# Outils pour le traitement du signal et des images
# Partie Signal

Sébastien Adam

Cours de Licence 2 EEEA-INFO

2023-2024

UNIVERSITÉ DE ROUEN

# Présentation

## Sébastien Adam

- Professeur des Universités
  - Chercheur au laboratoire LITIS, équipe Apprentissage
  - Enseignant en :
    - L1 IEEEA (LCS, AO)
    - L2 EEEA/INFO (Prog C, OTSI)
    - L3 EEEA (TASI)
    - M1 SID (RO)
    - M2 SID (MLG)
  - Directeur du Master Sciences (et Ingénierie) des Données : SD+SIME (`http://mastersid.univ-rouen.fr/`)
  - Directeur adjoint de la fédération CNRS Norm@stic (`http://www.normastic.fr/`)
- Sebastien.Adam@univ-rouen.fr
- Bureau U2.1.41

# Organisation de l'enseignement

## Objectifs de l'UE OTSI

- Acquérir ou renforcer les bases de mathématiques nécessaires au traitement du signal (complexes, intégration...)
- Acquérir les bases de programmation python
- Comprendre les outils fondamentaux d'analyse spectrale du signal et les mettre en œuvre en python

## Structure

4 parties, deux enseignants (Sébastien Adam, Maxime Bérar)

- Rappels de maths (nombres complexes, intégration)
- Introduction au langage Python
- Outils mathématiques d'analyse de signaux analogiques (DSF, TF)
- Outils mathématiques d'analyse des signaux numériques

# Organisation de l'enseignement

## Volumes horaires sur la maquette

- 24h (14h+10h) de Cours,
- 18h (10h+8h) de TD
- 18h de TP

## Informations pratiques

- Cours le lundi matin
- TD : le lundi après midi et le mercredi après midi
- TP : le jeudi après midi (NB : # absences > 2 : ABS)
- Supports sur https ://universitice.univ-rouen.fr/

## Evaluation

- Deux CCs (60%)
- Une note de TP (40%)

# Plan

1. Introduction au traitement du signal
   - Contexte du cours : signaux et traitements
   - Représentation des signaux
2. Rappels de mathématiques
   - Le corps des nombres complexes

# Signal et traitement du signal

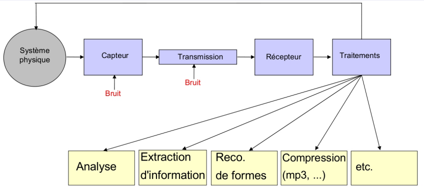
## Signal

- Représentation physique (souvent électrique) d'une information, souvent mesurable par un capteur, évoluant selon une ou plusieurs variables et convoyée d'une source vers une destination.
- Exemples de type d'information : sonore (parole, musique), visuelle (images, vidéos), biologiques (EEG, ECG...), boursières
- Analogique vs. numérique

## Traitement du signal

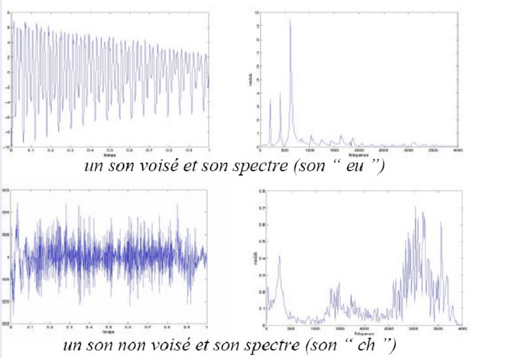
- Discipline des sciences de l'ingénieur permettant de :

- Détecter
- Compresser
- Transformer
- ...



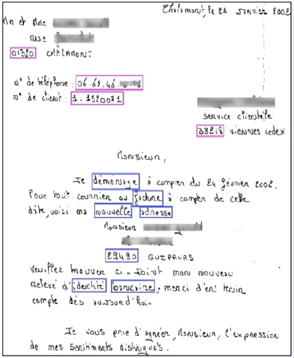
# Exemples 1D et 2D

## Détection/Identification



un son voisé et son spectre (son “ eu ”)

un son non voisé et son spectre (son “ ch ”)



Chalamont, le 21 janvier 2002

Mr et Mme [redacted]
rue [redacted]
01320 CHALAMONT

n° de téléphone : 06.65.46.[redacted]
n° de client : 1.1520071

[redacted]
service clientèle
38218 Vienne cedex

Monsieur,

Je déménage à compter du 24 février 2002. Pour tout courrier ou facture à compter de cette date, voici ma nouvelle adresse :

