Подготовка к расчётке МС

Monday, May 15, 2023 7:59 PM

Примерные вопросы для опроса по МС ФИТ.

1. **Определение выборки.**
   Выборка $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ объёма n из распределения F - это набор из n независимых и одинакого распределённых величин, имеющих распределение F.
2. **Определение вариационного ряда, k-ой порядковой статистики.**

   Если упорядочить элементы выборки по возрастанию, то полученный набор случайных величин называется вариационным рядом:

   $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \dots \le X_{(n)}$

   Случайная величина $X_{(k)}$ называется k-ой порядковой статистикой.

3. **Определение статистики (оценки).**
   Статистика - любая функция от выборки.
   Оценка неизвестного параметра θ - называется любая функция от выборки $\theta^* = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в том или ином смысле приближающая θ.
4. **Определение несмещенной оценки.**
   Оценка θ^* - несмещённая, если $E\theta^* = \theta$, $\forall \theta \in \vartheta$
5. **Определение состоятельной оценки.**
   Оценка θ^* - состоятельная, если $\theta^* \to^p_{n\to\infty} \theta$, $\forall \theta \in \vartheta$
6. **Определение эмпирической функции распределения.**
   Эмпирической функцией распределения $F_n^*(y) = \frac{\nu(y)}{n}$, где $\nu(y)$ - число наблюдений x_i таких, что $x_i < y$.
   Можно записать как: $F_n^*(y) = \frac{\sum_{i=1}^n I\{X_i < y\}}{n}$, где I - индикатор.
7. **Свойства эмпирической функции распределения.**
   1) $F_n^*(x) \in [0,1]$
   2) $F_n^*(x)$ - неубывающая функция
   3) $F_n^*(x) = 0$, при $x < x_{(1)}$ (Аналогично $F = 1$, при $x \ge x_{(n)}$)
8. **Как определяется выборочный первый момент (второй, третий и т.д.)?**
   $$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
   $$\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$
   Обобщённая формула: $\overline{g(x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(X_i)$
9. **Как определяется выборочная дисперсия (смещенная и несмещенная)?**
   $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\overline{X} - X_i\right)^2 = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2$ - Выборочная смещённая дисперсия.
   $S_0^2 = \frac{n}{n-1} S^2$ - Выборочная несмещённая дисперсия. (или Исправленная)
10. **К чему (и как) сходится выборочный первый момент, выборочный второй момент, выборочная дисперсия (смещенная и несмещенная), эмпирическая функция распределения при росте объема выборки?**
    $\overline{X} \to^{\text{ЗБЧ}} EX_1$
    $\overline{X^2} \to^{\text{ЗБЧ}} EX_1^2$
    $S^2 = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 \to^{\text{ЗБЧ}} EX_1^2 - (EX_1)^2 = DX_1$
    $S_0^2 = \frac{n}{n-1} S^2 \to^{\text{ЗБЧ} + \frac{n}{n-1} \to 1} DX_1$

$F_n^*(y) \to^{\text{ЗБЧ}} EI\{X_1 < y\} = 1 * P(X_i < y) + 0 * P(X_i \geq y) = P(X_i < y) = F(y)$

11. **Чему равно математическое ожидание выборочного первого момента, второго момента, выборочной дисперсии (смещенной и несмещенной), эмпирической функции распределения?**

$$E\overline{X} = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{nEX_1}{n} = EX_1$$

$$E\overline{X^2} = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{nEX_1^2}{n} = EX_1^2$$

$$ES^2 = E\left(\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2\right) = E\overline{X^2} - E\left(\overline{X}\right)^2 = E\overline{X^2} - \left(D\overline{X} + \left(E\overline{X}\right)^2\right) = EX_1^2 - \frac{DX_1}{n} - (EX_1)^2 = DX_1 - \frac{DX_1}{n}$$

$$= \frac{n-1}{n} DX_1$$

$$ES_0^2 = E\frac{n}{n-1}S^2 = DX_1$$

$$EI\{X_i < y\} = 1 * P(X_i < y) + 0 * P(X_i \geq y) = P(X_i < y) = F(y)$$

$$EF_n^*(x) = E\frac{\sum_{i=1}^{n} I\{X_i < y\}}{n} = \frac{nEI\{X_1 < y\}}{n} = F(y)$$

12. **Сформулировать теорему Гливенко-Кантелли.**

Суть: с ростом объёма выборки наибольшее из расхождений стремится к нулю.

