
Логические операции и высказывания:

1. **Отрицание ($\neg$)**: Обозначает логическое "не". Если высказывание A истинно, то $\neg A$ ложно, и наоборот. Пример: Если A: "Идёт дождь", то $\neg A$: "Дождя нет".

2. **Конъюнкция ($\wedge$)**: Соединение "и". Выражение $A \wedge B$ истинно, только если оба высказывания A и B истинны. Пример: $A \wedge B$: "Идёт дождь и светит солнце".

3. **Дизъюнкция ($\vee$)**: Соединение "или". Выражение $A \vee B$ истинно, если истинно хотя бы одно из A или B. Пример: $A \vee B$: "Идёт дождь или светит солнце".

4. **Импликация ($\Rightarrow$)**: "Если A, то B". Истинно всегда, кроме случая, когда A истинно, а B ложно. Пример: Если A: "Идёт дождь", то B: "На улице мокро".

5. **Эквивалентность ($\Leftrightarrow$)**: "Тогда и только тогда". Выражение $A \Leftrightarrow B)$ истинно, если A и B оба либо истинны, либо ложны.

Логические кванторы:

1. **Всеобщности ($\forall$)**: Указывает, что утверждение справедливо для всех элементов множества. Пример: $\forall x \in R : x^2 \geq 0$ (для всех действительных чисел квадрат числа неотрицателен).

2. **Существования ($\exists$)**: Указывает, что существует хотя бы один элемент множества, для которого утверждение справедливо. Пример: $\exists x \in R : x^2 = 4$ (существуют числа, квадрат которых равен 4).

   Отрицания кванторов:

   - $\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x))$.
   - $\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x))$.

Принцип исключённого третьего:

Любое высказывание A либо истинно, либо ложно, третьего не дано:

$$A \lor \neg A\,.$$

Закон двойного отрицания:

Отрицание отрицания равносильно исходному высказыванию:

$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A.)$$

Необходимые и достаточные условия:

1. **Необходимое условие**: Если $A \Rightarrow B)$, то B — необходимое условие для A.
2. **Достаточное условие**: Если $A \Rightarrow B)$, то A — достаточное условие для B.
3. **Необходимое и достаточное условие**: Эквивалентность ($A \Leftrightarrow B)$).

Доказательство от противного:

Метод основывается на предположении противоположного утверждения и выводе противоречия. Если $\neg A$ приводит к противоречию, то A истинно.

Примеры и задачи:

Задача 1. Логическая таблица истинности:

Проверим формулу:

$$\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B.)$$

Решение:

1. Построим таблицу истинности для A, B, $A \land B$, $\neg(A \land B)$, $\neg A$, $\neg B$, $\neg A \lor \neg B$.
2. Сравним столбцы $\neg(A \land B)$ и $\neg A \lor \neg B$ — они совпадают, формула доказана.

Задача 2. Отрицание кванторов:

Докажем:

$$\neg((\forall x > a) P(x)) \Leftrightarrow (\exists x > a) \neg P(x).)$$

Решение:

$$\neg\left(\left(\forall x > a\right) P\left(x\right)\right) := \neg\left(\forall x\left(x > a \Rightarrow P\left(x\right)\right)\right) \Leftrightarrow \exists x \neg\left(x > a \Rightarrow P\left(x\right)\right) \Leftrightarrow \exists x\left(\left(x > a\right) \wedge \neg P\left(x\right)\right).$$

2.Понятие множества

Множество — это совокупность объектов, которые можно чётко различить и объединить в одно целое.(Неопределяемое понятие)

Основные положения канторовской («наивной») теории множеств

В учебнике Зорича понятие множества и основы канторовской («наивной») теории множеств изложены в разделе "§ 2. Множества и элементарные операции над множествами". Привожу точный пересказ содержания без изменений:

Основные положения канторовской («наивной») теории множеств

1. **Любые различимые объекты могут составлять множество.** Пример: множество букв слова, множество точек плоскости.
2. **Множество полностью определяется составом его элементов.** То есть множество $A = \{a, b, c\}$ однозначно задаётся своими элементами.

1. **Любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладают.**
   Если $P(x)$ — свойство, то множество объектов x, обладающих этим свойством, записывается как:

$$\{x \mid P(x)\}.$$

Парадокс Рассела:

Рассмотрим множество $K = \{M \mid M \notin M\}$, то есть множество всех множеств, которые **не являются своими собственными элементами**.
Теперь спросим: $K \in K$?

- Если $K \in K$, то по определению $K \notin K$, что противоречит предположению.
- Если $K \notin K$, то по определению $K \in K$, что также противоречиво.

Этот парадокс показывает, что множество всех множеств не может существовать.

3.Отношение включения множества

Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то пишут $A \subset B$ (или $B \supset A$) и говорят, что A является подмножеством B.
Формально:

$$\left. A \subset B\text{\:\,}\Longleftrightarrow\text{\:\,}\forall x\,(x \in A\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}x \in B). \right.$$

Если $A \subset B$, но $A \neq B$, то говорят, что A — строгое подмножество B.

Операции над множествами

1. **Объединение ($A \cup B$)**
   Объединением множеств A и B называется множество:
   $$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$
   Пример: Если $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, то $A \cup B = \{1,2,3\}$.

2. **Пересечение ($A \cap B$)**
   Пересечением множеств A и B называется множество:
   $$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$
   Пример: $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, тогда $A \cap B = \{2\}$.

3. **Разность ($A \setminus B$)**
   Разностью множеств A и B называется множество:
   $$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$
   Пример: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$, тогда $A \setminus B = \{1,3\}$.

4. **Дополнение ($C_M A$)**
   Дополнением множества A в универсальном множестве M называется множество:
   $$C_M A = \{x \in M \mid x \notin A\}.$$
   Пример: Если $M = \{1,2,3,4\}$, $A = \{2,3\}$, то $C_M A = \{1,4\}$.

Декартово произведение множеств

Прямым (или декартовым) произведением множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Пример: Если $X = \{1,2\}$, $Y = \{a, b\}$, то:

$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}.$$

Декартово произведение не является коммутативным: $X \times Y \neq Y \times X$, если $X \neq Y$.

4.Понятие функции (отображения)

Функция (или отображение) f — это соответствие, которое каждому элементу x из множества X ставит в соответствие единственный элемент y из множества Y. Пишут:

$$f: X \to Y, x \mapsto y = f(x).$$

- X называется **областью определения функции**.
- Множество Y называется **множество значений функции**.

Графически это можно представить как множество упорядоченных пар (x, y):

$$\{(x, y) \mid x \in X, y = f(x)\}.$$

Множество значений функции — множество всех значений функции, которые она принимает на элементах множества X.

Сужение функции

Если $f: X \to Y$ — функция, то её **сужением** на подмножество $A \subset X$ называется функция $f\mid_A: A \to Y$, для которой:

$$f\mid_A(x) = f(x), \forall x \in A.$$

Продолжение функции

Функция $g: Z \to Y$ называется **продолжением функции** $f: X \to Y$, если:

1. $X \subset Z$,
2. $g(x) = f(x)$ для всех $x \in X$.

Варианты определения функции

1. **Через соответствие**: Функция определяется как правило, связывающее элементы множества X с элементами Y. Пример: $f(x) = x^2$.

2. **Через график**: Функция рассматривается как множество пар:

   График $f = \{(x, y) \mid x \in X, y = f(x)\}$.

3. **Через отображение**: Функция рассматривается как отображение множества X в множество Y:

   $f: X \to Y$.

Различия в определениях

1. Определение через соответствие подчёркивает аналитическую зависимость.
2. Определение через график связывает функцию с геометрическим представлением.
3. Определение через отображение подчёркивает связь между множествами.

5.Образ и прообраз элемента/множества

Образ

Образ (image) элемента или множества при отображении $f: A \to B$ — это множество всех элементов из B, которые получаются при применении отображения f к элементам A.

- **Образ элемента** $a \in A$: $f(a) \in B$ — элемент, в который a переходит при отображении f.
- **Образ множества** $X \subseteq A$: $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$.

Прообраз

Прообраз (preimage) элемента или множества — это множество всех элементов из A, которые отображаются в данный элемент или множество из B.

- **Прообраз элемента** $b \in B$: $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\} \subseteq A$.
- **Прообраз множества** $Y \subseteq B$: $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A$.

Простейшая классификация отображений

Отображение $f: A \to B$ можно классифицировать по следующим типам:

1. Сюръекция (сюрективное отображение)

Сюръекция — это отображение, при котором **каждый элемент множества** B имеет хотя бы один прообраз в A. Иными словами, $f(A) = B$.

- **Пример**: $f: R \to R_{\geq 0}$, где $f(x) = x^2$. Любое неотрицательное число $y \in R_{\geq 0}$ имеет хотя бы один $x \in R$, такой что $f(x) = y$.

2. Инъекция (инъективное отображение)

Инъекция — это отображение, при котором **разные элементы множества** A переходят в **разные элементы множества** B. Иными словами, если $f(a_1) = f(a_2)$, то $a_1 = a_2$.

- **Пример**: $f: R \to R$, где $f(x) = 2x + 1$. Разные x дают разные значения $f(x)$.

3. Биекция (биективное отображение)

Биекция — это отображение, которое одновременно является и инъекцией, и сюръекцией. Для каждого элемента $b \in B$ существует ровно один прообраз $a \in A$.

- **Пример**: $f: R \to R$, где $f(x) = x + 1$. Каждое число b в R имеет ровно один прообраз $a = b - 1$.

Итоги

Тип отображения	Условие	Пример функции
Сюръекция	$f(A) = B$	$f(x) = x^2, x \in R \to R_{\geq 0}$
Инъекция	$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$	$f(x) = 2x + 1, x \in R$
Биекция	Инъекция + Сюръекция	$f(x) = x + 1, x \in R \to R$

6.Композиция функций

Определение

Композиция функций — если отображения $f: A \to B$ и $g: B \to C$, таковы, что одно из них определено на множестве значений другого, то можно построить новое отображение g∘ $f: A \to$ C, значения которого на элементах множества A определяются формулой (g ∘ f)(x):= g(f(x)). Композиция определяется следующим образом:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big),\text{где } x \in A.$$

Свойства композиции:

1. **Ассоциативность**: Если (f: A \to B , g: B \to C , h: C \to D $, то: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
2. **Необязательно коммутативность**: В общем случае $g \circ f \neq f \circ g$.

Пример

Пусть $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$. Тогда:

- Композиция $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2.$$

- Композиция $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = 2x^2 + 1.$$

Здесь $g \circ f \neq f \circ g$.

Взаимно обратные отображения

Определение

Две функции $f: A \to B$ и $g: B \to A$ называются **взаимно обратными**, если выполняются следующие условия:

1. Композиция $g \circ f$ равна тождественному отображению на A: $g\big(f(x)\big) = x, \forall x \in A$.
2. Композиция $f \circ g$ равна тождественному отображению на B: $f\big(g(y)\big) = y, \forall y \in B$.

В этом случае g называется обратной функцией к f и обозначается как $g = f^{-1}$.

Свойства:

1. Функция f должна быть **биективной** (и инъективной, и сюръективной), чтобы иметь обратную.
2. Если $g = f^{-1}$, то: $f^{-1} \circ f = \mathrm{e}_A, f \circ f^{-1} = \mathrm{e}_B$, где id — тождественное отображение.

Пример

Пусть $f(x) = 2x + 3,\, x \in R$. Найдем обратное отображение $f^{-1}(x)$:

$$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2}.$$

Таким образом, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

Проверим:

1. $f\left(f^{-1}(x)\right) = 2\left(\frac{x-3}{2}\right) + 3 = x.$
2. $f^{-1}\left(f(x)\right) = \frac{(2x+3)-3}{2} = x.$

7.Бинарные отношения

Определение

Бинарное отношение — это правило, которое связывает элементы двух множеств A и B, определяя, какие пары (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, принадлежат данному отношению. Формально, бинарное отношение R между множествами A и B — это подмножество их декартова произведения:

$$R \subseteq A \times B.$$

Если $(a, b) \in R$, говорят, что a находится в отношении R с b, и пишут aRb.

Основные виды бинарных отношений

Отношения на множестве A обладают следующими свойствами:

1. Рефлексивное отношение

- **Определение**: Отношение R рефлексивно, если для любого $a \in A$ выполнено aRa.
- **Пример**: Отношение равенства $=$ на R, так как любое число равно самому себе.

2. Симметричное отношение

- **Определение**: Отношение R симметрично, если из aRb следует bRa.
- **Пример**: Отношение равенства $=$ или "быть родственниками".

3. Антисимметричное отношение

- **Определение**: Отношение R антисимметрично, если из aRb и bRa следует $a = b$.
- **Пример**: Отношение "меньше либо равно" ($\leq$).

4. *Транзитивное отношение*

- **Определение**: Отношение R транзитивно, если из aRb и bRc следует aRc.
- **Пример**: Отношение "меньше либо равно" ($\leq$) на R.

5. *Эквивалентность*

- **Определение**: Отношение называется эквивалентностью, если оно одновременно:
    - рефлексивно,
    - симметрично,
    - транзитивно.
- **Пример**: Отношение "равенство остатков при делении на n" (конгруэнтность по модулю n).

6. *Порядок*

- Отношение порядка может быть:
    - **Частичный порядок**: Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное.
        - Пример: Отношение "делится на" для чисел ($a \mid b$).
    - **Линейный порядок**: Частичный порядок, при котором любые два элемента a, b сравнимы (aRb или bRa).
        - Пример: Отношение "меньше либо равно" ($\leq$).

Функция как отношение

Определение

Функция — это частный случай бинарного отношения $R \subseteq A \times B$, обладающий следующими свойствами:

1. Для каждого $a \in A$ существует **ровно один** элемент $b \in B$, такой что $(a, b) \in R$.
2. Запись $f(a) = b$ означает, что $(a, b) \in R$.

Связь с бинарными отношениями

- Функция задает **однозначное** соответствие между элементами двух множеств.
- Она является отношением, где каждому элементу $a \in A$ соответствует единственный $b \in B$.

Пример функции как отношения

Пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$, и функция f задана как:

$$f = \{(1,4), (2,5), (3,6)\}.$$

Здесь f удовлетворяет определению функции, так как каждому $a \in A$ соответствует ровно один элемент $b \in B$.

8.Мощность множества (кардинальное число множества)

Говорят, что множество X равномощно множеству Y, если существует биективное отображение $X \to Y$, то есть каждому элементу $x \in X$ сопоставляется элемент $y \in Y$, причём:

- различным элементам множества X соответствуют различные элементы множества Y;
- каждый элемент $y \in Y$ сопоставлен некоторому элементу множества X.

Обозначение равномощности:

$$X \sim Y.$$

Мощность множества X, называемая также **кардинальным числом множества** и обозначаемая $card\, X$, — это характеристика множества, определяющая его "размер". Если $X \sim Y$, то $card\, X = card\, Y$.

Сравнение мощностей множеств

Говорят, что кардинальное число множества X **не больше** кардинального числа множества Y ($card\, X \leq card\, Y$), если X равномощно некоторому подмножеству множества Y.
Формально:

$\left. \left({card}\, X \leq {card}\, Y \right)\text{\:\,}\Longleftrightarrow\text{\:\,}\left(\exists Z \subset Y\,\text{такое,~что~}{card}\, X = {card}\, Z \right). \right.$

Свойства:

1. Если $X \subset Y$, то $card\, X \leq card\, Y$.
2. Если $X \subset Y$ и $X \sim Y$, то X называется бесконечным. Возможность множества быть равномощным своему подмножеству — характерный признак бесконечности (определение Дедекинда).
3. Соотношение $card\, X \leq card\, Y$ подчиняется следующим аксиомам:
   - Транзитивность: если $card\, X \leq card\, Y$ и $card\, Y \leq card\, Z$, то $card\, X \leq card\, Z$.
   - Симметрия (теорема Шрёдера — Бернштейна): если $card\, X \leq card\, Y$ и $card\, Y \leq card\, X$, то $card\, X = card\, Y$.
   - Полнота (теорема Кантора): для любых X и Y, либо $card\, X \leq card\, Y$, либо $card\, Y \leq card\, X$.

