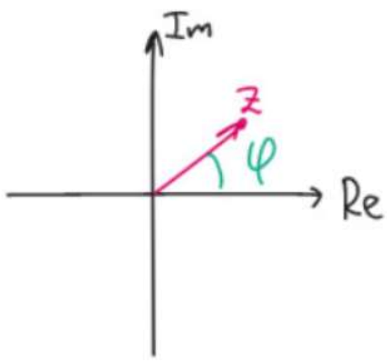
Подготовка к поточке по ТФКП

Tuesday, May 23, 2023
6:08 PM

- Теория
- Практика

База:
Комплексное число $z = x + iy$,
$\mathrm{Re}(z) = x$ - реальная часть числа z
$\mathrm{Im}(z) = y$ - мнимая часть числа z
i - мнимая единица, $i^2 = -1$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\arg z = \varphi \in [-\pi, \pi]$



$Arg\, z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = |z| \cos \varphi \\ y = |z| \sin \varphi \\ \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$

$z_1 * z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
Формула Муавра:

$$z^n = |z|^n(\cos \varphi n) + i \sin \varphi n)$$

Формула извлечения корней (Муавра)

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0,1, \dots, n-1$$

Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Комплексный логарифм:

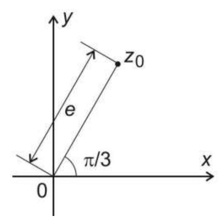
$$Ln(z) = ln|z| + i(\varphi + 2\pi k)$$

Базовые примеры(no easy):

1. Найти все комплексные значения выражения $e^{1+\frac{\pi}{3}i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

Решение

$$z_0 = e^{1+\frac{\pi}{3}i} = e^1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = e \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$



Т. к. $z_0 = |z_0|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow |z_0| = e,\ \varphi = \dfrac{\pi}{3}$

2. Найти все комплексные значения выражения $\sqrt[3]{-1-i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

Решение

Обозначим $w(z) = \sqrt[3]{z}$, $z = x + iy = -1 - i$, $x = -1$ $y = -1$. Тогда

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$|w| = \left|\sqrt[3]{z}\right| = \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[6]{2};$$

$$\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg}(\sqrt[3]{z}) = \frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{3}; k = 0,1,2.$$

Поскольку $x < 0$ и $y < 0$, то

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi.$$

Рассмотрим теперь все случаи

$$k = 0:\ \operatorname{Arg} w_0 = \frac{-\frac{3}{4}\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{3} = -\frac{\pi}{4};$$

$$k = 1:\ \operatorname{Arg} w_1 = \frac{-\frac{3}{4}\pi + 2\cdot\pi}{3} = \frac{5}{12}\pi;$$

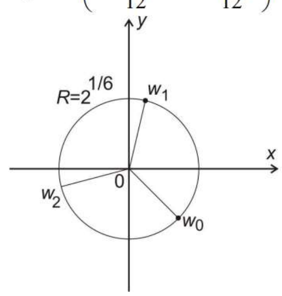
$$k = 2:\ \operatorname{Arg} w_2 = \frac{-\frac{3}{4}\pi + 4\cdot\pi}{3} = \frac{13}{12}\pi;$$

Таким образом, получим, что $\sqrt[3]{-1-i}$ принимает три комплексных значения:

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right);$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right);$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi + i\sin\frac{13}{12}\pi\right);$$



Теорема. Для дифференцируемости в смысле комплексного переменного функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны быть дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух действительных переменных;
2. частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) должны быть связаны *условиями Коши-Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Применение:
Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $f(z) = e^{2z-1}$.

Решение:

$$\mathrm{e}^{2(x+iy)-1},\ e^{2x-1}e^{i2y} = e^{2x-1}(\cos 2y + i\sin 2y)$$
$$u(x, y) = e^{2x-1}\cos 2y$$
$$v(x, y) = e^{2x-1}\sin 2y$$

Проверяем условие Коши-Римана:

$$2e^{2x-1}\cos 2y == 2e^{2x-1}\cos 2y,\ true$$
$$-2e^{2x-1}\sin 2y == -(2e^{2x-1}\sin 2y),\ true$$

Условие *выполнено*!