Monsieur [redacted]
[redacted]
29490 GUIPAVAS

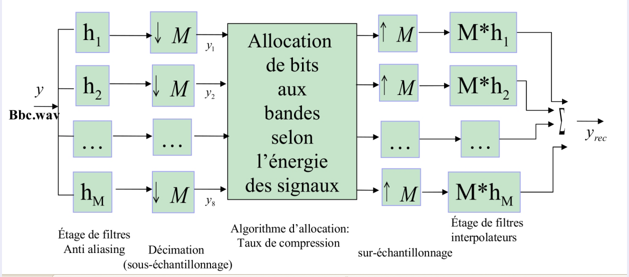
Veuillez trouver ci-joint mon nouveau relevé d'identité bancaire, merci d'en tenir compte dès aujourd'hui.

Je vous prie d'agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments distingués.

NB : Un son voisé est un son produit en faisant vibrer les cordes vocales. Un son non-voisé ou dévoisé est un son produit sans faire vibrer les cordes vocales.

# Exemples

## Compression : un exemple de votre vie de tous les jours

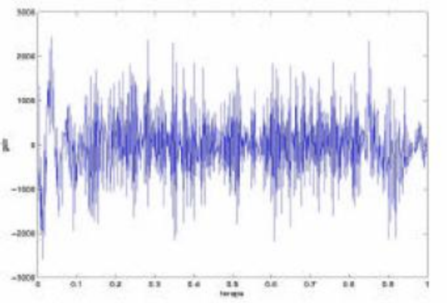



- Ici, les $h_i$ sont des filtres, qui éliminent certaines composantes
- Applications du filtrage : Détection de craquements sur un enregistrement, Suppression de bruit, Annulation d'écho, etc.
- Les filtres modifient le contenu fréquentiel des signaux

# Réprésentation des signaux

## Deux représentations duales

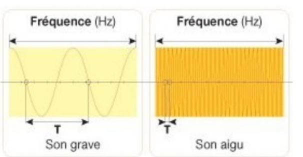
- Représentation en fonction de la variable indépendante
  - En général, c'est le temps $\rightarrow f(t)$
  - Parfois l'espace $\rightarrow f(x, y)$
  - Voire le temps et l'espace $\rightarrow f(x, y, t)$



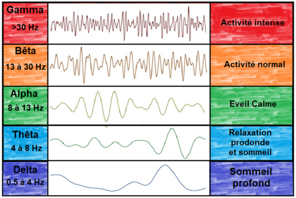
# Réprésentation des signaux

## Deux représentations duales

- Représentation en fonction des fréquences présentes dans le signal
- Notion de fréquence
  - Nombre de reproduction d'un motif pendant une durée donnée
  - Inverse de la période $f = 1/T$
  - Exprimée en Hertz (Hz)




- L'analyse spectrale détermine le contenu fréquentiel d'un signal




# Outils pour l'analyse spectrale

## Objectif : étudier les différents outils pour différents signaux

- Signaux analogiques périodiques
  $\rightarrow$ le développement en séries de Fourier
- Signaux analogiques non périodiques
  $\rightarrow$ la transformée de Fourier
- Signaux à temps discret
  $\rightarrow$ la transformée de Fourier à temps discret
- Signaux et fréquences numériques
  $\rightarrow$ la transformée de Fourier discrète

## Pré-requis mathématiques indispensables

La TF d'un signal $x(t)$, c'est : $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2j\pi ft}dt$

- Une intégrale
- Des exponentielles complexes

# Plan

# Formes et représentations

## Des nombres pas si complexes

- Introduits au XVIeme siècle en Italie pour résoudre des eq. du 3eme et 4eme degrés
- Très utiles en maths (carrés négatifs, transf. du plan) et en physique

## Forme algébrique ou cartésienne

Un nombre complexe s'écrit sous une forme algébrique avec $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$ [NB : parfois, c'est $j$]

- $a$ est la partie réelle de $z$, on la note aussi $Re(z)$
- $b$ est la partie imaginaire de $z$, on la note aussi $Im(z)$
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$
- Un nombre complexe de la forme $z = ib$ $(a = 0)$ est imaginaire pur
- Un nombre complexe de la forme $z = a$ $(b = 0)$ est réel pur
- $z = 0$ est à la fois réel pur et imaginaire pur