Теорема:

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$- выборка из распределения F с функцией распределения F и пусть F_n^* - эмпирическая функция, построенная по этой выборке. Тогда:

$\sup|F_n^*(y) - F(y)| \to^{\mathrm{p}} 0, \forall y \in R$, где $n \to \infty$

Без доказательства.

13. **Определение ОММ.**

θ^* - Оценка Методом Моментов, если получен методом моментов:

1) Выбираем $g(y)$ такую, что $Eg(X_1)$ - существовал и $m(\theta) = Eg(X_1)$ была обратима. (Чаще всего: $g(y) = y^k$)

2) Выражает θ: $\theta = m^{-1}(Eg(X_1))$

3) Заменяем момент выборочным: $\theta^* = m^{-1}(\overline{g(X)})$

14. **Сформулировать теорему о состоятельности ОММ.**

Пусть $Dy(X_1) < \infty$, $m(t)$ - обратима и непрерывна. Тогда $\theta^* = m^{-1}(\overline{g(X)})$ состоятельна! (т.е. $\theta^* \to \theta$)

Доказательство:

$\overline{g(X)} \to^{\text{ЗБЧ}} Eg(X_1)$

$\theta^* = m^{-1}\left(\overline{g(X)}\right) \to m^{-1}\left(Eg(X_1)\right) = m^{-1}\left(m(\theta)\right) = \theta$

15. **Определение ОМП.**

Оценка максимального правдоподобия называется значение $\theta(\vec{X})$ при котором функция правдоподобия принимает наибольшее значение:

$$\hat{\theta} = \max_{\theta} \prod\left(\theta, \vec{X}\right) = \max_{\theta} \psi(\theta)$$

Функция правдоподобия:

$$\psi(\theta) = \prod(\theta, \vec{X}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

Где $f(x_i, \theta) = \begin{cases} f_{x_i}(t), \text{при абсолютно непрерывном распределении.} \\ P(x_i = t), \text{при дискретном распределении.} \end{cases}$

16. **Найти ОММ для параметров основных распределений (для распределения Бернулли, Пуассона, геометрического, биномиального при известном числе испытаний, равномерного, показательного, нормального распределение при известных и неизвестных параметрах).**

-Считаем…

17. **Найти ОМП для параметров основных распределений (для распределения Бернулли, Пуассона, геометрического, биномиального при известном числе испытаний, равномерного, показательного, нормального распределение при известных и неизвестных параметрах).**

-Считаем…

18. Когда одна из оценок не хуже (лучше) в среднеквадратическом смысле другой оценки.

Функцией среднеквадратического отклонения оценки θ^* называется:

$\delta_{\theta^*}(\theta) = E(\theta - \theta^*)^2$, если $D\theta^* < \infty$

Говорят, что θ^*не хуже, чем θ^{**} (в среднеквартическом смысле), если:

$\forall\theta\ \delta_{\theta^*}(\theta) \le \delta_{\theta^{**}}(\theta)$

19. Как сравнить две несмещенные оценки в среднеквадратическом смысле?

Для несмещённых оценок верно: $\delta_{\theta^*}(\theta) = D\theta^*$

Доказательство: из несмещённости: $E\theta^* = \theta$, значит $E\theta^* - \theta = 0$

$\delta_{\theta^*}(\theta) = E(\theta - \theta^*)^2 = E(\theta - \theta^* + 0)^2 = E(\theta - \theta^* + E\theta^* - \theta)^2 = E(E\theta^* - \theta^*)^2 = D\theta^*$

Таким образом θ^*не хуже, чем θ^{**}, если: $D\theta^* \le D\theta^{**}$

20. Определение эффективной оценки в классе всех несмещенных оценок.

Оценка называется эффективной, если она наилучшая среди всех несмещённых оценок в среднеквадратичном смысле.

21. Определение доверительного интервала (точного, асимптотического).

