Traitement avancé du signal et des images
Partie Signal

Sébastien Adam
Cours de Licence 3 EEEA-INFO
2023-2024

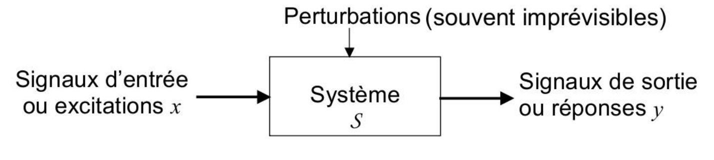
UNIVERSITÉ DE ROUEN

Plan

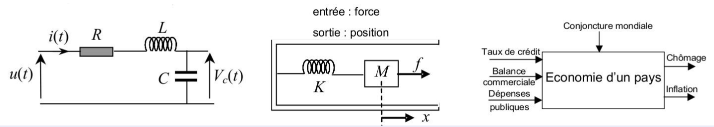
Systèmes analogiques

Définitions

- Un système est un ensemble d'éléments fonctionnels interagissant entre eux et qui établit un lien de cause à effet entre ses signaux d'entrées et ses signaux de sortie



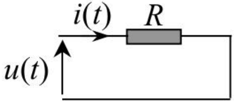
- Notation : $y = S[x]$
- Exemples :



Systèmes analogiques

Taxonomie des systèmes

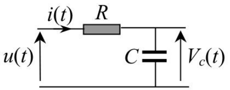
- Statique : la réponse du système à une excitation est instantanée



Équation

$$y(t) = i(t) = \frac{1}{R}u(t)$$

- Dynamique : la réponse du système à une excitation dépend aussi de l'état passé du système



Équation

u(t) = V(t) + Ri(t)

et i(t) = CdV(t)/dt

donc

u(t) = V(t)+RC dV(t)/dt

d'où :

$$RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

avec $y(t) = V_c(t)$

Systèmes analogiques

Propriétés des systèmes que l'on va étudier

- Linéaires : $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow y(t) = aS[x_1(t)] + bS[x_2(t)]$
- Invariants : $y(t) = S[x(t)] \rightarrow y(t - t_0) = S[x(t - t_0)]$.
  $\rightarrow$ Décalage temporel en entrée $\rightarrow$ même décalage en sortie.
- Causaux : si $x(t) = 0 \; \forall t < 0 \rightarrow y(t) = S[x(t)] = 0 \; \forall t < 0$.
  $\rightarrow$ la réponse du système ne peut pas se produire avant l'excitation qui l'engendre
- Stables : $\exists M_x / x(t) < M_x \Rightarrow \exists M_y / y(t) = S[x(t)] < M_y$.
  $\rightarrow$ Une entrée bornée implique une sortie bornée

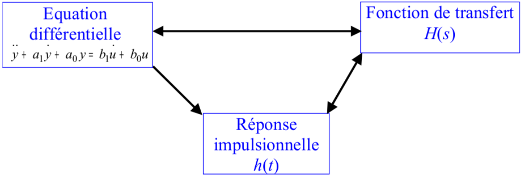
Exercice

Les systèmes suivants sont ils causaux, linéaires, stables et invariants ?
$y(t) = x^2(t)$ et $y(t) = x(t)cos(\omega t)$

Systèmes analogiques

Comment caractériser un SLI ?

- Caractérisation d'un système linéaire continu par :
  - relation entre $x(t)$ et $y(t)$ [équation différentielle]
  - réponse impulsionnelle $h(t)$
  - réponse fréquentielle $H(f)$
  - transmittance complexe $H(s)$



Systèmes analogiques

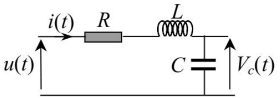
Représentation "temporelle" des systèmes linéaires invariants

- Par une équation différentielle d'ordre n

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \ldots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$

$$\text{avec } y^{(i)}(t) = \frac{d^i y(t)}{dt} \text{ (Dérivée d'ordre i)}$$

- Le calcul de la sortie en fonction de l'entrée est réalisable par résolution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants.



