Traitement avancé du signal et des images
Partie Signal

Sébastien Adam

Cours de Licence 3 EEEA-INFO

2023-2024

Plan

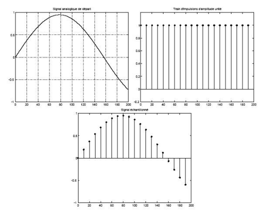
Les signaux à temps discret

D'où viennent-ils ?

- D'observations réalisées à intervalles de temps constant (t°, bourse)
- D'un signal analogique qui a été échantillonné.

L'échantillonnage

L'échantillonnage d'un signal consiste à prélever un échantillon toute les période d'échantillonnage T_e. On pose $t = KT_e$. cela revient à :
$x_e(t) = x_a(t)p(t) = x_a(t)\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_e) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_a(nT_e)\delta(t - nT_e)$



Les signaux à temps discret

Conséquences sur la Transformée de Fourier

- L'intégrale devient une somme discrète

$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2j\pi ft}dt \rightarrow$

$X_e(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_e)\delta(t - nT_e)\right) e^{-2j\pi ft}dt$

$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)e^{-2j\pi ft}dt$

$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_e)e^{-2j\pi fnT_e}$

- C'est la Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD)
- f est toujours la fréquence, variable continue exprimée en Hz.
- Écriture simplifiée/normalisée : on pose $\nu = fT_e = \frac{f}{F_e}$ avec ν sans dimension.

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)e^{-2j\pi\nu k}$$

- Que valent $X(f + f_e)$ et $X(\nu + 1)$?

Les signaux à temps discret

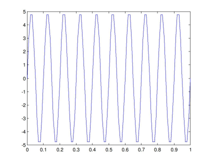
Propriétés de la TFTD

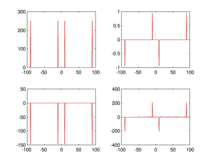
- la TFTD est périodique de période F_e : $X(f) = X(f + F_e)$
- Sa partie réelle est paire : $\Re\mathrm{e}(X(f)) = \Re\mathrm{e}(X(-f))$
- Sa partie imaginaire est impaire : $\Im\mathrm{m}(X(f)) = -\Im\mathrm{m}(X(-f))$
- Le module est pair pour un signal réel : $|X(f)| = |X(-f)|$
- L'arg est impair pour un signal réel : $\arg X(f) = -\arg(X(-f))$

Une première conséquence

- On peut étudier les signaux uniquement sur $[0, F_e/2]$

Exemple : signal à 10Hz
échantillonné à 100 Hz

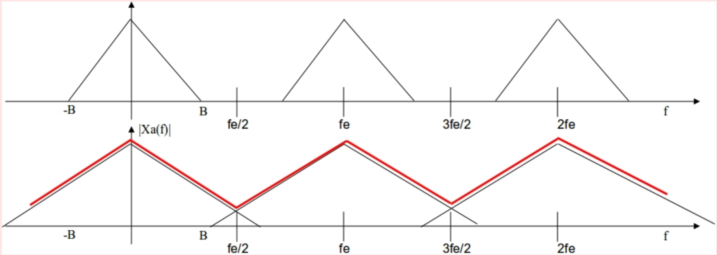




Les signaux à temps discret

Autre conséquence : le théorème de Shannon

Soit un signal analogique $x_a(t)$ occupant la bande de fréquence [0,B]. Ce signal ne pourra être reconstitué exactement à partir de ses échantillons $x(k)$ que si ceux-ci ont été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_e telle que $F_e > 2B$. Sinon, il y a recouvrement de spectre



Les signaux à temps discret

Quelle transformée inverse pour la TFTD ?

$X(f)$ est périodique de période $F_e \rightarrow$ on peut calculer un DSF de X(f)
C'est à dire (Attention, ici la période est une fréquence) :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k exp(2j\pi kfT_e) \text{ avec } c_k = \frac{1}{F_e}\int_0^{F_e} X(f)exp(-2j\pi ktT_e)dt$$

Or, par définition on a aussi (diapo 4)

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)e^{-2j\pi fkT_e}$$

On peut donc identifier $x(-kT_e)$ et c_n, et on a alors la TFTD^{-1} :

$$x(kT_e) = c_{-k} = \frac{1}{F_e}\int_0^{F_e} X(f)e^{2j\pi kT_e f}$$

Limites de la TFTD

La TFTD reste un outil théorique

- Certaines grandeurs sont continues :
  - l'amplitude des signaux
  - la fréquence f ou ν
- Le signal est considéré de durée infinie