Интервал (θ^-, θ^+) называется доверительным интервалом для θ уровня доверия $1 - \epsilon$, если

$P(\theta^- < \theta < \theta^+) = 1 - \epsilon$ (Точный ДИ)

$P(\theta^- < \theta < \theta^+) \to 1 - \epsilon$ (Ассимптотический ДИ)

Если вместо =, использовать $\ge$ то получим просто доверительный интервал. Если расписать $\to$ как $\lim_{n\to\infty} P(\dots) \ge 1 - \epsilon$, то получим ассимптотически доверительный. Соответственно если знаки =, то точный и ассимптотически точный.

22. Схема построения ДИ (точного, асимптотического).

Схема:

1) $G(\vec{X}, \theta)\begin{cases} \in H, \text{точный ДИ} \\ \Rightarrow H, \text{ассимптотический ДИ} \end{cases}$, где H - свободное от θ распределение.(Непрерывное)

2) Находим q_1, q_2: $P(q_1 < G(\vec{X}, \theta) < q_2)\begin{cases} = 1 - \epsilon, \text{точн.} \\ \to 1 - \epsilon, \text{ассимпт.} \end{cases}$

3) Выражаем θ: $P(\theta^- < \theta < \theta^+)\begin{cases} = 1 - \epsilon \\ \to 1 - \epsilon \end{cases}$

23. Определение распределения Хи-квадрат, Стьюдента, Фишера.

Вспомним Гамма-распределение:

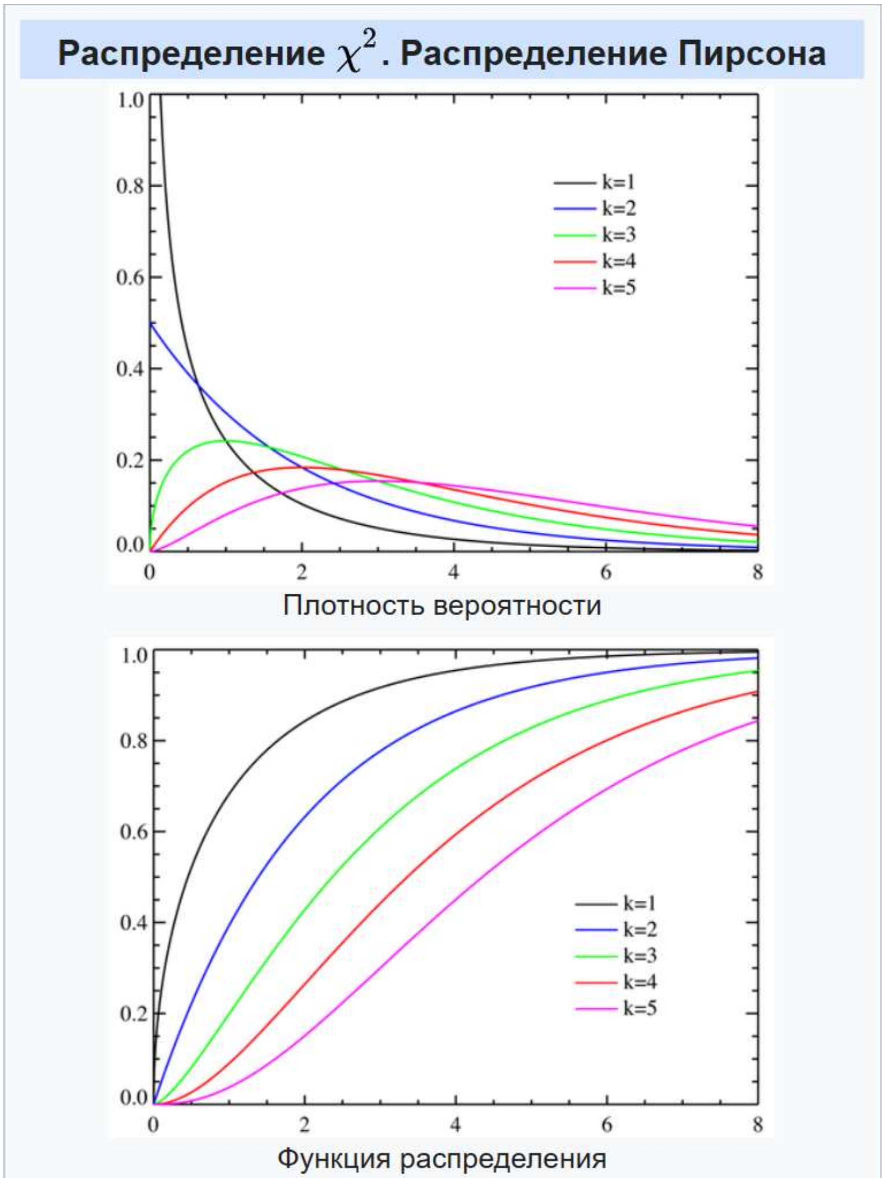
Если $Y_1, \dots, Y_n$- независимые и $Y_i \in \Gamma_{\alpha,\lambda_i}$, тогда: $Y_1 + \dots + Y_n \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1+\dots+\lambda_n}$