Entrée du système : $x(t) = u(t)$

Sortie du système : $y(t) = V_c(t)$

- Lois de l'électricité

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t) = u(t)$$

et $i(t) = C\dot{V}_c(t)$

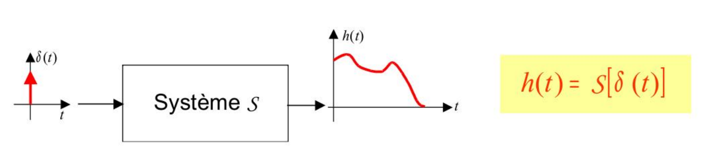
On en déduit :

$$\boxed{LC\ddot{V}_c(t) + RC\dot{V}_c(t) + V_c(t) = u(t)}$$

Systèmes analogiques

Représentation "Impulsionnelle" des systèmes linéaires invariants

- Par la réponse impulsionnelle
- Rappel : si $t \neq 0$, $\delta(t) = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$ (distribution)



  - Caractérise complètement le système, comme l'équation différentielle
  - Permet le calcul de la sortie pour toute entrée : produit de convolution
  - Rappel : définition de la convolution en continu

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

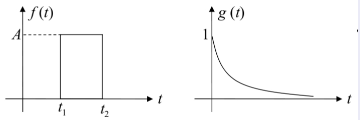
  - Soit dans le cas causal :

$$f(t) * g(t) = \int_{0}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Systèmes analogiques

Exemple de produit de convolution

- Calculer le produit de convolution pour les signaux :

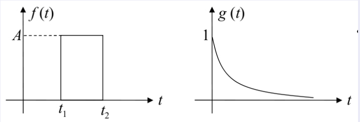


- $g(t) = e^{-at}\Gamma(t)$ avec $a > 0$ ($\Gamma(t)$ rend le signal causal)
- On cherche $z(t) = f(t) * g(t)$
- On a : $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

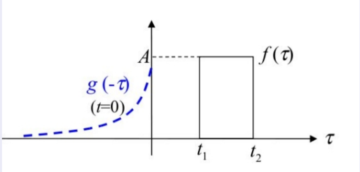
Systèmes analogiques

Exemple de produit de convolution

- Calculer le produit de convolution pour les signaux :



- $g(t) = e^{-at}\Gamma(t)$ avec $a > 0$ ($\Gamma(t)$ rend le signal causal)
- On cherche $z(t) = f(t) * g(t)$
- On a : $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

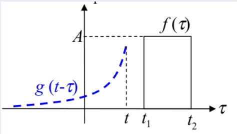


Systèmes analogiques

Exemple de produit de convolution

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-a(t-\tau)} \Gamma(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau$

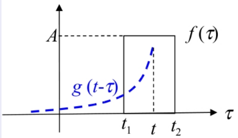
$t < t_1$



$f(\tau) = 0$

$z(t) = 0$

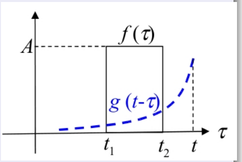
$t \in [t_1, t_2]$



$z(t) = \int_{t_1}^{t} A e^{-a(t-\tau)} d\tau$

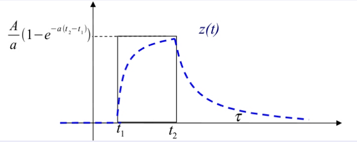
$z(t) = \frac{A}{a}(1 - e^{-a(t-t_1)})$

$t > t_2$



$z(t) = \int_{t_1}^{t_2} A e^{-a(t-\tau)} d\tau$

$z(t) = \frac{Ae^{-at}}{a}(e^{at_2} - e^{at_1})$



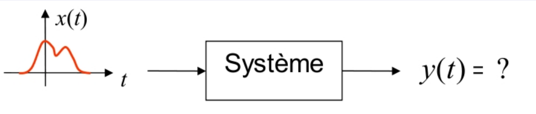
Systèmes analogiques

Propriétés du produit de convolution

- Commutativité : $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$
- Associativité :
  $e(t) * (g(t) * f(t)) = (e(t) * f(t)) * g(t) = e(t) * f(t) * g(t)$
- Distibutivité par rapport à l'addition :
  $e(t) * (f(t) + g(t)) = e(t) * f(t) + e(t) * g(t)$
- Élément neutre de la convolution : $f(t) * \delta(t) = f(t)$
- Translation temporelle : $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

Systèmes analogiques

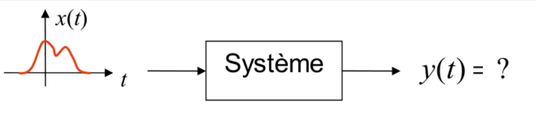
Conséquences des propriétés sur les systèmes