Изолированные особые точки:
Точка $z_0 \in C$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность точки z_0, в которой функция $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением самой точки z_0 (в точке z_0 функция может быть не определена).
В зависимости от поведения функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 различают следующие три типа изолированных особых точек.
Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

1. **устранимой особой точкой**, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ существует и конечен;
2. **полюсом**, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;
3. **существенно особой точкой**, если функция $f(z)$ не имеет предела в точке z_0.

Ряд Лорана:
Рядом Лорана в окрестности точки z_0 называется функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Часть ряда с положительными степенями $(z - z_0)$ называется *правильной частью*, а с отрицательной - *главной частью* ряда Лорана.

<u>Замечание</u>:
Ряд Лорана рассматривается только в функциях с особыми точками! Аналог ему ряд Тейлора раскладывается в аналитической области.

Теоремы связи ряда Лорана и особых точек:

1. Если ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержит главной части, то эта точка - *устранимая.*

2. Если ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит конечное число членов в главной части, то эта точка - *полюс*. Имеющая порядок равный наименьшему коэффициенту в ряде Лорана.
3. Если же в ряде содержится бесконечное число членов в главной части, то эта точка - *существенная*.

Все эти теоремы работаю в обратную сторону!

Вычеты:
Вычетом функции f(z) в изолированной особой точке $z_0 \in C$ называется величина:

$$Res_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = c_{-1}$$

Где c_{-1} - коэффициент ряда Лорана.

Вычеты в изолированных особых точках:
1. В устранимой точке : $Res_{z_0} \ = \ 0$ (Однако есть исключение для точки ∞, в ней $Res = -c_{-1}$)
2. В полюсе : $Res_{z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n]$, где n - порядок полюса z_0.

   Если полюс простой($n = 1$), и $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0,\ \psi(z_0) = 0,\ \psi'(z_0) \neq 0$, то $Res_{z_0} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi\prime(z_0)}$
3. В существенной точке: Нет красивой формулы, поэтому просто ищется коэффициент c_{-1} в ряде Лорана.

Основная теорема теории вычетов:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k}f(z)$$

Теорема о сумме вычетов:

$$\sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k}f(z) + Res_{z=\infty}f(z) = 0$$

Тригонометрические интегралы:
Решаются заменой $z = e^{i\varphi}$, откуда $d\varphi = \frac{dz}{iz}$, $\sin\varphi = \frac{z-z^{-1}}{2i}$, $\cos\varphi = \frac{z+z^{-1}}{2}$ (Выводится из формул: $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$) Пределы интегрирования заменяются от изменения угла, до изменения радиуса окружности (Например из $(0,2\pi)$ в $|z| = 1$)

Интегралы с бесконечными предельными значениями:
Если $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, где P и Q - многочлены степени n и m соответственно. Если $m - n \geq 2$, то:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum_{Im\, z_k>0} Res\, f(z) + \pi i \sum_{Im\, z_k=0} Res\, f(z)$$

Примеры задач:

Разложить функцию $f(z)$ по степеням $z - z_0$ – в ряд Лорана во всех областях на плоскости, где такое разложение возможно:

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 - z},\ z_0 = -1$$

Решение

Функция $f(z)$ имеет особые точки $z=0$, $z=1$. Функция будет аналитической в областях:

а) внутренность круга $|z+1|<1$,

б) кольцо $1<|z+1|<2$,

в) внешность круга $|z+1|>2$.

Представим функцию $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}=\frac{(A+B)z-A}{z^2-z}$$

Отсюда $A=-2$, $B=3$ и

$$f(z)=-\frac{2}{z}+\frac{3}{z-1}.$$

Найдем разложение функции в области а):

$$f(z)=-\frac{2}{z}+\frac{3}{z-1}\equiv\frac{2}{1+(-(z+1))}-\frac{3}{2\left(1+\left(-\frac{z+1}{2}\right)\right)}.$$