Так-же если $Y \in N_{0,1}$, то $Y^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$

Распределение **Хи-квадрат(Пирсона)**:

Из предыдущих свойств следует, что если $Y_1, \dots, Y_n \in N_{0,1}$независимые, то $X^2 = Y_1^2 + \dots + Y_n^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}}$. Это называется распределение X^2 с n степенями свободы. (Обозначение $X^2 \in X_n^2$)

Свойство: если $Z_1 \in X_n^2$ и $Z_2 \in X_m^2$ то $Z_1 + Z_2 \in X_{n+m}^2$



Распределение **Стьюдента**:

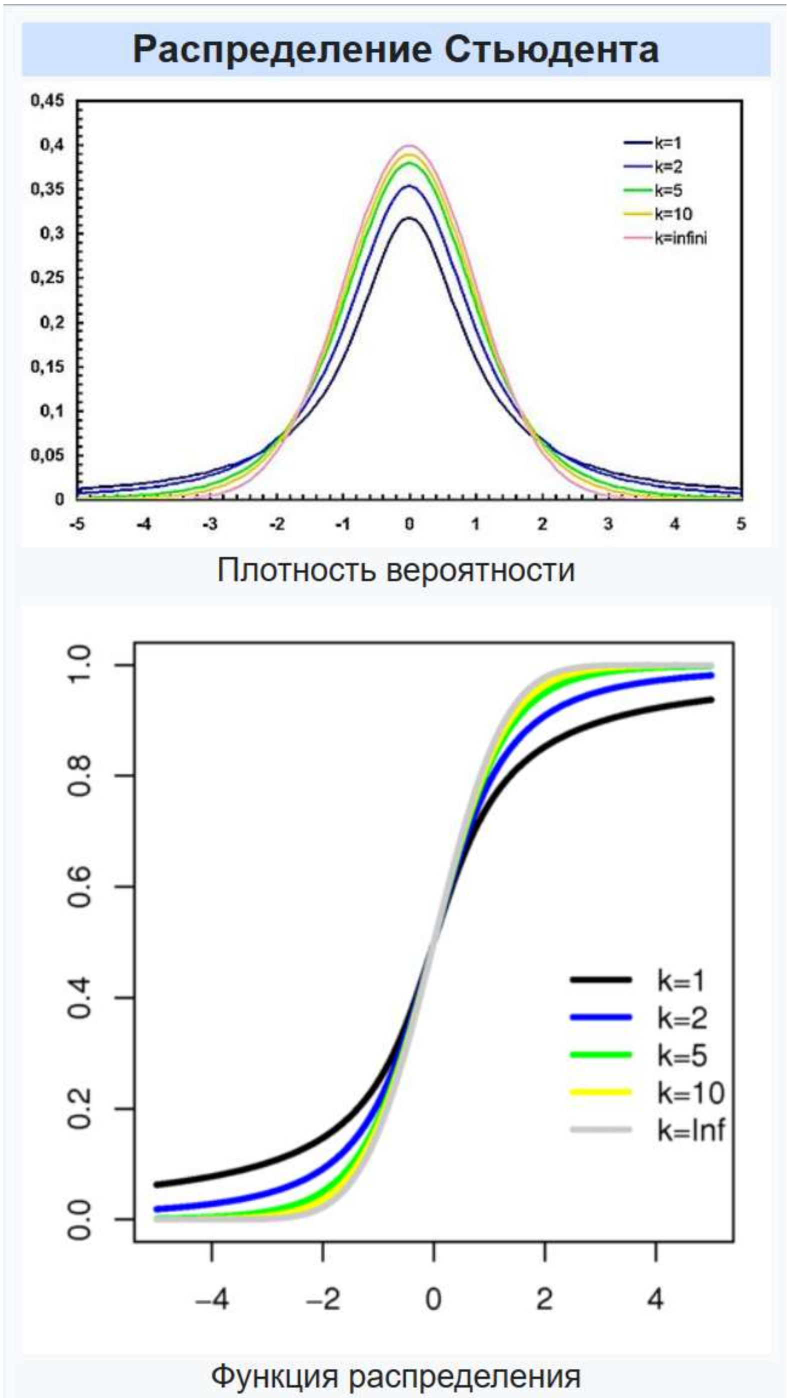
Пусть $Y_0, Y_1, \dots, Y_n \in N_{0,1}$ независимые. Распределение случайной величины $t_k = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{Y_1^2+\dots+Y_k^2}{k}}}$ называется распределением Стьюдента с k степенями свободы и обозначается T_k

