Lab 11 实验报告

实验一

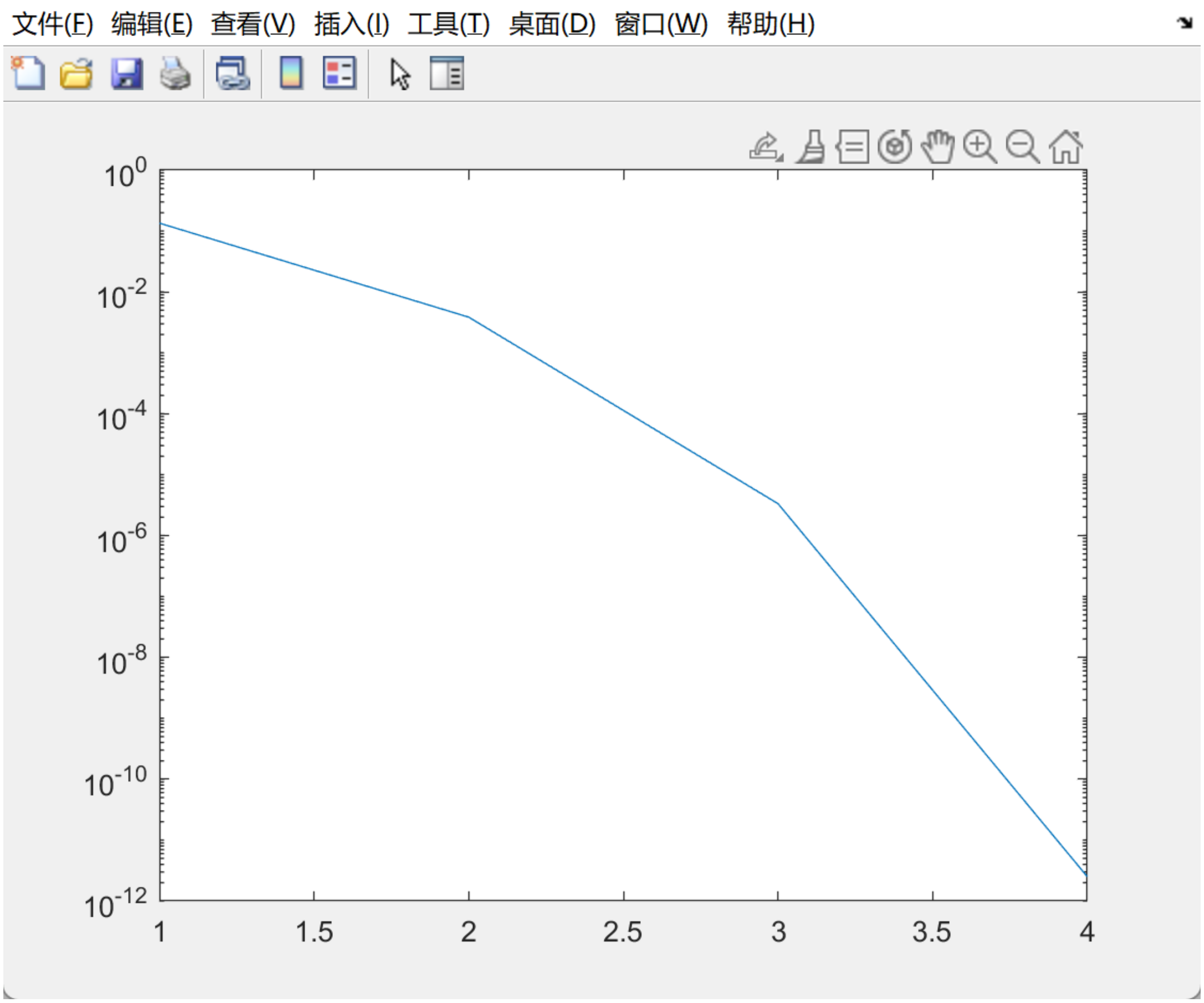
分别取$N=[2,4,8,16,32,64]$为间隔，依次做右矩形，梯形和辛普森法的积分。