- $\delta(t)$ est élément neutre de la convolution : $x(t) = x(t) * \delta(t)$
- Donc : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
- Soit : $y(t) = S[x(t)] = S[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau]$
- D'où : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau$ [linéarité du système]
- Or $S[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$ [Invariance du système]
- On a donc : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

Systèmes analogiques

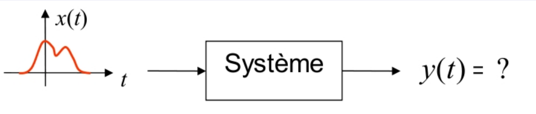
Conséquences des propriétés sur les systèmes



- $\delta(t)$ est élément neutre de la convolution : $x(t) = x(t) * \delta(t)$
- Donc : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
- Soit : $y(t) = S[x(t)] = S[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau]$
- D'où : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau$ [linéarité du système]
- Or $S[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$ [Invariance du système]
- On a donc : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

Systèmes analogiques

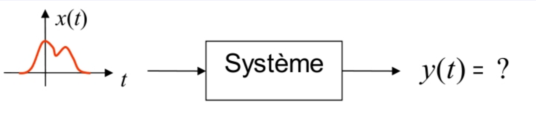
Conséquences des propriétés sur les systèmes



- $\delta(t)$ est élément neutre de la convolution : $x(t) = x(t) * \delta(t)$
- Donc : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
- Soit : $y(t) = S[x(t)] = S[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau]$
- D'où : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau$ [linéarité du système]
- Or $S[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$ [Invariance du système]
- On a donc : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

Systèmes analogiques

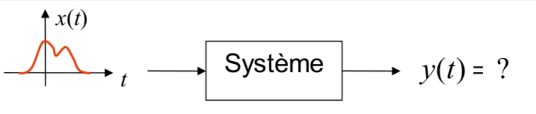
Conséquences des propriétés sur les systèmes



- $\delta(t)$ est élément neutre de la convolution : $x(t) = x(t) * \delta(t)$
- Donc : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
- Soit : $y(t) = S[x(t)] = S[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau]$
- D'où : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau$ [linéarité du système]
- Or $S[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$ [Invariance du système]
- On a donc : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

Systèmes analogiques

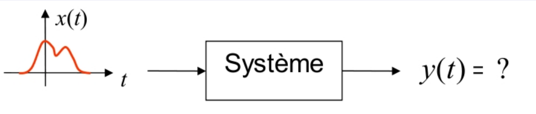
Conséquences des propriétés sur les systèmes



- $\delta(t)$ est élément neutre de la convolution : $x(t) = x(t) * \delta(t)$
- Donc : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
- Soit : $y(t) = S[x(t)] = S[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau]$
- D'où : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau$ [linéarité du système]
- Or $S[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$ [Invariance du système]
- On a donc : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

Systèmes analogiques

Conséquences des propriétés sur les systèmes



- $\delta(t)$ est élément neutre de la convolution : $x(t) = x(t) * \delta(t)$
- Donc : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
- Soit : $y(t) = S[x(t)] = S[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau]$
- D'où : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau$ [linéarité du système]
- Or $S[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$ [Invariance du système]
- On a donc : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

Systèmes analogiques

Représentation des systèmes linéaires invariants par leur réponse fréquentielle

$x(t) \longrightarrow$ Système $\longrightarrow y(t)$

Soit le système de réponse impulsionnelle h

Soit le signal d'entrée $x(t) = Ae^{j2\pi ft}$

Que vaut la sortie y(t) ?

Systèmes analogiques

Représentation des systèmes linéaires invariants par leur réponse fréquentielle

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t)$$

Soit le système de réponse impulsionnelle h

Soit le signal d'entrée $x(t) = Ae^{j2\pi ft}$

Que vaut la sortie y(t) ?

