Матан 2 сем

## Вопр 1 Непрерывность ф-ции в т и на отр.

Пусть $y = f(x)$ опред. в $U_\partial(x_0)$, тогда $f(x)$ наз. непр. В т.$x_0$, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(x_0)$

$y = f(x)$ непр на (a;b), если f(x), если f(x) непр в ∀ т (a;b).

$y = f(x)$ непр на [a;b], если f(x), если f(x) непр в ∀ т (a;b) и непр справа в т. a и слева в т. b, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

Т-а: y = f(x) непр в т. $x_0$ т.к. $\lim\limits_{\Delta x\to\infty} \Delta y = 0$

1) f(x) непр в т. $x_0 \to \lim\limits_{x\to\infty} f(\Delta x + x) = f(x_0)$

   Д-во:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y = 0$$

2) пусть $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0 \to \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

## Вопр 2 Непрерывность суммы, произведения и частного двух ф-ций.

Пусть y = f(x) и y = g(x), кот. опред в $U_\partial(x_0)$, и непр в т. $x_0$ , тогда $y = c * f(x)$; $y = f(x) \pm g(x)$; $y = f(x) \cdot g(x)$; $y = f(x) \div g(x) (g(x) \neq 0)$

Д-во для *:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) * g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) * \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) * g(x_0)$$

т

## Вопр 3 Непрерывность сложной ф-ии

Т-ма: Пусть $y = f(\varphi(x))$. Если u = $\varphi(x)$ непр. в т $x_0$, а f(u) непр в т $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная ф-ия $y = f(\varphi(x))$ непр в т $x_0$

Д-во: Пусть п-ть $x_n \to x_0, x_n \neq x_0 \to u_n = \varphi(x_n) \to u_0 = \varphi(x_0) (\text{в силу непр.}) \to u_0 \to y_n = f(u_n) \to y_0 = f(u_0) \to \forall\ x_n \to x_0, y_n = f(u_n) = f(\varphi(x_n)) \to f(u_0) = f(\varphi(x_0)) \to \lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(u(x_0))$

## Вопр 4 Точки разрыва и их класс.

Т. $x_0$ наз т разрыва в 2 случ:

1.Если ф. опр не опред в некоторой ее окресности ( $(x_0 - \partial,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \partial)$

2. В т $x_0$ $f(x)$ не явл непр , т.е $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Классификация:

1)Устранимая т разрыва: т $x_0$ в кот $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$

2)Т.р 1-го рода: f(x) опр в $U_\partial(x_0)$ и $\lim\limits_{x \to x_{0-0}} f(x) = A$ , $\lim\limits_{x \to x_{0+0}} f(x) = B$ и они конечные

3) Т.р 2-го рода если хотя бы одна из $\lim\limits_{x \to x_{0-0}} f(x)$ , $\lim\limits_{x \to x_{0+0}} f(x)$ равна бесконечности

## Вопр 5 I Теорема Вейерштрасса.

Если y = f(x) непр на [a;b] то они огр на этом отр т.е $\exists\, c > 0$: $|f(x)| \leq c\ \forall x \in [a;b]$

Д-во(от противного): Пусть ф-ия неогр $\exists\, x_1[a;b]$ Делим на 2.На одной из половин ф-ия неогр, обозн ее границу $[a_2, b_2]$, тогда $\exists\, x_1[a;b] \geq 2$: Повт ту же процедуру. Получаем

$[a_n; b_n]$ на $x_n \in [a_n; b_n]$: $|f(x_n)| \geq n$. Получим $x_n$ и посл влож отр, $b_n - a_n = (b - a)/2^n \to 0$ $\to$ по т-ме о влож отр $\exists!$ с $\in$ всем этим отрезкам и $x_n \to c \to \lim\limits_{n \to \infty} x_n = c \to \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(c) \to |f(x_n)| \to \infty$ противоречие

## Вопр 6 II Теорема Вейерштрасса.

Если f(x) непр на [a;b], то $\exists\, x_1,\ x_2 \in [a;b]$: $f(x_1) = m, f(x_2) = M, m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a;b]$

## Вопр 7 Т-ма Больцмана-Коши

Пусть y = f(x) непр на [a;b] f(a) = A, f(b) = B(A<B), тогда $\forall C \in (A;B) \exists$т $x_0 \in (a;b)$: $f(x_0) = C$.

Д-во: g(x) = f(x) – c. $\left.\begin{matrix} g(a) = f(a) - C = A - C < 0 \\ g(b) = f(b) - C = B - C > 0 \end{matrix}\right\}$ $\exists$ т $x_0 \in (a;b)$: $g(x_0) = 0$

g$(x_0) = f(x_0) - C = 0 \to f(x_0) = C$

## Вопр 8 Опред производной. Односторонние производные

Пусть y = f(x) опред в $U_\partial(x_0)\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$– приращение ф-ии f(x) в т $x_0$. Если ∃ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = A$, то A – производная ф-ии в т $x_0$и обозн $A = f'(x_0) = \frac{dy}{dx} =$

$= y'(\,x_0)$. Правост произв f(x) в т $x_0$ наз $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и обозн $f'_+(\,x_0)$, так и лево ст, только с минусом.

Т-ма: Произв f(x) в т $x_0$ ∃ $т^3к$ ∃ обе одонст произв

## Вопр 9 Производные суммы, произв., и частного

1) (c*f(x)’ = c * f’(x)
2) (f(x)$\pm$ g(x))’ = f’(x) $\pm$g’(x)

Д-во:

Пусть y = f(x) + g(x), тогда $\Delta y = f(\,x_0+\Delta x) - (f(\,x_0) + g(\,x_0) + g(\Delta x + x_0\,)\,.\,(f(x)+g(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f+\Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(\,x_0) + g'(\,x_0)$

3) (f(x) * g(x))’ = f’(x)g(x) + f(x)g’(x)

Д-во:

$y = f(x)g(x); \Delta y = g(x_0+\Delta x) * f(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) = g(x_0+\Delta x)f(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) = g(x_0+\Delta x)(\Delta f) + f(x_0) * \Delta g$

$y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(g(\,x_0+\Delta x) * \frac{\Delta f}{\Delta x} + f(\,x_0) * \frac{\Delta g}{\Delta x}) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x_0+\Delta x) * \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} + f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} = g(\,x_0)\,f'(\,x_0) + f(\,x_0)g'(\,x_0)$

4) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f\prime(x)g(\,x) - f(x)g\prime(x)}{g^2x}$

Д-во:

$$\Delta y = \frac{f(\,x_0+\Delta x)}{g(\,x_0+\Delta x)} - \frac{f(\,x_0)}{g(\,x_0)} = \frac{f(\,x_0+\Delta x)g(\,x_0) - f(\,x_0)g(\,x_0+\Delta x)}{g(\,x_0+\Delta x)\;g(\,x_0)} = \frac{g(\,x_0)\Delta f - f(\,x_0)\Delta g}{g(\,x_0+\Delta x)\;g(\,x_0)};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(g(\,x_0) * \frac{\Delta f}{\Delta x} - f(\,x_0) * \frac{\Delta g}{\Delta x})}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(\,x_0)g(\,x_0+\Delta x)} = \frac{f'(x)g(\,x) - f(x)g'(x)}{g^2x}$$

## Вопр 10 Производная сложной ф-ии

Пусть дана $y = f(\varphi(x)), u = \varphi(x)$. Если ∃ u'= $\varphi'(x_0), f(u)$ − диф в т $u_0 = \varphi(x_0)$, т. е ∃ $f'(u_0)$, то ∃ $y' = f'(u_0) * \varphi(x_0)$

Д-во: $\Delta y = f(\varphi(x_0 + \Delta x)) - f(\varphi(x_0)\ \Delta u = \varphi(x_0 + \Delta x) \rightarrow (\Delta u + u_0 = \varphi(x_0 + \Delta x)). y'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta u} * \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} * \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u_0) * \varphi(x_0)$

$y = f(\varphi(x)), u = \varphi(x)$

\`$y' = f'(u) * u' = f'(\varphi(x)) * \varphi'(x)$

## Вопр 11 Дифференциал ф-ии одной пер-ой. Необх и дост условие дифф. ф-ии в точке.

Пусть, $y = f(x)$ опред в $U_\partial(x_0), f(x)$ наз дифф в т $x_0$, если её приращение можно предств в виде $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A * \Delta x + \alpha(\Delta x)$, где $A = const$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. $A * \Delta x$ – главная, лин. По оси Δx, часть приращ. наз дифф. f(x) в т $x_0$ и обзн $dy$ $(dy = A * \Delta x)$

Т-ма: f(x) дифф. в т $x_0$ т$^3$к ∃ f'( $x_0$).

