Traitement avancé du signal et des images
Partie Signal

Sébastien Adam
Cours de Licence 3 EEEA-INFO
2023-2024

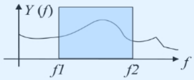
UNIVERSITÉ DE ROUEN

Plan

Filtres analogiques

Définition

- Filtrer, c'est arréter, complètement ou non, empêcher ou gêner le passage de quelque chose
- Sur des signaux, les buts peuvent être multiples :
  - Sélectionner des parties d'un signal contenant une information pertinente
  - Eliminer du bruit
  - Adoucir un signal, éliminer des valeurs aberrantes
  - Séparer plusieurs composantes d'un signal
- En général, les contraintes sont fréquentielles : on cherche à sélectionner ou atténuer certaines fréquences

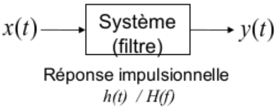


$y(t) = h(t) * x(t)$ Convolution temporelle

$Y(f) = H(f) \times X(f)$ Multiplication fréquentielle

Filtres analogiques

- Objectif du filtre : sélection de composantes particulières
- Caractérisation du filtre : capacité à transmettre certaines fréquences ou certaines parties du signal
- Difficultés :
  - **Détermination de h(t) ou H(f)**
  - **Réaliser le filtre à partir de h(t) ou H(f)**



$H(f)$ → Module $|H(f)| \longrightarrow$ Gain en décibel (dB) : $G(f) = 20\log|H(f)|$

$H(f)$ → Argument $\phi(f) = \arg(H(f))$

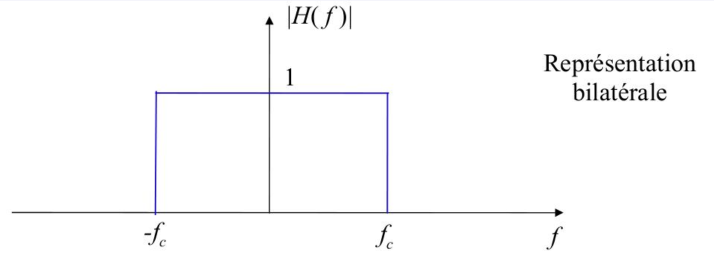
- Filtrage temporel / fréquentiel

Filtres analogiques

Types de filtres

Le filtre de référence est le filtre passe-bas.

- Filtre qui laisse passer les basses fréquences
- Défini par une bande passance $[0, f_c]$
- Supprime (atténue) les fréquences supérieures à f_c

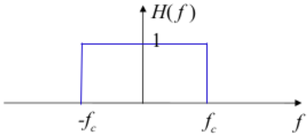


Filtres analogiques

Un filtre est physiquement réalisable s'il est stable et causal

- causal → La sortie ne se produit pas avant l'entrée
- stable → Revient à son état initial après excitation

Soit le filtre passe-bas idéal



$$H(f) = \Pi_{2f_c}$$

↓ TF inverse

$$h(t) = 2f_c \operatorname{sinc}(2\pi f_c t)$$

réponse impulsionnelle du filtre

Donc pour un Dirac en 0, la réponse impulsionnelle h(t) va de – à + l'infini, elle commence donc avant la cause ! Le système est NON CAUSAL.

→ Ce filtre n'est <u>pas physiquement réalisable</u>

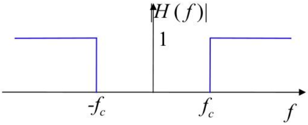
→ Nécessité de trouver une approximation du filtre idéal

Filtres analogiques

Autres filtres

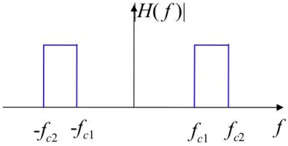
Filtre passe-haut

- Transmission des fréquences supérieures à f_c
- Élimination des fréquences inférieures à f_c
- Bande passante $BP = [f_c, \infty[$



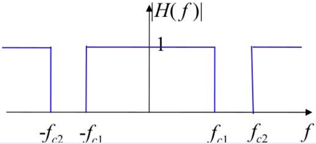
Filtre passe-bande

- Transmission des fréquences appartenant à un intervalle donné
- Bande passante $BP = [f_{c_1}, \quad f_{c_2}]$



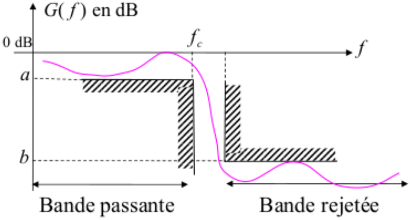
Filtre coupe-bande

- Transmission des fréquences hors d'une bande déterminée
- Bande passante $BP = [0, \quad f_{c_1}] \cup [f_{c_2}, \quad \infty[$



