Project 1 实验报告

缪方然

2021 年 11 月 17 日

1 技术性实验

1.1 问题 1

两种方法都不符合在单位圆中随机取点。

第一种方法的思路是先取定 x 轴，再在 $[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}]$ 之间取值，并记为 y。

第二种方法则是先选定半径 r 的随机值，且在 $[0,1]$ 之间，之后在 $[0,2\pi]$ 之间选定辐角值，这样就可以得出 x,y 的坐标了。

下面用数学实验与理论并行的方法来论证我的观点。

首先，在理想情况下，确定两个随机变量 x 和 y ，则他们服从

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi},0\le x^2+y^2\le 1$$

(x,y) 的均值为 $(0,0)$ ，而他们的协方差矩阵为

$$E\{[\mathbf{X}-E(\mathbf{X})][\mathbf{X}-E(\mathbf{X})]'\}=E(\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}')=E\begin{pmatrix}x^2 & xy\\ xy & y^2\end{pmatrix}$$

理论得出的协方差矩阵为 $\frac{1}{\pi}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4} & 0\\ 0 & \frac{\pi}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.25 & 0\\ 0 & 0.25\end{pmatrix}$.

之后在MATLAB中分别生成100000个数据，分别计算出各自的均值矩阵跟协方差矩阵。代码如下

```
clear,clc,close

num=2e4;

```

```
x1=2*rand(num,1)-1;
y1=(2*rand(num,1)-1).*sqrt(1-x1.^2);
mean(x1),mean(y1)
cov(x1,y1)
% plot(x1,y1,'.')
% axis equal

r=rand(num,1);
theta=2*pi*rand(num,1);
x2=r.*cos(theta);
y2=r.*sin(theta);
mean(x2),mean(y2)
cov(x2,y2)
% plot(x2,y2,'.')
% axis equal
```

各自生成的均值以及协方差矩阵如下

```
ans =

  -6.3648e-04


ans =

    0.0012


ans =

    0.3331   -0.0007
   -0.0007    0.2219
```

(a) 第一种方法生成的均值和协方差矩阵

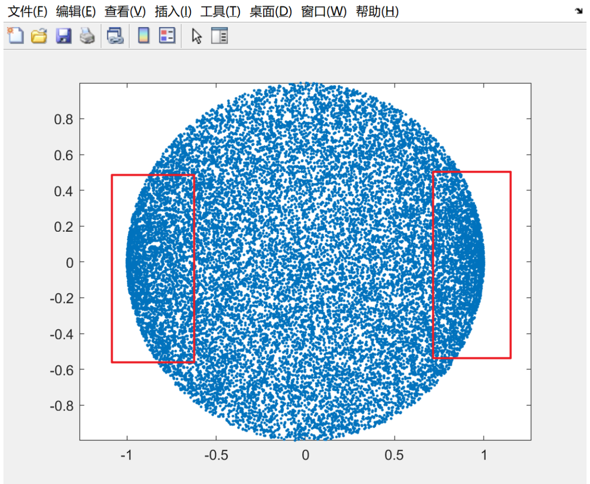
```
ans =

  -1.1493e-04


ans =

   -0.0011


ans =

    0.1662    0.0007
    0.0007    0.1674
```

(b) 第二种方法生成的均值和协方差矩阵

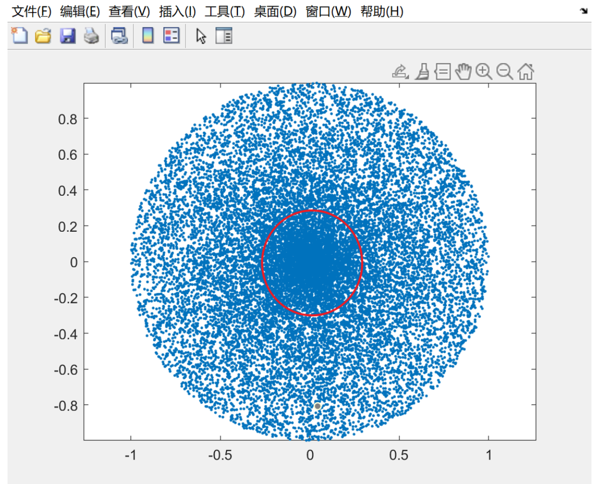
图 1: 两种方法生成的均值和协方差矩阵

可以看出 x 的均值基本为0，而 y 基本接近0，但是协方差矩阵算出的值与理论值相距甚远，特别是第一行第一列和第二行第二列。即他们不符合在单位圆上的均匀分布。

其次，画出图像也可以检验是否是均匀分布。因为100,000个点太过于密集，所以画图取的样本数量为20,000个。图像如下。



(a) 第一种方法生成散点图



(b) 第二种方法生成的散点图

图 2: 两种方法生成的散点图

从上图中可以看出（用红色方框和红色园标注的地方），第一种情况下位于x轴的两端的点相比于其他部分更加密集。而第二种情况下，越靠近x轴的区域分布越为密集。因此，两种情况所生成的点坐标均不符合均匀分布。