9.Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств

Теорема:
Для любого множества X мощность множества всех его подмножеств $P(X)$ строго больше мощности самого множества X:

$$card(X) < card\big(P(X)\big).$$

Доказательство (по Кантору):

1. **Предположение противного:**
   Пусть существует биекция $f: X \to P(X)$, где каждому $x \in X$ сопоставляется подмножество $f(x) \subseteq X$.

2. **Определим множество:**
   Рассмотрим множество $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$, то есть A состоит из элементов $x \in X$, которые **не принадлежат** подмножеству $f(x)$, сопоставленному им через отображение f.

3. **Анализ включения элемента $a \in A$:**
   Теперь рассмотрим, может ли A быть элементом $f(x)$ для какого-либо $x \in X$:

   - Если $a \in A$, то $a \notin f(a)$ по определению A, что противоречит $a \in f(a)$.
   - Если $a \notin A$, то $a \in f(a)$ по определению, что противоречит $a \notin f(a)$.

4. **Противоречие:**
   Для любого $x \in X$ ни $A \in f(x)$, ни $A \notin f(x)$ не выполняется. Это нарушает закон исключенного третьего.

Вывод:

Таким образом, предположение о существовании биекции между X и $P(X)$ неверно. Следовательно:

$$card(X) < card\big(P(X)\big).$$

Это доказательство иллюстрирует, что множество всех подмножеств $P(X)$ имеет строго большую мощность, чем X, даже для бесконечных множеств.

10.Определение множества действительных чисел

Множество R называется множеством действительных (вещественных) чисел, если выполнен следующий комплекс условий, называемый **аксиоматикой вещественных чисел**:

1. **Аксиомы сложения ($+$)**:
    - Операция сложения $(x + y)$ определена для всех $x, y \in R$.
    - Существует нейтральный элемент (ноль) $0 \in R$, такой что $x + 0 = x$ для любого x.
    - Для каждого $x \in R$ существует противоположный элемент $-x \in R$, такой что $x + (-x) = 0$.
    - Сложение ассоциативно и коммутативно.
2. **Аксиомы умножения ($\cdot$)**:
    - Операция умножения $(x \cdot y)$ определена для всех $x, y \in R$.
    - Существует нейтральный элемент (единица) $1 \in R$, такой что $x \cdot 1 = x$ для любого x.
    - Для каждого $x \neq 0$ существует обратный элемент x^{-1}, такой что $x \cdot x^{-1} = 1$.
    - Умножение ассоциативно и коммутативно.
3. **Аксиомы дистрибутивности**:
    - Операция умножения дистрибутивна относительно сложения: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
4. **Аксиома порядка**:
    - Существует отношение порядка ($>$), которое является транзитивным и сохраняет совместимость с операциями сложения и умножения.
5. **Аксиома полноты (непрерывности)**:
Любое ограниченное сверху множество $A \subseteq R$, не пустое, имеет точную верхнюю грань (супремум) в R.

Непротиворечивость и категоричность аксиоматики вещественных чисел

1. **Непротиворечивость**:
Аксиоматика R непротиворечива, так как в её рамках отсутствуют внутренние логические противоречия. Это обеспечивается благодаря построению моделей вещественных чисел (например, через последовательности Коши или сечения Дедекинда).

2. **Категоричность**:
Все системы, удовлетворяющие данным аксиомам, изоморфны друг другу, что делает аксиоматику вещественных чисел категоричной. Любая модель вещественных чисел обладает одной и той же структурой.

11.Свойства вещественных чисел: следствия аксиом

Следствия аксиом арифметических операций

1. **Единственность нуля**
   В множестве R существует только один элемент 0, который является нейтральным относительно сложения.
   Доказательство:
   Пусть 0_1 и 0_2 — нейтральные элементы. Тогда:

   $$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

2. **Единственность противоположного элемента**
   Для любого числа $x \in R$ существует единственный противоположный элемент $-x$, такой что $x + (-x) = 0$.
   Доказательство:
   Пусть $-x_1$ и $-x_2$ — противоположные элементы. Тогда:

   $$x + (-x_1) = 0, x + (-x_2) = 0.$$

   Следовательно:

   $$(-x_1) + x + (-x_2) = (-x_1) + 0 = -x_1.$$

   Также:

   $$(-x_1) + x + (-x_2) = 0 + (-x_2) = -x_2.$$

   Значит, $-x_1 = -x_2$.

3. **Уравнение** $a + x = b$
   Для любого $a, b \in R$ существует единственное $x \in R$, удовлетворяющее $a + x = b$.
   Доказательство:
   Положим $x = b + (-a)$. Тогда:

   $$a + x = a + \big(b + (-a)\big) = \big(a + (-a)\big) + b = 0 + b = b.$$

Следствия аксиом порядка

1. **Три исключающих друг друга возможности**
   Для любых $x, y \in R$ справедливо одно из трёх отношений:

   $$x < y, x = y, x > y.$$

   Доказательство:
   Следует из аксиом транзитивности и полноты порядка.

2. **Транзитивность строгого неравенства**
   Если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.
   Доказательство:
   Из определения $x < y$ следует $x \leq y$ и $x \neq y$. Аналогично $y \leq z$ и $y \neq z$. Сложение этих отношений даёт $x \leq z$ и $x \neq z$, значит $x < z$.

3. **Сложение сохраняет неравенство**
   Если $x < y$, то для любого z:

   $x + z < y + z$.

   Доказательство:
   Пусть $x < y$, тогда $y - x > 0$. Добавляя z к обеим частям, получаем:

   $(y - x) + z > z$.

4. **Умножение сохраняет знак**
   Если $x > 0$ и $y > 0$, то $x \cdot y > 0$.
   Доказательство:
   По определению положительных чисел $(0 < x)$, $x \cdot y$ определяется как сумма x, повторённая y-раз. Каждое слагаемое положительно, значит произведение тоже положительно.

10Свойства: связь порядка со сложением

1. **Неравенство сохраняется при сложении одинакового числа с обеих сторон**:
   Если $x < y$, то для любого $z \in R$:

   $x + z < y + z$.

   Доказательство:
   Пусть $x < y$, тогда $y - x > 0$. Добавляя z к обеим частям, получаем:

   $\left. (y - x) + z > z\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}y + z > x + z. \right.$

2. **Сложение числа с собой сохраняет равенство**:
   Если $x = y$, то $x + z = y + z$ для любого z.
   Доказательство:
   Следует из коммутативности сложения:

   $\left. x + z = y + z\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}z + x = z + y. \right.$

Свойства: связь порядка с умножением

1. **Умножение положительного числа сохраняет неравенство**:
   Если $x < y$ и $z > 0$, то:

   $x \cdot z < y \cdot z.$

   Доказательство:
   Пусть $x < y$, тогда $y - x > 0$. Умножим на $z > 0$:

   $\left. (y - x) \cdot z > 0\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}y \cdot z - x \cdot z > 0\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}x \cdot z < y \cdot z. \right.$

2. **Умножение отрицательного числа меняет знак неравенства**:
   Если $x < y$ и $z < 0$, то:

   $x \cdot z > y \cdot z.$

   Доказательство:
   Пусть $x < y$, тогда $y - x > 0$. Умножим на $z < 0$, сохраняя свойства умножения:

   $\left. (y - x) \cdot z < 0\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}y \cdot z - x \cdot z < 0\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}x \cdot z > y \cdot z. \right.$

3. **Умножение числа на 0 аннулирует его**:
   Для любого $x \in R$:

   $x \cdot 0 = 0.$

   Доказательство:
   Следует из распределительного закона:

   $\left. x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}x \cdot 0\operatorname{=0} \right.$

13.Аксиома полноты

Любое непустое множество вещественных чисел $A \subset R$, которое ограничено сверху, имеет точную верхнюю грань ($\sup A$) в R.

Верхняя грань (супремум)

Число M называется **верхней гранью** множества A, если:

a. $\forall x \in A,\ x \leq M,$
b. M является наименьшим из всех таких чисел M. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $x \in A$, такое что $x > M - \varepsilon$.

Если M — верхняя грань A, то пишут $M = \sup A$.

Нижняя грань (инфимум)

Число m называется **нижней гранью** множества A, если:

a. $\forall x \in A,\ x \geq m,$
b. m является наибольшим из всех таких чисел m. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $x \in A$, такое что $x < m + \varepsilon$.

Если m — нижняя грань A, то пишут $m = \inf A$.

Доказательство аксиомы полноты

a. Пусть $A \subset R$ — непустое и ограниченное сверху множество.
b. Рассмотрим множество всех верхних граней $U = \{M \in R \mid x \leq M\ \forall x \in A\}$. U не пусто, так как A ограничено сверху.
c. По аксиоме полноты числового множества, множество U имеет точную нижнюю грань M.
d. Тогда M — супремум A, так как:
    - M — верхняя грань A,
    - Для любого $\varepsilon > 0$ существует $x \in A$, такое что $x > M - \varepsilon$.

Следствия

a. Аналогично доказывается существование нижней грани для любого непустого и ограниченного снизу множества $A \subset R$.
b. Супремум и инфимум являются основой построения вещественных чисел.

x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \implies x \cdot 0 = 0.

14.Индуктивные множества

Множество $M \subset R$ называется **индуктивным**, если выполняются два условия:

1. $1 \in M$ (число 1 принадлежит множеству M),
2. Если $x \in M$, то $x + 1 \in M$ (свойство наследственности).

Натуральные числа

Множество N натуральных чисел определяется как пересечение всех индуктивных подмножеств вещественных чисел:

$$N = \bigcap\{M \subset R \mid M \text{ индуктивно}\}.$$

Свойства натуральных чисел:

1. $1 \in N$.

2. Если $n \in N$, то $n + 1 \in N$.
3. Натуральные числа упорядочены: если $n, m \in N$, то либо $n = m$, либо $n < m$, либо $n > m$.

Принцип математической индукции

Формулировка:
Пусть $P(n)$ — утверждение, зависящее от $n \in N$. Если выполняются два условия:

1. $P(1)$ истинно (база индукции),
2. Для любого $n \in N$, из $P(n)$ следует $P(n + 1)$ (шаг индукции),
   то $P(n)$ истинно для всех $n \in N$.

Доказательство принципа индукции:
Принцип индукции непосредственно следует из определения натуральных чисел как минимального индуктивного множества.

- Пусть множество $S = \{n \in N \mid P(n) \text{ истинно}\}$.
- Докажем, что $S = N$.
  a. $1 \in S$ (база индукции).
  b. Если $n \in S$, то $n + 1 \in S$ (шаг индукции).
- Так как N минимально среди всех индуктивных множеств, $S = N$.

Свойства натуральных чисел

1. **Законы сложения:**
   - Ассоциативность: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   - Коммутативность: $a + b = b + a$.
   - Нейтральность 0: $a + 0 = a$.
2. **Законы умножения:**
   - Ассоциативность: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
   - Коммутативность: $a \cdot b = b \cdot a$.
   - Нейтральность 1: $a \cdot 1 = a$.
3. **Распределительный закон:**

   $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.
4. **Отсутствие делителей нуля:**
   Если $a \cdot b = 0$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.

15.Целые числа и их свойства

Множество целых чисел обозначается Z и определяется как расширение натуральных чисел N добавлением противоположных элементов. Для каждого $n \in N$ существует $-n \in Z$, называемое противоположным числом, причём:

$$n + (-n) = 0.$$

Свойства целых чисел:

1. **Законы сложения:**
   - Коммутативность: $a + b = b + a$.
   - Ассоциативность: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   - Существование противоположного: $a + (-a) = 0$.
2. **Законы умножения:**
   - Коммутативность: $a \cdot b = b \cdot a$.
   - Ассоциативность: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
   - Нейтральный элемент: $a \cdot 1 = a$.
3. **Распределительный закон:**

   $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Рациональные и иррациональные числа

1. **Рациональные числа (Q):**
   Это числа, представимые в виде отношения двух целых чисел:

   $Q = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in Z,\, q \in N\right\}$.

   Рациональные числа замкнуты относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на 0).

2. **Иррациональные числа:**
   Это вещественные числа, которые не являются рациональными. Они не могут быть представлены в виде отношения двух целых чисел.

Существование и иррациональность квадратного корня из 2

Существование $\sqrt{2}$:

По аксиоме полноты вещественных чисел существует точная верхняя грань множества:

$$A = \{x \in Q \mid x^2 < 2\}.$$

Эта точная верхняя грань является $\sqrt{2}$.

Иррациональность $\sqrt{2}$:

Доказательство (от противного):

1. Предположим, что $\sqrt{2}$ рационально. Тогда $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, где $p, q \in Z$, $q > 0$, и дробь несократима.
2. Тогда: $\left. \sqrt{2} = \frac{p}{q}\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}2 = \frac{p^{2}}{q^{2}}\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}p^{2} = 2q^{2}. \right.$ Значит, p^2 — чётное, что влечёт чётность p ($p = 2k$ для некоторого $k \in Z$).
3. Подставляем $p = 2k$ в уравнение: $\left. (2k)^{2} = 2q^{2}\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}4k^{2} = 2q^{2}\text{\:\,}\Longrightarrow\text{\:\,}q^{2} = 2k^{2}. \right.$ Значит, q^2 также чётно, что влечёт чётность q.
4. Но если p и q чётны, то дробь $\frac{p}{q}$ сократима, что противоречит предположению.

Вывод: $\sqrt{2}$ иррационально.

16.Принцип Архимеда и его следствия

1. В любом непустом ограниченном сверху подмножестве множества натуральных чисел имеется максимальный элемент.

Доказательство:
Пусть $E \subset N$ — непустое ограниченное сверху множество. По лемме о верхней грани, существует $\sup E = s$.
По определению верхней грани, в E найдётся натуральное число $n \in E$, удовлетворяющее:

$$s - 1 < n \leq s.$$

Тогда $n = \max E$, поскольку для всех $m \in N$, таких что $m > n$, выполняется $m \geq n + 1 > s$, и $m \notin E$.

---

2. Множество натуральных чисел N не ограничено сверху.

Доказательство:
Предположим противное: существует максимальное натуральное число $n \in N$. Однако $n + 1 > n$, что противоречит предположению. Следовательно, N не ограничено сверху.

---

3. В любом непустом ограниченном сверху подмножестве множества целых чисел имеется максимальный элемент.

Доказательство:
Доказательство повторяет пункт 1, заменяя множество N на Z.

---

4. В любом непустом ограниченном снизу подмножестве множества целых чисел имеется минимальный элемент.

Доказательство:
Доказательство аналогично пункту 1, но вместо верхней грани используется лемма о нижней грани, и рассматриваются элементы с условием $n - 1 < m \leq n$.
Также можно перейти к противоположным числам (заменить знак) и использовать доказанный пункт 3.

---

5. Множество целых чисел Z не ограничено ни сверху, ни снизу.

Доказательство:
Следует из пунктов 3 и 4. Если бы множество Z было ограничено сверху (или снизу), это противоречило бы существованию максимального или минимального элемента.

---

6. Принцип Архимеда

Формулировка:
Для любого положительного числа $h > 0$ и любого вещественного числа $x \in R$ существует единственное целое число $k \in Z$, такое что:

$$(k - 1)h \leq x < kh.$$

Доказательство:
Множество:

$$E = \{n \in Z \mid nh > x\}$$

непусто (так как Z не ограничено снизу) и ограничено снизу (так как $nh > x$ для больших отрицательных n). По пункту 4, E имеет минимальный элемент k, что даёт:

$$(k - 1)h \leq x < kh.$$

Единственность k следует из уникальности минимального элемента в E.

Следствия принципа Архимеда

1. **Множество N не ограничено сверху.**
   Следствие уже доказано в пункте 2.

2. **Существует рациональное число между любыми двумя вещественными числами.**
   Доказательство:
   Пусть $a, b \in R$, $a < b$. Выберем $n \in N$, такое что:

$$0 < \frac{1}{n} < b - a.$$

Тогда по принципу Архимеда существует $m \in Z$, такое что:

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Число $\frac{m}{n}$ является искомым рациональным числом.

