数学实验 Project 2

2021 年 12 月 20 日

1　问题 1

1.1　第一问

首先写一个生成高斯勒让德求积的系数和根的函数，即 Gauss.m, 通过输入整数 N 生成对应的系数和根。再生成 P_i, 最后求出所有的 P 的和。整个代码在 exp1_1.m 中。

通过计算得到对于所有的 n, $\sum_{i=1}^{n+1} P_i = 1$. 下面给出证明：

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{n+1}} P_i = \sum_{i=1}^{\mathrm{n+1}} \frac{W_i \sum_{j=0}^{n} \phi_j^2\left(x_i\right)}{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{n+1}} W_i \sum_{j=0}^{n} \phi_j^2\left(x_i\right)}{n+1} \tag{1}$$

把分母单独提出来，即证分母等于 n+1 即可。交换两求和符号顺序得

$$\sum_{i=1}^{n+1} W_i \sum_{j=0}^{n} \phi_j^2\left(x_i\right) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{n+1} W_i \phi_j^2(x_i) \tag{2}$$

注意到里面的求和即是对每个ϕ_j作 [0,1] 上的高斯求积，即值为 1. 而外面的求和做了 n+1 次，因此分母的和为 n+1. 所以最终求得$\sum_{i=1}^{n+1} P_i = 1$. □

1.2　第二问

观察需要优化的式子即可知道这是一个二次型最优化，而二次型优化的标准式为

$$\min_x \frac{1}{2} x^T H x + f^T x \tag{3}$$

则我们只需要算出二次型优化中的 $\mathbf{H}, \mathbf{f}$即可.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left| \sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j\left(x_i\right) - f\left(x_i\right) \right|^2 = |\mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{c}} - \mathbf{F}|^2 \tag{4}$$

这里 $\mathbf{\Phi}$ 的每个元素为 $\Phi_{ij}=\phi_{j-1}(x_i)$, 且 $\mathbf{\Phi}$ 为 $(n+1)\times(n+1)$ 的矩阵。 $\hat{\mathbf{c}},\mathbf{F}$ 分别代表系数与每个 x_i 对应的 f 的值。

把上面的式子变为二次型标准型：

$$|\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{c}}-\mathbf{F}|^2=(\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{c}}-\mathbf{F})'(\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{c}}-\mathbf{F})=(\hat{\mathbf{c}}'\mathbf{\Phi}'-\mathbf{F}')(\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{c}}-\mathbf{F})=\hat{\mathbf{c}}'\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{c}}-2\mathbf{F}'\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{c}}+\mathbf{F}'\mathbf{F} \tag{5}$$

则令 $\mathbf{H}=\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{f}=-\mathbf{\Phi}'\mathbf{F}$. 在代码中用循环生成 $\mathbf{\Phi}$, 把它存在 legendre_matrix 中。之后相继生成 $\mathbf{H}$, $\mathbf{f}$, 并存在 H 和 f_value 中。用 'quadprog' 函数对其进行优化，即可得到 $\hat{\mathbf{c}}$.

将 c_k 与 $\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\, w_i \phi_k(x_i)$ 进行比较，发现

$$c_k=\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\, w_i \phi_k(x_i)\,,\ k=0,1\ldots n \tag{6}$$

相关程序在 exp1_23.m 中。下面给出数学证明。

首先注意到 $\mathbf{H}$ 必定为正定矩阵，因为 $\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi}$ 的所有特征值必定都大于 0. 则该二次型的最优解为 $\hat{\mathbf{c}}=\mathbf{H}^{-1}(-\mathbf{F})$, 即 $\hat{\mathbf{c}}=\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{F}$. 接下来只需证明 $\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{F}=\mathbf{\Phi}'\mathrm{diag}(\mathbf{W})F$ 即可。其中 $\mathrm{diag}(\mathbf{W})$ 指的是对角线全为 $\mathbf{W}$ 的元素的 $(n+1)\times(n+1)$ 的矩阵。

可以验证 $\mathbf{\Phi}'\mathrm{diag}(\mathbf{W})\mathbf{F}$ 的第 k 个元素为 $\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\, w_i \phi_k(x_i)$.