Д-во: f(x) диф. В т $x_0 \rightarrow \Delta y = A * \Delta x + \alpha(x) * \Delta x \Big| : \Delta x \rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(A + \alpha(\Delta x)) = A = f'(x)$-Дост условие

Если ф-я дифф. в т $x_0$, то она непр. в этой точке – Необх. условие

## Вопр 12 Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши

## 12.1 Теорема Ферма

Путь y = f(x) опред в $U_\partial(x_0)$ и в т $x_0$ принимает на наиб.(наим.) знач, тогда если ∃ f'( $x_0$) = 0 ,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \exists\, f_+'(x_0) \geq f_-'(x_0)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0(\Delta x>0)} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{pmatrix}\Delta y < 0\\ \Delta x > 0\end{pmatrix} \leq 0( \lim \leq 0)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0(\Delta x<0)} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{pmatrix}\Delta y < 0\\ \Delta x < 0\end{pmatrix} \geq 0( \lim \geq 0)$$

Т.к $f_+'(x_0) = f_-'(x_0)$ то → $f_\pm(x_0) = 0 \rightarrow f'(x_0) = 0$

## 12.2 Теорема Ролля

Пусть y = f(x) опред и непр на [a;b] и дифф на (a;b). Если f(a) = f(b), то ∃ c (a;b): f'(c)=0

Д-во: В силу 2 теоремы Вейштрасса ∃ $x_1,\ x_2\ \in\ [a;b]: f(\ x_1)\ =\ m, f(\ x_2)\ =\ M.$

1 сл: Если m = M→f(x) = M = m = const → f'(x) = 0 ∀ $x\in\ (a;b)$

2 сл. Если m < M, тогда или $x_1 \in (a;b)$или$x_2$.Тогда, если $x_1$ =a, $x_2$= b f(a) = (b) → $m \neq$

$\neq M\ -$ неверно

Отсюда по т-ме Ферма, что f'( $x_1$) = 0 или f'( $x_2$) = 0

## 12.3 Теорема Лагранжа

Пусть y = f(x) опред и непр на [a;b] и дифф на (a;b), тогда ∃ т $c\ \in\ (a;b):\ f'(c)\ =\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Следствие: f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), $c\ \in\ (a;b)$ – ф-ла конечных приращений

Д-во:рассм вспм g(x) = f(x) – f(a) – k(x-a)($k\ =\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ =\ tg\alpha$) g(x) удовл услв тер Ролля

g(a) – знач g(x) в т a g(a) = f(a) – f(a) – k(a-a) = 0;

g(b) = f(b) – f(a) -k(b-a) = f(b) – f(a) -f(b) + f(a) = 0. По т Ролля → ∃ c:g'(c) = 0. g'(x) = f'(x) – 0 – k; g'(c) = f'(c)-k = 0→f'(c) = k

## 12.4 Теорема Коши

y = f(x) и y = g(x) опред и непр на [a;b] и дифф на (a;b) и $g'(x)\ \neq\ 0\ \forall\ x\ \in (a;b)$.Тогда ∃ т c ∈ (a;b): $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Д-во: пусть $h(x)\ =\ f(x)\ -\ f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. (g(x) – g(a)) . h(x) – непр на [a;b] и диф на (a;b).

h(a) = h(b) = 0 → то по т Ролля ∃ c: (a;b) :h'(c) = 0.

$$h'(x)\ =\ f'(x)\ -\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * g'(x).$$

$$f'(c)\ \ =\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * g'(c)|: g'(c);\ \ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

## Вопр 13 Правило Лапиталя

y = f(x) и y = g(x) опред и непр на [a;b] и дифф в $U_\partial(x_0)$ . Пусть $f(x_0) = g(x_0) = 0$, тогда если ∃ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = A$, то ∃ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Д-во: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_{0)}} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f\prime(c)}{g\prime(c)} = \lim\limits_{c\to x_0} \frac{f\prime(c)}{g\prime(c)} = A$

## Вопр 14 Дост условия монотонности на интервале

Т-ма: Если f(x) дифф на (a;b) и f'(x) = 0 ∀ $x \in (a;b)$, то $f(x) = const$ на $(a;b)$

Д-во:Призв $x_0 \in (a;b)$ $y = f(x_0) = A$. ∀ $x \in (a;b)$ для $f(x)$ на отр [ $x_0$;x] вып условия т. Лагранжа → по след т Лагранжа $f(x) - (f\, x_0) = f'(c)(x - x_0), c \in (x_0, x)$. $f'(c) * (x - x_0)$ $\forall x$ $f(x) = f(x_0) = A$

Т-ма:Если f(x) диф. на (a;b) и $f'(x) \geq 0$ , то f(x) возвр. на (a;b), если f'(x)<0, то f(x) строго убыв.,если f'(x) ≥ 0, то f(x) убыв. На (a;b). f(x) строго возвр., если∀ $x_2 > x_1$, $x_1$, $x_2 \in (a;b) \to f(x_2) > f(x_{1)}$

Возвр-$f(x_2) \geq f(x_1)$ , ст. уб ∀ $f(x_2) < f(x_1)$, убыв $- f(x_2) \leq f(x_1)$.

Д-во: пусть $x_2 > x_1$, и$x_1, x_2 \in (a;b)$

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) * (x_2 - x_1), c \in (x_1, x_2)$(по т Лап.) $\to f'(c)(x_2 - x_1) > 0$
$\to f(x_2) >> f(x_1) \to f(x)$ возвр на $(a;b)$

## Вопр 15 Экстремумы ф-ии одной пер-ой. Необ и дост условие экстр

f(x) опред в $U_\partial(x_0)$ наз т лок макс, если $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in U_\partial(x_0)$ и т $x_0$- т лок мин если $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in U_\partial(x_0)$.Эти т – т экстем -

Необх. условие: Если y = f(x) опред в $U_\partial(x_0)$ и т $x_0$ явл т экстр ф-ии, то f'( $x_0$) = 0, если ∃ f'( $x_0$)(обрт не верно)

Д-во: Прямое следствие т-мы Ферма

1 дост условие: Пусть f(x) опред в $U_\partial(x_0)$ и дифф. ∀ $x \in (x_0 - \delta;\ x_0) \cup (x_0;\ x_0 + \delta)$, тогда, если f(x)'<0 ∀ $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ – т $x_0$- лок макс. Если f'(x) одного знак, то $x_0$- не экстр

Д-во:Следует из т-мы о монотоности ф-ии

Т в кот f'( $x_0$) $= 0$ или∄ $f'(x)$ − крит точки

## 2 дост условие

Пусть f(x) 2 дифф в окр $U_\partial(x_0)$. Пусть f'( $x_0$)=0,тогда, если же f''( $x_0$)<0, то $x_0$ – т макс, если f''( $x_0$) = 0, то усл не работает

## Вопр 16 выпуклость ф-ии одной переменной. Дост условие выпуклости(вверх, вниз) на инт. Точки перегиба

В1 Ф-ия y = f(x) наз выпуклой вниз на (a;b), если ∀ $x_1,\ x_2 \in (a;b)$ и $\forall\alpha \in [0;1]$ $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2) \ \le\ \alpha(f(\, x_1) \ +\ (1-\alpha) \ -\ f(\, x_2)$

$f(\, x_\alpha) \ =\ y_n;\ \ x_2 - \ \ x_1 =\ y_M - y_N \to 1-\alpha *(x_2 - \ \ x_1) \to \alpha * (x_2 - \ \ x_1) \to y_N \ = \ \alpha(f(\, x_1) + (1-\alpha) * f(\, x_2)$

В1 Ф-ия нащ выпуклой вверх если $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2) \ \le\ \alpha(f(\, x_1) \ +\ (1-\alpha) \ -\ f(\, x_2)$

В2 Ф-ия наз выпуклой вниз если ее график лежит выше ∀ касательной, проведенной в каждой точке этого интервала

В2 выпуклость вверх, если … график ниже каждой кос …

Дост условие Если y = f(x) 2 дифф на (a;b) и f’’(x)>0 ∀ $x \in\ (a;b)$, то f(x) выпукла вниз на (a;b); если f’’(x)<0 ∀ $x \in\ (a;b)$, то f(x) выпукла вверх на (a;b)

Д-во Рассмотрим $\Delta y - dy$вт$x \in (a;b)\Delta y - dy = f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x) * \Delta x$

По т Лагранжа f’(c)Δx – f’(x)Δx, где $c\ \in\ (x; x+\Delta x)\ -\ f'(x) * \Delta x$ = f’(c) -f’(x) * Δx f’’($\xi$)(c-x)Δx, $\xi$ ∈ (x;c) → Δy - dy >0, если f’’(x)>0, и Δy - dy < 0, если f’’(x)<0

Точка т перегиба ф-и f(x) наз т в кот выпукл вниз на выпукл вверх или наоборот

Необходимое условие нал т перегиба:Если т $x_0$ явл т перегиба и ∃ f’’( $x_0$), то f’’( $x_0$) = 0

Достаточное условие: Если y = f(x) 2 дифф в $U_\partial(x_0)$ и f’’(x) мен знак в т $x_0$ то т $x_0$ – т перегиба

## Вопр 17 Асимптоты графика ф-и

2 вида асимптот : верт и накл

Прямая x = $x_0$ наз верт асимптотой ф-и y =f(x), если f(x) опред $(x_0 \ -\ \delta, x_0) \cup (\, x_0; x_0 + \delta)$