1. **Существует единственное целое число k, такое что $k \leq x < k + 1$.**
   Доказательство:
   Следует непосредственно из принципа Архимеда, если выбрать $h = 1$.

2. **Целая и дробная часть вещественного числа.**
   Для любого $x \in R$ существует разложение:

$$x = [x] + \{x\},$$

где:

$$[x] \in Z, 0 \leq \{x\} < 1.$$

Число $[x]$ — целая часть x, а $\{x\}$ — дробная часть x.

17.Геометрическая интерпретация множества действительных чисел

Множество действительных чисел R интерпретируется геометрически как **прямая**, называемая **вещественной числовой осью**.

- Каждому числу $x \in R$ соответствует единственная точка на прямой.
- Расположение точек определяется отношением порядка: если $x < y$, то точка x лежит левее точки y.
- Расстояние между двумя точками соответствует разности модулей: $| x - y |$ (мера расстояния между числами x и y).

Виды числовых промежутков

Числовые промежутки — это подмножества R, имеющие вид **интервалов**. Основные виды:

1. **Открытый интервал (a, b):**

   $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$.

   Концы a, b не принадлежат интервалу.

2. **Закрытый интервал $[a, b]$:**

   $[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$.

   Концы a, b принадлежат интервалу.

3. **Полуинтервалы:**

   - Левосторонний открытый: $(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$.
   - Правосторонний открытый: $[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$.

4. **Бесконечные интервалы:**

   - $(a, +\infty)$: $x > a$,
   - $(-\infty, b)$: $x < b$,
   - $[a, +\infty)$: $x \geq a$,
   - $(-\infty, b]$: $x \leq b$.

5. **Вся числовая ось:**

   $(-\infty, +\infty) = R$.

Понятие окрестности точки

Пусть $x_0 \in R$.

1. **Окрестностью точки** x_0 радиуса $\varepsilon > 0$ называется множество:

   $U(x_0, \varepsilon) = \{x \in R \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$.

   Геометрически это интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

2. **Проколотая окрестность точки:**
   Если точка x_0 исключается из окрестности, то получаем:

   $U'(x_0, \varepsilon) = \{x \in R \mid 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Замечания:

- Любая точка x_0 принадлежит своей окрестности $U(x_0, \varepsilon)$.

- Проколотая окрестность полезна для изучения пределов, так как исключает саму точку x_0, чтобы сосредоточиться на её окружении.

18. **Вычислительные аспекты операций с действительными числами**

При работе с действительными числами в вычислительной математике возникает необходимость учитывать погрешности, которые возникают вследствие:

- ограниченной точности представления чисел в компьютере (числа записываются с конечным числом знаков после запятой),
- арифметических операций (ошибки округления).

Пример представления числа

Если число x представлено в виде $\tilde{x}$, где $\tilde{x} = x + \delta_x$, то δ_x называется **абсолютной погрешностью**, а $\frac{\delta_x}{x}$ — **относительной погрешностью**.

Погрешности арифметических операций

Пусть два числа x и y имеют абсолютные погрешности δ_x и δ_y, то есть их приближённые значения:

$$\tilde{x} = x + \delta_x, \tilde{y} = y + \delta_y.$$

Сложение и вычитание

Для операции сложения $z = x + y$:

$$\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y} = (x + \delta_x) + (y + \delta_y) = (x + y) + (\delta_x + \delta_y).$$

Абсолютная погрешность суммы равна:

$$\delta_z = \delta_x + \delta_y.$$

Для вычитания $z = x - y$:

$$\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y} = (x + \delta_x) - (y + \delta_y) = (x - y) + (\delta_x - \delta_y).$$

Абсолютная погрешность разности равна:

$$\delta_z = \delta_x - \delta_y.$$

Умножение

Для операции умножения $z = x \cdot y$:

$$\tilde{z} = \tilde{x} \cdot \tilde{y} = (x + \delta_x)(y + \delta_y) = xy + x\delta_y + y\delta_x + \delta_x\delta_y.$$

Пренебрегая малым членом $\delta_x \delta_y$, имеем:

$$\delta_z \approx x\delta_y + y\delta_x.$$

Относительная погрешность произведения:

$$\frac{\delta_z}{z} \approx \frac{\delta_x}{x} + \frac{\delta_y}{y}.$$

Деление

Для операции деления $z = \frac{x}{y}$:

$$\tilde{z} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = \frac{x + \delta_x}{y + \delta_y}.$$

Используя разложение в ряд Тейлора и пренебрегая малыми членами, получаем:

$$\delta_z \approx \frac{\delta_x}{y} - \frac{x\delta_y}{y^2}.$$

Относительная погрешность деления:

$$\frac{\delta_z}{z} \approx \frac{\delta_x}{x} + \frac{\delta_y}{y}.$$

Доказательство закона накопления погрешности

Каждая арифметическая операция добавляет свою погрешность, которая накапливается в результате последовательных вычислений. Например, при вычислении суммы нескольких чисел $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, абсолютная погрешность результата равна:

$$\delta_S = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}.$$

Для относительных погрешностей накопление происходит мультипликативно при операциях умножения и деления.

Вывод: Для снижения влияния погрешностей следует использовать методы численного анализа, такие как сокращение числа операций, применение более точных алгоритмов, а также правильное округление на каждом этапе вычислений.

18.Теорема Коши-Кантора

Для любой последовательности вложенных отрезков $I_1, I_2, \ldots, I_n$ найдётся такая точка $c \in R$, принадлежащая всем этим отрезкам. Если известно, что для любого $\epsilon > 0$ в последовательности можно найти отрезок I_k, длина которого $|I_k| > \epsilon$, то c — единственная общая точка всех отрезков.

Доказательство:
Заметим, что для любых двух отрезков $I_m = [a_m, b_m]$, $I_n = [a_n, b_n]$ из нашей последовательности выполняется $b_n \geq a_n$. В противном случае мы бы получили $a_n \leq b_n < a_m \leq b_m$, т. е. отрезки I_m и I_n не пересекались бы, а по условию наибольший должен содержаться в другом.

Таким образом, для числовых множеств $A = \{a_m : m \in N\}$, $B = \{b_n : n \in N\}$, выполнены условия аксиомы полноты, согласно которой найдётся число $c \in R$, такое что для любого $a_m \in A$ и $b_n \in B$ выполняется $a_m \leq c \leq b_n$. В частности, $a_n \leq c \leq b_n$ для любого $n \in N$, т. е. c принадлежит всем отрезкам I_n из нашей последовательности.

Пусть теперь c_1 и c_2 — две точки, содержащиеся во всех отрезках I_n. Если $c_1 \neq c_2$, и, например, $c_1 < c_2$, то при любом $n \in N$ имеем:

$$a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n ,$$

поэтому $0 < c_2 - c_1 \leq b_n - a_n$, и длина каждого отрезка из нашей последовательности не может быть меньше строго положительного числа $c_2 - c_1$. А это противоречит тому, что в последовательности по условию могут быть отрезки сколь угодно малой длины.

Вывод: $c_1 = c_2$.

19.Лемма о конечном покрытии (принцип Бореля – Лебега)

Подсистема — подмножество множества S, являющееся системой множеств.

Лемма: В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, найдётся конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

Доказательство: Пусть $S = \{U_\alpha\}$ — система интервалов, покрывающая отрезок $I_1 = [a, b]$. (Доказательство от противного.)

Если бы отрезок I_1 не допускал покрытия конечным набором интервалов системы S, то, разделив I_1 пополам, мы получили бы, что по крайней мере один из его половин, который мы обозначим I_2, тоже не допускает конечного покрытия. С I_2 проделаем ту же самую операцию, получим отрезок I_3 и так далее. Таким образом, возникает последовательность вложенных отрезков $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$, не допускающая конечного покрытия интервалами системы S.

Поскольку длина отрезка, полученного на n-м шаге, по построению равна $|I_n| = |I_1| \cdot 2^{-n}$, то в последовательности (I_n) есть отрезки сколь угодно малой длины. По лемме о вложенных отрезках существует точка $c \in \bigcap_{n \in N} I_n$.

Поскольку $c \in I_1 = [a, b]$, то найдётся интервал $U = (\alpha, \beta) \in S$, такой что $\alpha < c < \beta$ (такой интервал найдётся по определению покрывающей системы S).

Пусть $\varepsilon = min(c - \alpha, \beta - c)$ — это расстояние от c до края интервала U. Найдётся в построенной последовательности такой отрезок I_n, что $|I_n| < \varepsilon$. Поскольку $c \in I_n$ и $|I_n| < \varepsilon$, то $I_n \subseteq U = (\alpha, \beta)$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть (согласно нашему допущению) конечным набором интервалов системы S.

Вывод: Полученное противоречие показывает, что наше первоначальное предположение было неверным. Следовательно, отрезок I_1 может быть покрыт конечным набором интервалов из системы S.

20.Лемма о предельной точке (принцип Больцано – Вейерштрасса)

Точка $p \in R$ называется **предельной точкой** множества $X \subseteq R$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества X.

Лемма: Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет по крайней мере одну предельную точку.

Доказательство: Пусть $X \subseteq R$ — данное подмножество. Из определения ограниченности множества X следует, что существует отрезок $I = [a, b] \subseteq R$, такой что $X \subseteq I$.

Покажем, что по крайней мере одна из точек отрезка I является предельной для множества X. (Доказательство от противного.)

Если бы это было не так, то каждая точка $x \in I$ имела бы окрестность $U(x)$, в которой либо нет точек множества X, либо их конечное число. Совокупность $\{U(x)\}$ таких окрестностей, построенных для каждой точки $x \in I$, образует покрытие отрезка I интервалами $U(x)$.

По лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему интервалов $U(x_1),\ldots,U(x_n)$, покрывающую отрезок I. Но поскольку $I \subseteq R$, эта же система покрывает всё множество X. Однако в каждом интервале $U(x_i)$ только конечное число точек множества X, а значит и в их объединении также будет конечное число точек множества X. Это противоречит тому, что X является бесконечным множеством.

Следовательно, наше предположение неверно, и в отрезке I есть предельные точки множества X.

22.Множество называется **счётным**, если оно равномощно множеству натуральных чисел N, то есть их кардинальные числа совпадают ($\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, N$).

Свойства счётных множеств:

1.

Свойство 1: Бесконечное подмножество счётного множества также счётно.

Доказательство:
Пусть X — счётное множество. Это значит, что существует биекция $f: N \to X)$. Пусть $E \subseteq X$ — бесконечное подмножество. Необходимо доказать, что E тоже счётно.

a. Поскольку E бесконечно, для каждого натурального числа n найдётся элемент $f(n) \in E$.
b. Определим отображение $g: N \to E)$ следующим образом:
   - $g(1)$ — это наименьший индекс k, такой что $f(k) \in E$.
   - $g(2)$ — это наименьший индекс $k > g(1)$, такой что $f(k) \in E$, и так далее.

Таким образом, функция g является инъекцией из N в E, а поскольку g покрывает все элементы E, она также сюръективна. Следовательно, g — биекция, и E счётно.

Свойство 2: Объединение конечного или счётного числа счётных множеств счётно.

Доказательство:

Пусть имеется последовательность счётных множеств $X_1, X_2, \ldots$. Для каждого множества X_i существует биекция $f_i : N \to X_i)$. Необходимо доказать, что объединение всех X_i счётно.

a. Определим отображение $g : N \times N \to X)$:
   - Пара (i, j) переходит в элемент $f_i(j)$, то есть $g(i, j) = f_i(j)$, где i указывает номер множества, а j — индекс внутри множества X_i.

b. g определяет отображение из декартова произведения $N \times N$ в X. Поскольку $N \times N$ равномощно N (известный результат), множество X также равномощно N.

c. Таким образом, X счётно.

23.Примеры счётных множеств и их мощность

1. Множество рациональных чисел Q

Утверждение: Множество рациональных чисел Q счётно.

Доказательство:

Рациональные числа можно записать в виде дробей $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$ (целое число), а $q \in N$.

- Каждое рациональное число может быть представлено как пара целых чисел (p, q).
- Множество всех пар целых чисел $Z \times N$ счётно, так как его можно упорядочить с помощью метода, аналогичного методу пересчёта натуральных чисел.

Мы можем организовать все рациональные числа в таблицу, где строки будут соответствовать числителям, а столбцы знаменателям. После этого можно пройтись по всей таблице зигзагообразно, начиная с первой строки и первого столбца. Такой способ упорядочивания даёт биекцию с множеством натуральных чисел, и таким образом, множество Q счётно.

Следовательно, **мощность множества рациональных чисел** равна мощности множества натуральных чисел N, то есть $\text{card}\, Q = \aleph_0$.

---

2. Множество алгебраических чисел

Утверждение: Множество алгебраических чисел счётно.

Доказательство:
Алгебраические числа — это числа, являющиеся корнями полинома с целыми коэффициентами. То есть число x является алгебраическим, если существует полином:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in Z$ и $a_n \neq 0$.

1. Множество всех полиномов с целыми коэффициентами счётно, так как каждый полином можно представить как конечную последовательность целых чисел.
2. Множество всех возможных корней этих полиномов также счётно, поскольку для каждого полинома существует конечное количество корней.

Таким образом, множество всех алгебраических чисел можно представить как объединение счётных множеств корней различных полиномов, а объединение счётного числа счётных множеств остаётся счётным.

Следовательно, **мощность множества алгебраических чисел** также равна $\aleph_0$.

Примеры счётных множеств

Определение: Множество называется **счётным**, если оно либо конечное, либо существует биекция между этим множеством и множеством натуральных чисел N. То есть множество счётно, если его элементы можно пронумеровать, то есть поставить в соответствие с натуральными числами.

1. Множество натуральных чисел N

Очевидно, что множество $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ счётно, поскольку оно само является базовым примером счётного множества.

2. Множество целых чисел Z

Множество целых чисел $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ также счётно.
Чтобы это доказать, достаточно построить биекцию между Z и N. Например, можно упорядочить элементы множества Z чередующимися чётными и нечётными числами: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$, и поставить их в соответствие с натуральными числами.

3. Множество чётных чисел

Множество чётных чисел $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ счётно, так как его элементы можно однозначно отобразить на натуральные числа с помощью биекции $f(n) = 2n$, где $n \in N$.

4. Множество рациональных чисел Q

Как уже было показано, множество рациональных чисел Q счётно. Каждое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p — целое число, а q — натуральное число. Множество таких пар целых чисел и натуральных чисел счётно, и можно построить биекцию между Q и N.

5. Множество алгебраических чисел

Множество алгебраических чисел, то есть чисел, являющихся корнями полиномов с целыми коэффициентами, также счётно. Это множество может быть представлено как объединение счётного числа счётных множеств (корней каждого полинома), и таким образом оно счётно.

6. Множество всех конечных строк из символов алфавита

Множество всех строк конечной длины, составленных из символов некоторого алфавита Σ (например, $\Sigma = \{a, b\}$), также счётно. Каждую строку можно закодировать как последовательность чисел, что позволяет установить биекцию с натуральными числами.

7. Множество всех подмножеств множества натуральных чисел (конечные подмножества)

Множество всех конечных подмножеств натуральных чисел N счётно. Для каждого конечного подмножества $A \subseteq N$ можно найти его индекс в каком-либо фиксированном порядке, и таким образом установить биекцию с N.

24.Мощность континуума и теорема Кантора

Мощность континуума

Множество R действительных чисел называется **числовым континуумом**, а его мощность обозначается как **мощность континуума**.

Теорема Кантора

Формулировка:
$\text{card}\, N < \text{card}\, R$.
Теорема утверждает, что множество R имеет мощность, большую, чем множество N.

Доказательство :
Рассмотрим множество точек отрезка $[0,1]$. Предположим, что оно счётно, то есть точки можно записать в виде последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

1. Зафиксируем точку x_1 и выберем на отрезке $[0,1]$ подотрезок I_1 ненулевой длины, не содержащий x_1.
2. В отрезке I_1 строим подотрезок I_2, не содержащий x_2, и так далее. Если уже построен отрезок I_n, то, поскольку его длина $|I_n|>0$, в нём можно построить подотрезок I_{n+1}, не содержащий точки x_{n+1}.
3. По **лемме о вложенных отрезках** найдётся точка c, принадлежащая всем отрезкам $I_1, I_2, \dots$.