右矩形法

首先做右矩形法，先生成 N+1 个平均的点，积分时，再算出每个区间的右端点的函数值，并乘以区间长度，最后相加得出积分值。

生成的动图在“右矩形法.gif“中

相关代码在 Three_method_integral.m 的 t=1 的部分。误差与等距区间个数关系的图如下所示（其中等距区间的个数取了以2为底的对数，误差取了以10为底的对数）。



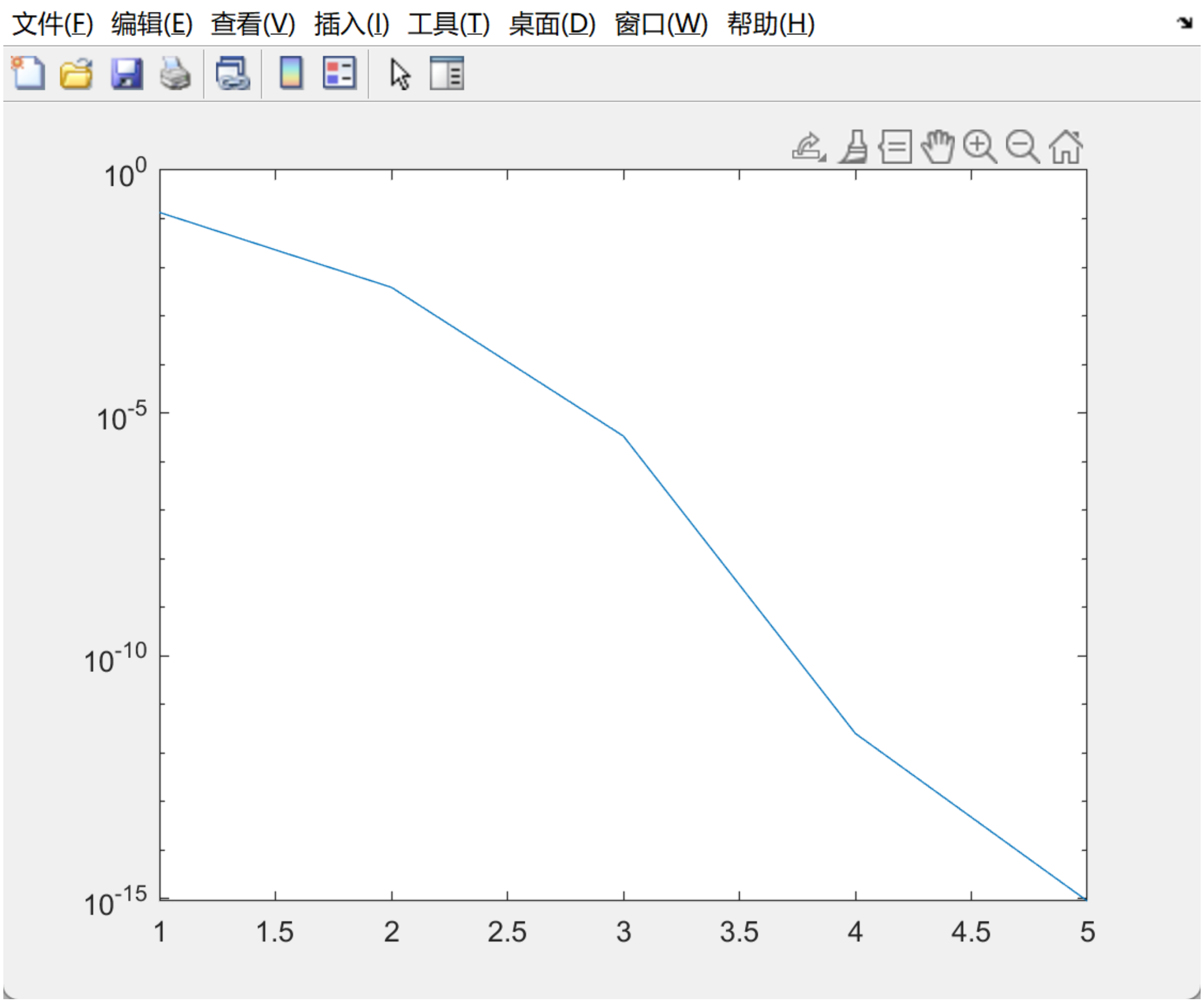
注意到横坐标只取到了4，也就意味着在分隔成16份时误差已经很小了，而在32和64份时已经小于机器误差了。