Solutions

- La quantification pour l'amplitude des signaux : ne change rien
- La discrétisation des fréquences : on passe de la TFTD à la TFD
- La limitation de la durée du signal

Les signaux à temps discret

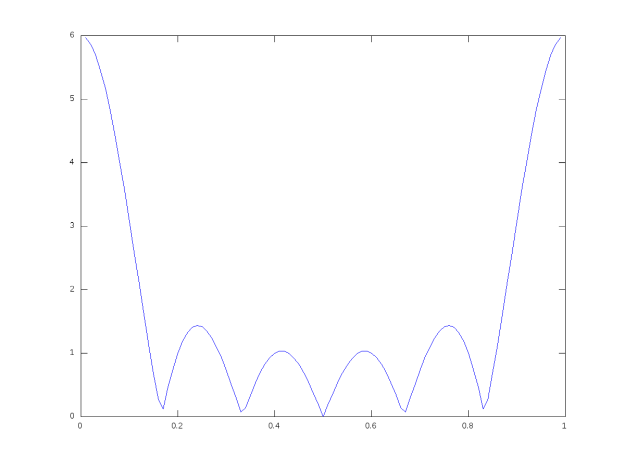
Exercice, qui sera poursuivi en TD

La fonction porte $Rect_N(k)$ est un signal dont les valeurs sont toutes nulles sauf celles entre 0 et $N-1$ qui valent 1. N représente alors le nombre d'échantillons de valeur non nulle.

1. Pour $N=6$, représenter le signal $x(k) = Rect_N\left(k+\frac{N}{2}\right)$
2. Calculer pour tout N la TFTD $X(f)$ de $x(k)$
3. Pour $N=6$, calculer $|X(0)|$, $\left|X(\frac{i}{6})\right|$, $\left|X(\frac{1}{4})\right|$ et $\left|X(\frac{5}{12})\right|$
4. Représenter le spectre d'amplitude complet
5. Calculer en décibel le rapport d'amplitude entre le lobe principal et le lobe secondaire
6. Quelle est la largeur du lobe principal exprimé en fonction de N
7. Représenter le spectre de phase du signal

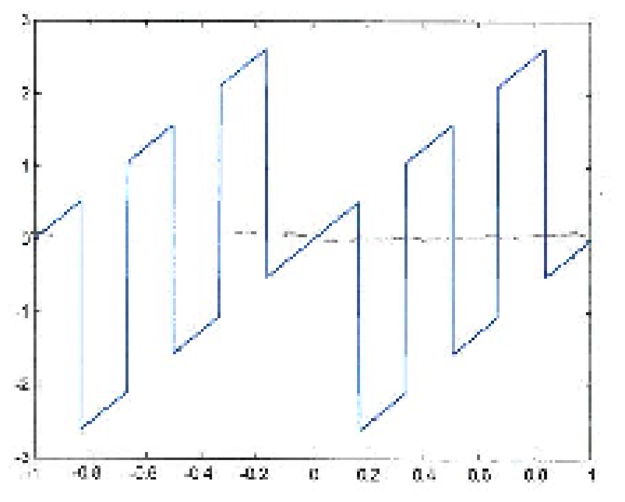
Les signaux à temps discret

Spectre d'amplitude



Les signaux à temps discret

Spectre de phase



La transformée de Fourier Discrete

Principes

- Principe : la variable fréquence est elle aussi discrétisée.
- On prend N points sur $[0, 1]$ (ou $[0, f_e]$)

- On calcule alors $X(n\Delta\nu) = X(\frac{n}{N}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-2j\pi\frac{nk}{N}}$
- On notera généralement cette TFD $x(n)$, $n \in [0, N-1]$ en omettant le $\Delta\nu = 1/N$

La transformée de Fourier Discrete

Transformée inverse

- On peut montrer assez facilement que si on note $x_p(k)$ le résultat de la TFTD inverse appliquée au résultat de la TFD, on aura :

$$x_p(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k+iN)$$

- $x_p(k)$ est donc périodique de période N
- Conséquence : on pourra écrire $x_p(k) = x(k)$ si et seulement si $D \leq N$, puisque dans le cas contraire on aura superposition des échantillons de $x(k)$ dans $x_p(k)$. : c'est le dual de Shannon
- La TFD inverse est alors définie par :

