

矩阵树定理是一个基于线性代数工具，解决图上生成树计数相关问题的工具。

### 基础定义：

#### 1. 图的关联矩阵：

对于一个 $n$ 个点（第 $i$ 个点记为 $v_i$ ）， $m$ 条边（第 $j$ 条边记为 $e_j$ ）的无向图，定义关联矩阵 $M$ 为：
$$M_{i,j} = \begin{cases} 1, & e_j \text{ 是 } v_i \text{ 的出边} \\ -1, & e_j \text{ 是 } v_i \text{ 的入边} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$
显然，大小是 $n \times m$ 的

#### 2. 拉普拉斯（基尔霍夫）矩阵：

拉普拉斯矩阵 $L$ 定义为：

$$L_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i), & i=j \\ -\text{cnt}(v_i, v_j), & \text{otherwise.} \end{cases}$$
其中， $\deg(v)$ 是点 $v$ 的度数， $\text{cnt}(v_i, v_j)$ 表示 $v_i \leftrightarrow v_j$ 的数量。

计算公式：

$$L = MM^T$$

### 矩阵树定理：

记 $L_0$ 为 $L$ 去掉第 $k$ 行、第 $k$ 列后的矩阵( $k$ 任意取),则该无向图的生成树个数为 $\det(L_0)$ 。

### 在有向图上的扩展：