梯形法

像之前一样，把 x 轴分成 N 份，生成 N+1 个点，并在相邻两个点之间直接用直线连接，生成梯形，之后直接计算梯形的面积。

生成的动图在“梯形法.gif”中，因为画图有点困难，就省略了对梯形的填充。

代码在 Three_method_integral.m 的 t=2 中。误差关系如下所示



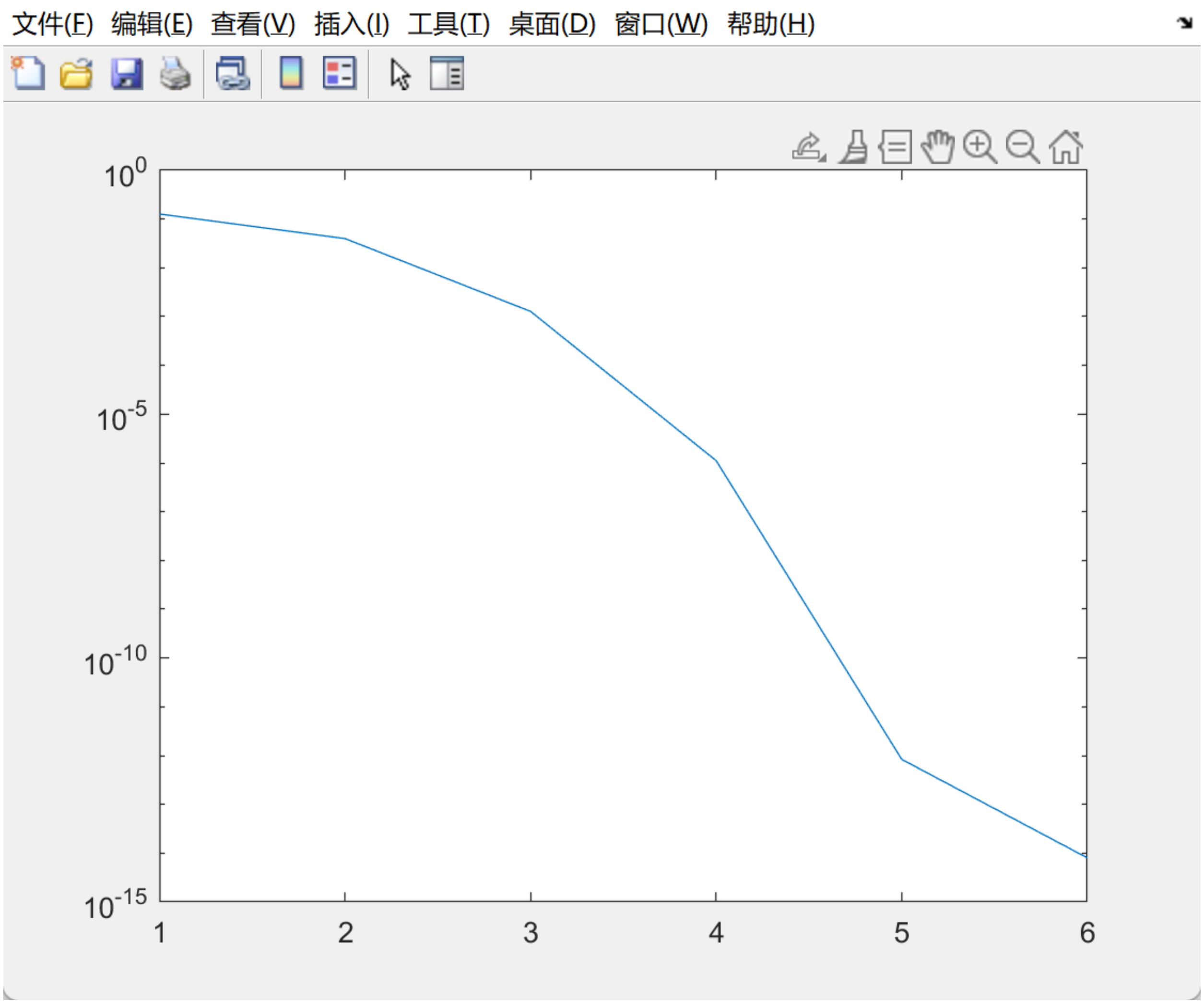
从这里可以看出这种方法在32份时误差已经很小了，在64份时已经小于机器误差了。

辛普森法

像之前一样，把 x 轴分成 N 份，生成 N+1 个点，每三个点进行多项式拟合，并一次算出每个拟合的多项式的值，加起来即是该数值积分的值。