И хотя бы 1 из $\lim\limits_{x\to\, x_0 \pm 0} f(x) \ =\ \infty$

Прямая y = kx + b наз накл ас при x→∞, если $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (kx - b)\big) = 0,$ и асмп при x→$-\infty$, если $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - (kx - b)\big) = 0,$

Что бы найти k нужно $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}\ b \ =\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$

Если 1 lim ∃ и конечен, и 2 lim ∃ и конечен то у f(x) ∃ накл ас y = kx +b если хотя бы 1 ∄

Или равен беск то накл ас ∄

## Вопр 18 Эластичность ф-ции одной переменной(опред и смысл эластичности)

y = f(x); Δy = f( $x_0 + \Delta x$) – f( $x_0$); $\frac{\Delta y}{f(x_0)} = \frac{\Delta y}{y_0}$-отн приращ ф-ии $\frac{\Delta x}{x_0}$ – отн приращ аргумента

Эластичностью ф-ии f(x) в т $x_0$ наз ($E_y(x_0)$)

$E_y(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta y/y_0)}{(\Delta x/x_0)}$. f'( $x_0$) = $\frac{x_0}{y_0} * y'(x_0)$

Смысл: Эластичность показывает насколько процентов изм значение ф-ии, при увел аргумента на 1 %.

## Вопр 19 Понятие ф-ии нескольких переменных. Производственная ф-ия Кобба – Дугласа

Если каждой паре(x;y) значений двух перме-х ,y из некоторого мн-ва D соотв. Одно опреж значение пер z, то говорят, что z – ф-ия двух перменных

### Ф-ия Кобба- Дугласа:

$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где Y – выпуск продукции; A – тех коэфф; K – затраты капитала; L- затраты труда; $\alpha$ и $\beta$ – эластич выпуска по капиталу и труду соотв

## Вопр 20 Расстояние между т в $R^n$, сход послед т в $R^n$. Откр и замк мн − во в $R^n$

Пусть даны M( $x_1, \dots, x_n$) и $N(y_1, \dots, y_n), N, M \in R^n$ Расст между N и M наз $\rho(M,N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

С-ва :

1) $\rho(M,N) \geq 0$, и $\rho = 0$, т$^3$к $N = M$
2) $\rho(M,N) = \rho(N,M)$
3) $\forall M,N,K \rho(M,N) + \rho(N,K) \geq \rho(M,K)$

Откр шаром R = $\varepsilon > 0$ с центром в т $M_0 \in R^n$ наз мн. Т. $M \in R^n$: $\rho(M,N) < \varepsilon$

Пусть пол-ть т $M_k \in R^n$, т.е. $M_1, M_2, \dots M_k \dots$. П − ть$M_k$сх − сякт$M_0 \in R^n$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(M_k, M_0) = 0$. $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M_0$, или $M_k \to M_0$.

Пусть X - нект мн-во т в $R^n$ .Мн. X наз огр если∃ c $> 0$: $\rho(M,N) \leq c \ \forall x \in X$

Т M ∈ X (X- нект мн.т ∈ $R^n$) наз внут т. Мн-ва X, если ∃ $\varepsilon > 0$:все т N∈ $B_\varepsilon(M) \in X$. M- внеш ∈ X, если ∃ ? > 0 : $\forall N \in B_\varepsilon(M), N \cancel{\in} X$. $M$ наз гран т мн − ва $X$, если ∃ ∀ $\varepsilon >$ 0: $B_\varepsilon(M)$ сод т $\in X$ и не $\in X$.

Мн. X наз замнкт, если оно вклю в себя все свои граничные точки. X – откр мн., если ∀ т явл внут

## Вопр 21 Передел ф-ии неск переменных в т. Непр ф-ии неск пер-х в т и на мн-ве.

Пусть т $M_0 \in R^n - \text{преддля, тогдачисло} A \text{наз} lim y \text{вт} M_0, \text{если} \forall \text{посл} M_k: M_k \in X, M_k \to M_0, \text{соотвпослзнчф} - \text{ии} y_k = f(M_k) \to A$

$\lim_{k\to\infty} y_k = A$ $\lim_{M\to M_0} f(x_1, ..., x_n) = 0$

Ф-ия y = f(M) = f($x_1$,…, $x_n$) наз непр в т $M_0$, если она опред в этой точке и

$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$

y = f(M) непр на X ∈ $R^n$, если она непр в ∀ $M \in X$

Т-мв: Если f($x_1$,…, $x_n$) непр на огр и замнк мн $X \in R$, то

А) она огр на X

Б) $\exists M_1, M_2 \in X: f(M_1) = m, f(M_2) = M$, где $m$ наим знач $y$ на $X, M -$ наиб

## Вопр 22 Частные пр-е 1 порядка ф нескольких переменных

Пусть y = f($x_1$,…, $x_n$) опр в $B_\varepsilon(M_0), M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. $\text{Частный приращ ф} - \text{ии по пер }$ $x_i$ в т $M_0$ наз вел $\Delta i y = f\ (x_1^0, ..., x_{i+\Delta x}^0, ..., x_n^0)$-f$(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$

Частной произв ф y по $x_i$ наз $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta i y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}(M_0) = y_k{}'(M_0)$ (Если $lim$ ∃ и он конечен)

Для случая 2-х пер Z = f(x, y), $M_0(x_0, y_0), \Delta_x Z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$

$\Delta_y Z \to f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \text{тоглапоопред} \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = Z'x$

$\frac{\partial Z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_y Z}{\Delta y} = Z'y$

## Вопр 23 Экст ф-и нескольких переменных. Необх и дост условие экст (для ф-и 2 пер-х)

f($x_1, \dots,\ x_n$) опр в $B_\varepsilon(M_0), M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = B_\varepsilon(M_0). M_0 - \text{тлокмакс, если} f(M_0) \geq f(M) \forall M \in B_\varepsilon(M_0). M(x_1, \dots, x_n). M_0\ - min, \text{если} f(M_0) \leq f(M) \forall M \in B_\varepsilon(M_0)$

Т лок мин и макс – т лок экстр

### Необх условие:

Если в т $M_0$ ф-я Пусть y = f($x_1, \dots,\ x_n$) ∃ и имеет экстр и дифф в этой т, то все частные произв $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0\ \underline{i = 1, \mathrm{n}}$

### Д-во: Расмм частное приращ ф-и y по пер-й $x_{\ 0}$; в т $M_0$

$\Delta_{xi} * y\ =\ (x_1^0, \dots, x_{i+\Delta x}^0, \dots, x_n^0)$-f($x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$) Рассм Z( $x_i$) = $(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)$ Z имеет экст в т $x_i^0 \to Z'(x_i^0)\ =\ 0. Z'(x_i^0,)\ =\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1^0, \dots, x_{i+\Delta x}^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_{xi} y}{\Delta x} = \ \frac{\partial y}{\partial x_i}(M_0) \to\ \text{т к}\ Z'(x_i^0,)\ =\ 0.$

### Дост условие: пусть дана z = f(x, y) и $Z_{xy}(x_0, y_0)0$ тогда если част произв 2 порядка

$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ x_0, y_0)\ =\ B$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ x_0, y_0)\ = A$, и $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\ x_0, y_0)\ =\ C$ и $\Delta \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix}\ =\ AB\ -\ C^2 > 0$

То у ф-и z есть экстр в т $(\ x_0, y_0)$, причем при A > 0 $(\ x_0, y_0)\ -\ \text{т}\, min,\ A < \ 0(\ x_0, y_0)\ - max$, если Δ<0, то в т $(\ x_0, y_0)$ -*нет* экстр; если Δ = 0 то неизв

## Вопр 24Дифф ф-и нескольких пер-х

Z = f(x) опре в $B_\varepsilon \ M_0(\,x_0;\ y_0)$ Полным приращ ф − ии в т $M_0$ наз $\Delta Z \ = \ f\ (\,x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) \ - f(\,x_0;\ y_0)$

Ф-я Z наз диф в т $M_0$, если $\Delta z \ = \ (A * \ \Delta x + \ B \ * \ \Delta y) + \alpha(\Delta x; \Delta y) * \rho$, где $A, B \ = \ const;\ \alpha(\Delta x, \Delta y) \ \to \ 0$ при $\rho \ \to \ 0, \rho \ = \ \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Т-ма: Если ф-ия Z диф в $(\,x_0;\ y_0)$, то ∃ част произв $\frac{\partial Z}{\partial X}(\,x_0, y_0);\ \frac{\partial Z}{\partial y}(\,x_0;\ y_0)$ и $A \ = \ \frac{\partial Z}{\partial x}(\,x_0;\ y_0), B \ = \ \frac{\partial Z}{\partial X}(\,x_0, y_0)$