1.2 问题 2

首先生成两个在 $[-1,1]$ 上的随机变量，并取这两个随机变量的平方和小于等于1.这样便生成了单位圆上的随机均匀分布。

按照上述步骤依次取三个点，可以分别记为 A,B,C，则可以算出 $\vec{AB}$ & $\vec{AC}$，这样便可以算出 $\angle BAC$ 的余弦值，进而可以算出其正弦值，因此可以用公式 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin\angle BAC$ 算出面积。

重复100000次，取平均值算出期望。代码如下

```
clc,clear,close;

num=1e5;
count=0;
area=0;

while(count≤num)
    x1=2*rand(2,1)-1;
    x2=2*rand(2,1)-1;
    x3=2*rand(2,1)-1;
```

```
    if x1'*x1≤1 && x2'*x2≤1 && x3'*x3≤1
        count=count+1;
        AB=x2-x1;
        AC=x3-x1;
        cos_BAC=AB'*AC/(norm(AB)*norm(AC));
        sin_BAC=sqrt(1-cos_BAC^2);
        area=norm(AB)*norm(AC)*sin_BAC*0.5+area;
    end
end

area/count
```

算出的结果如图所示。

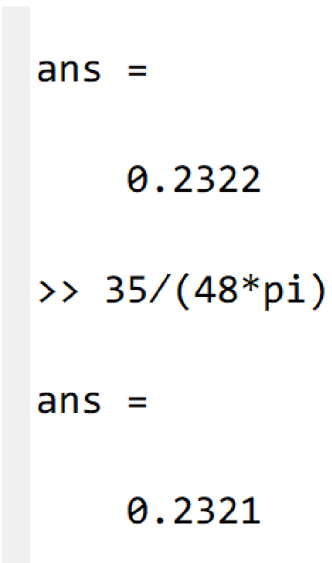


图 3: 实验结果

可以看出用蒙特卡洛进行的实验和真实值非常接近，也就是小明的猜想是合理的。

下面来证明上述猜想。

首先，固定一个点 C 在 $(0,1)$ ，在这个点时的期望三角形的面积的期望设为 s 。

再令 $M=\max\{|OA|,|OB|,|OC|\}$ ，则我们所要求的期望则是

$$\mathbb{E}(A)=\int_0^1 \mathbb{E}(A \mid M=r)\times 6r^5 dr=\int_0^1 sr^2\times 6r^5 dr=\frac{3s}{4}$$

之后，我们便需要求出 s 。

具体思路为：此时考虑原点在 $(0,1)$ 的情况，让 C 在原点，则 $\angle ACx,\angle BCx\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ，分别记

$\angle ACx$ 和 $\angle BCx$ 为 ϕ,ψ 。也不妨设$\phi \le \psi \le \frac{\pi}{2}$，并最后乘以2即可。

$$\mathbb{E}_1 = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_{\phi}^{\pi/2} d\psi \int_0^{2\sin\phi} dr \int_0^{2\sin\psi} ds \left(\frac{1}{2} rs\sin(\psi-\phi) rs\right)$$

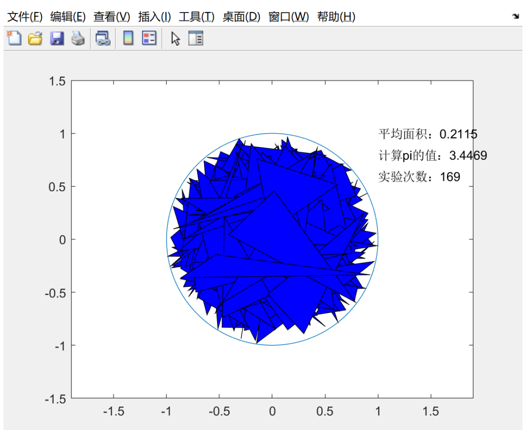
最后算出 $s=\frac{35}{36\pi}$ ，则 $\mathbb{E}(A)=\frac{35}{48\pi}$.