И для каждой из дробей в последнем выражении воспользуемся известным разложением

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - ... + (-1)^n z^n + ..., \ |z| < 1; \qquad (*)$$

$$\frac{2}{1+(-(z+1))} = 2\left(1 + (z+1) + (z+1)^2 + ... + (z+1)^n + ...\right), \ |z+1| < 1;$$

$$\frac{3}{2\left(1+\left(-\frac{z+1}{2}\right)\right)} = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{z+1}{2} + \frac{(z+1)^2}{4} + ... + \frac{(z+1)^n}{2^n} + ...\right), \ |z+1| < 2.$$

Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2} - 3}{2^{n+1}} (z+1)^n, \ |z+1| < 1.$$

Найдем разложение функции в области б):

Ряд для второй из рассмотренных выше дробей сходится при $|z+1| < 2$, а ряд для первой дроби расходится для $|z+1| > 1$, поэтому первую дробь необходимо преобразовать.

$$f(z) = -\frac{2}{(z+1)\left(1 + \frac{-1}{z+1}\right)} + \frac{3}{2\left(1 + \left(-\frac{z+1}{2}\right)\right)},$$

Применим разложение (*) получим:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{-1}{z+1}\right)} = 1 + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} + ..., \ \left|\frac{1}{z+1}\right| < 1 \Rightarrow |z+1| > 1.$$

Таким образом

$$f(z) = \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^n}, \ 1 < |z+1| < 2.$$

Найдем разложение функции в области в):

В этой области полученный в б) ряд для $2/\left(1+(-(z+1))\right)$ сходится а для $3/2\left(1+\left(-(z+1)/2\right)\right)$ - расходится.

Представим $f(z)$ в виде и применим разложение (*)

$$f(z) = -\frac{2}{(z+1)\left(1 + \frac{-1}{z+1}\right)} + \frac{3}{(z+1)\left(1 + \left(-\frac{2}{z+1}\right)\right)},$$

И применяя разложение (*) по аналогии с предыдущими случаями, получим:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n - 2}{(z+1)^{n+1}}.$$

Найти вычеты для данных функций в указанных особых точках

$$f(z) = \frac{1}{z-2} e^{\frac{z}{z-2}}, \ z = 2$$

Решение

Преобразуем функцию к виду

$$f(z)=\frac{1}{z-2}e^{\frac{z}{z-2}}=\frac{1}{z-2}e\cdot e^{\frac{2}{z-2}}.$$

и воспользуемся известным разложением

$$e^{z}=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+\ldots$$

Тогда

$$f(z)=\frac{e}{z-2}+\frac{2e}{(z-2)^{2}}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{4}{(z-2)^{3}}+\ldots$$

$$\operatorname{res} f(2)=c_{-1}=e$$

Найти вычеты функции в указанных точках

$$f(z)=\frac{3z+23}{(z-1)^2(z^2+25)},\ z_1=1,\ z_2=5i$$

Решение:

Точка $z_1=1$ является полюсом второго порядка, поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{3z+23}{(z-1)^{2}(z^{2}+25)}=\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{3z+23}{(z-1)^{2}(z^{2}+25)}(z-1)^{2}\right)\right]_{z=1}=\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{3z+23}{z^{2}+25}\right)\right]_{z=1}=$$

$$=\left[\frac{3(z^{2}+25)-2z(3z+23)}{(z^{2}+25)^{2}}\right]_{z=1}=\left[\frac{-3z^{2}-46z+75}{(z^{2}+25)^{2}}\right]_{z=1}=\frac{1}{26}$$

Точка $z_2=5i$ является полюсом первого порядка, поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=5i}\frac{3z+23}{(z-1)^{2}(z^{2}+25)}=\operatorname*{Res}_{z=5i}\frac{3z+23}{(z-1)^{2}(z+5i)(z-5i)}=\left[\frac{3z+23}{(z-1)^{2}(z+5i)(z-5i)}(z-5i)\right]_{z=5i}=$$

$$=\left[\frac{3z+23}{(z-1)^{2}(z+5i)}\right]_{z=5i}=-\frac{1}{52}+\frac{27}{260}i$$

Найти вычеты функции $f(z)$ во всех ее особых точках с помощью пределов:

$$f(z)=\frac{z}{(z^2+1)^2}$$

Решение.