Filtres analogiques

- Discontinuités / dérivées infinies en fréquence -> réponse impulsionnelle non causale = non physiquement réalisable => Approximation du filtre idéal
- Les Filtres réels sont définis par un gabarit spécifiant :
  - Une zone dans laquelle doit passer sa courbe fréquentielle
  - La bande passante et la bande atténuée (ou rejetée)
  - Les ondulations maximales admissibles dans la bande passante a et l'atténuation minimale dans la bande rejetée b



=> filtres réels classiques :

COMPROMIS

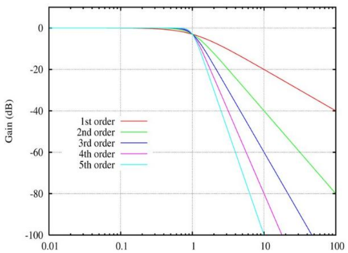
Filtres analogiques

Le filtre de Butterworth

- Fonction de transfert d'un filtre passe bas d'ordre n de pulsation de coupure ω_c :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \text{ soit pour } \omega_c = 1 : |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega)^{2n}}$$

- Propriétés :
  - Réponse aussi plate que possible dans la bande passante
  - Atténuation de $-20ndB/$décade à partir de f_c

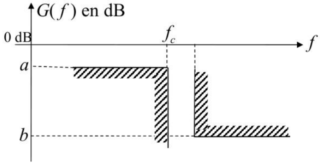


Réalisation :
- Quel ordre choisir ?
- Détermination de H(f) ?
- Réaliser le filtre à partir de H(f) ?

Filtres analogiques

Le filtre de Butterworth

- On trouve l'ordre du filtre en fonction de l'atténuation b que l'on désire



- Détermination de *n* en fonction de b : atténuation minimale en bande rejetée

$$G(f_s) = 20\log|H(f_s)| \leq b \longrightarrow 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f_s}{f_c}\right)^{2n}}} \leq b \longrightarrow n \geq \frac{\log\left(10^{-\frac{b}{10}} - 1\right)}{2\log\left(\frac{f_s}{f_c}\right)}$$

n : entier

Filtres analogiques

A partir de l'ordre du filtre, les tables nous donnent le polynôme H(s) :

n	$B_n(s)$
1	$s+1$
2	$s^2+1{,}414s+1$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0{,}7654s+1)(s^2+1{,}8478s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0{,}6180s+1)(s^2+1{,}6180s+1)$
6	$(s^2+0{,}5176s+1)(s^2+1{,}414s+1)(s^2+1{,}9318s+1)$
7	$(s+1)(s^2+0{,}4450s+1)(s^2+1{,}247s+1)(s^2+1{,}8022s+1)$
8	$(s^2+0{,}3986s+1)(s^2+1{,}111s+1)(s^2+1{,}6630s+1)(s^2+1{,}9622s+1)$

Avec $H(s) = 1/B_n(s)$

Filtres analogiques

Le filtre de Tchebychev

Deux types de filtres de Tchebychev :

- $|H(f)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_n^2(2\pi f)}$
  - Minimise les oscillations en bande atténuée
- $|H(f)|^2 = \frac{\frac{\epsilon}{1-\epsilon} T_n^2(\frac{1}{2\pi f})}{1+\frac{\epsilon}{1-\epsilon} T_n^2(\frac{1}{2\pi f})}$
  - Minimise les oscillations en bande passante

Dans les deux cas on définit $T_n(x)$ par :

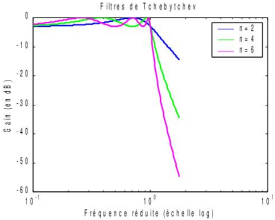
- $\cos(n \cos^{-1}(x))$ si $x < 1$
- $\cosh(n \cosh^{-1}(x))$ si $x > 1$
- $T_n(1) = 1$

Filtres analogiques

Le filtre de Tchebychev

Propriétés des filtres de Tchebytchev I

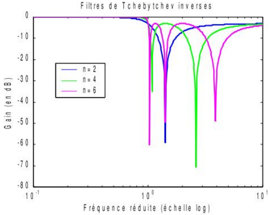
- Ondulation dans la bande passante réglée par ε
- Pas d'ondulation en bande rejetée
- Raideur de coupure importante
- Meilleure atténuation que butterworth



Propriétés des filtres de Tchebytchev II

- Ondulation dans la bande rejetée réglée par
- Pas d'ondulation en bande passante

Comme pour Butterworth, on détermine l'ordre, ε et H(s) à partir du gabarit et de tables



Filtres analogiques

Le filtre de Tchebychev

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\dfrac{\left(10^{-0.1b}-1\right)}{\varepsilon^{2}}}}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{f_s}{f_c}\right)} \qquad \varepsilon = \sqrt{10^{-\frac{a}{10}}-1}$$