由此，可以设计出计算π的随机模拟实验。取多次实验中的三角形面积取平均值，记为 s ，之后计算 $\pi=\frac{35}{48s}$. 设计的动画的代码如下（因为取值太大，动画时间太长，因此只取了前1000个进行实验）

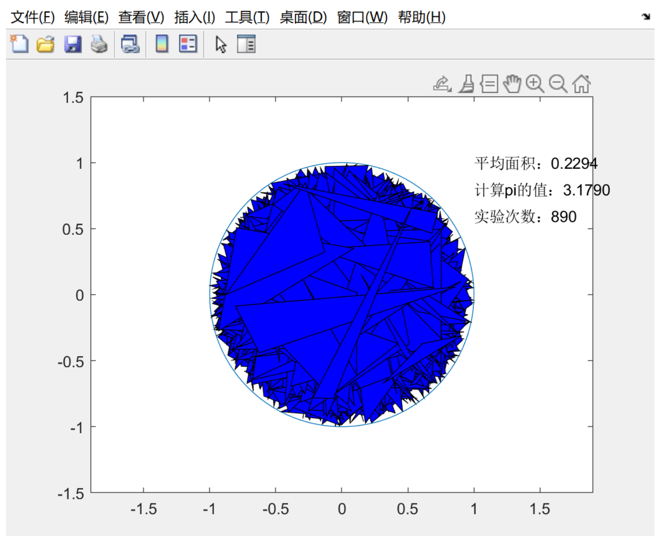
```
clc,clear,close;

num=1e5;
count=0;
area=0;

theta=linspace(0,2*pi,1000);
x=cos(theta);
y=sin(theta);

plot(x,y)
set(gca,'XLim',[-1.5,1.5],'YLim',[-1.5,1.5])
hold on
axis equal

while(count≤1000)
    x1=2*rand(1,2)-1;
    x2=2*rand(1,2)-1;
    x3=2*rand(1,2)-1;
    if norm(x1)≤1 && norm(x2)≤1 && norm(x3)≤1
        area=abs(det([x1,1;x2,1;x3,1]))*0.5+area;
        count=count+1;
        fill([x1(1),x2(1),x3(1),x1(1)],[x1(2),x2(2),x3(2),x1(2)],'b')
        a=text(1,1,"Average of area: "+area/count+"");
        b=text(1,0.8,"Caculating pi: "+35*count/(48*area)+"");
        c=text(1,0.6,"Numer of experiments: "+count+"");
        pause(0.04)
        delete(a),delete(b),delete(c)
    end
end

```

```
while(count≤num)
    x1=2*rand(1,2)-1;
    x2=2*rand(1,2)-1;
    x3=2*rand(1,2)-1;
    if norm(x1)≤1 && norm(x2)≤1 && norm(x3)≤1
        area=abs(det([x1,1;x2,1;x3,1]))*0.5+area;
        count=count+1;
    end
end

vpa(area/count)
```

动画过程中的截图如下



(a) 模拟实验前期



(b) 模拟实验后期

可以看到随着实验次数的增加，算出的值越来越接近 π.

2 探索性实验

2.1 问题 1

首先借助在课上的内容，先生成 D, m, E三个变量，再在函数内部继续生成 $\tilde{D}, \tilde{m}, \tilde{E}$ 代码如下。

```
function [C,D,m,E]=task2_1_func()
rho=rand;
p=rand;
```

```
v=2*rand-1;
C=2/rand;
D=rho/sqrt(1-v^2);
m=(rho+C*p)*v/(1-v^2);
E=m/v-p;
end
```

之后再在程序中模拟实验，当不满足条件时，计数就会加一。因此理想的情况下，计数应该为0. 代码如下。

```
clc,clear
N=1e5;
a=zeros(N,3);
count=0;
for k=1:N
    GAM=rand+1;
    rho=rand;
    p=rand;
    v=2*rand-1;
    ga=1/sqrt(1-v^2);
    h=1+(GAM/(GAM-1))*(p/rho);
    D=rho*ga;
    m=rho*h*ga^2*v;
    E=rho*h*ga^2-p;

    t=rand*2-1;
    D_tilde=D*(1+t*v);
    m_tilde=m*(1+t*v)+t*p;
    E_tilde=E+t*m;
    if E<=sqrt(D^2+m^2)
        count=count+1;
    end
end

disp(count)
```

最后的输出结果则是0（因为图片只有一个0的答案，所以就没有贴图了），这也就说明该不等式是成立的。下面来证明此不等式。首先注意到 $\tilde{D},\tilde{m}$ 项都包含了 $1+tv$ 项，因此我们也想在 E 中凑出 $1+tv$ 项。由此

$$\tilde{E}=E+tm=\frac{\rho+Cp}{1-v^2}-p+(\frac{\rho+Cp}{1-v^2})t=\frac{(1+tv)(\rho+Cp)}{1-v^2}-p=(E+p)(1+tv)-p=E(1+tv)+ptv$$