# Formes et représentations

## Opérations sur les complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes, on a :

- $z = z' \iff a = a'$ et $b = b'$
- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \cdot z' = (a + ib) \cdot (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{(a+ib)} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{(a'+ib')} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')} = \frac{(aa'+bb')+i(a'b-ab')}{a'^2+b'^2}$

## Exo

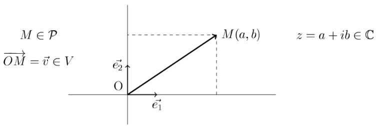
Soient $z_1 = 2 + i$ et $z_2 = 3 - 2i$, calculez $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $z_1^2$, $\frac{1}{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$

# Formes et représentations

## Représentation géométrique par un vecteur ou un point

Comme un nombre complexe est défini par un couple $(a, b)$, on peut le représenter dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ par :

- un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(a, b)$
  - $(a + ib) \in \mathbb{C} \to \vec{v} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$
  - On dit que $a + ib$ est l'affixe de $\vec{v}$
- un point $M$ de coordonnées $(a, b)$
  - $(a + ib) \in \mathbb{C} \to M \in \mathcal{P}$
  - On dit que $a + ib$ est l'affixe de $M$
  - $M$ est l'image de $z$
- $(O, \vec{e_1})$ est l'axe des réels, $(O, \vec{e_2})$ est l'axe des imaginaires




## Exo

Soit les point $A$, $B$ et $C$ d'affixes $z_A = 1$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 4 + i$.
Trouver $D$ tel que $ABCD$ forme un parallélogramme.

# Formes et représentations

## Module, argument et forme trigonométrique

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$

- Le nombre $\sqrt{a^2 + b^2}$ est appelé module de $z$ et noté $|z|$ [Pythagore]
- Si M est l'image de $z$ dans $\mathcal{P}$, le module de $z$ est la distance à l'origine du point d'affixe $z$ (la longueur/norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$)
- L'argument de $z$ est la classe modulo $2\pi$ des réels $\theta$ vérifiant :
  - $cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ et $sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$
- Dans $\mathcal{P}$, l'argument de $z$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{e_1}, OM)$
- Avec module et argument (coordonnées polaires), on peut définir la forme trigonométrique d'un complexe $z$ par :

$$z = a + ib = |z|(cos(\theta) + isin(\theta))$$

- Pour $z = 0$, on a $|z| = 0$ et $\theta$ est indifférent
- $z$ est réel pur si $arg(z) = 0[\pi]$ et imaginaire pur si $arg(z) = \pi/2[\pi]$

# Formes et représentations

## Propriétés du module

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- produit : $|zz'| = |z||z'|$
- quotient : $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$
- puissance : $|z^n| = |z|^n$
- somme : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

## Propriétés de l'argument

- produit $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$
- quotient $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')$

## Exo

- Déterminer l'ensemble des points d'affixe $z$ vérifiant $|z + i| = |iz + 1|$
- Ecrire $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique

# Formes et représentations

## Forme exponentielle

- Pour tout réel $\theta$, on définit l'exponentielle complexe $e^{i\theta}$ par :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

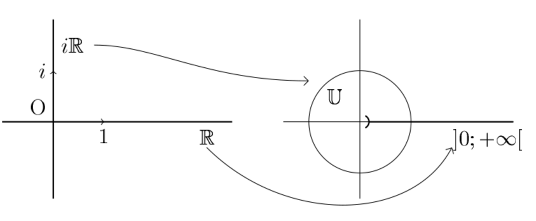
- Avec cette notation, un nombre complexe $z$ non nul de module $\rho$ et d'argument $\theta$ vaudra : $z = \rho e^{i\theta} = |z| e^{i\arg(z)}$
- On garde ainsi les propriétés bien connues de la fonction exponentielle. Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho e^{i\theta'}$, on a :
  - $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
  - $z^n = \rho^n e^{in\theta}$
  - $\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$
- Pour tout réel $\theta$, on a

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

# Formes et représentations

## Forme exponentielle : remarques

- $e^0 = 1 = e^{2ik\pi}$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{in\pi} = (-1)^n$...
- L'image par l'application exponentielle de $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1 qui est appelé cercle unité de $\mathbb{C}$