- Réponse fréquentielle des systèmes LTI

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \Rightarrow \quad h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$h(t) * Ae^{j2\pi ft} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, Ae^{j2\pi f(t-\tau)}\, d\tau$$

Sortons ce qui ne dépend pas de τ : $h(t) * Ae^{j2\pi f_0 t} = Ae^{j2\pi ft} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau}_{H(f)}$

$H(f)$ TF de la réponse impulsionnelle

$$\boxed{S(Ae^{j2\pi ft}) = h(t) * Ae^{j\pi ft} = H(f).Ae^{j2\pi ft}}$$

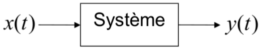
La réponse d'un système LTI à une exponentielle complexe (resp. signal sinusoïdal) est une exponentielle complexe (resp. signal sinusoïdal) multipliée par le gain complexe $H(f)$

Systèmes analogiques

Représentation des systèmes linéaires invariants par leur réponse fréquentielle

Cas d'un signal quelconque

- Réponse fréquentielle des systèmes LTI



Systèmes analogiques

Représentation des systèmes linéaires invariants par leur réponse fréquentielle

Réponse fréquentielle des systèmes LTI

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t)$$

Si le signal d'entrée est quelconque, on peut l'exprimer sous la forme d'une somme infinie d'exponentielles complexes : c'est la TF inverse $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$

$$y(t) = S[x(t)] \quad \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S\left[X(f) e^{j2\pi ft}\right] df$$ (linéarité du système)

En vertu du résultat précédent $S\left[X(f) e^{j2\pi ft}\right] = H(f).X(f).e^{j2\pi ft}$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H(f).X(f)}_{Y(f)}.e^{j2\pi ft} df$$ (définition de la TF inverse de Y)

(TF de la sortie y)

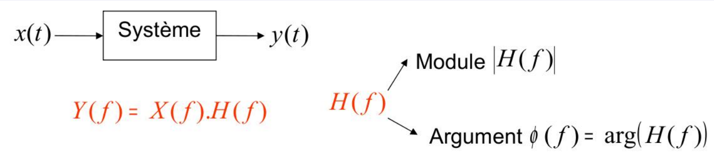
Donc si $y(t) = h(t) * x(t)$ alors $Y(f) = X(f).H(f)$ $\quad H(f)$: fonction de transfert

convolution en temporel $\Leftrightarrow$ *multiplication en fréquentiel*

Systèmes analogiques

Représentation des systèmes linéaires invariants

- On a donc :



- $H(f)$ est la réponse fréquentielle du système
- $H(f)$ illustre l'aptitude du système à faire passer une composante fréquentielle présente dans le signal d'entrée
- La Transformée de Fourier d'un produit de convolution est donc un produit simple (Plancherel).
- Problème : la TF d'un signal n'est définie que si l'intégrale converge. On utilise pour cela la transformée de Laplace.

Systèmes analogiques

La transformée de Laplace

De la TF à la TL

Soit la TF d'un signal $x(t)$: $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$. Cette TF existe si l'intégrale converge

Dans le cas contraire, multiplions $x(t)$ par une exponentielle décroissante telle que

$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)e^{-\sigma t}\right| dt < \infty$ avec $\sigma > 0$. Calculons la TF de ce nouveau signal

$$X(f,\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j2\pi ft}dt \Rightarrow X(f,\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+2\pi f)t}dt$$

Posons $s = \sigma + j2\pi f$ On obtient :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Définition de la transformée de Laplace du signal x

Transformée de Laplace = généralisation de la TF : décomposition de $x(t)$ sur une base de fonctions exponentielles e^{st} (avec s complexe)

⚠ Ne pas poser que $X(f) = X(s)$ pour $s=j2\pi f$ (car $X(s)$ existe toujours mais pas $X(f)$!)

TdS

Systèmes analogiques

La transformée de Laplace

- Convergence de la TL

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$s = \sigma + j2\pi f$$

$X(s)$ n'est défini que si l'intégrale converge

Définition : on appelle Région de Convergence (RC) de la TL, l'ensemble des complexes s tels que l'intégrale converge.

- Exemple

Calculer la TL du signal $x(t) = e^{at}\Gamma(t)$

Systèmes analogiques

La transformée de Laplace

Convergence de la TL

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j2\pi f$$

$X(s)$ n'est défini que si l'intégrale converge

Définition : on appelle Région de Convergence (RC) de la TL, l'ensemble des complexes s tels que l'intégrale converge.