Однако, по построению, эта точка c не совпадает ни с одной точкой из последовательности $x_1, x_2, \dots$. Это противоречие доказывает, что множество точек отрезка $[0,1]$ несчётно. Следовательно, мощность множества R больше мощности множества N.

Следствия

1. $Q \neq R$: существует множество иррациональных чисел.

2. Существуют трансцендентные числа, так как множество алгебраических чисел счётно.

25.Предел последовательности: Определения и примеры

Определение предела последовательности

Определение 1 (Предел последовательности):
Число A называется пределом последовательности (a_n) при $n \to \infty)$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство:

$$|a_n - A| < \epsilon.$$

Это означает, что члены последовательности a_n могут быть сколь угодно близки к числу A, начиная с некоторого индекса N.

Пример 1: Предел последовательности $\frac{1}{n}$

Теорема: Предел последовательности $a_n = \frac{1}{n}$ равен 0.

Доказательство:
Пусть $\epsilon > 0$. Необходимо найти N, такое что для всех $n > N$ выполняется:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Очевидно, что для того, чтобы $\frac{1}{n} < \epsilon$, достаточно выбрать N такое, что:

$$n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Пусть $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} ¿¿$ — наименьшее целое число, которое больше или равно $\frac{1}{\epsilon}$.
Тогда для всех $n > N$ выполняется:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\lceil \frac{1}{\epsilon} ¿} ¿¿ \leq \epsilon.$$

Таким образом, $a_n \to 0)$ при $n \to \infty)$. \Box

Пример 2: Предел последовательности $a_n = \frac{1}{n^2}$

Теорема: Предел последовательности $a_n = \frac{1}{n^2}$ равен 0.

Доказательство:
Пусть $\epsilon > 0$. Необходимо найти N, такое что для всех $n > N$ выполняется:

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \epsilon.$$

Очевидно, что для того, чтобы $\frac{1}{n^2} < \epsilon$, достаточно выбрать N такое, что:

$$n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Пусть $N = \lceil \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} ¿¿$. Тогда для всех $n > N$ выполняется:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{\lceil \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} ¿¿} ¿^2 ¿ \le \epsilon.$$

Таким образом, $a_n \to 0)$ при $n \to \infty)$. \Box

Пример 3: Предел последовательности $a_n = (-1)^n$

Теорема: Последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела.

Доказательство:
Для доказательства, что последовательность не имеет предела, достаточно показать, что не существует такого числа A, что для всех $\epsilon > 0$ существует N, при котором для всех $n > N$ выполняется $|a_n - A| < \epsilon$.

Для $a_n = (-1)^n$ последовательность принимает два значения: 1 для чётных n и -1 для нечётных n. Положим, что существует предел A. Тогда, для любого $\epsilon > 0$, мы должны найти N, при котором:

$$|(-1)^n - A| < \epsilon.$$

Если $A = 1$, то для всех нечётных n выполняется:

$$|(-1)^n - 1| = 2 < ❑́ \epsilon \text{ для любого} \epsilon < 2.$$

Аналогично, если $A = -1$, то для всех чётных n выполняется:

$|(-1)^n+1|=2<\epsilon$ для любого $\epsilon<2$.

Таким образом, для любого A последовательность $(-1)^n$ не может сходиться. Следовательно, предел не существует.

26.Общие свойства предела последовательности. Предельный переход в неравенствах.

1. **Постоянная последовательность** — последовательность, которая принимает только одно значение для всех n. То есть, если $x_n=A$ для всех n, то последовательность называется постоянной.
2. **Финальнопостоянная последовательность** — последовательность, которая становится постоянной начиная с некоторого номера N. То есть, существует число A, что $x_n=A$ при всех $n>N$.

Последовательность (x_n) называется ограниченной, если существует число M, такое что для всех n выполняется $|x_n|\le M$.

Теорема 1. Свойства сходящейся последовательности

a) Финально постоянная последовательность сходится.

Доказательство: Если существует номер N, такой что для всех $n>N$ выполняется $x_n=A$, то последовательность x_n является постоянной с A, и, следовательно, её предел равен A. То есть:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=A.$$

b) Любая окрестность предела последовательности содержит все члены последовательности, за исключением конечного их числа.

Доказательство: По определению предела для $\lim_{n\to\infty} x_n=A$ для любого $\epsilon>0$ существует номер N, что для всех $n>N$ выполняется:

$$|x_n-A|<\epsilon.$$

Это означает, что начиная с некоторого N, все элементы последовательности x_n будут лежать внутри окрестности $V(A, \epsilon)$ точки A.

c) Последовательность не может иметь двух различных пределов.

Доказательство: Предположим, что $\lim ¿_{n \to \infty} x_n = A_1 ¿$ и $\lim ¿_{n \to \infty} x_n = A_2 ¿$, где $A_1 \neq A_2$.
Возьмём окрестности $V(A_1)$ и $V(A_2)$ точек A_1 и A_2. Эти окрестности можно выбрать такими, что они не пересекаются, например, $V(A_1, \epsilon) \cap V(A_2, \epsilon) = \varnothing$, где $\epsilon = \frac{1}{2} |A_1 - A_2|$.
По определению предела существует N_1 и N_2, такие что для всех $n > N_1$ $x_n \in V(A_1)$, а для всех $n > N_2$ $x_n \in V(A_2)$.
Пусть $N = max(N_1, N_2)$, тогда для всех $n > N$ мы получаем, что x_n одновременно находится в двух непересекающихся окрестностях, что невозможно.
Следовательно, $A_1 = A_2$, и предел последовательности (x_n) существует и единственен.

d) Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство: Если $\lim ¿_{n \to \infty} x_n = A ¿$, то для любого $\epsilon > 0$ существует N, такое что для всех $n > N$ выполняется $|x_n - A| < \epsilon$.
Таким образом, для всех $n > N$:

$$|x_n| \leq |x_n - A| + |A| < \epsilon + |A|.$$

Пусть $M = max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, \epsilon + |A|)$. Тогда для всех n выполняется $|x_n| \leq M$, что означает, что последовательность (x_n) ограничена.

Теорема 3. Пределы и неравенства

a) Пусть (x_n) и (y_n) — две сходящиеся последовательности, при этом $\lim ¿_{n \to \infty} x_n = A ¿$ и $\lim ¿_{n \to \infty} y_n = B ¿$. Если $A < B$, то найдется номер N, такой что для всех $n > N$ выполняется $x_n < y_n$.

Доказательство: Пусть $A < B$, и пусть C — число, такое что $A < C < B$. По определению предела для последовательности (x_n), найдется N_1, такое что для всех $n > N_1$ выполняется $x_n < C$.
Также, по определению предела для последовательности (y_n), найдется N_2, такое что для всех $n > N_2$ выполняется $y_n > C$.

Пусть $N = max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n > N$ выполняется $x_n < C < y_n$, что означает $x_n < y_n$.

b) Пусть последовательности (x_n), (y_n) и (z_n) таковы, что для всех n выполняется $x_n \leq y_n \leq z_n$, и если $\lim ¿_{n \to \infty} x_n = A ¿$ и $\lim ¿_{n \to \infty} z_n = A ¿$, то последовательность (y_n) также сходится к A.

Доказательство: Пусть $\lim ¿_{n \to \infty} x_n = A ¿$ и $\lim ¿_{n \to \infty} z_n = A ¿$. По определению предела для любого $\epsilon > 0$ найдутся такие N_1 и N_2, что для всех $n > N_1$:

$$|x_n - A| < \frac{\epsilon}{2},$$

и для всех $n > N_2$:

$$|z_n - A| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Пусть $N = max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n > N$ имеем:

$$A - \frac{\epsilon}{2} < x_n \leq y_n \leq z_n < A + \frac{\epsilon}{2}.$$

Следовательно, $|y_n - A| < \epsilon$, и $\lim ¿_{n \to \infty} y_n = A ¿$.

Заключение

1. **Финально постоянная последовательность** всегда сходится.
2. **Сходящаяся последовательность** всегда ограничена.
3. **Последовательность не может иметь двух различных пределов**.
4. **Предельный переход в неравенствах**: если $\lim ¿_{n \to \infty} x_n = A ¿$ и $\lim ¿_{n \to \infty} y_n = B ¿$, и $A < B$, то для $n > N$ выполняется $x_n < y_n$.

27.Предельный переход и арифметические операции.

1. Линейность предела

Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся к пределам A и B соответственно, то для любой константы c выполняются следующие равенства:

- $\lim ¿_{n \to \infty} (x_n + y_n) = A + B ¿$,

- $\lim ¿_{n\to\infty}\left(c\cdot x_n\right)=c\cdot A¿$.

Доказательство:

1. **Сумма**: Пусть $\lim ¿_{n\to\infty}x_n=A¿$ и $\lim ¿_{n\to\infty}y_n=B¿$. Для любого $\epsilon>0$ существует N_1, такое что для всех $n>N_1$:

   $|x_n-A|<\frac{\epsilon}{2},$

   и существует N_2, такое что для всех $n>N_2$:

   $|y_n-B|<\frac{\epsilon}{2}.$

   Пусть $N=max\left(N_1,N_2\right)$. Тогда для всех $n>N$:

   $|\left(x_n+y_n\right)-\left(A+B\right)|=|\left(x_n-A\right)+\left(y_n-B\right)|\le|x_n-A|+|y_n-B|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$

   Следовательно, $\lim ¿_{n\to\infty}\left(x_n+y_n\right)=A+B¿$.

2. **Умножение на константу**: Пусть $\lim ¿_{n\to\infty}x_n=A¿$ и c — константа. Для любого $\epsilon>0$ существует N, такое что для всех $n>N$:

   $|x_n-A|<\frac{\epsilon}{|c|}.$

   Тогда для всех $n>N$:

   $|c\cdot x_n-c\cdot A|=|c|\cdot|x_n-A|<|c|\cdot\frac{\epsilon}{|c|}=\epsilon.$

   Следовательно, $\lim ¿_{n\to\infty}\left(c\cdot x_n\right)=c\cdot A¿$.

---

2. Предел произведения

Если $\lim ¿_{n\to\infty}x_n=A¿$ и $\lim ¿_{n\to\infty}y_n=B¿$, то:

$\lim_{n\to\infty}\left(x_n\cdot y_n\right)=A\cdot B.$

Доказательство: Для любого $\epsilon>0$ найдём такие N_1 и N_2, что для всех $n>N_1$:

$|x_n-A|<\frac{\epsilon}{2|B|},$

и для всех $n>N_2$:

$|y_n-B|<\frac{\epsilon}{2|A|}.$

Пусть $N=max(N_1,N_2)$. Тогда для всех $n>N$:

$|x_n\cdot y_n-A\cdot B|=|x_n\cdot y_n-A\cdot y_n+A\cdot y_n-A\cdot B|\leq|y_n|\cdot|x_n-A|+|A|\cdot|y_n-B|.$

Поскольку $|x_n|$ и $|y_n|$ ограничены для всех n при $n>N$, можно сделать вывод, что $|x_n\cdot y_n-A\cdot B|<\epsilon$.

Следовательно, $\lim ¿_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B¿$.

---

3. Предел частного

Если $\lim ¿_{n\to\infty}x_n=A¿$ и $\lim ¿_{n\to\infty}y_n=B¿$, и $B\neq 0$, то:

$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{y_n}=\frac{A}{B}.$

Доказательство: Предположим, что $B\neq 0$. Для любого $\epsilon>0$ найдём такие N_1 и N_2, что для всех $n>N_1$:

$|x_n-A|<\frac{\epsilon}{2|B|},$

и для всех $n>N_2$:

$|y_n-B|<\frac{\epsilon}{2|A|}.$

Пусть $N=max(N_1,N_2)$. Тогда для всех $n>N$:

$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{x_n\cdot B-A\cdot y_n}{y_n\cdot B}\right|=\frac{|B\cdot(x_n-A)-A\cdot(y_n-B)|}{|y_n\cdot B|}.$

Поскольку $|x_n|$ и $|y_n|$ ограничены, можно подобрать N, чтобы $\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}\right|<\epsilon$.

Таким образом, $\lim ¿_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{A}{B}¿$.

---

4. Теорема о предельном переходе в неравенствах

а) Если $\lim \text{¿}_{n\to\infty} x_n = A\text{¿}$ *и* $\lim \text{¿}_{n\to\infty} y_n = B\text{¿}$*, и* $A<B$*, то существует такой номер* N*, что для всех* $n>N$ *выполняется* $x_n<y_n$*.*

Доказательство: Пусть $A<B$, тогда существует число C такое, что $A<C<B$. По определению предела для x_n найдётся N_1, такое что для всех $n>N_1$:

$x_n<C.$

По определению предела для y_n найдётся N_2, такое что для всех $n>N_2$:

$y_n>C.$

Пусть $N=max(N_1,N_2)$. Тогда для всех $n>N$ выполняется $x_n<C<y_n$, что и даёт $x_n<y_n$.

28.Критерий Коши существования предела последовательности

Фундаментальная последовательность

Определение:
Последовательность (a_n) называется **фундаментальной** (или **Коши-последовательностью**), если для любого $\epsilon>0$ существует такое натуральное число N, что для всех $m,n>N$ выполняется неравенство:

$|a_n-a_m|<\epsilon.$

Это означает, что элементы последовательности становятся сколь угодно близки друг к другу при достаточно больших номерах n и m. Если последовательность является фундаментальной, то она должна сходиться, то есть иметь предел.

Критерий Коши:

Критерий Коши утверждает, что последовательность (a_n) сходится, если и только если она фундаментальна, т.е. для любого $\epsilon>0$ существует такое натуральное число N, что для всех $m,n>N$ выполняется неравенство:

$|a_n-a_m|<\epsilon.$

Это условие говорит о том, что для достаточно больших индексов члены последовательности становятся сколь угодно близкими друг к другу. То есть последовательность сходится, если её элементы становятся «малыми» по отношению друг к другу при увеличении индекса n.

Доказательство :

1. **Необходимость**:
   Пусть последовательность (a_n) сходится к пределу A. Тогда по определению предела для любого $\epsilon>0$ существует N_1, такое что для всех $n>N_1$ выполняется:

   $|a_n-A|<\frac{\epsilon}{2}.$

   Поскольку $a_m \to A)$, существует N_2, такое что для всех $m>N_2$ выполняется:

   $|a_m-A|<\frac{\epsilon}{2}.$

   Пусть $N=max(N_1,N_2)$. Тогда для всех $n,m>N$ имеем:

   $|a_n-a_m|=|(a_n-A)+(A-a_m)|\leq|a_n-A|+|a_m-A|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$

   Это доказывает, что последовательность удовлетворяет условию Коши.

2. **Достаточность**:
   Пусть для любого $\epsilon>0$ существует N, такое что для всех $m,n>N$ выполняется:

   $|a_n-a_m|<\epsilon.$

   Тогда последовательность (a_n) является фундаментальной (согласуется с определением сходящейся последовательности). Это означает, что существует такой предел A, к которому она сходится.

Примеры применения критерия Коши

Пример 1: Последовательность $a_n=\frac{1}{n}$

Задание: Докажем, что последовательность $a_n=\frac{1}{n}$ сходится.

Доказательство:

1. Для любого $\epsilon>0$ выберем N, такое что для всех $n,m>N$:

$$|a_n - a_m| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| = \frac{|m-n|}{nm} < \epsilon.$$

1. Мы можем найти N, такое что для всех $n, m > N$:

$$\frac{|m-n|}{nm} < \epsilon.$$

1. Если $n \geq N$, то для всех $m > N$ выполняется $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Следовательно, по критерию Коши последовательность (a_n) сходится.

Пример 2: Последовательность $a_n = (-1)^n$

Задание: Докажем, что последовательность $a_n = (-1)^n$ не сходится.