生成的动图在”辛普森法.gif“中

代码在 Three_method_integral.m 的 t=3 中。误差关系如下所示

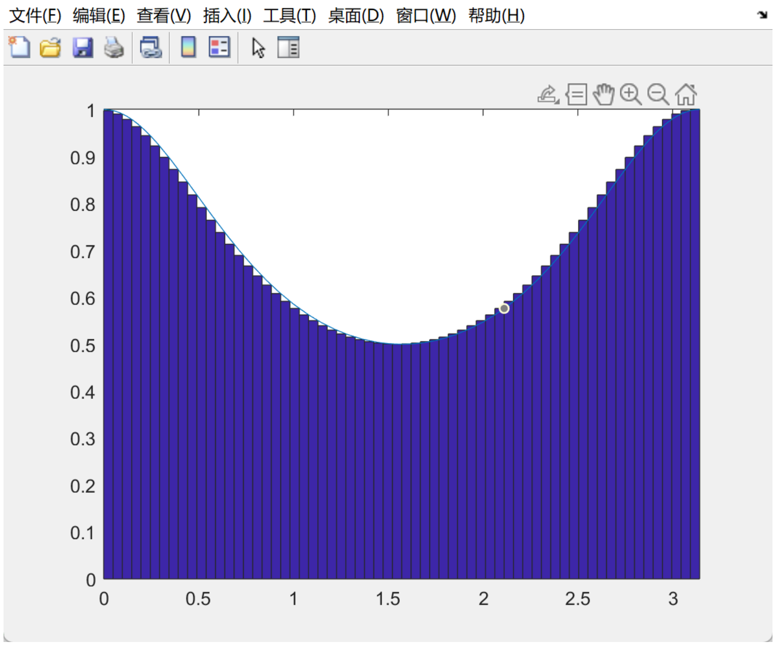


可以看出这种方法在分成64份时才能接近机器误差。

总结与思考

右矩形法和梯形法的代数精度都是1，而辛普森法的代数精度为3，通常情况下辛普森法应该更为准确，因此我想了解一下为什么右矩形法竟然更加精确。

以下指示我的一些猜测：可以观察右矩形法最后的图形



注意到函数是一个对称的图形，而上图的左半部分函数图像与矩形缺少的部分可能正好由右半部分矩形多出函数图像的部分填上，因此分到一定精度时，矩形法很有可能能更快的接近准确值。

