

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

**«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»  
(ННГУ)**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

**Отчет по лабораторной работе №1:  
«Реализация метода обратного распространения ошибки для  
двуслойной полностью связанной нейронной сети»**

**Выполнил:** студент группы 381603м4

Герасимов Дмитрий Михайлович

**Проверила:**

к.т.н., старший преподаватель  
кафедры МОСТ  
Кустикова В. Д.

Нижний Новгород

2017

## Содержание

Постановка задачи.....	3
Вывод формул для метода обратного распространения ошибки.....	4
Программная реализация.....	7
Результаты экспериментов.....	9
Литература.....	10

## Постановка задачи

Выполнение лабораторной работы предполагает решение следующих задач:

1. Изучить общую схему метода обратного распространения ошибки;
2. Вывести формулы для вычисления градиентов функции ошибки по параметрам нейронной сети и формул коррекции весов;
3. Разработать программную реализацию;
4. Получить результаты для разработанной двухслойной полносвязной нейронной сети, которые соотносятся с результатами на официальной странице набора данных MNIST.

## Вывод формул для метода обратного распространения ошибки

Пусть введены следующие обозначения:

$N$  – количество входных нейронов;

$M$  – количество выходных нейронов;

$K$  – количество нейронов на скрытом слое;

$L$  – количество обучающих примеров.

Функция кросс-энтропии рассматривается в качестве функции ошибки:

$$E(w) = -\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^M y_j^k * \ln(u_j^k), \quad y_j^k = 1 \Leftrightarrow x_k \in j \text{ классу.}$$

Здесь  $y^k = (y_j^k) \in Y, (j=1, \dots, M)$ . В свою очередь  $Y$  – это множество обучающих примеров.  $u^k = (u_j^k)$  – выход нейронной сети полученный для  $x^k = (x_j^k) \in X, (i=1, \dots, N)$ .

В последовательном режиме (также его еще называют стохастический) корректировка весов выполняется после каждого примера обучающей выборки. Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)$  и  $u = (u_1, u_2, \dots, u_M)$  – конкретный обучающий пример. Тогда получаем, что  $E(w) = -\sum_{j=1}^M y_j * \ln(y_j)$ .

Если обозначить веса синаптических связей от входных нейронов к нейронам скрытого слоя как  $w_{is}^{(1)}$ , а от нейронов скрытого слоя к выходным нейронам как  $w_{sj}^{(2)}$ , то  $f_s$  записывается в виде:

$$f_s = \sum_{i=0}^N w_{is}^{(1)} * x_i, \quad s=0, \dots, k \text{ – взвешенная сумма входных сигналов.}$$

Как функцию активации на последнем слое берут функцию *softmax* :

$$u_j = \sum_{m=1}^M \frac{e^{g_j}}{e^{g_m}} , \text{ где } g_j = \sum_{s=0}^K w_{sj}^{(2)} * v_s \quad (j=1, \dots, M) .$$

Таким образом  $E(w)$  можно представить как:

$$E(w) = - \sum_{j=1}^M y_j * \ln \left( \frac{e^{g_j}}{\sum_{m=1}^M e^{g_m}} \right) = - \sum_{j=1}^M y_j * (g_j - \ln(\sum_{m=1}^M e^{g_j})) ,$$

где  $g_j$  вычисляется по формуле:

$$g_j = \sum_{s=0}^K w_{sj}^{(2)} * \phi \left( \sum_{i=0}^N w_{is}^{(1)} x_i \right) .$$

Задача оптимизации функции ошибки по всем синаптическим весам есть задача обучения нейронной сети:

$$E(w) \rightarrow \min_w .$$

В методе обратного распространения ошибки параметры сети выбираются с использованием градиентных методов оптимизации. Стоит заметить, что если функция активация на скрытом слое – это  $\tanh(x)$  , т.е.  $\phi(f_s) = \tanh(f_s)$  . Тогда градиент имеет следующую структуру:

$$\frac{\delta E(w)}{\delta w_{sj}^{(2)}} = \delta_j^{(2)} * v_s , \quad \frac{\delta E(w)}{\delta w_{is}^{(1)}} = \delta_s^{(1)} * x_i .$$

