WS23/24: Numerische Mathematik
Übungszettel 3

1. Let g be defined on $[5\pi/8, 11\pi/8]$.
$$g(x) = x + \sin x.$$
Show that you can apply the contraction mapping theorem and determine the (smallest possible) Lipschitz constant L (i.e. the constant in the definition of a contraction).

2. Es sei $g(x) = ax^3 - 4ax + x$ definiert auf $[-3, 3]$ mit $a > 0$ und $x_{k+1} = g(x_k)$.
   (a) Finden Sie alle drei Fixpunkte $\xi_1 < \xi_2 = 0 < \xi_3$ von g (diese sind unabhängig von a) und bestimmen Sie deren Stabilität (abhängig von a).
   (b) Für $\xi_2 = 0$ und a, so dass ξ_2 stabil: Wie konvergiert x_k (linear, sublinear, quadratisch, etc.)? Bei linearer Konvergenz, was ist die asympt. Konvergenzrate?
   (c) (P) Implemetieren Sie die Fixpunkiteration $x = g(x)$ für das gegebene g und dokumentieren/illustrieren Sie die Resultate von a) und b) für verschiedene a und Startwerte. Diskutieren Sie insbesondere die Interpretation der asympt. Konvergenzrate.

3. Es sei g gegeben, stetig differenzierbar mit Fixpunkt ξ und definiert eine Folge $x_{k+1} = g(x_k)$.
   (a) Sie wissen, dass für die Stabilität $|g'(\xi)| \lessgtr 1$ relevant ist. Diskutieren Sie graphisch, was die Auswirkungen von $g'(\xi) \lessgtr 0$ auf das Verhalten der Folge x_k ist (Hinweis: vergleichen Sie die Vorzeichen von $\xi - x_k$ und $\xi - x_{k+1}$).
   (b) Basierend auf den obrigen Beobachtungen, formulieren Sie ein Lemma: *Es sei ξ stabiler Fixpunkt von g, x_0 nah genug bei ξ und $x_{k+1} = g(x_k)$. Dann gilt*
$$\text{falls} \quad -1 < g'(\xi) < 0 \quad \text{gilt für alle} \quad j = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{dass} \quad ???? \tag{1}$$
$$\text{falls} \quad 0 < g'(\xi) < 1 \quad \text{gilt für alle} \quad j = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{dass} \quad ???? \tag{2}$$
   Beweisen Sie es (Hinweis: Taylor Entwicklung!).

4. Series convergence
   (a) Find the limit and order of convergence for the following sequences:
      i. $x_{k+1} = \alpha x_k$ for some $|\alpha| < 1$.
      ii. $c_{k+1} = c_k - \tan c_k$.
      iii. $b_k = 2^{-2^k}$.
   (b) (P) Demonstrate your results of (a) numerically.

5. (P) Implementieren Sie die Newton Methode zur Nullstellen-Findung, wenden Sie sie auf folgende Beispiele an und diskutieren Sie das Verhalten bzgl Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit.
   (a) $f(x) = e^{-x} - 1$ für $x_0 = 1$, $x_0 = 3$.
   (b) $f(x) = \ln(x)$ für $x_0 = 1.5$, $x_0 = 3$.
   (c) $f(x) = x(x-2)(x-4)$ für $x_0 = 0.5$, $x_0 = 2.5$, $x_0 = \frac{2}{3}\left(3 - \sqrt{3}\right)$, $x_0 = 0.85$.
   (d) $f(x) = e^x - 1 - x$ für $x_0 = 1$.