Д-во Δy = 0. $\Delta_x Z \ = \ f(\,x_0 + \Delta x, y_0) \ - \ f(\,x_0, y_0) \ = \ A\,\Delta x \ + \alpha\ (\Delta x; 0) * |\Delta x| : \Delta x$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x} \ = \ (A + \alpha(\Delta x; 0)) \ = \ A + \ 0 \ = A$ т.к $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = \ \frac{\partial z}{\partial x}(\,x_0, y_0)$

Если рассм Δx = 0 и :Δy, то полуим $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y Z}{\Delta y} = \ B($т к $\alpha \ \to \ 0\ )$

Следствие: dz $= \frac{\partial z}{\partial x}(\,x_0, y_0)\Delta x \ + \ \frac{\partial z}{\partial x}(\,x_0, y_0)\Delta y$ тк $\begin{cases}\Delta y \ = \ dy \\ \Delta x \ = dx\end{cases}$, то в произв т (x, y) dz $= \ = \frac{\partial z}{\partial x}dx + = \ \frac{\partial z}{\partial y}dy$

Т-ма 2: Если ∃ $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в нект окр т $(\,x_0, y_0)$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ прииз в т $(\,x_0, y_0)$, то z = f(x, y) диф в т $(\,x_0, y_0)$

## Вопр 25 Произв сложной ф-и от нескольких переменных

Т-ма: Пусть Z = f(x, y) , x ?(t), y $= s(t)$ пусть $x(t), y(t)$ диф в т $t_0 \ x_0 \ = \varphi(t_0), y_0 \ = s(t_0)$. Пусть $z \ = \ f(x, y)$ дифф в т $(\,x_0, y_0)$, тода сложная ф-ия z(t) = f(?(t)) тогда ∃ $\frac{dz}{dt}(t_0) \ = \frac{\partial z}{\partial x}(\,x_0, y_0) \ * = \ \frac{\partial x}{\partial t}(t_0) + = \ \frac{\partial z}{\partial y}(\,x_0, y_0) \ * = \ \frac{\partial y}{\partial t}(t_0)$

Д-во: т к Z диф в $(\,x_0, y_0)$→Δz = = $\frac{\partial z}{\partial x}(\,x_0, y_0)\Delta x + = \ \frac{\partial z}{\partial y}(\,x_0, y_0)\Delta y \ + \ \varepsilon$(Δx;Δy)∗ $\rho$, где $\varepsilon \to 0$, при $\rho \to \ 0\,. Z_y{}' \ * = \ \frac{\partial y}{\partial t} \ + \ \varepsilon(\Delta x; \Delta y) \ * \ \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 \ + \ (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2} \ = \ Z'_x(\,x_0, y_0) \ * \ x'(t_0) \ + Z'_y(\,x_0, y_0) \ * \ y'(t_0) \ + \ 0 \ * \ \sqrt{(x')^2 \ + \ (y')^2} = \frac{\partial z}{\partial x}(\,x_0, y_0) * \frac{dx}{dt}(t_0) \ + \ \frac{\partial z}{\partial y}(\,x_0, y_0\ ) \ * \ \frac{dy}{dt}(t_0)$

## Вопр 26 Градиент и производная по направлению для ф-ии нескольких переменных

Пусть z = f(x;y) диф в нек $B_{\varepsilon}(x_0;\ y_0)$, тогда градиентом ф − ии $z$ в т $(x_0;\ y_0)$ наз вектор $\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ $grad\ z\ =\ gard\ f(x;y)\ y\ =\ f(x_1, \ldots, x_n)$, то $grad\ y\ \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)$.

Пусть z = f(x;y) опр в нект $B_{\varepsilon}(x_0;\ y_0)$, дифф в т $(x_0;\ y_0)$, S(m,n) – единичной l, $|S|$ = 1.

Произв по напр S назв $\lim\limits_{t\to 0} \frac{(x_0+tm; y_0+tn)-f(x_0; y_0)}{t} \to$ при $t \to 0, \Delta x\ =\ tm, \Delta y\ =\ tn \to 0) \to \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) * tm + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) * tn\ +\ \varepsilon(\Delta x;\ \Delta y) *\ \rho\right)\right) \to (p\ =\ \sqrt{\Delta} x^2\ +\ \Delta y^2\ +\ \sqrt{t m^2}\ +\ tn^2\ =\ |t|\sqrt{}\, m^2 +\ n^2\ =\ |t|;\ \frac{|t|}{t} = \pm 1 \to \lim\limits_{t\to 0} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) * m\ +\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) * n\ =\ grad\ Z(x_0, y_0)\ *$ S. $\frac{\partial z}{\partial S}\ =\ grad\ (x_0, y_0)\ *$ S

## Вопр 27 Определине первообр и неопр интеграла интеграла. Таблица неопределённых интегралов

Ф-ия F(x) наз первообр для f(x) на (a;b) если произв F(x) = f(x)$\forall x \in (a; b)$

Т-ма: ∀ 2 перв одной и той же ф-ии f(x) разл на постоянную т.е. если F( $x_1$) и F( $x_2$) – перв для f(x), то F( $x_1$) – F( $x_2$) = const

Д-во: Расмм g(x) = $F_1(x) - F_2(x)$; g'(x) = $F_1$'(x) - $F'_2 = f(x) - f(x) = 0 \forall x \in (a; b) \to g(x) = const \to F_1(x) - F_2(x) = 0$

Мн-во всех перв ф-й f(x) можно записать в виде F(x) + C; где F(x) – перв ф-ий f(x), C – пр const

Неопр интегр от ф f(x) наз мн всех её пер-х

Обзн: $\int F(x)dx\ =\ f(x)\ + C$, где $F(x)\ -$ некотор приозв

## Вопр 28 Св-ва неопр интеграла

1) $(\int f(x)dx)\ =\ f(x)$
   Д-во $(\int f(x)dx)'\ =\ (F(x)\ +\ c)'\ =\ F'(x)\ +\ 0\ =\ f(x)$
2) $\int F'(x)dx\ =\ F(x)\ +\ C.$
   Д-во: $\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$
3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, k \neq 0$
   Д-во: $\int kf(x)dx\ =\ \int kF'(x)dx = \int (kF(x))'dx\ =\ kF(x)\ +\ C\ =\ k(F(x) + C)\ +\ k\int f(x)\, dx$
4) $\int f(x) \pm g(x) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
   Д-во Пусть F(x) – перв для f(x) (F'(x) = f(x)); G(x) – перв для g(x) (G'(x) = g(x))→F(x) + G(x) -–перв для f(x) + g(x) т к (F + G)' = f+g, то (F(x) + G(x)) + C

## Вопр 29 Методы интегрированиия: замены переменной и интег по частям

Замена переменной:

Т-ма Если $\int f(x)dx = F(x) + C\ (x \in (a;b))$, тогда $\int f(\varphi(t) * \varphi'(t) * dt = F(\varphi(t)) + c, t \in (\alpha;\beta)$

Д-во по условию $F'(x) = f(x)$. Найдем $F(\varphi(t))' = F'(\varphi(t) - \varphi'(t)) = f(\varphi(t)) * \varphi'(t) \to F(\varphi(t))$ $-$ перв для $F(\varphi(t) - \varphi'(t))$.

Пусть известно $\int f(x)dx = F(x) + C$, тогда $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{d}F(ax+b) + C$

Д-во t = ax +b; x = $\frac{t-b}{a}$; $dx\ \frac{1}{a}dt$; $\int f(t) * \frac{1}{a} * dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

По частям:

Пусть u(x) и v(x) - 2 урв на (a;b) ф-ии тогда справ ф-ла интегл по частям $\int u * dv = u * v - \int u * du$

Д-во: d(u*v) = (u*v)’ *dx = (uv’ + vu’)dx = uv’dx + vu’dx = udv + vdu.

$$\int d(uv) = \int u * dv + \int v * du$$

## Вопр 30 Интегр рац дробей

Рац дробью R(x) = $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1x + b_2\,x^2 + \ldots + b_m\,x^m$ и $Q_n(x) = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + \ldots + a_m\,x^m$

Т-ма $\forall$ непр рац дробь $R(x)$ может быть предствлен ! образом в виде $R(x) = S_{m-n}(x) + \frac{T_k(x)}{B_n(x)}$, где $S_{m-n}(x)$ $-$ многочлен степени $m-n$, $T_k(x)$ много ст $k$ и $k < n$

Т-ма $\forall\ Q_n(x)!$ обр можно щаписать $Q_n(x) = a_n\ (x-x_1)^m.(x-x_2)^{m_2} \ldots (x^2 + p_1x + \varphi_1)^{k_1} * \ldots * (x^2 + p_2x + \varphi_2)^{k_2} \ldots$, и $\forall\ (x^2 + p_ix + \varphi_i)$ $-$ нет корней $(D < 0)$

Т-ма $\forall$ мн $Q_n(x)$ с действ коэф. в поле компл числе $C$ имеет ровно $n -$ корнем, то $(\alpha - i\beta)$ $-$ тоже корень кратности k

Т-ма $\forall$ прав р. д. $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ может быть ! образом предств суммой простых дробкй