Свойство: $T_n \Rightarrow N_{0,1}$

Доказательство:

$\frac{X_n^2}{n} \to 1$, т.к. по ЗБЧ: $\frac{Y_1^2+\dots+Y_n^2}{n} \to EY_1^2 = 1$ ($Y_1^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \Rightarrow EY_1^2 = \frac{1}{2} * \frac{2}{1} = 1$)

$t_k = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{X_n^2}{n}}} \Rightarrow^{\text{т−ма Слуцкого}} Y_0 \in N_{0,1}$

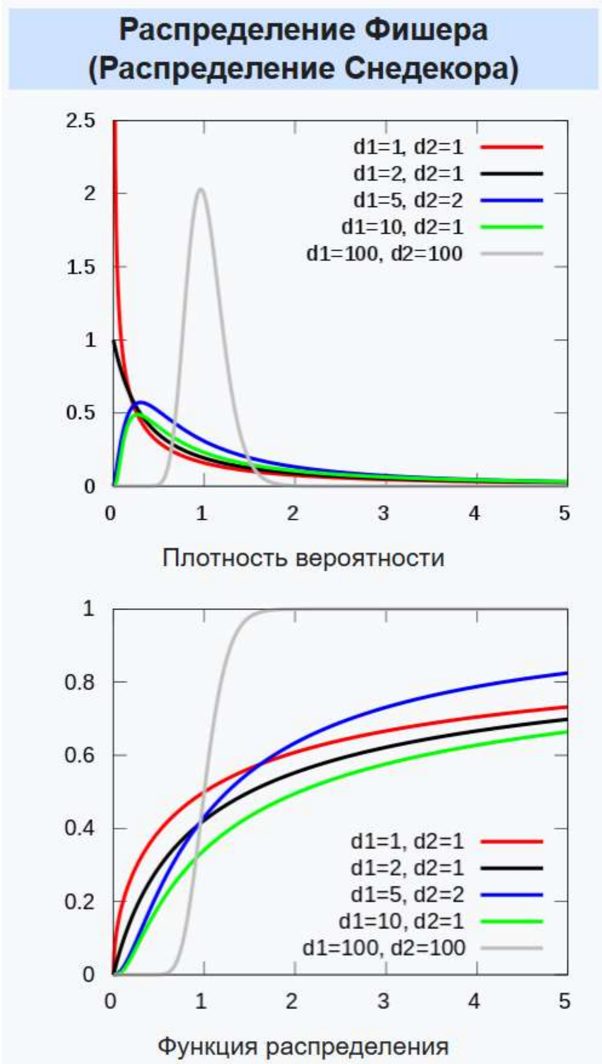


Распределение **Фишера**:

Пусть $\begin{cases} Z_1 \in X_n^2 \\ Z_2 \in X_m^2 \end{cases}$ – независимы

Распределение случайной величины $f_{n,m} = \frac{\frac{Z_1}{n}}{\frac{Z_2}{m}} = \frac{m}{n}\frac{Z_1}{Z_2}$ имеет распределение Фишера с n и m степенями свободы. (Обозначение: $F_{n,m}$)

Свойство: $F_{n,m} \Rightarrow I_1$, очевидно поскольку $\frac{Z_1}{n} \to 1, \frac{Z_2}{m} \to 1$



24. Сформулировать лемму Фишера, следствия из леммы Фишера.