# Complexe conjugué

## Définition du complexe conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le complexe noté $\bar{z} = a - ib$.

Par conséquent, on aura :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$

## Propriétés

Pour tout complexe $z$, on a

- $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
- $z$ est un réel ssi $z = \bar{z}$
- $z$ est un imaginaire pur ssi $z = -\bar{z}$

# Complexe conjugué

## Propriétés (suite)

Pour tout complexe $z$, on a

- addition : $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- multiplication : $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- puissance : $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- quotient : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

## Sur la représentation géométrique

Naturellement, le point $N$ du plan complexe image de $\bar{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe des réels du point $M$ représentant $z$

## Exo

Soit $Z = \frac{z}{z-1}$ avec $z \in \mathbb{C}$, déterminer l'ensemble des $z$ tels que $Z$ soit un réel, puis tels que $Z$ soit un imaginaire pur

# Racines $n^{iemes}$ de $z$

## Définition

Soit $z$ un nombre complexe non nul, et $n$ un entier naturel $\geq 2$. On appelle racine $n^{iemes}$ de $z$ tout nombre complexe $Z$ tel que $Z^n = z$.
On peut montrer qu'il en existe $n$ qui s'écrivent : $Z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k = 0, 1, \ldots n-1$
où :

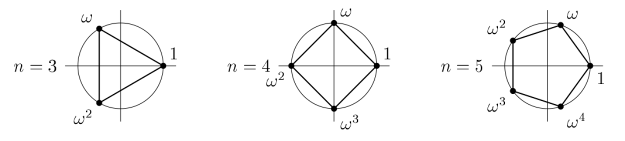
- $r$ est le module de $z$
- $\alpha$ est l'argument de $z$

Les $Z_k$ sont toutes de même module, et en passant de $Z_k$ à $Z_{k+1}$, on décale l'argument de $\frac{2\pi}{n}$

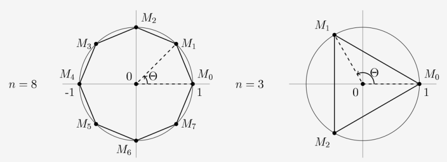
# Racines $n^{iemes}$ de $z$

## Cas des racines de l'unité

Soit $z = 1$, les racines $n^{iemes}$ de 1 sont les $Z_k = e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, 1, \ldots n-1$. En posant $w = e^{2i\pi/n} = cos(2\pi/n) + isin(2\pi/n)$, ces $n$ racines $n^{iemes}$ s'écrivent $1, w, w^2, w^3, \ldots w^{n-1}$




La somme des racines $n^{iemes}$ de l'unité fait toujours 0.



# Quelques formules utiles pour la suite

## A retenir !

- Euler : $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$
- Euler : $cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$
- Euler : $sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$
- Moivre : $\left(e^{i\theta}\right)^n = cos(n\theta) + isin(n\theta)$

## Exo

- Linéariser $P(x) = cos^2(x)sin(x)$
- Montrer que $1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}}cos(\frac{\theta}{2})$

Cette dernière démonstration nous sera fort utile pour la suite !

# Exercices qui seront traités lors du TD 1

1. Calculs
   1. Soit $z_1 = 3 - 5i$ et $z_2 = -2 + i$, calculer $z_1 + z_2$, $|z_1|$, $\bar{z}_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.
   2. Soit $z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = -i$, calculer $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 z_2$ et $z_1^4$.

2. Trouver le nombre complexe $z$ qui vérifie
   1. $(2+i)z - (3-i) = 1 - 2i$
   2. $(2+i)z - (3-i) = (3-2i)z - 2i$
   3. $(1-i)z - (1-4i) = 2 + 3i$

3. Trouver la solution du système linéaire complexe en $x$ et $y$ suivant :

$$\begin{array}{ccccc} x & + & (1+i)y & = & 2 \\ & & (1-i)y & = & 1+i \end{array}$$

# Exercices

1. Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants $1+i$,$(1+i)^2$, $(1+i)^7$,$1-\sqrt{3}i$ ,$-\sqrt{3}-i$,
2. Trouver les nombres complexes $z$ tels que
   1. $z$ et $\frac{1}{z}$ aient le même module
   2. $z$ et $\frac{1}{z}$ aient le même module et $z$ soit un imaginaire pur
   3. $z$,$\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module
3. Linéariser les fonctions suivantes
   1. $g(\theta) = \sin^4\theta$
   2. $h(\theta) = \cos^2\theta\sin\theta$