1
p	27/36	9/36

Как по совместной плотности найти одномерные плотности.

$$F_X(t) = P(X < t) = P(X < t, Y < \infty) = F_{XY}(t, \infty) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(t,s)\, ds\, dt = \int_{-\infty}^{t} f_X(t) dt$$

от сюда:

XY

$\mathrm{f_X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(t,s)ds$

Определение независимых случайных величин.

Дискретные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, если для всех возможных значений случайных величин выполняется:

$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \dots P(X_n = x_n)$

Сформулировать критерий независимости случайных величин (через функции распределений).

Рассмотрим при двух случайных величинах:

$F_{X,Y}(t,s) = F_X(t)F_Y(s)$

Сформулировать критерий независимости для дискретных случайных величин.

$F(x = x_0, y = y_0) = P(x = x_0)P(y = y_0)$

Сформулировать критерий независимости для абсолютно непрерывных случайных величин.

$f_{X,Y}(t,s) = f_x(t)f_y(s)$

Записать формулу свертки.

Пусть X и Y - независимые абсолютно непрерывные случайные величины с плотностью $f_X(t), f_Y(t)$, тогда $X + Y$ - абсолютно непрерывная с плотностью:

$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t-u)f_y(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(t-u)f_x(u)du$

Какое распределение имеет сумма независимых случайных величин X и Y, если X имеет распределение Пуассона с параметром λ, Y имеет распределение Пуассона с параметром μ.

$\Pi_\lambda + \Pi_\mu = \Pi_{\lambda+\mu}$

Какое распределение имеет сумма n независимых случайных величин, имеющих распределение Бернулли с параметром p.

$B_p + B_p + \cdots + B_p = B_{n,p}$

Какое распределение имеет сумма независимых случайных величин X и Y, если X имеет нормальное распределение с параметрами $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{\sigma_1^2}$, а случайная величина Y имеет нормальное распределение с параметрами $\boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{\sigma_2^2}$

$N_{a_1,\sigma_1^2} + N_{a_2,\sigma_2^2} = N_{a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

Какое распределение имеет сумма независимых случайных величин X и Y, если X имеет гамма распределение с параметрами α и $\boldsymbol{\beta_1}$, а случайная величина Y имеет гамма распределение с параметрами α и $\boldsymbol{\beta_2}$

$\Gamma_{\alpha,\beta_1} + \Gamma_{\alpha,\beta_2} = \Gamma_{\alpha,\beta_1+\beta_2}$

Какое распределение имеет сумма независимых случайных величин X и Y, если X имеет показательное распределение с параметром α, а случайная величина Y имеет показательное распределение с параметром α.

$E_\alpha + E_\alpha = \Gamma_{\alpha,2}$

Дайте определение коэффициента корреляции.

$p(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma X \sigma Y} = \frac{E(XY) - EXEY}{\sqrt{DXDY}}$

Является показателем линейной зависимости(Насколько вероятности зависимы)

Перечислите свойства коэффициента корреляции.

$|p(x,y)| \le 1$

$p(x,y) =^{\text{независимость}} 0$, в обратную сторону не всегда!

$p(x, kx + b) = 1$

Сформулируйте неравенство Чебышева.

Первое(Маркова):

Если $X \ge 0$, то для $\forall\delta > 0$

$P(X \ge \delta) \le \frac{EX}{\delta}$

Второе:

Если $EX^2 < \infty$, тогда $\forall\epsilon > 0$

$P(|X - EX| \ge \epsilon) \le \frac{DX}{\epsilon^2}$

Дать определение сходимости по вероятности.

Последовательность $\{X_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине X, если $\forall\epsilon > 0$

$P(|X_n - X| \ge \epsilon) \to 0$ (Эквивалентно: $P(|X_n - X| \le \epsilon) \to 1$)

Обозначение: $X_n \to^P X$

Дать определение сходимости по распределению (слабой сходимости).

Последовательность $\{X_n\}$ сходится слабо или по распределению к случайной величине X, если $\forall x$ такого, что функция распределения F_X непрерывна в точке x, имеет место сходимость $F_{Xn}(x) \to F_X(x)$, при $n \to \infty$.

Обозначение: $X_n \Rightarrow X$

<u>Сформулировать закон больших чисел в форме Чебышева.</u>

Для любой последовательности $\{X_n\}$ попарно независимых и одинаково распределённых случайных величин с конечным вторым моментом($EX^2 < \infty$) имеет место сходимость:

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to^P EX_1$$

Сформулировать теорему Пуассона (теорему о редких событиях).

Пусть в схеме Бернулли $n \to \infty$ и при этом $p = p(n) \to 0$ так, что $np(n) \to \lambda$, где λ - некоторое положительное число. Тогда ∀k ∈ [0,1,2, …]

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Сформулировать центральную предельную теорему.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинакого распределённые случайные величины. Предположим, что $EX^2 < \infty$. Обозначим $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $a = EX_1$, $\sigma^2 = DX_1$, и пусть $\sigma^2 > 0$. Тогда ∀y :

$$P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < y\right) = F_{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}}(y) \to \Phi_{0,1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-t^2}{2}} dt,$$

при $n \to \infty$

Тип распределения случайной величины ξ	**Обозначение**	**Возможные значения k случ. вел.** ξ	$P(\xi = k)$	$E\xi$	$D\xi$
1. Вырожденное распределение в точке c	I_c	c	$P(\xi = c) = 1$	c	*0*
2. Распределение Бернулли с параметром $p \in (0;1)$	B_p	$k = 0,1$	$P(\xi = 0) = 1 - p$ $P(\xi = 1) = p$	*p*	*p(1-p)*
3. Биномиальное распределение с параметрами $n \in N, p \in (0;1)$	$B_{n,p}$	$k = 0,1,\ldots,n$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	*np*	*np(1-p)*
4. Геометрическое распределение с параметром $p \in (0;1)$	G_p	$k = 1,2,3,\ldots$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
5. Распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$	Π_λ	$k = 0,1,2,\ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ

Тип распределения случайной величины ξ	**Обозна-чение**	**Плотность, *f(t)***	**Функция распределения, *F(t)***	$\mathrm{E}\xi$	$\mathrm{D}\xi$
1. Равномерное распределение на отрезке $[a;b], a<b$	$U_{a,b}$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t\in[a,b], \\ 0, & t\notin[a,b]. \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & t<a, \\ \frac{t-a}{b-a}, & a\le t\le b, \\ 1 & t>b. \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
2. Экспоненциальное (показательное) распределение с параметром $\alpha>0$	E_α	$\begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t\ge 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$	$\begin{cases} 1-e^{-\alpha t}, & t\ge 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$
3. Гамма-распределение с параметроми $\alpha>0, \beta>0$	$\Gamma_{\alpha,\beta}$	$\begin{cases} \frac{\alpha^\beta t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha t}, & t\ge 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$	$F(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(y)dy$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\beta}{\alpha^2}$
4. Нормальное распределение с параметрами $a\in R$, $\sigma^2>0$	N_{a,σ^2}	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi_{a,\sigma^2}(t)=\Phi_{0,1}\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)$	a	σ^2
5. Стандартное нормальное распределение	$N_{0,1}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$	$\Phi_{0,1}(t)$	0	1
6. Распределение Коши с параметрами $a\in R$, $\sigma^2>0$	C_{a,σ^2}	$\frac{\sigma}{\pi(\sigma^2+(t-a)^2)}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi} arctg\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)$	-	-
7. Стандартное распределение Коши	$C_{0,1}$	$\frac{1}{\pi(1+t^2)}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi} arctg(t)$	-	-