Пусть выборка $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n), X_i \in N_{0,1}, \vec{Y} = A\vec{X}$

A - ортогональная матрица$(A^{-1} = A^T)$. Тогда $\forall \mathrm{r} \in [1, \mathrm{n} - 1]$

$Q = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 - Y_1^2 - \dots - Y_r^2 \in X_{n-r}^2$(хи − квадрат)

И Q не зависит от $Y_1, \dots, Y_r$

Доказательство:

Покажем что $Y_i \in N_{0,1}$

$\vec{Y}$ − нормальный вектор по опр.(т.к. преобразование линейное)

Рассмотрим ковариационную матрицу: $C(\vec{Y}) =$

$C(A\vec{X}) =^{\text{Св−во } C(\vec{X})} AC(\vec{X})A^T =^{\text{У } N_{0,1} - C(\vec{X}) = E} AA^T =^{\text{Ортогональность } A} E$

Т.е. $Y \in N_{0,1}$

Так как A - ортогональная, а умножение на ортогональную матрицу не меняет норму вектора, то $\left|\left|\vec{X}\right|\right| = \left|\left|\vec{Y}\right|\right| \Rightarrow \left|\left|\vec{X}\right|\right|^2 = \left|\left|\vec{Y}\right|\right|^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$

Тогда: $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 - Y_1^2 - \dots - Y_r^2 = Y_{r+1}^2 + \dots + Y_n^2 \in X_{n-r}^2$(Хи − квадрат)

Следствия : ?

25. Сформулировать теорему Фишера (4 утверждения, используемые при построение точных ДИ для параметров нормального распределения).

Пусть $\vec{X} \in \mathrm{N}_{a,\sigma^2}$. Тогда верны следующие 4 факта:

1) $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(X_i-a)}{\sigma}\right)^2 = \frac{nS_1^2}{\sigma^2} \in X_n^2$(Хи) Для a, σ^2 − известные

2) $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(X_i-\overline{X})}{\sigma}\right)^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} \in X_{n-1}^2$(Хи) Для a, σ^2 − неизвестные

3) $\sqrt{n}\frac{(\overline{X}-a)}{\sigma} \in N_{0,1}$ Для a, σ^2 − известные

4) $\sqrt{n}\frac{(\overline{X}-a)}{S_0} \in T_{n-1}$ Для a, σ^2 − неизвестные

26. Выписать доверительные интервалы для параметров нормального распределения при известных и неизвестных параметрах математического ожидания и дисперсии (таких ДИ четыре штуки).

$\vec{X} \in N_{a,\sigma^2}$

1) σ известна:

I) $G = \frac{\overline{X}-a}{\sigma}\sqrt{n} \in N_{0,1}$

II) $P\left(-t < \frac{\overline{X}-a}{\sigma}\sqrt{n} < t\right) = 1-\epsilon$

$t = \tau_{1-\frac{\epsilon}{2}}$ (квантиль)

III) $P\left(\overline{X} - \tau_{1-\frac{\epsilon}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \tau_{1-\frac{\epsilon}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\epsilon$

2) σ неизвестна:

I) $G = \frac{\overline{X}-a}{S_0}\sqrt{n} \in T_{n-1}$

II) $P\left(-t < \frac{\overline{X}-a}{S_0}\sqrt{n} < t\right) = 1-\epsilon$

$t = t_{1-\frac{\epsilon}{2}}$

III) $P\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\epsilon}{2}}\frac{S_0}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{1-\frac{\epsilon}{2}}\frac{S_0}{\sqrt{n}}\right) = 1-\epsilon$

3) a - известен:

I) $G = \frac{nS_1}{\sigma^2} \in X_n^2$(Хи)

II) $P\left(q_1 < \frac{\sum(x_i-a)^2}{\sigma^2} < q_2\right) = 1-\epsilon$

$$\begin{cases} q_1 = X_n^{-1}\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\ q_2 = X_n^{-1}\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right) \end{cases}$$

III) $P\left(\frac{\sum(x_i-a)^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{\sum(x_i-a)^2}{q_1}\right) = 1-\epsilon$

4) a - неизвестен:

I) $G = \frac{nS^2}{\sigma^2} \in X_{n-1}^2$(Хи)

II) $P\left(q_1 < \frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2} < q_2\right) = 1-\epsilon$

$$\begin{cases} q_1 = X_{n-1}^{-1}\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\ q_2 = X_{n-1}^{-1}\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right) \end{cases}$$

III) $P\left(\frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{q_1}\right) = 1-\epsilon$

27. Определение гипотезы (простой гипотезы, сложной гипотезы).