同理，梯形法也有多出与缺少的部分，两相抵消，就更加接近准确值。

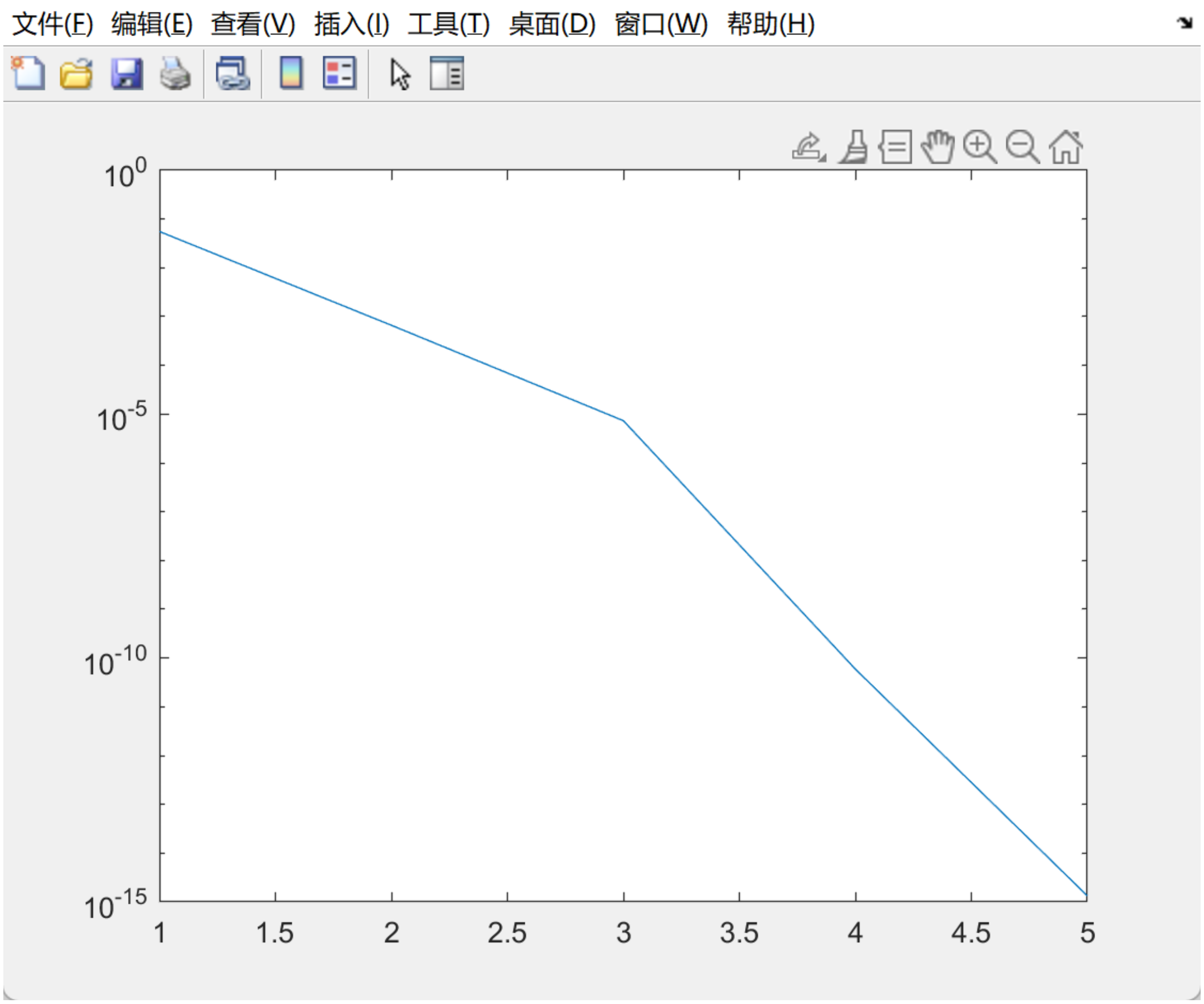
而辛普森法在这种情况下几乎是处处小于原本的函数值的，所以没有另外两种方法收敛的快。

实验二

用Gauss-Legendre方法计算，代码在Gauss_legendre.m中。

首先从给的网站中复制对应的权值和节点，然后计算在$[0, \pi]$上的积分。

运行exp2.m，生成的误差关系图如图所示



生成的几个积分值如下

2.2770
2.2208
2.2214
2.2214
2.2214
2.2214