Числ совп, когда равны коэф. Пр один степенях

## Вопр 31 Опред определённого интеграла

Пусть y = f(x) опр на [a;b]. Разобъем [a;b] на более мелкие отрезки т $x_i$ Обозн $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$-длинна $[x_{i-1};\ x_i]$ Δ - диаметр разбиения Внутри каждого отрезка выберем произв образом т $\xi_i \in [x_{i-1};\ x_i]$. Набор т $(x_i;\ \xi_i)$ будем наз разбиемием $[a;b]$. $S(x_i,\ \xi_i)$

Число I – lim интегр сумм при Δ→0, если $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \forall$ разб $c\ \Delta < \delta$ будет выполн $|S(x_i,\ \xi_i) - I\ | < \varepsilon$. $\lim\limits_{\Delta\to 0}(x_i,\ \xi_i) = I$

Опр.: Опред инт от ф-ии f(x) по [a;b] наз $\lim\limits_{\Delta\to 0}(x_i,\ \xi_i) = I$, если этот lim ∃ и конечн. Если lim ∃ и конечн, то f(x) наз интегр по Риману на [a;b]. I = $\lim\limits_{\Delta\to 0}(x_i,\ \xi_i) = \int f(x)dx$

## Вопр 32 Св-ва оперд интеграла Т-ма р среднем значении ф-ии неопр на отр

1) $\int_a^b f(x) = \int_a^b f(t)dt$
2) $\int_a^b (f)dx = 0$
3) $\int_a^b cdx = c*(b-a), c = const$
4) $\int_a^b (f)dx = -\int_a^b (f)dx$
5) $\int_a^b c(f)dx = c * \int_a^b (f)dx$
   Д-во $(x_i,\ \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} c * f(\xi_i) * \Delta_i = c * \sum(\xi_i) * \Delta_i \to c * I = c * \int_a^b (f)dx$
6) Если y = f(x) и y =g(x) и обе интерг на [a;b], то $\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(\ x_0)dx + \int_a^b g(x)dx$
   Д-во: $\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) + g(x_i)) * \Delta_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) * \Delta_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
7) Если f(x) интер на [a;c] и [c;b], то она интер на [a;b] и $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\mathrm{c}} f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
8) Т-ма о ср знач ф-и непр на отр:
   Пусть y = f(x) непр на [a;b] тогда ∃ т c ∈ [a;b]: $\int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a)$
   Знач f(c) = $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ назсрзначф − и$[a;b]$
   Д-во: Расмм S$(x_i,\ \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} c * f(\xi_i) * \Delta_i$ – интег сумма для f(x) на [a;b] в суммк 2 – й т-мы Вейерштрасса f(x) $\le M$ и $f(x) \ge m$ $\sum_{i=1}^{n} m = m(a-b) \le \sum_{i=1}^{n} c * f(\xi_i) * \Delta_i \le \sum_{i=1}^{n} M\ \Delta_i \to m(b-a) \le S(x_i,\ \xi_i) \le M(b-a)|:(b-a)$. Перейдем к $\lim\limits_{\Delta\to 0} m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M \to$ по т Больцано − Коши ∃ c $\in (a;b) : f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

## Вопр 33 Т-ма о существовании первобр для непр ф-ии

Т-ма Пусть y = f(x) непр [a;b], тогда ф-ия $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$, явл первообр для f(x), т е $\varphi$’(x) = f(x) $\forall\, x \in (a;b)$

Д-во: Пусть $x_0 \in (a;b)$, тогда$\Delta\varphi = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^a f(t)\,dt + \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = \Delta\varphi = f(c) * \Delta x$, где$c \in (x_0; x_0+\Delta x)$

$\varphi$’(x) = $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x_0)$, т к $c \to x_0$ $\lim\limits_{c\to x_0} f(c) = f(x_0) \to \varphi'(x) = f(x)\ \forall x \in (a;b)$

## Вопр 34 Формулы Ньтона-Лейбница

Т-ма: Если y = f(x) непр на [a;b], то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $f(x) - \forall\, x \in (a;b)$

Д-во Пусть F(x) – любая первообр для f(x) Т к 2 любые первообр отл на const, то F(x) = $\varphi$(x)+C. F(b) = $\varphi$(b)+C F(a) = $\varphi$(a) + C → F(b) – F(a) = $\int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)\,dt$

## Вопр 35 Интегр по частям и метод замены переменной ы опр инт-е

Т-ма пусть $\int_a^b f(t)dt$ = F(b) – F(a) (F(x) – первообр для непр f(x) на [a;b]) Пусть x = $\varphi$(t) диф на [$\alpha$;$\beta$] и $\varphi$’(t) – непр на [$\alpha$;$\beta$]. Пусть $\varphi(\alpha)$ = a $\varphi(\beta)$ = b, тогда $\int_\alpha^\beta \mathrm{a}(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$

Д-во F($\varphi(t)$) – первообр для f($\varphi$(t))$\varphi$’(t), тогда по т Н.-Л → $\int_\alpha^\beta \mathrm{a}(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_a^b f(x)dx$

По частям

Т-ма $\int_\alpha^\beta udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv$

Д-во d(vu) – udv + vdu $\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu\,(d(uv) = (u * v)^a\Big|_a^b = u(b) * v(b) - u(a)v(a)$

## Вопр 36 Геом приложения опред интеграла(вычисление площади, объема фигуры вращения и длинны дуги кривой)

Если $f(x) \geq 0$ непр на $[a; b]$, то $S$ фигуры огран графиком $y = f(x)$, осью $O_x$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисл по ф-ле $S = \int_a^b f(x)dx$

Если $\exists$ f(x) и g(x), то S между графиками ф-ий f(x) и g(x), $f(x) \geq g(x)$, считается по $\text{ф} - \text{ле}$ $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

Если $f(x) \leq 0$, то $S = -\int_a^b f(x)dx$

Тело, полученное при вращении плоской фигуры вокруг $O_x$

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2)\, dx$$

Пусть дана кривая y = f(x) непр и дифф на [a;b] Длинна дуги $L = \int_a^b \sqrt{(1 + (f'(x))^2)}\, dx$

## Вопр 37 Несобств интегралы первого и второго рода

Путь y = f(x) опред на $[a; +\infty)$ и интег на [a;b] $\forall\, b > a$ то они по опр $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ . Если lim ∃ и конечн то интег наз сх-ся, если lim не сущ или равен бесконечности – рас-ся

Пусть y = f(x) на [a;b) интег на [a;c] $\forall\, c < b$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$. По опр $\int_a^b f(x)dx = = \lim\limits_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$ Если lim ∃ и конечн -сх-ся, если нет или равен бесконечности, то рас-ся

## Вопр 38 Приближенное вычисление опред интег по ф-ле трапеций

Пусть дан $\int_a^b f(x)dx$ Разделим [a;b] на n равных частей с шагом $h = \frac{b-a}{b}$, тогда приближ значение знач $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$, где $x_i = a + i * h, i = 0, \dots, n$; или же $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n))$

## Вопр 39 Дифф уравнения(осн опред)

Пусть y = y(x). Дифф уравн n-го порядка наз урав содерж независимую переменную x неизв функцию y ее произв до порядка n включительно ( $y', y'', \ldots, y^{(n)}$) Порядок старшей производной опред порядок диф уравнения

Реш диф ур-я наз ф-я y = $\varphi$(x), n-раз диф-мая при подстановке кот в ди фур получается тождественно, т.е F(x, $\varphi$(x), $\varphi$'(x),... $\varphi^{(n)}$(x)) = 0

Если y = $\varphi$(x) – решение диф ур, то его график наз интег кривой

Общим реш д. ур. n-го пор F(x, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ) наз ф-я y = $\varphi$(x, $c_1, c_2, \ldots c_n$)

Зав от x и n  произв постоянных явл. Реш уравнения при ∀ знач произв постоянных $c_1, c_2, \ldots c_n$

## Вопр 40 Дифф урав первого порядка Общее частное решенияю Задача Коши. Т-ма о сущ и ед решения задачи Коши

F(x, y, y') = 0, y'(°) = f(x,y) – д ур 1-го порядка разреш отн y'

Задачей Коши для ° наз задача отысканая решения этого урав удовл усл y( $x_0$) = $y_0$, кот наз нач условия,т. е $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow$ задача Коши

Т-ма (Коши-Пикаро): Пусть D – нек область на пл-ти, ( $x_0, y_0$)∈D

Если f(x, y) непр в обл D и ∃ непр произв $f'_y(x,y)$ в обл D, то ∃ $\varepsilon$>0:

В $B_\varepsilon(x_0, y_0)$∃! реш$y = \varphi(x)$

Общ решение д ур 1-го порядка – семейство ф-ий содерж одну произв константу, кот. При подстановке в уров обращет в его в тождество. Y =$\varphi$(x, c), где C- const – общ реш. Частное реш получ из общего,если задано, условие y( $x_0$) = $y_0$

## Вопр 41 Дифф ур 1-го порядка с разделяющимся переменными

Д ур вида $\alpha_1(x)b_1(y)y' \pm \alpha_2(x)b_2(y) = 0 \rightarrow$ наз д ур с разд пер