Exemple

Calculer la TL du signal $x(t) = e^{at}\Gamma(t)$

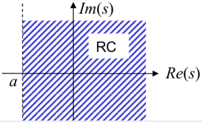
$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}\Gamma(t) e^{-st} dt \quad \Rightarrow \quad X(s) = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t} dt$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)t}\right]_0^{+\infty} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{a-s}\left[\lim_{t \to +\infty} e^{(a-s)t} - 1\right]$$

Or $a - s = a - \sigma - j2\pi f$ D'où $\lim_{t \to +\infty} e^{(a-s)t} = \lim_{t \to +\infty} e^{(a-\sigma-j2\pi f)t}$

Cette limite est nulle si $a - \sigma < 0$ i.e. $\mathrm{Re}(s) > a$

$$X(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Re}(s) > a$$



Systèmes analogiques

La transformée de Laplace

- Linéarité $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$
- Convolution $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s).Y(s)$
- Translation temporelle $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}X(s)$
- Translation fréquentielle $e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s - a)$

Idem TF

- Dérivation
  - $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0^+)$ $x(0^+)$: condition initiale
  - $x^{(k)}(t) \leftrightarrow s^kX(s) - s^{k-1}x(0^+) - s^{k-2}x^{(1)}(0^+) - \cdots - x^{(k-1)}(0^+)$

  Avec : $x(0^+), x^{(1)}(0^+), \cdots, x^{(k-1)}(0^+)$: conditions initiales (souvent nulles => simplification)

- Intégration $\int_0^t x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$

Systèmes analogiques

La transformée de Laplace

- Théorème de la valeur initiale $x(0^+) = \lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{s \to +\infty} sX(s)$
- Théorème de la valeur finale $x_\infty = \lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$
- Transformée de Laplace et systèmes LTI
  - Réponse du système à une entrée $x(t)$ quelconque

    $y(t) = x(t) * h(t)$

  - TL de la réponse

    $Y(s) = X(s).H(s)$ $\quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Fonction de transfert ou transmittance complexe du système

  - Lien entre la transmittance et la représentation spectrale $H(s) \rightarrow H(f)$

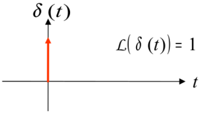
    Si $s=j2\pi f$ appartient à la région de convergence de la représentation de Laplace, alors on peut poser s = $j2\pi f$, et on obtient la relation suivante :

$$H(f) = H(s)\big|_{s=j2\pi f}$$

Systèmes analogiques

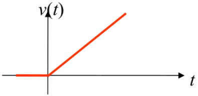
Transformées de Laplace usuelles

- Impulsion de Dirac $\delta(t)$



$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

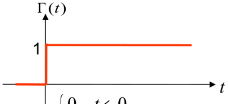
- Rampe ou échelon de vitesse



$$v(t) = t\Gamma(t)$$

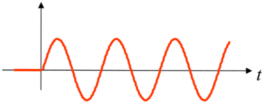
$$\mathcal{L}(v(t)) = \frac{1}{s^2}$$

- Echelon unité $\Gamma(t)$



$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{s}$$

- Signal sinusoïdal



$$x(t) = \sin(\omega t + \varphi) \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \frac{s \sin\varphi + \omega \cos\varphi}{s^2 + \omega^2}$$

Le plus utilisé : $x(t) = A\,\Gamma(t)\,e^{s_1 t} \rightarrow Laplacien = \dfrac{A}{s - s_1}$

Systèmes analogiques

La transformée de Laplace

- **Dérivation**
  - $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0^+)$ $x(0^+)$: condition initiale
  - $x^{(k)}(t) \leftrightarrow s^k X(s) - s^{k-1}x(0^+) - s^{k-2}x^{(1)}(0^+) - \cdots - x^{(k-1)}(0^+)$

- **Systèmes LTI**
  - Systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$ avec $m \leq n$

On suppose les conditions initiales nulles i.e. $y^{(n-1)}(0) = \cdots = y^{(1)}(0) = y(0) = 0$

$$x^{(m-1)}(0) = \cdots = x^{(1)}(0) = x(0) = 0$$

En utilisant la TL, on a :

$$a_n s^n Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + \cdots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$\left(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0\right) X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

La fonction de transfert a la forme d'une fraction rationnelle : $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

$N(s)$ et $D(s)$: polynômes en s de degrés respectifs m et n

Systèmes analogiques

La transformée de Laplace

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Notion de pôles (modes) et zéros du système

- Les pôles sont les racines $\lambda_i \in \mathbb{C}$ du polynôme $D(s)$. Les pôles sont soit réels, soit des paires de pôles complexes conjugués

- Les zéros sont les racines $z_i \in \mathbb{C}$ du polynôme $N(s)$

Fonction de transfert et stabilité

Le système est stable ssi tous les pôles de $H(s)$ sont à partie réelle strictement négative