Доказательство:

1. Для того чтобы последовательность $a_n = (-1)^n$ сходилась, она должна удовлетворять критерию Коши. То есть для любого $\epsilon > 0$ должно существовать N, такое что для всех $m, n > N$:

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

1. Рассмотрим $\epsilon = 1$. Для любых n и m, где n и m не одинакового чётного или нечётного знака, выполняется:

$$|a_n - a_m| = 2.$$

Таким образом, последовательность $a_n = (-1)^n$ не удовлетворяет критерию Коши и не сходится.

29.Критерий существования предела монотонной последовательности(Теорема Вейерштрасса) с примером применения

Формулировка:
Для того чтобы неубывающая последовательность (x_n) имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху.

Доказательство теоремы Вейерштрасса

1. **Необходимость**:
   Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому пределу L. Из общих свойств предела последовательности мы знаем, что она ограничена, но для доказательства теоремы Вейерштрасса нас интересует только условие ограниченности сверху.

2. **Достаточность**:
   Пусть последовательность $\{x_n\}$ неубывающая и ограничена сверху. Тогда существует верхняя грань $s = {}^{\{x_n : n \in N\}}$ ¿.

3. **Построение верхней грани**:
   Поскольку $s = {}^{\{x_n\}}$¿, для любого $\epsilon > 0$ существует такой индекс N, что:

   $$s - \epsilon < x_N \leq s.$$

   Поскольку последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, для всех $n \geq N$ выполняется:

   $$x_n \geq x_N.$$

   Таким образом, для всех $n \geq N$ имеем:

   $$s - \epsilon < x_n \leq s.$$

   Это означает, что $|x_n - s| < \epsilon$ для всех $n > N$.

4. **Заключение**:
   Следовательно, $\lim$ ¿$_{n \to \infty} x_n = s$¿, то есть последовательность $\{x_n\}$ сходится к верхней грани s, что и требовалось доказать.

Пример применения теоремы Вейерштрасса

Пример: Рассмотрим последовательность $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

1. **Проверка монотонности**:

   Последовательность $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ монотонно возрастает, так как для всех n выполняется:

   $$x_n = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} = x_{n+1}.$$

2. **Ограниченность сверху**:
   Очевидно, что последовательность ограничена сверху числом 1, поскольку для всех n имеем:

   $$x_n = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

3. **Применение теоремы Вейерштрасса**:
   Так как последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом 1, теорема Вейерштрасса утверждает, что последовательность сходится. Предел этой последовательности равен верхней грани её значений:

   $$\lim_{n \to \infty} x_n = ^{\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in N\right\}} ¿ 1.$$

30.Примеры применения теоремы Вейерштрасса и второй замечательный предел (число e)

1. Пример применения теоремы Вейерштрасса

Пример 1: Рассмотрим последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{n}$.

1. **Монотонность**:
   Последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает, так как для всех n:

   $$x_n = 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} = x_{n+1}.$$

   Таким образом, последовательность монотонно убывает.

2. **Ограниченность**:
   Для всех n имеем:

   $$x_n = 1 + \frac{1}{n} < 2.$$

Следовательно, последовательность ограничена сверху числом 2, а снизу она ограничена 1 (поскольку для всех n, $x_n > 1$).

3. **Применение теоремы Вейерштрасса**:
   Поскольку последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает и ограничена, по теореме Вейерштрасса она обязательно сходится. Найдем её предел.

   Так как $\{x_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу, предел этой последовательности будет равен её нижней грани:

   $$\lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$

---

2. Второй замечательный предел: Число e

Число e — это **основание натурального логарифма**, и оно является одним из наиболее важных чисел в математике. Его можно выразить через предел следующей последовательности:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Доказательство существования предела

1. Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

2. **Монотонность**:
   Мы знаем, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. Это легко показать, используя следующие соотношения:

   $$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

   Это неравенство выполняется, поскольку выражение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ приближается к e с увеличением n, и для всех n последовательность является монотонно возрастающей.

3. **Ограниченность сверху**:
   Существует известное свойство, что для всех n последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ограничена сверху числом e. Это можно доказать с помощью

теоремы Вейерштрасса или через более сложные математические методы.

4. **Применение теоремы Вейерштрасса**:
   Поскольку последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, по теореме Вейерштрасса она обязательно сходится. Следовательно, её предел равен верхней грани множества её значений, то есть числу e:

   $$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

31.Подпоследовательность и частичный предел последовательности

---

1. Подпоследовательность последовательности

Определение:
Подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$ — это множество, которое можно получить из исходной последовательности путём выбора некоторых её членов в том же порядке, но не обязательно подряд. Формально, если $\{a_n\}$ — последовательность, то её Подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ определяется как множество, элементы которого имеют вид a_{n_k}, где n_k — это монотонно возрастающая (или убывающая) последовательность индексов.

Пример:
Если $\{a_n\}$ — последовательность, то последовательность $\{a_{n_k}\}$, где n_k — это строго возрастающая последовательность индексов, например $n_1=1, n_2=3, n_3=5, \ldots$, будет подмножеством $\{a_n\}$.

---

2. Частичный предел последовательности

Определение:
Частичный предел последовательности — это предел её подмножества. Формально, если последовательность $\{a_n\}$ имеет подмножество $\{a_{n_k}\}$, то

частичный предел этой последовательности равен пределу a_{n_k}, то есть $A=\lim ¿_{k\to\infty} a_{n_k} ¿$.

Свойства:

- Если последовательность (a_n) сходится к некоторому пределу A, то все её подмножества также сходятся к A.
- Если последовательность не сходится, то её частичные пределы могут быть различными.

---

3. Лемма Больцано – Вейерштрасса

Лемма Больцано – Вейерштрасса утверждает, что **каждое ограниченное множество** последовательности имеет хотя бы одно **сходящееся подмножество**.

Формулировка:
Пусть последовательность (a_n) ограничена. Тогда существует подмножество (a_{n_k}), которое сходится к некоторому пределу A, то есть:

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=A.$$

Доказательство Леммы Больцано – Вейерштрасса

Доказательство:
Пусть E — множество значений ограниченной последовательности (x_n). Если E конечно, то существуют по крайней мере одна точка $x\in E$ и последовательность номеров $n_1<n_2<\ldots$ такие, что $x_{n_1}=x_{n_2}=\cdots=x$. Подпоследовательность (x_{n_k}) постоянна и, значит, сходится.

Если E бесконечно, то по принципу Больцано — Вейерштрасса оно обладает по крайней мере одной предельной точкой x. Поскольку x — предельная точка E, можно выбрать n_1 так, что $|x_{n_1}-x|<1$. Если $n_k<n_{k+1}$ уже выбраны так, что $|x_{n_k}-x|<\frac{1}{k}$, то, учитывая, что x — предельная точка E, найдем такие n_k, что $n_k<n_{k+1}$ и $|x_{n_k}-x|<\frac{1}{k+1}$.

Поскольку $\lim ¿_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0¿$, построенная подпоследовательность $x_{n_1},x_{n_2},\ldots,x_{n_k},\ldots$ сходится к x. ▫

Пример применения Леммы Больцано – Вейерштрасса

Пример: Рассмотрим последовательность $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

1. **Ограниченность**:
   Последовательность (a_n) ограничена, поскольку для всех n выполняется:

   $|a_n| = |(-1)^n + \frac{1}{n}| \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$

   Следовательно, последовательность ограничена.

2. **Применение леммы Больцано – Вейерштрасса**:
   По лемме Больцано – Вейерштрасса, существует подмножество (a_{n_k}), которое сходится. Рассмотрим два подмножества:

   - Когда n чётное: $a_n = 1 + \frac{1}{n}$,
   - Когда n нечётное: $a_n = -1 + \frac{1}{n}$.

   Каждое из этих подмножеств сходится:

   - Для чётных n, $\lim \text{¿}_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{¿}$,
   - Для нечётных n, $\lim \text{¿}_{n \to \infty} \left(-1 + \frac{1}{n}\right) = -1 \text{¿}$.

Таким образом, последовательность (a_n) имеет два частичных предела: 1 и -1.

32.Верхний и нижний пределы последовательности, их свойства

Определение:
Число $l = liminf_{k \to \infty} x_k$ называется **нижним пределом** последовательности (x_k) и обозначается $liminf_{k \to \infty} x_k$. Если $inf_k x_k = +\infty$, то принято говорить, что нижний предел последовательности равен $+\infty$, и писать $liminf_{k \to \infty} x_k = +\infty$. Если исходная последовательность (x_k) не ограничена снизу, то при любом n будем иметь $inf_k x_k = -\infty$. В этом случае говорят, что нижний предел последовательности равен минус бесконечности, и пишут $liminf_{k \to \infty} x_k = -\infty$.

Аналогично, рассматривая последовательность $s_n = \text{¿}_{k \geq n} x_k$, приходим к определению **верхнего предела** последовательности (x_k).

Определение:
$limsup_{k\to\infty} x_k := \lim ¿_{n\to\infty} ¿_{k\geq n} x_k ¿$ называется **верхним пределом** последовательности (x_k).

Лемма 1:
Нижний и верхний пределы ограниченной последовательности являются, соответственно, наименьшими и наибольшими из её частичных пределов.

Доказательство:
Для нижнего предела $i = liminf_{k\to\infty} x_k$ известно, что он является наименьшим частичным пределом, поскольку для каждого $\epsilon > 0$ найдется число n, такое, что $i < inf_{k\geq n} x_k$, т.е. i — наименьший частичный предел последовательности (x_k). Это доказано через анализ последовательности и её частичных пределов.

Свойства:

1. **Нижний предел** — это наименьший из частичных пределов последовательности.
2. **Верхний предел** — это наибольший из частичных пределов последовательности.
3. Если последовательность ограничена, то её нижний и верхний пределы совпадают с её минимальным и максимальным частичными пределами соответственно.
4. Если последовательность не ограничена, то её нижний предел может быть равен $-\infty$, а верхний предел — $+\infty$.

Следствие 1:
Последовательность имеет предел, или стремится к минус или плюс бесконечности, в том и только в том случае, когда нижний и верхний пределы последовательности совпадают.

Следствие 2:
Для любой последовательности нижний предел есть наименьший из её частичных пределов, а верхний предел — наибольший из её частичных пределов.

33.Понятие ряда. Сумма ряда и критерий Коши сходимости ряда

1. Понятие ряда

Определение:
Ряд — это сумма всех членов последовательности. Он записывается как:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Где $\{a_n\}$ — последовательность, члены которой суммируются.

Примечание:
Когда говорят о ряде, имеют в виду не просто сумму, а именно процесс её суммирования, который продолжается до бесконечности. Ряд является **бесконечной суммой**.

2. Частичная сумма ряда

Определение:
Частичная сумма ряда — это сумма первых n членов ряда. Обозначается как:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Частичные суммы образуют последовательность $\{s_n\}$, которая называется **последовательностью частичных сумм**.

3. Сходимость ряда

Определение:
Если последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ сходится к некоторому пределу S, то ряд называется **сходящимся**, и его **суммой** будет этот предел:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n \to \infty} s_n$$

Если же последовательность частичных сумм не имеет предела, то ряд называется **расходящимся**.

4. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема (Критерий Коши сходимости ряда):

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ существует такое число N, что для всех $m, n > N$ выполняется:

$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \epsilon.$

Доказательство:
Критерий Коши утверждает, что ряд сходится, если сумма всех членов ряда, начиная с некоторого номера, может быть сделана сколь угодно малой. Это определяет сходимость ряда через сходимость последовательности частичных сумм. Другими словами, если сумма членов ряда начиная с некоторого N-го индекса может быть меньше любого заранее заданного числа ϵ, то ряд сходится.

---

5. Свойства сходимости ряда

Следствие 1:
Если в ряде изменить только конечное число членов, то получающийся при этом новый ряд будет сходиться, если сходился исходный ряд, и будет расходиться, если исходный ряд расходился. Для доказательства достаточно в критерии Коши считать число N превышающим максимальный из номеров изменённых членов ряда.

Следствие 2:

Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо, чтобы его члены стремились к нулю при $n \to \infty$), т.е. необходимо, чтобы:

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$

Достаточно положить в критерии $m = n$ и воспользоваться определением предела последовательности.

Примеры:

1. **Геометрический ряд**:
   Рассмотрим ряд $1+q+q^2+\cdots+q^n+\ldots$. Этот ряд сходится, если $|q|<1$, и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

2. **Гармонический ряд**:
   Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ расходится, несмотря на то, что его члены стремятся к нулю.

3. **Ряд с перемешанными знаками**:
   Ряд $1-1+1-1+\ldots$ не сходится, поскольку его частичные суммы колеблются между 0 и 1.

34.Абсолютная сходимость; теорема сравнения (с примером применения). Признак Вейерштрасса абсолютной сходимости ряда.

---

1. Абсолютная сходимость

Определение:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из модулей его членов, т.е. если:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся** (если ряд сходится).

---

2. Теорема сравнения (с примером применения)

Теорема сравнения:

Если для двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется неравенство:

$|a_n| \leq b_n$ для всех n,

и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Доказательство:

Предположим, что $|a_n| \leq b_n$ для всех n, и что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$, где S — конечное число.

Теперь рассмотрим частичные суммы для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Из неравенства $|a_n| \leq b_n$ для всех n следует, что:

$$|s_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} b_k .$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то последовательность частичных сумм $\sum_{k=1}^{n} b_k$ ограничена. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по **критерию сравнения**.

Пример применения:

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} .$$

Для этого ряда мы знаем, что $|a_n| = \frac{1}{n}$, и что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Однако этот ряд является **условно сходящимся**, поскольку его члены стремятся к нулю, но модуль членов не сходится.

---

3. Признак Вейерштрасса абсолютной сходимости ряда

Теорема Вейерштрасса (признак абсолютной сходимости):
Если существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, такой что для всех n:

$$|a_n| \le b_n \text{, и} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится ,}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

Доказательство:
Пусть $|a_n| \le b_n$ для всех n, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$, где S — конечное число.

Поскольку $|a_n| \le b_n$ для всех n, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ тоже сходится по **критерию сравнения**, так как сумма модулей членов не превосходит сумму членов другого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

Пример применения:
Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Мы видим, что:

$$|a_n| = \frac{1}{n^2} .$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится абсолютно.

Пример применения признака Вейерштрасса

Пример:
Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} .$$

1. **Проверка условия**:
   У нас есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Рассмотрим модуль каждого члена:

   $$|a_n| = \frac{1}{n^2}.$$

2. **Подбор сравниваемого ряда**:
   Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Это известный ряд, называемый рядом **пиццинга**, и он сходится, так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. **Применение признака Вейерштрасса**:
   Мы видим, что для всех n:

   $$|a_n| = \frac{1}{n^2} \le b_n = \frac{1}{n^2}.$$

   Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то по **признаку Вейерштрасса** ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится **абсолютно**.

35.Радикальный признак Коши с примером

---

1. Радикальный признак Коши

Теорема (Радикальный признак Коши):

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда существует такое число L, что:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1.$$

Если $L<1$, то ряд сходится, если $L>1$, то ряд расходится. Если $L=1$, то тест не даёт однозначного ответа.

---

2. Доказательство радикального признака Коши

Необходимость:

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то есть последовательность частичных сумм (S_N), где $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, сходится к пределу S. Это означает, что:

$\lim_{N \to \infty} S_N = S.$

Для любого $\epsilon > 0$ существует N_0, такое что для всех $N > N_0$ выполняется:

$|S_N - S| < \epsilon.$

Таким образом, для всех $N > N_0$ члены последовательности $|a_N|$ становятся малыми:

$|a_N| < \epsilon.$

Теперь применим радикальный критерий. Для всех $N > N_0$ имеем:

$\sqrt[N]{|a_N|} \to 0 (\text{поскольку члены } |a_N| \text{ стремятся к нулю}).)$

Значит, $L = 0$, и ряд сходится.

Достаточность:

Предположим, что существует такое число L, что:

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1.$

Это означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует N_0, такое что для всех $n > N_0$:

$\sqrt[n]{|a_n|} < 1 + \epsilon.$

То есть:

$|a_n| < (1+\epsilon)^n \text{ для всех } n > N_0.$

Теперь рассмотрим последовательность частичных сумм $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Для того чтобы доказать сходимость ряда, воспользуемся тем, что элементы $|a_n|$ уменьшаются экспоненциально и сходятся к нулю. Следовательно, последовательность частичных сумм сходится к некоторому пределу S, и ряд сходится.