下面接着证明 $\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{F}=\mathbf{\Phi}'\mathrm{diag}(\mathbf{W})\mathbf{F}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{F}&=\mathbf{\Phi}'\mathrm{diag}(\mathbf{W})\mathbf{F}\\ \mathbf{\Phi}'\mathbf{F}&=\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}'\mathrm{diag}(\mathbf{W})\mathbf{F}\\ \mathbf{F}&=\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}'\mathrm{diag}(\mathbf{W})\mathbf{F}\\ \mathbf{I}&=\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}'\mathrm{diag}(\mathbf{W})\end{aligned} \tag{7}$$

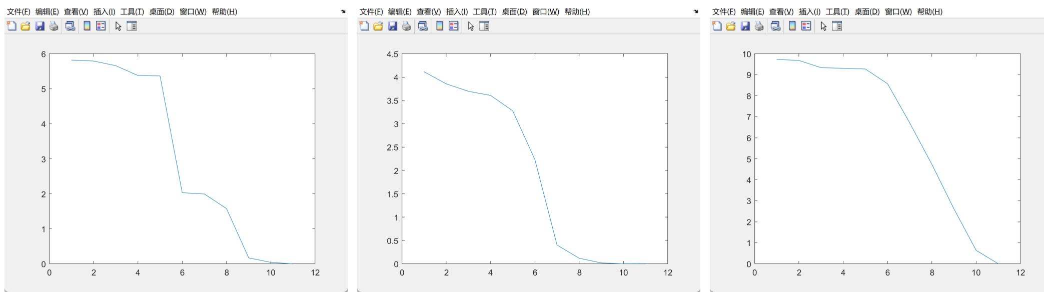
第三个等式能消去 $\mathbf{\Phi}'$ 的原因是因为可逆，第四个等式能消去 $\mathbf{F}$ 的原因是 $\mathbf{\Phi},\mathrm{diag}(\mathbf{W})$ 都与 $\mathbf{F}$ 无关且 $\mathbf{F}$ 可以几乎取任意的值（由函数 $f(x)$ 而定）。

最后 $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}'\mathrm{diag}(\mathbf{W})$ 即是 $\int_{-1}^{1}\phi_i(x)\phi_j(x)dx$. 则对角元上 $i=j$, 为 1，非对角元上 $i\neq j$, 为 0. 因此，最后等于单位矩阵，因此，上式的第四个等式成立，从而第一个式子成立，即猜想正确。 □

1.3 第二问

紧接着上述的程序（即相关代码在 exp1_23.m 中）。 Φ_i 即是 $\mathbf{\Phi}$ 的第 i 行的数据，即 legendre_matrix 的第 i 行。之后开始每次迭代，把每次计算出的误差存入变量 e 中。这

里并没有计入第一次随机生成 c 时的误差，因此 e 为 $(n+1)\times 1$ 的向量。下面分别是 $f(x)=x$，$f(x)=\sin(x)$，$f(x)=e^{x}$ 的误差图像。（此时 n 都取的是 10）



(a)　　(b)

可以看出误差都呈下降趋势，且当 $i=n+1$ 时，误差非常小，达到了 10^{-20} 的数量级或者更小。因此，猜想是当 $i=n+1$ 时，$\boldsymbol{C}^{(i)}$ 几乎达到真实值 $\hat{\mathbf{c}}$.

下面给出证明：

注意到递推式与牛顿法的形式很相近，因此考虑用牛顿法证明该数列收敛且收敛到 $\hat{\mathbf{c}}$. 牛顿法的原始形式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)} \tag{8}$$

令 $g(\hat{\mathbf{c}})=(\mathbf{c}\cdot\Phi_i-f(x_i))\Phi_i$, 则 $\frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{c}}}=\Phi_i\cdot\Phi_i=||\Phi_i||^2$, 正好等于分母。

因此该递推式收敛的条件为分子有零点，即

$$g(\hat{\mathbf{c}})=(\mathbf{c}\cdot\Phi_i-f(x_i))\Phi_i \tag{9}$$

有零点。

注意到

$$\hat{\mathbf{c}}=\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{F}'$$

两边同时左乘 $\mathbf{\Phi}$ 得

$$\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{c}}=\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{F}'$$

因为 Φ 是可逆的，因此括号中的项可以提出，得

$$\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{c}}=\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Phi}'^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{F}\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{c}}=\mathbf{F}$$

所以 $\mathbf{F}$ 的第 i 个元素为 $\mathbf{\Phi}$ 的第 i 行乘以 $\hat{\mathbf{c}}$, 即 $\Phi_i\cdot\hat{\mathbf{c}}$.

所以 (9) 式有解，也就是说 $\mathbf{c}^{(i)}$ 收敛于 $\hat{\mathbf{c}}$.