Точки $z=-i$ и $z=i$ - нули знаменателя второго порядка, поскольку при $z=\pm i$ числитель не обращается в ноль, то эти точки являются и полюсами второго порядка.

Представим функцию в виде

$$f(z)=\frac{z}{(z-i)^2(z+i)^2}.$$

Тогда

$$\operatorname{res} f(-i)=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(z+i)^2\cdot z}{(z-i)^2\cdot(z+i)^2}\right\}=\lim_{z\to -i}\frac{(z-i)^2-2(z-i)z}{(z-i)^4}=$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{-z^2-1}{(z-i)^4}=\frac{-(-i)^2-1}{(-i-i)^4}=0.$$

$$\operatorname{res} f(i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-i)^2\cdot z}{(z-i)^2\cdot(z+i)^2}\right\}=\lim_{z\to i}\frac{(z+i)^2-2(z+i)z}{(z+i)^4}=\frac{-i^2-1}{(2i)^4}=0.$$

Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{4}{(z^2+4)^2}dz\,,\ C\{z\colon |z-i|=2\}$$

Решение.

$$z-i=x+iy-i=x+(y-1)i.$$

$$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2$$

Таким образом $C: x^2+(y-1)^2=4$ - окружность с центром в точке $T[0;1]$ и радиусом $R=2$.

$$f(z)=\frac{4}{\left(z^2+4\right)^2}=\frac{4}{(z+2i)^2(z-2i)^2}.$$

Точка $z=-2i$ находится вне контура, а точка $z=2i$ - внутри контура. Значит

$$\operatorname{res} f(2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-2i)^2 4}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\right\}=\lim_{z\to 2i}-\frac{8}{(z+2i)^3}=-\frac{8}{(4i)^3}=\frac{1}{8i}=-\frac{1}{8}i.$$

Согласно основной теореме вычетах, получим:

$$\int_C \frac{4}{(z^2+4)^2}dz=-2\pi i\frac{1}{8}i=\frac{\pi}{4}.$$

Найти вычеты для данных функций в указанных особых точках

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{\sin^2 z},\ z=0$$

Решение

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2\sin z\cdot\cos z}=\frac{1}{2},$$

т.е. точка $z=0$ - устранимая особая точка. Как известно, вычет в устранимой особой точке равен нулю

$\operatorname{res} f(0)=0.$

Найти вычеты для данных функций в указанных особых точках

$$f(z)=\frac{z}{\pi z^2-2}\sin\frac{z^2-2z}{(z-1)^2}, z=\infty$$

Решение

По определению

$\operatorname{res} f(\infty)=-c_1,$

где c_1 - коэффициент при $1/z$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z=\infty$, взятый с обратным знаком. Преобразуя функцию и использовав известные разложения, получим

$$f(z)=\left(\frac{1}{\pi z}+\frac{2}{\pi z(\pi z^2-2)}\right)\cdot\left(\sin 1\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^4}+\ldots\right)-\cos 1\left(\frac{1}{(z-2)^2}-\ldots\right)\right)$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{res} f(\infty)=-c_1=-\frac{\sin 1}{\pi}.$$

Найти вычеты функции в указанных точках

$$f(z)=(z+3)^2\cos\frac{3}{z-2},\ z=2$$

Решение:

Так как предела $\lim\limits_{z\to 2}(z+3)^2\cos\frac{3}{z-2}$ не существует, поэтому точка $z=2$ является существенно особой точкой. Разложим в ряд Лорана

$$(z+3)^2\cos\frac{3}{z-2}=\left(z^2+6z+9\right)\left(1-\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2!}+\ldots\right)=\left(z^2-4z+4+10z+5\right)\left(1-\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2}+\ldots\right)=$$

$$\left((z-2)^2+10(z-2)+25\right)\left(1-\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2}+\ldots\right)=(z-2)^2+10(z-2)+25-$$

$$-\left((z-2)^2\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2}+10(z-2)\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2}+25\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2}\right)+..=(z-2)^2+10(z-2)+25-\frac{9}{2}(z-2)+$$

$$+\frac{45}{z-2}+\frac{225}{2}\frac{1}{(z-2)^3}+\ldots$$

Коэффициент равен 45, значит, $\operatorname*{Res}\limits_{z=2}(z+3)^2\cos\frac{3}{z-2}=45$