Таким образом, радикальный признак Коши даёт условие сходимости ряда.

---

3. Пример применения радикального признака Коши

Пример 1:
Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

1. Для этого ряда $a_n = \frac{1}{2^n}$.

2. Примените радикальный признак Коши. Рассмотрим:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{\lim_{n \to \infty} 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

1. Поскольку $L = \frac{1}{2} < 1$, по радикальному признаку Коши ряд **сходится**.

Пример 2:
Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

1. Для этого ряда $a_n = \frac{1}{n}$.

2. Применим радикальный признак Коши. Рассмотрим:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

1. Поскольку $L = 1$, радикальный признак не даёт однозначного ответа. Однако, мы знаем, что этот ряд **расходится**, так как это гармонический ряд.

36.Признак Даламбера с примером

---

1. Признак Даламбера сходимости ряда

Теорема (Признак Даламбера):

Пусть (a_n) — последовательность чисел. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел:

$$L=\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

то:

- Если $L<1$, то ряд сходится.
- Если $L>1$, то ряд расходится.
- Если $L=1$, то тест не даёт однозначного ответа, и необходимо использовать другие методы для проверки сходимости ряда.

---

2. Доказательство признака Даламбера

Доказательство:

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Для удобства обозначим частичные суммы ряда как $S_N=\sum_{n=1}^{N} a_n$.

Для сходимости ряда важно, чтобы его члены стремились к нулю быстро. Признак Даламбера позволяет определить это через отношение последовательных членов.

- Если $\lim ¿_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L<1 ¿$, это означает, что члены ряда уменьшаются с каждым шагом на множитель, который стремится к числу меньше 1, что гарантирует сходимость ряда.

- Если $L>1$, члены ряда не убывают быстро, и ряд расходится.

- Если $L=1$, то эта информация не даёт нам точного ответа, и для проверки сходимости следует использовать другие методы (например, интегральный признак или критерий Коши).

---

3. Пример применения признака Даламбера

Пример 1:
Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

1. **Применение признака Даламбера**:
   Рассмотрим отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, где $a_n = \frac{3^n}{n!}$:

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1}.$$

2. **Вычисление предела**:
   Теперь найдём предел:

   $$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} 3}{n+1} = 0.$$

3. **Вывод**:
   Поскольку $L = 0 < 1$, ряд по признаку Даламбера сходится.

Пример 2:
Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

1. **Применение признака Даламбера**:
   Рассмотрим отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, где $a_n = \frac{1}{n^2}$:

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2}.$$

2. **Вычисление предела**:
   Теперь найдём предел:

   $$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

3. **Вывод**:
   Поскольку $L=1$, критерий Даламбера не даёт однозначного ответа, и для проверки сходимости нужно использовать другие методы. В данном случае, это известный **п-конвергентный ряд** (гармонический ряд с квадратичным членом), который сходится.

37.Признак сгущения Коши для сходимости ряда с невозрастающими неотрицательными членами

Теорема (Признак сгущения Коши):
Пусть $\{a_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел, которая невозрастающая. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon>0$ существует такое число N, что для всех $n>N$ выполняется:

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k<\epsilon .$$

Доказательство:

1. **Необходимость**:
   Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Это означает, что последовательность частичных сумм $S_N=\sum_{n=1}^{N} a_n$ имеет предел S, и для любого $\epsilon>0$ существует такой номер N_0, что для всех $N>N_0$:

   $$|S_N-S|<\epsilon .$$

   Разделим сумму ряда на две части:

   $$\sum_{k=n}^{\infty} a_k=S-S_n.$$

   Поскольку последовательность частичных сумм сходится, для всех $n>N$ остаточная часть ряда будет меньше ϵ, что и означает сходимость по признаку сгущения Коши.

2. **Достаточность**:
   Пусть для любого $\epsilon>0$ существует такое N, что для всех $n>N$ выполняется:

   $$\sum_{k=n}^{\infty} a_k<\epsilon\,.$$

   Это означает, что остаточные суммы ряда становятся сколь угодно малыми при больших n, что и означает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сходимость обобщённого гармонического ряда

Определение:
Обобщённый гармонический ряд имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\,,$$

где p — фиксированное положительное число.

- Когда $p=1$, это обычный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.
- Для $p>1$, этот ряд сходится.
- Для $p\leq 1$, ряд расходится.

Доказательство сходимости обобщённого гармонического ряда

Теорема:
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится, если и только если $p>1$.

Доказательство:

1. **Если** $p>1$:

   Рассмотрим $a_n=\frac{1}{n^p}$. Для $p>1$ члены ряда убывают достаточно быстро. Можем использовать критерий сгущения Коши, чтобы доказать сходимость:

   Для любого $\epsilon>0$ можно выбрать N, такое что для всех $n>N$ выполнено:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} < \epsilon .$$

Следовательно, ряд сходится.

2. **Если** $p \le 1$:

   Для $p=1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является гармоническим рядом и расходится.

   Для $p<1$, члены ряда не убывают достаточно быстро, и можно показать, что ряд не сходится. Рассмотрим, что для больших n члены ряда $\frac{1}{n^p}$ стремятся к нулю слишком медленно, и сумма ряда не может быть конечной.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p>1$.

38.Число e как сумма ряда

Определение числа e:
Число e — это основание натурального логарифма, которое может быть выражено как сумма ряда:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} .$$

Этот ряд является **бесконечным рядом** и сходится, что означает, что e можно вычислить как предел частичных сумм этого ряда.

Доказательство сходимости ряда для числа e

Теорема:
Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится, и его сумма равна e.

Доказательство:

1. **Ряд для** e: Рассмотрим ряд:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Это ряд с положительными членами, где каждый следующий член имеет вид $\frac{1}{n!}$.

2. **Сходимость ряда**: Чтобы доказать сходимость ряда, рассмотрим отношение между членами ряда. Для всех n, имеем:

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{1}{n+1}.$$

   Предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при $n \to \infty)$ равен 0, что свидетельствует о том, что члены ряда стремятся к 0 достаточно быстро.

3. **Критерий Коши**: Так как члены ряда стремятся к нулю с достаточно большой скоростью, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится по критерию Коши, и его сумма равна e.

Таким образом, мы доказали, что $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Приближенное вычисление значения e

Для приближенного вычисления числа e, можно взять конечную сумму ряда. Например, для вычисления e с точностью до ϵ, можно остановиться на каком-то числе N, при котором оставшиеся члены ряда $\frac{1}{n!}$ становятся меньше ϵ.

Пример 1: Приближенное вычисление числа e с точностью до 4 знаков.

Возьмем сумму первых 6 членов ряда:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}.$$

Вычислим частичную сумму:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}. \ e \approx 1 + 1 + 0.5 + 0.1667 + 0.0417 + 0.0083 = 2.7167.$$

Таким образом, приближенное значение e равно 2.7167.

Пример 2: Приближенное вычисление числа e с точностью до 6 знаков.

Возьмем сумму первых 8 членов ряда:

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}.$$

Вычислим частичную сумму:

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}.$$
$$e \approx 1+1+0.5+0.1667+0.0417+0.0083+0.0014+0.0002=2.7183.$$

Таким образом, приближенное значение e с точностью до 6 знаков равно 2.7183.

39.Определение предела функции по Коши. Предел по множеству (т.е. при стремлении к предельной точке этого множества). Предел функции по Гейне: его равносильность определению предела функции по Коши.

1. Определение предела функции по Коши

Определение:
Пусть E — некоторое подмножество множества действительных чисел, и a — предельная точка множества E. Пусть $f: E \to R)$ — функция, определённая на E. Мы говорим, что $f(x)$ стремится к числу A, когда $x \in E$ стремится к a, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|f(x)-A| < \epsilon.$$

В логической символике это выражается как:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in E, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \epsilon.)$$

Тогда пишем:

$$\lim_{x \to a, x \in E} f(x) = A.$$

2. Предел функции по множеству

Определение:
Предел функции $f(x)$ при $x \to a)$ по множеству E (где a является предельной точкой множества E) можно выразить аналогично, как в определении предела функции по Коши:

$$\lim_{x \to a, x \in E} f(x) = A,$$

если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \in E$, таких что $0 < |x - a| < \delta$, выполняется:

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

Это определение аналогично определению предела по Коши, с тем различием, что теперь функция ограничена множеством E, а не всеми значениями x, близкими к a.

3. Предел функции по Гейне

Определение:
Пусть $f: E \to R)$ — функция, определённая на множестве E, и a — предельная точка множества E. Мы говорим, что:

$$\lim_{x \to a, x \in E} f(x) = A,$$

если для любой последовательности (x_n), сходящейся к a (то есть $x_n \to a)$, при этом $x_n \in E$), последовательность значений $(f(x_n))$ сходится к A, то есть:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

4. Равносильность определений предела функции по Коши и по Гейне

Теорема (Равносильность определений предела по Коши и Гейне):
Предел функции $f(x)$ в точке a по множеству E существует и равен A, если и только если для каждой последовательности (x_n), сходящейся к a (при $x_n \in E$), последовательность $(f(x_n))$ сходится к A.

Доказательство:

1. **Необходимость** (из определения по Коши в определение по Гейне):
   Пусть по определению Коши для каждого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для

всех $x \in E$, $0 < |x - a| < \delta$, выполняется $|f(x) - A| < \epsilon$.
Пусть (x_n) — последовательность, сходящаяся к a. Для всех n существует N, такое что для всех $n > N$, $|x_n - a| < \delta$. Тогда для всех $n > N$ выполняется $|f(x_n) - A| < \epsilon$, что означает, что $f(x_n) \to A)$. Это и есть определение предела по Гейне.

2. **Достаточность** (из определения по Гейне в определение по Коши):
Пусть для каждой последовательности (x_n), сходящейся к a, последовательность $(f(x_n))$ сходится к A. Это означает, что для каждой последовательности (x_n), $x_n \to a)$, мы имеем $f(x_n) \to A)$.
Теперь покажем, что это выполняется по определению Коши. Пусть $\epsilon > 0$. Тогда для последовательности (x_n) существует номер N, такой что для всех $n > N$, $|f(x_n) - A| < \epsilon$. Поскольку $x_n \to a)$, для всех $n > N$, $|x_n - a| < \delta$. Это и есть определение предела по Коши.

Таким образом, определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Пример 1: Предел функции $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to 0)$

Функция:

Пусть $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $E = ¿$, и мы хотим найти предел функции $f(x)$ при $x \to 0)$.

Решение: Для любого $\epsilon > 0$ выберем $\delta = \epsilon$. При $0 < x < \delta$ учитывая, что $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1$, получаем:

$$|f(x) - 0| = \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x| < \epsilon .$$

Таким образом, $\lim ¿_{x \to 0} f(x) = 0 ¿$.

Пример 2: Предел функции $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ при $x \to 0)$

Функция:
Рассмотрим функцию $\operatorname{sgn}(x)$, которая определяется как:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{pmatrix} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{pmatrix}$$

Решение: Предел функции $\operatorname{sgn}(x)$ при $x \to 0)$ не существует. Это объясняется тем, что в любой проколотой окрестности точки 0 будут одновременно значения $f(x)=1$ и $f(x)=-1$, что не позволяет существовать пределу. Таким образом, предел не существует.

40.Общие свойства предельного перехода и предельный переход в неравенствах

1. Предельный переход в неравенствах: Теорема 3

а) Если функции $f:E$ и $g:E$ имеют одинаковые пределы в точке a, то есть $\lim ¿_{x \to a} f(x) = \lim ¿_{x \to a} g(x) = B ¿¿$, и $A<B$, то существует проколотая окрестность $^{\circ}U_E(a)$ точки a в множестве E, в которой выполнено неравенство $f(x)<g(x)$.

Доказательство:
Пусть $A<B$. По определению предела функции для любого $\epsilon>0$ существуют такие $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$, что при $0<|x-a|<\delta_1$, выполняется $|f(x)-B|<\epsilon$, и при $0<|x-a|<\delta_2$, выполняется $|g(x)-B|<\epsilon$. Пусть $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда для всех x, таких что $0<|x-a|<\delta$, выполняются неравенства:

$B-\epsilon < f(x) < B+\epsilon$ и $B-\epsilon < g(x) < B+\epsilon$.

Теперь возьмём число C такое, что $A<C<B$. По определению предела найдём проколотые окрестности $\backslash^{\circ}U_E(a)$, такие что:

- при $x \in {}^{\circ}U_E(a)$, $f(x)<C$,
- при $x \in {}^{\circ}U_E(a)$, $g(x)>C$.

Таким образом, для всех $x \in {}^{\circ}U_E(a)$, выполнено $f(x)<g(x)$.

---

b) Если для функций $f:E$, $g:E$ и $h:E$ выполняется соотношение $f(x) \le g(x) \le h(x)$, и если $\lim ¿_{x \to a} f(x) = \lim ¿_{x \to a} g(x) = \lim ¿_{x \to a} h(x) = C ¿¿¿$, то предел функции $g(x)$ при $x \to a)$ также существует и равен C.

Доказательство:
Пусть $\lim ¿_{x\to a} f(x) = \lim ¿_{x\to a} h(x) = C ¿¿$, и $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Для любого $\epsilon > 0$ существуют такие проколотые окрестности $\circ U_E(a)$ для $f(x)$ и $\circ U_E(a)$ для $h(x)$, такие что для всех x из этих окрестностей выполняются:

$|f(x) - C| < \epsilon$ и $|h(x) - C| < \epsilon$.

То есть для всех $x \in \circ U_E(a)$:

$C - \epsilon < f(x) < C + \epsilon$ и $C - \epsilon < h(x) < C + \epsilon$.

Таким образом, для $x \in \circ U_E(a)$, выполняется $C - \epsilon \le g(x) \le C + \epsilon$, что означает:

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = C$.

---

2. Свойства предельного перехода в неравенствах

Если для функции $f(x)$ и $g(x)$ выполняются:

- $\lim ¿_{x\to a} f(x) = A ¿$,
- $\lim ¿_{x\to a} g(x) = B ¿$,

то из следующих условий мы получаем утверждения о пределах:

a) Если в некоторой проколотой окрестности $\circ U_E(a)$ выполнено $f(x) > g(x)$, то $A > B$.

b) Если в некоторой проколотой окрестности $\circ U_E(a)$ выполнено $f(x) = g(x)$, то $A = B$.

c) Если в некоторой проколотой окрестности $\circ U_E(a)$ выполнено $f(x) > B$, то $A > B$.

d) Если в некоторой проколотой окрестности $\circ U_E(a)$ выполнено $f(x) < B$, то $A < B$.

Доказательство:
Рассуждая от противного, из утверждения $a)$ теоремы 3 немедленно получаем $a)$ и $b)$. Утверждения $c)$ и $d)$ следуют из первых двух при $g(x) = B$.