Гипотезой H_k называют любое суждение о неизвестном распределении.

Гипотеза называется простой, если она однозначно восстанавливает неизвестное распределение.

В противном случае гипотеза называется сложной.

В основном используем две гипотезы: $H_0 -$ основная, $H_1 -$ альтернативная

28. Определение критерия.

Критерием называется отображение: $\delta: R^n \to \{1, \dots, m\}$

Для двух гипотез в основном используем: $\delta = \begin{cases} 0, T \notin K \\ 1, T \in K \end{cases}$, где $T -$ статистика критерия, $K -$ критическая область

29. Определение вероятностей ошибок *i*-го рода.

$\alpha_1 = P_{H_0}(H_0 \text{отвергается})$ - вер-ть ошибки 1 рода (Уровень критерия)

$\alpha_2 = P_{H_1}(H_1 \text{отвергается})$ - вер-ть ошибки 2 рода

30. Определение мощности, состоятельности в критериях согласия.

$\beta = 1 - \alpha_2$ - мощность критерия

Критерий называется состоятельным, если $\alpha_2 \to 0$ $(\beta \to 1)$

Критерий имеет асимптотическую размерность ϵ, если $\alpha_1 \to \epsilon$

31. Общий вид критериев согласия. Какие два условия накладываются на статистику в критериях согласия.

$\vec{X} \in F$

$\begin{cases} H_o = \{F = F_0\} \\ H_a = \{F \neq F_0\} \end{cases}$

Нужно придумать функцию, которая бы представляла собой пару близости эмпирической и предполагаемой функции распределения. Назовём её $d(F_n^*; F_0)$. Она должна удовлетворять условиям:

К1) Если верна H_0, то $d \Rightarrow \eta \in H(d \in H)$, где H - некоторое известное распределение.

К2) Если верна H_a, то $d \to \infty(\alpha_2 \to 0$ и крит. состояние)

Тогда, критерием согласния называют: $\delta = \begin{cases} 0, d < c_\epsilon \\ 1, d \geq c_\epsilon \end{cases}$, где $c_\epsilon -$ квантиль уровня ϵ распределения H

РДУЗ(Реально достижимый уровень значимости) - это вероятность при верной основной гипотезе получить не менее(более) экстремальное значение чем наблюдаемое.

$\epsilon^* = \sup\{\epsilon: \mathrm{d} < \mathrm{c}_\epsilon\} = \mathrm{P}(\eta \geq \mathrm{d})$, где d - реализация.

Тогда критерий согласия можно переписать: $\delta = \begin{cases} 0, \epsilon < \epsilon^* \\ 1, \epsilon \geq \epsilon^* \end{cases}$

Замечание:

$\epsilon^* \leq 0.05$, то отвергается H_0

$\epsilon^* \geq 0.1$, то принимается H_0

32. Сформулировать теорему Колмогорова, теорему Пирсона.

Теорема **Колмогорова**:

Пусть $\vec{x} \in \mathrm{F}_0$, F_0 - непрерывно. Тогда $d_k = \sqrt{n}\sup_t|F_n^*(t) - F_0(t)| \Rightarrow \eta \in K$, где функция распределения $K(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j e^{-2j^2t^2}$, $t > 0$ (Называется функция Колмогорова)

Теорема **Пирсона**:

Пусть $\vec{x} \in \mathrm{F}_0$. Тогда $d_{X^2} = \sum_{j=1}^{k}\frac{(\nu_i - np_j)^2}{np_j} \Rightarrow X_{k-1}^2$(Хи)

Рекомендуется: $np_1 \approx np_2 \approx \dots \approx np_k \geq 5$

33. Выписать критерий Колмогорова.