На каждом шаге  $r+1$  обучения сети производится коррекция весов по формулам (  $\eta$  - скорость обучения):

$$w_{is}^{(1)(r+1)} = w_{is}^{(1)(r)} - \eta \frac{\delta E(w)}{\delta w_{is}^{(1)}} , \quad w_{sj}^{(2)(r+1)} = w_{sj}^{(2)(r)} - \eta \frac{\delta E(w)}{\delta w_{sj}^{(2)}} .$$

## Программная реализация

Алгоритм обучения нейронной сети, описываемый в настоящей лабораторной работе, можно представить как последовательность следующих шагов:

1. Перед началом обучения веса нейронной сети  $w$  инициализируются случайным образом;
2. *for epoch* = 1,...,*numberOfEpochs* ;
3. *for i* = 1,..., $W * H$  , где  $W$  - ширина изображения в пикселах и  $H$  - высота изображения в пикселах;
4. Следует прямой проход и обратный проход (алгоритмы описаны ниже);
5. Шаги 3-4 повторяются до тех пор пока не будет достигнута достаточная точность, то есть  $E(w_{cur}) < CrossEntropyError$  или заданное количество итераций метода *numberOfEpochs* было достигнуто.

Прямой проход можно представить как:

$$x_i \rightarrow v_s, \quad \frac{\partial \phi}{\partial f_s} \rightarrow u_j$$

То есть вычисляются значения выходного сигналов нейронов скрытого слоя  $v_s$  ,  $s=0,\dots,K$  (где  $K$  – количество нейронов на скрытом слое) и значение производной функции активации на скрытом слое  $\frac{\partial \phi}{\partial f_s}$  . Затем вычисляются значения сигналов выходного поля  $u_j$  ,  $j=1,\dots,M$  (где  $M$  - количество классов изображений).

Обратный проход:

for  $j=1,\dots,M$

$$\partial_j^{(2)} = u_j - y_j \quad ,$$

$$\frac{\partial E(w)}{\partial w_{sj}^{(2)}} = \delta_j^{(2)} * v_s \quad ,$$

for  $s=0,\dots,K$

$$\partial_s^{(1)} = -\delta\phi / \delta f \sum_{s,j=1}^M \delta_j^{(2)} * w_{sj}^2 \quad ,$$

$$\frac{\partial E(w)}{\partial w_{es}^{(1)}} = \delta_s^{(1)} * x_i \quad ,$$

for для каждой дуги:

$$w_{is}^{(1)} = w_{is}^{(1)} - \eta \frac{\partial E(w)}{\partial w_{is}^{(1)}} \quad ,$$

$$w_{sj}^{(2)} = w_{sj}^{(2)} - \eta \frac{\partial E(w)}{\partial w_{sj}^{(2)}} \quad .$$

## Результаты экспериментов

Точность классификации объектов из набора данных MNIST была рассчитана по следующей формуле:

$$p = \frac{true}{true + false}$$

где *true* – количество правильно определённых цифр, *false* – количество неправильно определённых цифр.

Для получения сводной таблицы величина целевой функции была зафиксирована значением  $7.0e-3$ . Значения заданные для остальных параметров нейронной сети представлены в таблице ниже вместе с результатами экспериментов.

Количество нейронов в скрытом слое	Скорость обучения	Пройденное количество эпох до достижения заданной точности	Ошибка классификации на тренировочном наборе	Ошибка классификации на тестовом наборе
100	$5.0e-3$	21	$4.0e-4$	$2.18e-2$
100	$7.0e-3$	17	$3.33e-4$	$2.09e-2$
200	$5.0e-3$	19	$4.5e-4$	$1.91e-2$
200	$7.0e-3$	16	$5.5e-4$	$1.84e-2$
300	$4.0e-3$	22	$4.16e-4$	$1.91e-2$
300	$8.0e-3$	14	$8.8e-4$	$1.82e-2$



## Литература

1. MNIST dataset [<http://yann.lecun.com/exdb/mnist>].
2. OpenCV [<http://opencv.org>].
3. Материалы Летней межвузовской школы 2016 [<https://github.com/itseez-academy/itseez-ss-2016-theory>], [<https://github.com/itseez-academy/itseez-ss-2016-practice>].