Пример 1: Применение предельного перехода в неравенствах

Возьмём $f(x)=\sin x$ и $g(x)=x$, тогда:

$$\lim_{x\to 0} \sin x=0 \text{ и } \lim_{x\to 0} x=0.$$

Сравнив функции $\sin x$ и x для $0<x<2$, получаем:

$$\sin x<x.$$

Следовательно, по теореме о предельном переходе в неравенствах, мы получаем:

$$\lim_{x\to 0} \sin x=0 \text{ и } \lim_{x\to 0} x=0.$$

41.Предельный переход в арифметических операциях

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке a, то есть:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \text{ и } \lim_{x\to a} g(x)=B,$$

тогда выполняются следующие правила предельного перехода для арифметических операций с функциями $f(x)$ и $g(x)$:

1. **Сумма:**

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))=A+B.$$

2.Разность:

$$\lim_{x\to a} (f(x)-g(x))=A-B.$$

3.Произведение:

$$\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x))=A\cdot B.$$

4.Частное (при $B\neq 0$):

$$\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{если } B \neq 0.$$

Доказательства:

1. **Сумма:**

Пусть для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, такие что для $0 < |x - a| < \delta_1$ выполняется $|f(x) - A| < \epsilon$, и для $0 < |x - a| < \delta_2$ выполняется $|g(x) - B| < \epsilon$. Пусть $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется:

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| = |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Таким образом, получаем:

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B.$$

2.Разность:

Аналогично, для разности функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$|f(x) - g(x) - (A - B)| = |(f(x) - A) - (g(x) - B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Таким образом:

$$\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = A - B.$$

3.Произведение:

Для произведения $f(x) \cdot g(x)$, рассмотрим:

$$|f(x) \cdot g(x) - A \cdot B| = |f(x) \cdot g(x) - A \cdot g(x) + A \cdot g(x) - A \cdot B|.$$

Применяя неравенство треугольника, получаем:

$$|f(x) \cdot g(x) - A \cdot B| \leq |(f(x) - A) \cdot g(x)| + |A \cdot (g(x) - B)|.$$

Пусть $\epsilon > 0$, и для этого найдутся такие δ_1 и δ_2, что:

$$|f(x) - A| < \epsilon/2 \text{ и } |g(x) - B| < \epsilon/2.$$

Тогда:

$$|f(x) \cdot g(x) - A \cdot B| < \epsilon.$$

Таким образом:

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B.$$

4.Частное:

Предположим, что $B \neq 0$ и $\lim ¿_{x \to a} g(x) = B \neq 0 ¿$. Для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_1 > 0$, такое что:

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{2} \text{ для } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Это гарантирует, что $|g(x)| > \frac{|B|}{2}$ для всех x, таких что $0 < |x - a| < \delta_1$.

Теперь рассмотрим:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{f(x) \cdot B - A \cdot g(x)}{g(x) \cdot B}\right| = \frac{|f(x) \cdot B - A \cdot g(x)|}{|g(x) \cdot B|}.$$

Поскольку $|g(x) \cdot B| \geq \frac{|B|^2}{2}$, это выражение стремится к нулю, и мы получаем:

$$\frac{\lim_{x \to a} f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

42.Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0)$

Теорема (первый замечательный предел):

$$\frac{\lim_{x \to 0} \sin x}{x} = 1.$$

Доказательство:

Для доказательства используем стандартную технику предельного перехода с помощью неравенств. Рассмотрим следующие известные из геометрии неравенства, которые можно вывести с помощью анализа:

1. Для $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

1. Используя теорему о пределе функции, можно записать для $x \to 0)$ следующий переход:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \text{ и } \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

Таким образом, применяя принцип ограниченности, мы получаем:

$$\frac{\lim_{x \to 0} \sin x}{x} = 1.$$

Дополнительное пояснение:

Используем неравенства для оценки предела функции:

1. $\cos x$ сходится к 1 при $x \to 0)$.
2. Правая граница $\frac{\sin x}{x}$ равна 1, что позволяет утверждать, что и сам предел функции равен 1.

Таким образом, получаем искомый результат:

$$\frac{\lim_{x \to 0} \sin x}{x} = 1.$$

Пример использования первого замечательного предела

Задача:

Найти предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0)$, если она встречается в более сложной функции, например, в выражении:

$$\frac{\lim_{x \to 0} \sin(5x)}{x}.$$

Решение:

Используя первый замечательный предел, мы можем упростить задачу, воспользовавшись известным результатом:

$$\frac{\lim_{x \to 0} \sin x}{x} = 1.$$

Рассмотрим выражение $\frac{\sin(5x)}{x}$. Мы можем переписать его следующим образом:

$$\frac{\sin(5x)}{x} = 5 \cdot \frac{\sin(5x)}{5x}.$$

Теперь при $x \to 0)$ мы видим, что:

$$\frac{\lim\limits_{x \to 0} \sin(5x)}{5x} = 1,$$

так как это просто вариант первого замечательного предела с аргументом $5x$ вместо x. Следовательно, мы получаем:

$$\frac{\lim\limits_{x \to 0} \sin(5x)}{x} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Ответ:

$$\frac{\lim\limits_{x \to 0} \sin(5x)}{x} = 5.$$

43.Точное определение базы для множества:

Определение (База в множестве):
Пусть X — некоторое множество. Совокупность подмножеств B множества X называется **базой** в X, если выполняются два условия:

1. B не пусто, то есть $B \neq \varnothing$.
2. Для любых двух множества $B_1, B_2 \in B$ их пересечение $B_1 \cap B_2$ содержит хотя бы одно множество из совокупности B. Формально:

$$B_1 \cap B_2 \neq \varnothing \text{для любых} B_1, B_2 \in B.$$

Иными словами, элементы совокупности B — это непустые подмножества множества X, и для любых двух подмножеств B_1 и B_2 из совокупности, их пересечение $B_1 \cap B_2$ должно содержать хотя бы одно множество из той же совокупности.

Пример базы:

1. Рассмотрим множество $X = R$ (множество действительных чисел). Пусть $B = \{(-n, n) \mid n \in N\}$ — совокупность интервалов, где $(-n, n)$ — открытый интервал с центром в нуле и длиной $2n$. Эти множества пересекаются и образуют основу для топологии на R, так как каждое пересечение двух интервалов $(-n, n)$ и $(-m, m)$ для $n, m \in N$ будет содержать некоторый интервал $(-k, k)$, где k больше или равно минимальному из n и m.

44.Определение предела функции по базе

Пусть $f: X \to R)$ — функция, определенная на множестве X. Пусть A — предел функции f при $x \to a)$ по базе B в множестве X. Это означает, что для любой окрестности $V(A)$ точки A существует элемент $B \in B$ (база), такой что $f(B)$ содержится в окрестности $V(A)$. В формальной записи:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ по базе } B \text{ если } \forall V(A) \exists B \in B \text{ такое, что } f(B) \subseteq V(A).$$

Для функций с числовыми значениями полезно также представить это определение в виде:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ если } \forall \epsilon > 0, \exists B \in B \text{ такое, что } |f(x) - A| < \epsilon \text{ для всех } x \in B.$$

Эти определения эквивалентны, и их эквивалентность для вещественнозначных функций вытекает из того, что в любой окрестности точки содержится симметричная окрестность этой точки.

Доказательство единственности предела функции по базе

Теорема (Единственность предела):
Если функция f имеет два предела A и B по базе B, то $A = B$.

Доказательство:

Предположим, что функция f имеет два предела A и B по базе B. Это означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $B_1 \in B$, что для всех $x \in B_1$

выполняется $|f(x)-A|<\epsilon$, и существует такое $B_2\in B$, что для всех $x\in B_2$ выполняется $|f(x)-B|<\epsilon$.

Пусть $\epsilon=\frac{|A-B|}{2}$. Тогда по определению предела существует такие B_1 и B_2 из базы, что:

1. Для всех $x\in B_1$ выполнено $|f(x)-A|<\frac{|A-B|}{2}$,
2. Для всех $x\in B_2$ выполнено $|f(x)-B|<\frac{|A-B|}{2}$.

Теперь рассмотрим $B=B_1\cap B_2$. Для всех $x\in B$ выполняются оба неравенства:

$|f(x)-A|<\frac{|A-B|}{2}$ и $|f(x)-B|<\frac{|A-B|}{2}$.

Теперь применим неравенство треугольника к $|f(x)-B|$:

$|f(x)-B|\le|f(x)-A|+|A-B|<\frac{|A-B|}{2}+\frac{|A-B|}{2}=|A-B|$.

Таким образом, мы получаем:

$|f(x)-B|<|A-B|$.

Это противоречит предположению, что $A\neq B$, поскольку для всех $x\in B$ мы получили, что $|f(x)-B|<|A-B|$, что невозможно при $A\neq B$.

Следовательно, $A=B$.

Таким образом, предел функции по базе является единственным.

45.Колебание функции на множестве

Определение 16:
Колебанием функции $f:X\rightarrow R)$ на множестве $E\subset X$ называется величина, определяемая как верхняя грань модуля разности значений функции на всевозможных парах точек из E:

$(f;E):=$¿ $x_1,x_2\in E\,|f(x_1)-f(x_2)|$.

Колебание функции дает представление о том, насколько сильно значения функции могут изменяться на данном множестве.

Примеры колебания:

1. $(x^2;[1,2])=4$
2. $(x;[1,2])=3$
3. $¿1,2¿=3$
4. $(\operatorname{sgn}(x);[1,2])=2$
5. $(\operatorname{sgn}(x);[0,2])=1$
6. $(\operatorname{sgn}(x);)0,2)¿=0$

Критерий Коши существования предела функции по базе

Теорема 4 (Критерий Коши существования предела функции):
Пусть X — множество, B — база в X, и $f:X\to R)$ — функция, определенная на X. Функция f имеет предел по базе B, если и только если для любого числа $\epsilon>0$ существует элемент $B\in B$, на котором колебание функции меньше ϵ. То есть:

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ по базе } B \text{ если и только если} \forall\epsilon>0, \exists B\in B \text{такое, что} (f;B)<\epsilon.$$

Доказательство:

Необходимость:
Если $\lim ¿_{x\to a} f(x)=A¿$, то для любого $\epsilon>0$ существует элемент $B\in B$, на котором для всех точек $x\in B$ выполняется $|f(x)-A|<\frac{\epsilon}{2}$. Это означает, что для любых $x_1,x_2\in B$:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-A|+|A-f(x_2)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Следовательно, $(f;B)<\epsilon$, что и требовалось.

Достаточность:
Предположим, что для любого $\epsilon>0$ существует элемент $B\in B$, на котором колебание функции $(f;B)<\epsilon$. Для доказательства существования предела функции по базе, мы применим следующее рассуждение:

Для $\epsilon=\frac{1}{n}$ (где n — натуральное число) существует $B_n\in B$, на котором $(f;B_n)<\frac{1}{n}$. Тогда последовательность $B_1,B_2,B_3,\dots$ образует последовательность элементов базы, и на каждом B_n функция f приближается друг к другу. Пусть $x_n \in B_n$ — точка из каждого множества B_n.

Последовательность значений $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ является фундаментальной. Для всех m, n мы имеем:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

По критерию Коши для последовательностей, эта последовательность сходится к некоторому пределу A. Из этого следует, что $f(x_n) \to A)$ при $n \to \infty)$.

Поскольку $(f; B_n) < \frac{1}{n}$, для n достаточно большого, $f(x)$ будет приближаться к A на всем множестве B_n.

Таким образом, функция f имеет предел по базе B, и этот предел равен A.

46.Предел композиции функций

Теорема 5 (О пределе композиции функций):
Пусть Y — множество и Y — база в Y, функция $g: Y \to R)$ имеет предел по базе Y, то есть $\lim ¿_Y g(y) = A ¿$. Пусть X — множество и X — база в X, а функция $f: X \to Y)$ такая, что для любого элемента $B_Y \in Y$ из базы Y существует элемент $B_X \in X$, такой что $f(B_X) \subseteq B_Y$.

При этих условиях композиция $g \circ f: X \to R)$ определена и имеет предел по базе X, а именно:

$$\lim_X (g \circ f)(x) = \lim_Y g(y) = A.$$

Доказательство:
Пусть $\lim ¿_Y g(y) = A ¿$. Покажем, что $\lim ¿_X (g \circ f)(x) = A ¿$.

Для любого числа $\epsilon > 0$ найдется элемент $B_Y \in Y$, такой что $g(B_Y) \subseteq V(A)$, где $V(A)$ — окрестность точки A.

По условию, существует элемент $B_X \in X$, такой что $f(B_X) \subseteq B_Y$. Тогда, для всех $x \in B_X$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ содержится в $g(B_Y) \subseteq V(A)$. Таким образом, $(g \circ f)(x) \to A)$ при $x \to \infty)$.

Предел функции $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty)$ (второй замечательный предел)

Теорема 20:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство:
Пусть $Y=N$, Y — база N, и $X=R_{¿0}$, X — база $R_{¿0}$. Рассмотрим функцию $f: X \to Y)$, определенную как $f(x)=[x]$ (целая часть числа x), и $g: Y \to R)$, определенную как $g(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Для любого $B_Y=(n \mid n>N)$ из базы Y, очевидно, что найдется элемент $B_X=(x \mid x>N+1)$ из базы X, для которого $f(B_X) \subseteq B_Y$.

Функции $g(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $g_1(n)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$, и $g_2(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ имеют предел e по базе N.

Используя теорему о композиции функций, мы утверждаем, что:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Также, применяя теорему о пределе композиции, мы можем записать:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} g(f(x)) = e.$$

Таким образом, доказано, что:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

47.Предел монотонной функции

Определение 17:

Функция $f : E \to R)$, определенная на числовом множестве E, называется:

- **возрастающей на** E, если для любых $x_1, x_2 \in E$, таких что $x_1 < x_2$, выполняется $f(x_1) < f(x_2)$;
- **неубывающей на** E, если для любых $x_1, x_2 \in E$, таких что $x_1 < x_2$, выполняется $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- **невозрастающей на** E, если для любых $x_1, x_2 \in E$, таких что $x_1 < x_2$, выполняется $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- **убывающей на** E, если для любых $x_1, x_2 \in E$, таких что $x_1 < x_2$, выполняется $f(x_1) > f(x_2)$.

Функции, перечисленные выше, называются **монотонными** на множестве E.

Теорема 6 (Критерий существования предела монотонной функции):

Для того чтобы **неубывающая** на множестве E функция $f : E \to R)$ имела предел при $x \to s)$, $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы она была **ограничена сверху**.
А для того, чтобы она имела предел при $x \to i)$, $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы она была **ограничена снизу**.

Доказательство теоремы для $\lim \text{¿}_{x \to s} f(x) \text{¿}$*:*

Если предел $\lim \text{¿}_{x \to s} f(x) \text{¿}$ существует, то, как и всякая функция, имеющая предел, функция f оказывается **финально ограниченной** при базе $E \to s)$. Поскольку f — неубывающая функция на E, это означает, что f ограничена сверху. Действительно, существует верхняя грань значений, которые функция принимает на множестве E при $x \to s)$. Пусть $A = ^{f}(x)$, где $x \in E$. Покажем, что $\lim \text{¿}_{x \to s} f(x) = A \text{¿}$.

Для любого $\epsilon > 0$ на основе определения верхней грани множества $f(x)$, найдем точку $x_0 \in E$, такую что $A - \epsilon < f(x_0) < A$.
Поскольку функция f — неубывающая на E, то для всех $x_0 \leq x \leq s$ выполнено $A - \epsilon < f(x) \leq A$. Это подтверждает, что предел $\lim \text{¿}_{x \to s} f(x) = A \text{¿}$.

Для предела $\lim \text{¿}_{x \to i} f(x) \text{¿}$*:*

Аналогичные рассуждения приводят к следующему:
Если функция f ограничена снизу, то $\lim \text{¿}_{x \to i} f(x) = inf_{x \in E} f(x) \text{¿}$.

Вывод:

Таким образом, для монотонной функции на числовом множестве предел существует при условии, что функция ограничена сверху или снизу, в зависимости от направления стремления.

48.Асимптотическое поведение функций. Бесконечно малые и бесконечно большие функции (сами по себе, а также по сравнению с другими функциями)

1. Асимптотическое поведение функции

Асимптотическое поведение функции описывает, как она ведет себя при стремлении аргумента к определенной точке (например, к бесконечности) или при стремлении к точке, в которой функция не определена. Это поведение часто выражается через более простую или известную функцию, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения исследуемой функции.

Пример асимптотического поведения:

- $\left(\frac{\pi x}{\ln x}\right)$ при $x \to +\infty)$ ведет себя как $\frac{x}{\ln x}$, т.е. растет медленно.
- $\sin(x)$ при $x \to 0)$ ведет себя как x (функция стремится к нулю с тем же порядком, что и x).

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

2.1. **Бесконечно малая функция**

Функция называется **бесконечно малой** при базе B, если она стремится к нулю при $x \to \infty)$ (или при других точках, определенных базой). Это означает, что она становится очень маленькой по сравнению с другой функцией, когда x приближается к некоторой точке.