- Exemples

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1} \qquad H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-3)} \qquad H(s) = \frac{3}{s^2+5s+6}$$

$\lambda =$ | $\lambda_1 =$ $\lambda_2 =$ | $\lambda_1 =$ $\lambda_2 =$

Concl : | Concl : | Concl :

Inversion de la transformée de Laplace

Transformée de Laplace inverse

- Pour inverser la transformée de Laplace, on va utiliser une table
- Il faut faire apparaître des termes de cette table

S.no	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	S.no	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$	11	$e^{at}\sinh bt$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at}\cosh bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	13	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
4	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	14	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
5	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	15	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
6	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	16	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
7	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	17	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s}F(s)$
8	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	18	$t^n f(t)$ Where $n=1,2,3,..$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\{F(s)\}$
9	$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	19	$\frac{1}{t}\{f(t)\}$	$\int_s^\infty F(s)ds$
10	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$

Rappels sur la décomposition en éléments simples

- La marche à suivre :

Soit la fraction S(p) suivante à décomposer : $S(p)=\dfrac{p^m+a_{m-1}p^{m-1}+\ldots+a_2p^2+a_1p+a_0}{p^n+b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_2p^2+b_1p+b_0}=\dfrac{N(p)}{D(p)}$

<u>1ère étape</u> : Si $m>n$, il faut extraire la valeur entière : quotient des polynômes

On obtient alors $S(p)=C_0+\dfrac{N_1(p)}{D_1(p)}$, et la valeur entière donne une impulsion de Dirac.

<u>2ème étape</u> : Calculer les pôles du système, cad les zéros du dénominateur.

- Si n<3 : facile
- Sinon, essayer des valeurs simples -1, 0, 1, 2, etc. et espérer ...

  <u>Rmq</u>. : nous ne traiterons que le pôles simples de type *(p – p1)*

<u>3ème étape</u> : Mettre sous la forme $S(p)=C_0+\dfrac{A_1}{p-p_1}+\dfrac{A_2}{p-p_2}+\ldots+\dfrac{A_n}{p-p_n}$

On trouve les A_n en multipliant par $(p - p_n)$ et en prenant $p = p_n$: $A_n=\lim_{p\to p_n}\dfrac{N_1(p)}{D_1(p)}$

Une fois les A_n trouvés, le laplacien inverse devient très facile !

Exemple d'utilisation

- Exemple

Soit le système caractérisé par : $\ddot{y}(t)+3\,\dot{y}(t)+2\,y(t)=\ddot{x}(t)+2\,\dot{x}(t)-x(t)$
Donner la réponse impulsionnelle h(t) du système.

Exemple d'utilisation

- Exemple

Soit le système caractérisé par : $\ddot{y}(t)+3\,\dot{y}(t)+2\,y(t)=\ddot{x}(t)+2\,\dot{x}(t)-x(t)$
Donner la réponse impulsionnelle h(t) du système.

- Solution

On passe en Laplace : $s^2 Y(s)+3\,s\,Y(s)+2\,Y(s)=s^2 X(s)+2\,s\,X(s)-X(s)$

D'où : $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{s^2+2\,s-1}{s^2+3\,s+2}$

Degré num = degré den donc Valeur entière : $H(s)=\dfrac{(s^2+3\,s)+2-s-3}{s^2+3\,s+2}=1+\dfrac{-s-3}{s^2+3\,s+2}$

Calcul des pôles : $\Delta=b^2-4\mathrm{ac}=9-4*2=1>0$ donc $s_1,s_2=\dfrac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=-1,-2$

Partie réelle < 0, Donc le système est stable. H(s) peut s'écrire : $H(s)=1+\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s+2}$

Par identification et en multipliant par *(s+ 1)* pris en *s=s1*, on trouve *A* = *-2*, puis *B* = *1*

Finalement $H(s)=1+\dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{1}{s+2}$ et grâce aux tables, on repasse en temporel :

$$\boxed{h(t)=\delta(t)-2\,u(t)\,e^{-t}+u(t)\,e^{-2t}}$$

Second exemple

On considère l'équation différentielle :

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - x(t)$$

avec $y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0$ et $\frac{d^2y(0)}{dt^2} = 1$

- Déterminer le régime libre (système laissé à lui même, sans entrée, en ne tenant compte que des CI
- Déterminer le régime forcé (CI nulles)
- Calculer $y(t)$ pour $x(t) = 5sin(t)$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = (s+3)(s^2+2)$$