Для реш ур запишем его в дифф: $y' = \frac{dy}{dx}$, подставимвури$dx$, получим: $\alpha_1(x)b_1(y)y' * \frac{dy}{dx} \pm \alpha_2(x)b_2(y) = 0| * dx \rightarrow$
$\rightarrow \alpha_1(x)b_1(y)dy \pm \alpha_2(x)b_2(y)dx = 0$ Разделим переменные так чтобы при dy были ф-и, зависящие от y, при dx-только отх(:$a_1(x)b_2(y)$)→ $\frac{b_1(y)\prime dy}{b_2(y)} \pm \frac{a_2(x)dx}{a_1(x)} = 0$

$\int \frac{b_1(y)by}{b_2(y)} \pm \int \frac{a_2(x)dx}{a_1(x)} = C$ Вычисляя получим : $F_1$(y) + $F_2(x) = C$ – общ инт д ур

## Вопр 42 Линейные дифф урав 1-го порядка и урав Бернули. Методы их решения

Д ур вида a(x)*y'$\pm b(x)y = C(x) -$ л д ур 1 $-$ го порядка

1) Будем искать произв в виде 2-ух ф-ий y(x) = u(x)*v(x) = uv

y' = u'v + v'u. a(x)*(u'v)+(a(x)(uv')+b(x)(u*v)) = cx → u(a(x)+b(x)v) = 0→

→ a(x)*v' + b(x)*v = 0, v' = $\frac{dv}{dx} \to \frac{a(x)dv}{dx} + b(x)v = 0| * dx \to a(x)dv + b(x)v * dx = 0|:((a(x)v) = \frac{dv}{\text{п}v} + \frac{b(x)}{a(x)} * dx = 0 \to \int \frac{dv}{v} + \int \frac{b(x)}{a(x)} dx = c = 0 \to lnx +$

$+\int \frac{b(x)}{a(x)} dx = 0 \to V = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$ Подставим v в ур a(x)*u'v = c(x) → u' = $\frac{c(x)}{a(x)} \to$

$\to u' = \frac{c(x)}{d(x)v} \to u = \int \frac{c(x)}{a(x)v} \to y = u * v -$ общ реш исх д ур

2) Можно реш методы вращ произв const

Урав то же: Если c(x) = 0 -однород ур

1 Небх общ реш соотв однор ур-я: $xy' - y = 0 \to xdy - ydx = 0 \to \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0 \to \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = ln\, C \to lny = lnx = lnc \to ln \frac{y}{x} = ln\, c \to y = c * x$

2 счит произв const ф-ии x: y = C(x) * x→y' = C'(x) + C→x($C_x$' + C) - $C_x$ = $x^3$→xC'x+xC – Cx= $x^3$→C' = x, C = $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C_1 y, y = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) x$

Уравн Бурнули: Ур вида a(x)y'+b(x)y = a(x)* $y^\alpha, \alpha \neq 0$; 1(если 1, то лин ур )

Можно так же решить, как и мин ур через y = uv

## Вопр 43 Лин дифф ур второго порядка Лн.з решения. Общее решение однородно уравнения второго порядка

a(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)- л.д ур 2-го порядка(1); a(x), p(x), q(x), f(x)- нект заданные ф-ии, f(x) – правая часть. Если f(x) = 0 – однор ур

Т-ма: Если $y_1(x)$и$y_2(x) -$ решоднорур$a(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, то$\forall C_1, C_2 - (const) y = C_1 y_1 + C_2 y_2$тоже явл реш ур

Д-во: y' = $C_1 y'_1 + C_2 y''_2 \to a(x)(C_1 y''_1) + p(x)(C_1 y'_1 + C_2 y'_2) + q(x) * (C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1(a(x)y'_1 + p(x)y_1{}' + q(x)y_1) + C_2(a(x)y''_2 + p(x)y'_2 + q(x)y_2 = 0 + 0$

Ф-ии $y_1$и $y_2 -$ л нз

Общим реш ур 2 наз ф-ия y = $\varphi$(x, $C_1, C_2$) зависимая от x и 2-ух произв const $C_1$ и $C_2$: любое частное решение знач произв const, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где $C_1, C_2 -$ пр $const$

Т-ма ¬ $y_1(x)$ и $y_2(x)$ $-$ л нз реш ур (2), тогда общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где $C_1, C_2$ $-$ пр $const$

# Вопр 44 Общее решение однородного уравнения второго порядка с постоянным коэфф

a(x) = 1, p(x) = p, q(x) = q, p, q – const y'' + py' + qy = 0(3)

Возмем ф-ии y = $e^{\lambda x}$ и подставим в (3), y' = $\lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$:

$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q = 0), e^{\lambda x} \neq 0, \text{ф} - \text{ия} y = e^{\lambda x}\text{явл}$ решением, если $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \text{Ур} \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \text{назхарактеристикамиур} -$ емсоотвдур(3)н $= e^{\lambda x}$явлрешением(3), если $\lambda -$ корень хар $-$ ого ур $-$ я

Возможны 3 случая :

1 D = $p^2 - 4q > 0$, тогда ∃ 2 разложение корня $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $y_1 = e^{\lambda_1 x}$

$y_2 = e^{\lambda_2 x}\text{явлреш}(3) y_1 \text{и} y_2 - \text{лнзтк} \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq const$

→ Общ урав (3) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

2 D = $p^2 - 4q = 0$, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}, y_1 = e^{\lambda x} = e^{-\frac{p}{2}x}$ - реш, $y_2 = x * e^{\lambda x}$

Общ рещение y = $e^{\lambda x}(C_1 + C_2)$

3 D<0, тогда хар-ое ур имеет 2 копл-сопр корня $\lambda_{1,2} = -\frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} = -\frac{p \pm \sqrt{(|D|)} * i}{2}$.
$Z = a + ib, e^z = e^{a+ib} = e^a * e^{ib} = e^a(cosb + i * sinb)$
$e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x}(cos\beta + isin\beta), x = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{(|D|)}}{2}$. В этом случ ф-ия $y_1 =$
$= e^{\alpha x} * sin\beta x, y_2 = e^{\alpha x} * cos\beta x - \text{лнзрешур}(3)\text{тк} \dfrac{y_1}{y_2} = tg(\beta, x) \neq const$
Общ реш $y = C_1 e^{\lambda x} sin\, \beta x + C_2 e^{\lambda x} cos\, \beta x = e^{\lambda x}(C_1 sin\, \beta x + C_2 cos\, \beta x)$

# Вопр 45 Метод вариации произвольных постоянных решения неоднор урав 2 порядка с постоянными коэфф

Наход общ реш:$y^n + py' + q = 0 \to y = C_1 y_1 + C_2 y_2, y_1, y_2 -$ л нз реш.
Будем считать $C_1, C_2$ зав от $x$, тогда $y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2$

$\neg\, C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0$, тогда $y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2, y'' = C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 y''_1 + C_2 y''_2 \to \left(C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2\right) + C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + p\left(C_1 y'_1 + C_2 y'_2\right) + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$
$= f(x) \to \left(C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2\right) + C_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + C_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) =$
$= f(x) \to C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x); \Delta = y_1 y'_2 - y_2 y_1' \neq 0$

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x) \end{cases} \to C'_1 = R(x), C'_2 = T(x), R(x) = \frac{-f(y_2)}{\Delta}, T(x) = \frac{f(y_1)}{\Delta}$$

$$C_1(x) = \int R(x)dx = F(x) + C_1$$

$$C_2(x) = \int T(x)dx = F(x) + C_2$$

# Вопр 46 Общее решение неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэфф со спец пр частью

1 f(x) $= P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

1 1 $\lambda = 0 -$ не явл корнем хар $-$ кого ур

Частное решение можно найти в виде многочлене $Q_n(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$, нах соотв однород ур $y'' + py' + qy = 0$, а $y_p -$ любое числ решение неоднр $y'' + py' + qy = f(x)$. Тогда общ реш неодн ур $y'' + py' + qy = f(x) -$ это $y = y_0 + y_p$

Д-во: $\begin{cases} y' = y'_0 + y'_p \\ y'' = y''_0 + y''_p \end{cases} \rightarrow y'' + py' + q = f(x) \rightarrow y''_0 + p(y'_0 + y'_p) + q(y_0 + +y_p) = f(x) \rightarrow 0 + f(x) = f(x)$

1 2 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ и $f(x) = P_n(x)$, тогда частное реш $y_0 = x * Q_n(x)$, $Q_n(x) -$ многочлен степ $n$ с неизв коэф

2 y'' + py' +qy = f(x)

2 1 Если f(x) $= e^{\alpha x} * P_n(x)$ Можно искать частное реш ур в виде $y_p = e^{\alpha x} * Q_n(x)$, при усл что $\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2$

2 2 Если $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 \neq \alpha$, то $y_p = e^{\alpha x} * x * Q_n(x)$