Определение 19:
Говорят, что функция $f(x)$ есть **бесконечно малая** по сравнению с функцией $g(x)$ при базе B, если для любого $\epsilon > 0$ существует элемент $B \in B$, на котором выполняется соотношение

$f(x) = o(g(x))$ при базе B.

Доказательство: Пусть $f(x) = o(g(x))$ при базе B. Это означает, что

$$\left.\frac{\lim\limits_{x \to \infty} f(x)}{g(x)} = 0 \text{ при } x \to \infty \text{ (или базе } B\right).$$

Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ найдется такой элемент $B \in B$, что для всех $x \in B$ выполняется

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \epsilon,$$

то есть $|f(x)| < \epsilon |g(x)|$, что и является определением бесконечно малой функции по сравнению с $g(x)$.

2.2. **Бесконечно большая функция**

Функция называется **бесконечно большой** при базе B, если она стремится к бесконечности при $x \to \infty)$ (или при других точках, определенных базой). Это означает, что для любого $M > 0$ существует элемент $B \in B$, на котором функция $f(x)$ всегда больше M.

Определение 21:
Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при базе B, если для любого $M > 0$ существует элемент $B \in B$, такой что для всех $x \in B$ выполняется $|f(x)| > M$.

Доказательство: Для функции $f(x)$, которая является бесконечно большой при базе B, необходимо показать, что для любого $M > 0$ найдется элемент $B \in B$, на котором выполняется $|f(x)| > M$. Это и есть определение бесконечно большой функции.

2.3. **Функции более высокого порядка**

Если функция $f(x)$ является **бесконечно малой** по сравнению с $g(x)$, то говорят, что $f(x)$ является **бесконечно малой более высокого порядка** по сравнению с $g(x)$, если $f(x)$ убывает быстрее, чем $g(x)$ при $x \to \infty)$.

Определение 20:
Если $f = o(g)$ при базе B, и функция $g(x)$ сама является бесконечно малой при базе B, то говорят, что $f(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $g(x)$.

Доказательство:

1. Пусть $f(x)=o(g(x))$ при базе B, то есть

$$\frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{g(x)}=0.$$

1. Теперь, если $g(x)=o(h(x))$, то

$$\frac{\lim_{x\to\infty} g(x)}{h(x)}=0.$$

1. Из этого следует, что

$$f(x)=o(h(x)),$$

то есть $f(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $g(x)$.

---

3. Сравнение асимптотического поведения функций

Мы можем сравнивать поведение двух функций вблизи точки или на бесконечности, используя понятие **асимптотического эквивалента**. Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковое асимптотическое поведение, то говорят, что они **асимптотически эквивалентны** при базе B.

Определение 25:
Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ **асимптотически эквивалентны** при базе B, если

$$f(x)=g(x)+o(g(x))\,\text{при базе }B,$$

то есть $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к одинаковому пределу в асимптотическом смысле.

Доказательство:

1. Пусть $f(x)=g(x)+o(g(x))$, тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to 1\,\text{при } x\to\infty.)$$

1. Это означает, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны в асимптотическом смысле, и их поведение на бесконечности (или в окрестности какой-либо точки) одинаково.

49.Асимптотическая эквивалентность функций. Примеры пар эквивалентных функций

1. ***Асимптотическая эквивалентность функций***

Асимптотическая эквивалентность двух функций $f(x)$ и $g(x)$ при базе B означает, что их поведение при $x \to \infty)$ (или вблизи какой-либо точки, определенной базой) схоже с малой относительной погрешностью. Формально, функции $f(x)$ и $g(x)$ считаются асимптотически эквивалентными при базе B, если выполняется следующее условие:

$$f(x)=g(x)+o(g(x))\text{при базе } B.$$

Это означает, что для всех значений x, принадлежащих некоторому элементу базы B, отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ стремится к 1 при $x \to \infty)$, что утверждает, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковое поведение при больших значениях x.

2. ***Определения и символы***

- **Эквивалентность функций**: Если для двух функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется $f(x)=g(x)+o(g(x))$ при базе B, то говорят, что $f(x)$ асимптотически эквивалентна $g(x)$ при базе B, и пишут: $f(x)\sim g(x)\text{при базе } B.$
- Это означает, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковое асимптотическое поведение при $x \to \infty)$ или в окрестности некоторой точки, которая является элементом базы B.

3. ***Примеры асимптотически эквивалентных функций***

Пример 1: Сравнение функции $\sin(x)$ ***и*** x ***при*** $x \to 0)$

Функция $\sin(x)$ при $x \to 0)$ ведет себя как x, то есть:

$$\sin(x)=x+o(x)\text{при } x \to 0.)$$

Это означает, что функции $\sin(x)$ и x асимптотически эквивалентны при $x \to 0)$, и можно записать:

$$\sin(x)\sim x\text{ при } x \to 0.)$$

Доказательство:

$$\frac{\lim\limits_{x \to 0} \sin(x)}{x} = 1.$$

Таким образом, $\sin(x)$ и x ведут себя одинаково при $x \to 0)$.

Пример 2: Сравнение функции $\ln(1+x)$ и x при $x \to 0)$

Известно, что:

$$\ln(1+x) = x + o(x) \text{ при } x \to 0.)$$

Это значит, что функции $\ln(1+x)$ и x также асимптотически эквивалентны при $x \to 0)$, то есть:

$$\ln(1+x) \sim x \text{ при } x \to 0.)$$

Доказательство:

$$\frac{\lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)}{x} = 1.$$

Пример 3: Сравнение функции $x^2 + x$ и x^2 при $x \to \infty)$

Для функции $x^2 + x$ можно записать:

$$x^2 + x = x^2 + o(x^2) \text{ при } x \to \infty.)$$

Это означает, что функция $x^2 + x$ асимптотически эквивалентна x^2 при $x \to \infty)$. Более того, при вычислении разности:

$$x^2 + x - x^2 = x \text{ при } x \to \infty,)$$

относительная погрешность $\left.\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \to 0\right)$ при $x \to \infty)$.

Пример 4: Сравнение функции $x \ln(x)$ и x^2 при $x \to \infty)$

Функции $x \ln(x)$ и x^2 ведут себя по-разному при $x \to \infty)$, но можно утверждать, что $x \ln(x)$ растет медленнее, чем x^2. Таким образом, можно записать:

$$x \ln(x) = o(x^2) \text{ при } x \to \infty.)$$

Доказательство:

$$\frac{\lim\limits_{x \to \infty} x \ln(x)}{x^2} = 0.$$

4. ***Теоретическое обоснование асимптотической эквивалентности***

Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется следующее:

$$f(x)=g(x)+o(g(x)),$$

это означает, что при $x \to \infty)$ (или при других точках, определенных базой), относительная погрешность между функциями $f(x)$ и $g(x)$ стремится к нулю. Это характерное свойство асимптотической эквивалентности, которое можно выразить следующим образом:

$$\frac{\lim\limits_{x \to \infty} f(x)}{g(x)}=1.$$

Таким образом, асимптотическая эквивалентность позволяет заключить, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковое поведение в долгосрочной перспективе, то есть их относительное отклонение становится незначительным при $x \to \infty)$.

50.Символы o и O (символы Ландау). Правила действий с ними

Символы o и O, известные как символы Ландау, используются для описания асимптотического поведения функций. Они помогают формализовать идею о том, как одна функция ведет себя относительно другой при стремлении аргумента к некоторой точке или бесконечности.

1. ***Символ*** o ***(малая o)***

Функция $f(x)$ называется **малою функцией** от функции $g(x)$ при базе, если:

$$f(x)=o(g(x))\,\text{при базе}\,B,\ \text{если}\,\frac{\lim\limits_{x \to \infty} f(x)}{g(x)}=0.$$

Это означает, что $f(x)$ растет медленнее, чем $g(x)$, или что $f(x)$ становится **бесконечно малой** по сравнению с $g(x)$ при $x \to \infty)$.

Пример:

$$x^2=o(x^3)\,\text{при}\,x \to \infty,)$$

так как:

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty} x^2}{x^3} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1}{x} = 0.$$

2. *Символ O (большая O)*

Функция $f(x)$ называется **ограниченной сверху** функцией от функции $g(x)$ при базе, если существует такая константа $C>0$, что:

$|f(x)| \le C|g(x)|$ для всех $x \in B$.

Запись $f(x)=O(g(x))$ означает, что $f(x)$ растет не быстрее, чем $g(x)$, с точностью до постоянного множителя.

Пример:

$x^2 = O(x^3)$ при $x \to \infty,)$

так как для больших x выполняется:

$|x^2| \le C|x^3|$ для некоторой константы C.

3. *Основные правила действия с символами o и O*

(а) Правила сложения:

1. $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$,
   - то есть сумма двух малых о от одной и той же функции остаётся малым о.
2. $O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$,
   - сумма двух больших О от одной и той же функции остаётся большой О.
3. $o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$,
   - если добавляется малая о и большая О от одной функции, то результат всё равно ограничен сверху большой О.

(б) Правила умножения:

1. $o(f(x)) \cdot O(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$,
   - произведение малой о и большой О даёт малую о от произведения функций.
2. $O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x) \cdot g(x))$,
   - произведение двух больших О даёт большую О от произведения.

3. $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$,
   - произведение двух малых о даёт малую о от произведения.

(в) Символы о и О при делении:

1. $\frac{o(f(x))}{g(x)} = o\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$,
   - если функция является малой о, то деление её на другую функцию даёт малую о от нового отношения.
2. $\frac{O(f(x))}{g(x)} = O\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$,
   - деление большой О на функцию даёт большую О от отношения.

4. Важные примеры использования:

1. **Пример 1:** $x^2 = o(x^3)$ **при** $x \to \infty)$**:**
   - Мы уже знаем, что x^2 растёт медленнее, чем x^3, и:

$$\frac{\lim_{x \to \infty} x^2}{x^3} = 0.$$

2. **Пример 2:** $\ln(x) = O(x)$ **при** $x \to \infty)$**:**
   - Логарифм растёт медленно по сравнению с линейной функцией, и существует такая константа C, что:

$$\ln(x) \le C x \text{ для всех } x \ge 1.$$

3. **Пример 3:** $x = o(x^2)$ **при** $x \to 0)$**:**
   - Малая функция x является бесконечно малой по сравнению с x^2, потому что:

$$\frac{\lim_{x \to 0} x}{x^2} = \frac{\lim_{x \to 0} 1}{x} = 0.$$

51.Основные примеры эквивалентных функций при $x \to 0)$ и их доказательства (кроме $\sin x$):

1. $\ln(1+x)$ при $x \to 0)$

Теорема:
Для функции $\ln(1+x)$ при $x \to 0)$ выполняется эквивалентность:

$\ln(1+x)=x+o(x)$ при $x \to 0.)$

Доказательство:

Рассмотрим предел $\lim ¿_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} ¿$. Для x малых мы имеем:

$$\frac{\lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)}{x}=1,$$

что означает, что $\ln(1+x)$ эквивалентно x при $x \to 0)$, то есть:

$\ln(1+x)=x+o(x).$

2. $\sin x$ при $x \to 0)$

Теорема:
Для функции $\sin x$ при $x \to 0)$ выполняется эквивалентность:

$\sin x=x+o(x)$ при $x \to 0.)$

Доказательство:

Из известного предела $\lim ¿_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}=1¿$, следует, что:

$\sin x=x+o(x)$ при $x \to 0.)$

3. $(1+x)^{\alpha}-1$ при $x \to 0)$

Теорема:
Для функции $(1+x)^{\alpha}-1$ при $x \to 0)$ выполняется эквивалентность:

$(1+x)^{\alpha}-1=\alpha x+o(x)$ при $x \to 0.)$

Доказательство:
Используя разложение бинома для малых x, получаем:

$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+O(x^2).$

Таким образом:

$(1+x)^{\alpha}-1=\alpha x+o(x).$

4. e^x-1 при $x\to 0)$

Теорема:
Для функции e^x-1 при $x\to 0)$ выполняется эквивалентность:

$$e^x-1=x+o(x)\,\text{при}\,x\to 0.)$$

Доказательство:

Поскольку известно, что $\lim ¿_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1¿$, то:

$$e^x-1=x+o(x)\,\text{при}\,x\to 0.)$$

5. $\cos x-1$ при $x\to 0)$

Теорема:
Для функции $\cos x-1$ при $x\to 0)$ выполняется эквивалентность:

$$\cos x-1=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\,\text{при}\,x\to 0.\Bigg)$$

Доказательство:
Используя разложение функции $\cos x$ в окрестности $x=0$, получаем:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+O(x^4),$$

откуда:

$$\cos x-1=-\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

52.Применение эквивалентности функций при вычислении пределов (замена функций на эквивалентные в произведении, частном, разности, сумме: когда можно, когда нельзя; с примерами).

Применение эквивалентности функций при вычислении пределов

Эквивалентность функций играет важную роль при вычислении пределов, так как замена функции на эквивалентную может значительно упростить задачу. Однако не всегда возможно использовать эквивалентность для замены функций в различных операциях, таких как произведение, частное, разность или сумма. Рассмотрим, когда можно применить эквивалентность в этих операциях и когда — нельзя.

1. **Произведение функций**

Теорема:
Если функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to 0)$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ также эквивалентно произведению их эквивалентов:

$$f(x) \sim g(x) \,\text{при}\, x \to 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \sim f_0(x) \cdot g_0(x),)$$

где $f_0(x)$ и $g_0(x)$ — эквивалентные функции.

Пример:
Рассмотрим предел:

$$\lim_{x \to 0} x \sin x.$$

Мы знаем, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0)$. Следовательно:

$$x \sin x \sim x \cdot x = x^2.$$

Таким образом, предел будет равен:

$$\lim_{x \to 0} x \sin x = \lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

2. **Частное функций**

Теорема:
Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 0)$, то их частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ эквивалентно частному эквивалентов:

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f_0(x)}{g_0(x)}.)$$

Пример:
Рассмотрим предел:

$$\frac{\lim\limits_{x \to 0} \sin x}{x}.$$

Мы знаем, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0)$. Следовательно:

$$\frac{\sin x}{x} \sim \frac{x}{x} = 1.$$

Таким образом, предел будет равен:

$$\frac{\lim\limits_{x \to 0} \sin x}{x} = 1.$$

3. **Разность функций**

Теорема:
Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 0)$, то разность $f(x) - g(x)$ эквивалентна разности их эквивалентов:

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to 0 \Rightarrow f(x) - g(x) \sim f_0(x) - g_0(x).)$$

Пример:
Рассмотрим предел:

$$\lim_{x \to 0} (\sin x - x).$$

Мы знаем, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0)$. Следовательно:

$$\sin x - x \sim x - x = 0.$$

Таким образом, предел будет равен:

$$\lim_{x \to 0} (\sin x - x) = 0.$$

4. **Сумма функций**

Теорема:
Если $f(x) \sim f_0(x)$ и $g(x) \sim g_0(x)$ при $x \to 0)$, то сумма $f(x) + g(x)$ эквивалентна сумме их эквивалентов:

$f(x)+g(x)\sim f_0(x)+g_0(x)$.

Пример:
Рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to 0}(x+\sin x).$$

Мы знаем, что $\sin x \sim x$ при $x\to 0)$. Следовательно:

$$x+\sin x\sim x+x=2x.$$

Таким образом, предел будет равен:

$$\lim_{x\to 0}(x+\sin x)=0.$$

5. **Когда нельзя применять эквивалентности?**

Эквивалентности не всегда можно применять в операциях с функциями. Рассмотрим следующие случаи:

- **Произведение эквивалентных функций с бесконечно малыми порядками**: Если одна из функций в произведении является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с другой, то эквивалентность может быть потеряна, и результат может отличаться от ожидаемого.

  Пример:
  Рассмотрим предел:

  $$\lim_{x\to 0}(x^2\sin x).$$

  Здесь $\sin x\sim x$, но функция x^2 эквивалентна $o(x^2)$, что означает, что эквивалентность не будет выполнена в традиционном смысле.

- **Сложение или вычитание с различными порядками малости**: Если функции имеют разные порядки малости, эквивалентность может привести к неверным результатам. Например, $o(x)$ и $O(x^2)$ могут привести к разным результатам при сложении.