A partir de n et ε, on déduit $H(s)$ en utilisant les tables :

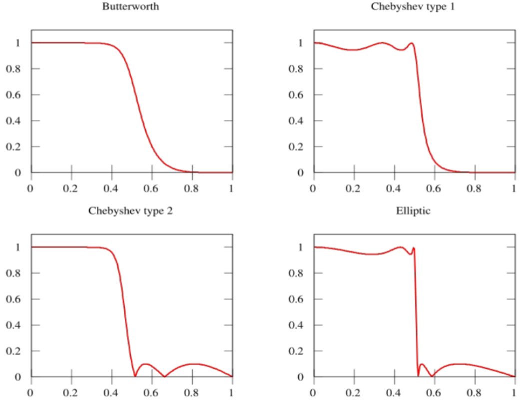
	n	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
Ondulation 0,5 dB	1	0,6986	1									
	2	1,4029	0,7071	1,9841								
	3	1,5963	1,0967	1,5963	1							
	4	1,6703	1,1926	2,3661	0,8419	1,9841						
	5	1,7058	1,2296	2,5408	1,2296	1,7058	1					
	6	1,7254	1,2479	2,6064	1,3137	2,4758	0,8696	1,9841				
	7	1,7372	1,2583	2,6381	1,3444	2,6381	1,2583	1,7372	1			
	8	1,7451	1,2647	2,6564	1,359	2,6964	1,3389	2,5093	0,8796	1,9841		
	9	1,7504	1,269	2,6678	1,3673	2,7239	1,3673	2,6678	1,269	1,7504	1	
	10	1,7543	1,2721	2,6754	1;3725	2,7392	1,3806	2,7231	1,3485	2,5239	0,8842	1,9841
Ondulation 1,0 dB	1	1,0177	1									
	2	1,8219	0,685	2,6599								
	3	2,0236	0,9941	2,0236	1							
	4	2,0991	1,0644	2,8311	0,7892	2,6599						
	5	2,1349	1,0911	3,0009	1,0911	2,1349	1					
	6	2,1546	1,1041	3,0634	1,1518	2,9367	0,8101	2,6599				
	7	2,1664	1,1116	3,0934	1,1736	3,0934	1,1116	2,1664	1			
	8	2,1744	1,1161	3,1107	1,1839	3,1488	1,1696	2,9685	0,8175	2,6599		
	9	2,1797	1,1192	3,1215	1,1897	3,1747	1,1897	3,1215	1,1192	2,1797	1	
	10	2,1836	1,1213	3,1286	1,1933	3,189	1,199	3,1738	1,1763	2,9824	0,821	2,6599

Filtres analogiques

Filtres de Cauer ou filtres elliptiques

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_n^2(2\pi f)}$$

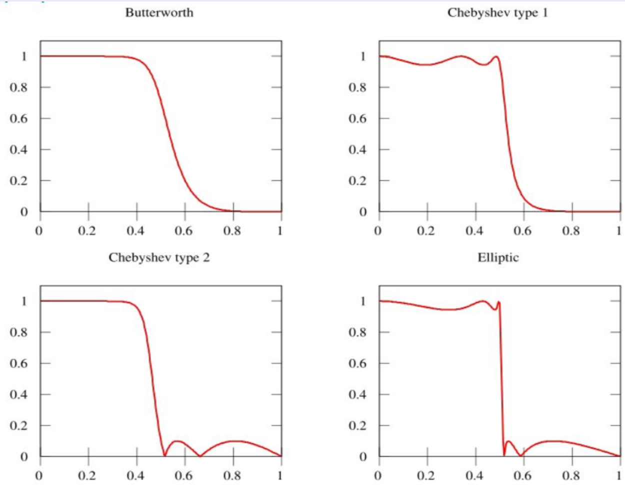
- Optimaux en terme de bande de transition
- Ondulations en bande passante et atténuée



Finalement, on choisit son filtre en fonction des besoins : ondulations, raideur

Filtres analogiques

Comparatif



Filtres analogiques

Construction d'autres filtres

Changement de variables	Filtre associé
$f' \leftrightarrow \dfrac{f}{f_o}$	passe-bas $f_c = f_o$
$f' \leftrightarrow \dfrac{f_o}{f}$	passe-haut $f_c = f_o$
$f' \leftrightarrow \dfrac{f_o}{B} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{f}{f_o}\right)^2 + 1}{\dfrac{f}{f_o}}$	passe bande $f_o = \sqrt{f_1 f_2}$, $B = f_2 - f_1$
$f' \leftrightarrow \dfrac{B}{f_o} \cdot \dfrac{\dfrac{f}{f_o}}{\left(\dfrac{f}{f_o}\right)^2 + 1}$	coupe-bande $f_o = \sqrt{f_1 f_2}$, $B = f_2 - f_1$