2 3 Если $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \alpha$, то $y_p = e^{\alpha x} * x^2 * Q_n(x)$

3 f(x) $= P_m(x) * e^{\alpha x} cos\beta x + Q_{n2}(x) e^{\alpha x} sin\beta x \left(\text{при} \lambda_{1,2} \neq \pm 2 \pm i\beta\right)$, где $Q_{n1}$ и $Q_{n2} -$ многчлчт $n$, $n - max(m, k)$

***Т-ма ¬ дано y = y'' + py' + qy =*** $\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{x})$, тогда част решего: $\boldsymbol{y_p} = = \boldsymbol{y_{p1}} + \boldsymbol{y_{p2}}$, где $\boldsymbol{y_1} -$ реш ур $\boldsymbol{y'' + py' + qy = f_1(x)}$, $\boldsymbol{y_2 - y'' + py' + q = f_2(x)}$

***Д-во*** $\boldsymbol{y'_p = y'_{p1} + y'_{p2}, y'_p = y''_{p1} + y''_{p2}. \; y''_{p1} + y''_{p2} + p(y'_{p1} + y'_{p2}) + q(y_{p1} + +y_{p2}) = (y''_{p1} + py'_{p1} + qy_{p1}) + (y''_{p2} + py'_{p2}) . \rightarrow f_1(x) + f_2(x)}$

## Вопр 47 Системы дифф урав

Сист д ур 1-го пор относ ф-ии $y_1(x), y_2(x), \dots$ , Назсиствида

$$\begin{cases} y'_1 \ = \ f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \ (1) \\ y_n{}' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Реш сист (1) наз набор из n-ф-ий $y_1 \ = \ \varphi_1(x), y_2 \ = \ \varphi_2(x), \dots, y_n \ = \ \varphi_n(x)$, при подст кот каждое ур сист обращ в тождество

Задачей Коши для (1) наз задача получения реш этой сист удовл нач усл

$$\begin{cases} y'_1(x_0) = \alpha_1 \\ y'_2(x_0) = \alpha_2 \\ y'_n(x_0) = \alpha_n \end{cases}$$

Общ решение (1) наз n-ф-ей $y_i = \varphi(x, C_1, C_2 \dots C_n), i = 1,2 \dots n$

## Вопр 48 Системы дифф уравнений второго порядка с постоянными коэфф

Сист д ур 2-го порядка с пост коэф относ ф-ией $y_1(x), y_2(x), y_n(x)$ наз сист ур вида

$$\begin{cases} y'_1 = \ a_{11}y_1 \ + \ a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y'_2 = \ a_{21}y_1 \ + \ a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \quad (2) \\ y'_m = \ a_{m1}y_1 \ + \ a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \end{cases}$$

Общее решение –

$$\begin{cases} y_1 = \ f_1(x, C_1, C_2) \\ y_2 = \ f_2(x, C_1, C_2) \\ y_n = \ f_n(x, C_1, C_2) \end{cases}$$

Частное реш – общее решение при некторых значениях произ пост C

Задачей Коши для сист второго порядка наз задача нахождения решения, при нач усл

$$\begin{cases} y_1(a) = y_{1a} \\ y_2(a) = y_{2a} \end{cases}$$

# Вопр 49 Понятие числ рядаи его суммы Примеры сх-ся и рас-ся числовых рядов

Ч р наз сумма $a_1 + a_2 \ldots + a_n, a_i -$ эл − ты ч посл, $\mathrm{a}_n -$ общий член ряда n-ой част суммой ч.р. суммой ч.р. 1-х и чисел этого ч р $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Если ∃ конечный суммой $\lim\limits_{n\to 0} S_n = S$, то числи S наз суммой ч р,а ряд наз сх-ся Если $\lim\limits_{n\to 0} S_n$ не сущ или $= \infty$, то ряд сх-ся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots - \text{сх} - \text{ся}$$

$$b_1 + b_1 q + b_1\, q^2 + \ldots + b_1\, q^{n-1} - \text{рас} - \text{ся}$$

## Вопр 50. Теорема о сходимости суммы двух сходящихся числовых рядов. Необходимое условие сходимости числового ряда.

$a_1 + a_2 + .. + a_{n+1} + a_{n+2} + ..$ ①

**Теорема:** Числовой ряд сходится <=> сходится любой его остаток.

**Док-во:** → Сходится => $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ $r_k = a_{k+1} + a_{k+2} + ..$ Для $r_k$ $\sigma_m$ – частичная сумма = $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+m}$. $\sigma_m = S_{k+m} - S_k$ => $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m = \lim\limits_{m\to\infty}(S_{k+m} - S_k) = S - S_k$ => $r_n$ – сходится.

← $\neg r_k$ – сходится => $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_m = \sigma$. $S_{k+m} = \sigma_m + S_k$ => $\lim\limits_{m\to\infty} S_{k+m} = \lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m + \lim\limits_{m\to\infty} S_k = \sigma + S_k$.

**Теорема:** Если числовой ряд ① сходится и его сумма = S, то частичный ряд ② сходится и его сумма = c*S. ② $(c * a_1 + c * a_2 + \ldots + c * a_n)$

**Док-во:** $S_n^1 = \sum_{k+1}^n a_k$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n^1 = S^1$; $S_n^1 = \sum c * a_k = c * \sum a_k = c * S_n^1$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^2 = c * \lim\limits_{n\to\infty} S_n^1 = c * S^1$

$b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ ③; $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n)$ ④ - сумма рядов ① и ③.

**Теорема:** Если ряды ① и ③ сходящиеся и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^a = S^a$ (1), $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^b = S_b$ (3), то ④ тоже сходится и его сумма = $S^a + S^b$

**Док-во:** Для числового ряда ④ $S_n^4 = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = S_n^a + S_n^b$ => $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^4 = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n^a + S_n^b) = S^a + S^b$

**Теорема(Необходимое условие сходимости ряда):** Если числовой ряд ① сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**До-во:** $a_n = S_n - S_{n-1}$ => $\lim\limits_{n\to\infty} a = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

**Следствие:** Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$., то ряд расходящийся.

# 51. Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов(сравнения, предельный, Даламбера, Коши, интегральный).

**Сравнения:** $a_1 + a_2 + \ldots + a_n, a_n > 0\ \forall\, n$ ① и $b_1 + b_2 + \ldots + b_n,\ b_n > 0\ \forall\, n$ ②

$\neg a_n \leq b_n\ \forall\, n$, тогда, если ② сходится, то сходится ①; если расходится ①, то ② расходится.

**Док-во:** Последовательность частичных сумм $(S_n)$ ряда ① $S_n^a = a_1 + \ldots + a_n$ возрастает и ряда ② $S_n^b = b_1 + \ldots + b_n$ возрастает. $S_n^a = S_n^b$.

$\rightarrow \neg$ ряд ② сходится $=> \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n^b = B =>$ все $S_n^b = B$, т. к. $S_n^a \leq S_n^b \leq B => S_n^a$ ограничена и возрастает $=> \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n^a = A \leq B$

$\leftarrow \neg$ ряд ① расходящийся. Делаем, что ② – расходящийся. От прот. : $\neg$ ② сходится => по первой части док-ва ряд ① тоже сходится

**Предельный:** $\neg$ даны 2 знакоположительных ряда ① и ②. Тогда, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, и $0 < l < \infty$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

**Док-во:** Из $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l => \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N: \forall\, n > N\ \ \left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon.\ l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$. Докажем, что из сходимости ② вытекает сходимость ①: $\frac{a_n}{b_n} < (l + \varepsilon) = \mathrm{q}\quad \forall\, n > N => a_n < \underbrace{b_n * q}_{\text{сходится}}$ => по признаку сравнения остаток ряда ① $(r_n^a)$ сходится => ① сходится.

Докажем, что из сходимости 1 вытекает сходимость 2: Выберем $\varepsilon: l - \varepsilon > 0$. $(l - \varepsilon) < \frac{a_n}{b_n} => b_n < \left(\frac{1}{l-\varepsilon}\right) a_n => \left(\frac{1}{l-\varepsilon}\right) a_n$ тоже сходится => N-ый остаток ② $(r_n^b)$ сходится по признаку сравнения. Если $r_n^b$ сходится, то ② сходится. Для расхождения аналогично.

**Даламбера**: $\neg$ дан ①. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при $\mathrm{q} < 1$ ряд сходится, q>1 ряд расходится, q =1- нужно проверить другим признаком.

**Коши**: $\neg$ дан ①. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $\mathrm{q} < 1$ ряд сходится, q>1 расходится, q =1 => нужны дополнительные исследования.