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(3+\cos t)^2}dt$$

Решение

Положим $e^{it}=z$. При изменении t от 0 до 2π точка z опишет в положительном направленни окружность $l:|z|=1$. Тогда

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

$$dz=ie^{it}dt=izdt,$$

$$I=\int_l\frac{dz}{iz\left(\frac{z^2+1}{2z}+3\right)^2}=\frac{4}{i}\int_l\frac{zdz}{(z^2+6z+1)^2}.$$

Функция

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 6z + 1)^2}$$

имеет два полюса второго порядка $z_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$. Но только $z_1 = -3 + 2\sqrt{2}$ лежит внутри l.

$$\operatorname{res} f(z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{(z - z_1)^2 \cdot z}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} \right\} = \lim_{z \to z_1} \frac{-z^2}{(z - z_2)^4} =$$

$$= \lim_{z \to -3+2\sqrt{2}} \frac{-z^2}{(z + 3 + 2\sqrt{2})^2} = \frac{3}{64\sqrt{2}}.$$

$$I = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(z_1) = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}.$$

Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Решение

Функция

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$$

аналитическая в верхней полуплоскости за исключением полюса второго порядка $z = i$.

$$\operatorname{res} f(i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{(z - i)^2 z^2}{(z - i)^2 (z + i)^2} \right\} = \lim_{z \to i} \frac{2z^2 i - 2z}{(z + i)^4} = -\frac{i}{4}.$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(i),$$

получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{2\pi i}{2} \cdot \frac{i}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=8} \frac{1}{\sin z} dz$$

Решение

Функция $f(z)=1/\sin z$ аналитическая во всех точках плоскости кроме точек $z_k=\pi k; k=0;\pm1;\pm2;\ldots$, которые являются простыми полюсами данной функции. В круг $|z|=8$ попадают только точки

$z_1=0; z_2=-\pi; z_3=\pi; z_4=-2\pi; z_5=2\pi; z_6=-3\pi; z_7=3\pi$.

Пользуясь формулой

$\operatorname{res} f(a)=\dfrac{\varphi(a)}{g'(a)}$, если $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$,

вычислим вычеты в особых точках:

$\operatorname{res} f(0)=\dfrac{1}{\cos 0}=1$,

$\operatorname{res} f(\pm\pi)=-1$,

$\operatorname{res} f(\pm2\pi)=1$,

$\operatorname{res} f(\pm3\pi)=-1$.

Тогда на основании теоремы Коши о вычетах получим

$$\int\limits_{|z|=8}\frac{dz}{\sin z}=2\pi i\cdot\sum_{k=0}^{7}\operatorname{res} f(z_k)=2\pi i(1-1+1-1+1-1-1)=-2\pi i$$

Разложить заданную функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0

$$\frac{3z^2+z^2-7z+4}{z^2(z-1)^2},\ z=0$$

Решение:

Разложим функцию на слагаемые:

$$\frac{3z^3+z^2-7z+4}{z^2(z-1)^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z-1}+\frac{D}{(z-1)^2}=\frac{Az(z-1)^2+B(z-1)^2+Cz^2(z-1)+Dz^2}{z^2(z-1)^2}$$

$$Az(z-1)^2+B(z-1)^2+Cz^2(z-1)+Dz^2=3z^3+z^2-7z+4$$

$$Az^3-2Az^2+Az+Bz^2-2Bz+B+Cz^3-Cz^2+Dz^2=3z^3+z^2-7z+4$$

$$\begin{cases}A+C=3\\-2A+B-C+D=1\\A-2B=-7\\B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=4\\C=2\\D=1\end{cases}$$

$$\frac{3z^3+z^2-7z+4}{z^2(z-1)^2}=\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{2}{1-z}+\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{2}{1-z}+\left(\frac{1}{1-z}\right)'=$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}-2\sum_{k=0}^{\infty}z^k+\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^k\right)'=\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}-2\sum_{k=0}^{\infty}z^k+\sum_{k=1}^{\infty}kz^{k-1}$$