$\begin{cases} H_0 = \{F = F_0\} \\ H_a = \{F \neq F_0\} \end{cases}$

$$\delta = \begin{cases} 0, \sqrt{n}\sup\limits_t |F_n^*(t) - F_0(t)| < c \\ \quad 1, \text{иначе} \end{cases}$$

34. Выписать критерий Хи-квадрат (Пирсона).

$$\delta = \begin{cases} 0, (X^2)^* < c \\ 1, (X^2)^* \geq c \end{cases}, \text{где } X_{k-1}^2(c) = 1 - \epsilon$$

35. Сформулировать теорему Стьюдента (для критерия Стьюдента о равенстве средних), теорему Фишера (для построения критерия Фишера о равенстве дисперсий).

Теорема **Стьюдента**:

$\vec{X} \in N_{a_1,\sigma_1^2}, \vec{Y} \in N_{a_2,\sigma_2^2}$ с объёмами n и m соответственно. $\vec{X}, \vec{Y}$ - независимы. Тогда при $a_1 = a_2$:

$$d_T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y})\sqrt{nm}\sqrt{n+m-2}}{\sqrt{n+m}\sqrt{nS^2(\vec{X}) + mS^2(\vec{Y})}} \in T_{n+m-2}$$

Доказательство:

$H_0 = \{a_1 = a_2\}$

$H_a = \{a_1 \neq a_2\}$

1) $\frac{nS^2(\vec{X})}{\sigma^2} \in X_{\{n-1\}}^2$

$$\frac{nS^2(\vec{Y})}{\sigma^2} \in X_{\{m-1\}}^2$$

$$\frac{nS^2(\vec{X})}{\sigma^2} + \frac{nS^2(\vec{Y})}{\sigma^2} \in X_{\{n+m-2\}}^2$$

2) $\overline{X} \in \mathrm{N}_{a_1,\frac{\sigma^2}{n}}, \vec{Y} \in \mathrm{N}_{a_2,\frac{\sigma^2}{m}}$

$\overline{X} - \overline{Y} \in N_{a_1-a_2,\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}}$, стандартизируем: $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(a_1-a_2)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} \in N_{0,1}$

3) $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(a_1-a_2)}{\sigma\sqrt{\left(\frac{n+m}{nm}\right)}} * \sqrt{\frac{\sigma^2(n+m-2)}{nS^2(\vec{X})+mS^2(\vec{Y})}} \in T_{n+m-2}$

Теорема **Фишера**:

$\vec{X} \in N_{a_1,\sigma_1^2}, \vec{Y} \in N_{a_2,\sigma_2^2}$ с объёмами n и m соответственно. $\vec{X}, \vec{Y}$ - независимы. Тогда при $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$:

$$d_F = \frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} \in F_{n-1,m-1}$$

Доказательство:

$$\begin{cases} H_0 = \{\sigma_1^2 = \sigma_2^2\} \\ H_1 = \{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{nS^2(\vec{X})}{\sigma_1} \in X_{n-1}^2 \\ \dfrac{mS^2(\vec{Y})}{\sigma_2} \in X_{m-1}^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{nS^2(X)}{\sigma_1(n-1)} \frac{\sigma_2(m-1)}{mS^2(Y)} \in F_{n-1,m-1}$$

$$d_F = \frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} \in F_{n-1,m-1}, \text{при верной } H_0$$

36. Выписать критерий Стьюдента.

$$\delta = \begin{cases} 0, |d_t| < t_{1-\frac{\epsilon}{2}} \\ 1, |d_t| \geq t_{1-\frac{\epsilon}{2}} \end{cases} - \text{Критерий Стьюдента}$$

37. Выписать критерий Фишера.

$$\delta = \begin{cases} 0, f_{\frac{\epsilon}{2}} \le d_F \le f_{1-\frac{\epsilon}{2}} \\ 1, \text{иначе} \end{cases} - \text{Критерий Фишера}$$

38. Дать определение реально достигнутого уровня значимости.

РДУЗ(Реально достижимый уровень значимости) - это вероятность при верной основной гипотезе получить не менее(более) экстремальное значение чем наблюдаемое.

$\epsilon^* = \sup\{\epsilon: d < c_\epsilon\} = P(\eta \ge d)$, где d - реализация.