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{2j\pi \frac{nk}{N}}$$

La transformée de Fourier Discrete

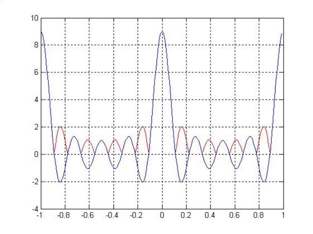
Propriétés

- Périodique de période 1 : $X(\frac{n}{N}) = X(\frac{n}{N} + 1)$
- Linéaire : $a_1x_1(k) + a_2x_2(k) \leftrightarrow a_1X_1(n) + a_2X_2(n)$
- Décalage temporel : Soit $x(k)$ un signal numérique de durée N et $y(k) = x(k - k_0)$ une version de $x(k)$ décalée de k_0 échantillons. Alors : $Y(n) = e^{-2j\pi\frac{nk_0}{N}}X(n)$
- Symétrie : $X(n) = X^*(N - n)$
- Convolution : Soit $x(k)$ un signal numérique de durée N_x. Soit $h(k)$ un signal numérique de durée N_h représentant la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique. Alors le filtrage de $x(k)$ par le filtre défini par $h(k)$ s'écrit : $y(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)h(l-k)$ ou dans les fréquences $Y(n) = H(n)X(n)$
- Energie : la relation de parseval est également valable en numérique : $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|x(k)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}|X(n)|^2$

La transformée de Fourier Discrete

Application pratique

- Appication pratique de la TFD
  - Par définition : $X(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)e^{-2j\pi\frac{nk}{N}}$
  - Une sommation infinie est impossible pour un calculateur.
  - On calcule alors : $X(n) = \sum_{k=0}^{K-1} x(k)e^{-2j\pi\frac{nk}{N}}$
  - C'est le signal $x_K(k) = x(k) \times rect_K(k)$ qui est analysé.
  - D'après les propriétés précédentes, on obtiendra donc $X_k(\nu) = \int_{-1}^{1} X(g)Rect_k(g-\nu)dg$
  - Une TFD calculée sur un signal limité est donc une convolution de la TFTD du signal par la TFTD du rectangle



La transformée de Fourier Discrete : TD

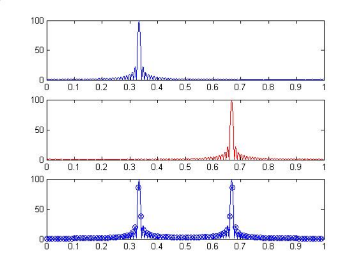
Exercice 1

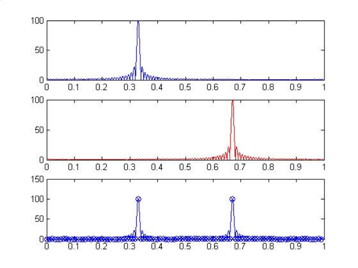
1. Rappeler la formule de la TFD inverse telle que définie dans le cours, développer l'écriture de la somme pour $N = 8$ et exprimer ainsi $x(k)$ en fonction des $X(n)$ pour n allant de 0 à 7
2. En utilisant (i) l'écriture du sinus sous sa forme complexe, (ii) la périodicité de l'exponentielle complexe, et (iii) l'expression de la TFD inverse proposée en 1), déduire la valeur des coefficients de la transformée de Fourier discrète d'un signal numérique sinusoïdal de fréquence normalisée $\nu = 1/4$ et d'amplitude $A = 2$ calculée sur $N = 8$ échantillons
3. Tracer les spectres d'amplitude et de phase de ce même signal.
4. Peut on obtenir aussi simplement les valeurs de la TFD pour $\nu = 0.3$?

La transformée de Fourier Discrete

Bilan de l'exercice

- Cas caractéristique d'un signal harmonique de fréquence ν_0
  - Sa TF théorique contient deux Diracs en $-\nu_0$ et ν_0
  - Le dirac étant l'élément neutre de la convolution, on obtient donc la TFTD du rectangle, centrée sur $-\nu_0$ et ν_0

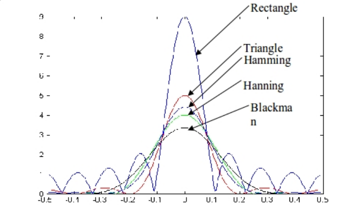




La transformée de Fourier Discrete

Fenêtres spectrales

- Comment diminuer l'amplitude des oscillations ?
  - En remplaçant la fonction rectangle par une autre



Type de fenêtre	Rapport d'amplitude entre le lobe principal et le lobe secondaire	Largeur du lobe principal
Rectangulaire	-13dB	2/N
Triangulaire	-25dB	4/N
Hanning	-31dB	4/N
Hamming	-41dB	4/N
Blackman	-57dB	6/N

La transformée de Fourier Discrete

Influence des fenêtres spectrales