此时，计算 $\tilde{E}^2-(\tilde{D}^2+\tilde{m}^2)$ 是否大于0即可，而因为 $E^2>D^2+m^2$ ，因此只用计算式中一部份量即可。计算得出的剩余量为

$$2(1+tv)(Ev-m)+tp(v^2-1)$$

此时，将这些值带入matlab中用符号向量计算化简可得 $p(tv^2+2v+t)$，又注意到此时 t,v 的范围在 $[-1,1]$ 之间，则经过简单计算便可知该式大于0. 因此得证。

2.2 问题 2

首先生成一个符号变量 x，之后写出要解的方程的表达式，并用solve解出实根，观察是否只有一个实根，且这个实根是否大于0。如果其中一个不满足的话则可以在计数器上加一。而我们最终的期望的结果是0. 代码如下。

```
clc,clear

count=0;
syms x

for i=1:1e3
rho=rand;
p=rand;
v=2*rand-1;
C=2/rand;
D=rho/sqrt(1-v^2);
m=(rho+C*p)*v/(1-v^2);
E=m/v-p;

equ=C*x+m^2/(E+x)+D*sqrt(1-m^2/(E+x)^2)==E+x;
a=solve(equ,x,"Real",true);
if length(a)==1
    if double(a)>0
        continue
    else
        count=count+1;
    end
else
    count=count+1;
end
end
```

得出的最终的结果也是0. 这也就是说从数学实验的角度证明这有一个唯一正解。下面用理论的方式验证这个式子。

首先可以令

$$f(x)=Cx+\frac{m^2}{E+x}+D\sqrt{1-\frac{m^2}{(E+x)^2}}-E-x$$

注意到，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to\infty$. 我们此时只要证明 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上单调递增且 $f(0)<0$ 即可。而

$$f'(x)=C-1-\frac{m^2}{(E+x)^2}+\frac{2m^2}{(E+x)^3D/\sqrt{1-\frac{m^2}{(E+x)^2}}}=(C-1)+\frac{m^2}{(E+x)^2}(\frac{2D}{\sqrt{(E+x)^2-m^2}}-1)$$

先看后面部分：

$$\frac{2D}{\sqrt{(E+x)^2-m^2}}-1=\frac{2D}{\sqrt{E^2+2Ex+x^2-m^2}}-1<\frac{2D}{\sqrt{2Ex+x^2+D^2}}-1<\frac{2D}{\sqrt{D^2}}-1<1$$

同时，

$$\frac{2D}{\sqrt{(E+x)^2-m^2}}-1\geq-1$$

而由不等式 $E>\sqrt{D^2+m^2}$得

$$\frac{m^2}{(E+x)^2}<1$$

因此，后半部分的范围必在 $[-1,1]$. 又 $C-1>1$, 因此， $f'(x)\geq0$ 在 $(0,\infty)$ 上成立。

之后再证明 $f(0)<0$ 即可。

$$f(0)=\frac{m^2}{E}+D\sqrt{1-\frac{m^2}{E^2}}-E=\frac{(m^2-E^2)+D\sqrt{E^2-m^2}}{E}$$

把 $\sqrt{E^2-m^2}$ 当作自变量，且取值范围为 (D,∞)，此时分母是一个二次函数，因此易得此时这个值是小于0的。

综上，该方程式有唯一的正实根。

下面是编写的程序

```
function x=task2_2_func(D,m,E,C)
if (E^2-D^2-m^2)≤0 || C<2
    x=-1;
else
    syms t
    x=vpa(solve(C*t+m^2/(E+t)+D*sqrt(1-m^2/(E+t)^2)==E+t,t,'Real',true),10);
end
```

2.3 问题 3

在上一问的基础上将 $x=p$ 代入，并检测左式减去右式的绝对值是否小于机器误差，如果满足则可以认为该值等于0，记满足等式。得出0则计数器加一，最后理应得到跟循环次数相等的值。代码如下。

```
clc,clear

count=0;

for i=1:1e5
rho=rand;
p=rand;
v=2*rand-1;
C=2/rand;
D=rho/sqrt(1-v^2);
m=(rho+C*p)*v/(1-v^2);
E=m/v-p;

func=@(x) C*x+m^2/(E+x)+D*sqrt(1-m^2/(E+x)^2)-(E+x);
if abs(func(p)-0)<1e15
    count=count+1;
end
end
```

最后得出的值为100000，因此这个等式是成立的。

2.4 问题 4

结合问题2~3，可以得出满足（2）的方程有且只有唯一的正实根，且该根为 p 因此，据此可以解出 p,且由唯一性可知，这正是生成 D,m,E 所用的 p

又注意到 $E=\frac{m}{v}-p$，而此时 E,m,p 都是已知的，因此可以求出 v. 将求出的 v 代入到 D 中就可以得出 ρ. 因此对于任意的 $(D,m,E)\in A$ ，都可以找出一组唯一的 (ρ,p,v) 。

因此，这个多元向量函数值是双射。