**Интегральный:** $\neg$ дан ①, у которого $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$ $\neg$ f(x)-функция: f(n)=$a_n$. Тогда $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

**Док-во**: $$\begin{cases} a_2 < \int_1^2 f(x)dx < a_2 => (a_{n+1} - a_n) < \underbrace{\int_1^{n+1} f(x)dx}_{B_n} \\ a_3 < \int_2^3 f(x)dx < a_2 => (a_{n+1} - a_n) < \int_1^{n+1} f(x)dx < S_n{}^{<S_n} \\ a_{n+1} < \int_n^{n+1} f(x)dx < a_n \end{cases}$$

$S_n$- возрастающая, $B_n$-возрастающая. Если ряд сходится => $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S => B_n \leq S$ и $B_n$ – возрастает => $\exists \lim_{n\to\infty} B_n = B \leq S => \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = B$

$\neg \int_1^{+\infty} f(x)dx$- сходится => $\exists \lim_{n\to\infty} B_n = 0 => S_{n+1} - a_1 -$ ограничена =>
$\exists \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - a_1 => \lim_{n\to\infty} S_{n+1} = a_1 + S_0 =>$ сходится.

## 52.Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Числовой ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ① называется знакопеременным, если он содержит как положительные, так и отрицательные слагаемые.

$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$ ②

Числовой ряд ① называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд ②.

**Теорема:** Если ② сходится, то ① тоже сходится.

**Док-во:** Рассмотрим $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_n^+ - S_n^-$, где $S_n^+ -$ сумма всех $a_i > 0, S_n^- - a_i < 0$, взятых по модулю. Рассмотрим $\sigma_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| = S_n^+ - S_n^-$. Частичные суммы $\sigma_n$ образуют неубывающую последовательность и $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ $=> \forall \sigma_n \leq \sigma; \sigma_n = S_n^+ + S_n^-$ и ограниченные сверху => $\exists \lim_{n\to\infty} S_n^+ = S^+$ и $\lim_{n\to\infty} S_n^- = S^-$. Значит, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_n^+ - S_n^-) = S_n^+ - S_n^-$ −конечное число, тогда ряд ① - сходится.

Числовой ряд ① называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд ② расходится.

## 53.Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Числовой ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ ... называется знакочередующимся.

**Признак Лейбница:** Если дан знакочередующийся ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ ... и выполнено: 1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и 2) $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ ... , то 1) числовой ряд сходится; 2) S $\le$ $a_1$; 3) $|r_n| \le a_{n+1}$.

**Док-во:** Рассмотрим последовательность четных частичных сумм $S_{2n}$: $S_2, S_4$ ...

1)$S_{2n}$ – возрастает. $S_{2n} = (a_1 - a_2)(> 0) + (a_3 - a_4)(> 0) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})(> 0)$. $S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2})(> 0) > S_{2n}$.

2) $S_{2n}$ - ограничена сверху $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - a_{2n} < a_1$. По теореме о существовании предела возрастающего ограниченного сверху: $\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \le a_1$. Рассмотрим последовательность нечетных частичных сумм $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \le a_1$.

3) $r_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots$ –знакочередующийся ряд для которого выполнены условия признака Лейбница, тогда по пункту 2: $|r_n| \le a_{n+1}$.

## Вопр 54 Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда. Теорма Абеля

Степенным называется функциональный ряд вида:

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ (1)

Или $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$ (2)

Каждое слагаемое такого ряда является степенной функцией.

Определение. Областью сходимости ряда (1) (или (2)) называется множество значений переменной x при которых соответствующий числовой ряд сходится.

Пример. Рассмотрим степенной ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \ldots$Так этот ряд является геометрической прогрессией со знаменателем x, то, как известно, он сходится при $|x|$<1 и расходится при $|x|\ge$1 . Таким образом, область сходимости такого ряда – интервал (– 1; 1).

Теорема Абеля. Если степенной ряд (1) сходится при некотором $x = x_0$ , то он сходится также при всех x: $|x| < |x_0|$. Если ряд (1) расходится при $x = x_1$ , то он расходится при всех x: $|x| < |x_1|$ .

## Вопр 55 Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Следствие. Для каждого степенного ряда (1) существует число R∈ +∞ [0; ∞), называемое радиусом сходимости степенного ряда, такое, что при всех $|x|$ <R ряд сходится, а при $|x|$ >R – расходится. Интервал ( −R ; R ) называется интервалом сходимости.

Следует отметить, что радиус сходимости может равняться 0 (ряд сходится только при x = 0 ) или R = +∞ (ряд сходится при всех x). В точках x R = ± ряд (1) может как сходиться, так и расходиться.

Чтобы получить формулу для радиуса сходимости рассмотрим ряд

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots , \qquad (3)$$

составленный из модулей членов ряда (1). При любом значении x это знакоположительный ряд, который можно исследовать на сходимость с помощью признака Даламбера. Пусть $b_n = |a_n x^n|$ – n-ый член этого ряда. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \cdot l, \quad \text{где } l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

В силу признака Да- ламбера ряд сходится при $|x| \cdot l < 1$, или $|x| < \frac{1}{l}$,
и расходится при $|x| \cdot l > 1$, или $|x| > \frac{1}{l}$. Значит $\frac{1}{l} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$.

Таким образом, радиус сходимости степенного ряда (1) можно найти по формуле

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Если воспользоваться признаком Коши для ряда (3), то аналогичным образом получим другую формулу для радиуса сходимости:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}.$$

# Вопр 56 Ряды Тэйлора Достаточное условие сходимости ряда Тэйлора к значению ф-ии

Если функция y f x = ( ) имеет в некоторой окрестности точки $x_0$ и производные любого порядка, то степенной ряд вида

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (1)$$

называется рядом Тейлора функции f x( ) в точке $x_0$. Если $x_0 = 0$, то соответствующий ряд Тейлора называется рядом Маклорена функции f x( ) :

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \qquad (2)$$

Теорема. Если производные любого порядка функции f x( ) равномерно ограничены в некоторой окрестности$U(x_0) = (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ (т.е. найдется число C > 0 такое, что $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C$ для всех $x \in U(x_0),\ n = 1,2,3,\ldots\ldots$), то ряд Тейлора этой функции сходится к значению f x( ) для всех $x \in U(\ x_0)$

## Вопр 57 Разложение в ряд Маклорена ф-ий ln(1+x), sin(x), cos(x), $e^x$, (1+x $)^\alpha$

ln(1+x):

Разложение в ряд Маклорена функции $(f(x)=\ln(1+x))$

Найдём все производные функции$(\ln(1+x))$ в точке $(x_0=0)$:

$$f(0)=\ln 1=0;$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x};\quad f'(0)=1;$$

$$f''(x)=-(1+x)^{-2};\quad f''(0)=-1;$$

$$f^{(3)}(x)=2(1+x)^{-3};\quad f^{(3)}(0)=2=2!;$$

$$f^{(4)}(x)=-6(1+x)^{-4};\quad f^{(4)}(0)=-6=-3!;$$

$$f^{(5)}(x)=24(1+x)^{-5};\quad f^{(5)}(0)=24=4!,$$

Подставляя эти значения в формулу (2), получим:

$$\ln(1+x)=0+x-\frac{x^2}{2!}+\frac{2!\,x^3}{3!}-\frac{3!\,x^4}{4!}+\frac{4!\,x^5}{5!}-\cdots=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\cdots\quad(5)$$

Sin x:

Найдём все производные функции $(\sin x)$ в точке $(x_0=0)$:

$$f(0)=\sin 0=0;$$

$$f'(x)=\cos x;\quad f'(0)=1;$$

$$f''(x)=-\sin x;\quad f''(0)=0;$$

$$f^{(3)}(x)=-\cos x;\quad f^{(3)}(0)=-1;$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x;\quad f^{(4)}(0)=0;$$

$$f^{(5)}(x)=\cos x;\quad f^{(5)}(0)=1,$$

Подставляя эти значения в формулу (2), получим требуемое разложение:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+$$

$$\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\quad(4)$$

cos x:

Найдём все производные функции $(\cos x)$ в точке$(x_0 = 0)$.

$$f(0) = \cos 0 = 1;$$

$$f'(x) = -\sin x\,; \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = -\cos x\,; \quad f''(0) = -1;$$

$$f^{(3)}(x) = \sin x\,; \quad f^{(3)}(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x\,; \quad f^{(4)}(0) = 1;$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin x\,; \quad f^{(5)}(0) = 0,$$

Подставляя эти значения в формулу (2), получим требуемое разложение

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} +$$

Этот степенной ряд также сходится при всех значениях ( $x$ ).

$e^x$:

Найдём все производные функции $(e^x)$в точке $(x_0 = 0)$ и подставим в формулу(2).

$$((e^x)' = e^x; \quad (e^x)'' = e^x; \dots)$$

$$\text{Значит}(f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1).$$

Подставляя эти значения в формулу (2), получим требуемое разложение

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

У этого степенного ряда $(a_n = \frac{1}{n!})$ и радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

т. е. ряд сходится при всех ( $x$ ).

$(1+\text{x}\,)^{\alpha}$:

Найдём все производные функции $((1+x)^a)$ в точке $(x_0 = 0)$.

$$f(0) \ = \ 1.$$

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1}, \quad f'(0) = a;$$

$$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}, \quad f''(0) = a(a-1);$$

$$f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}, \quad f'''(0) = a(a-1)(a-2);$$

…

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}, \quad f^{(n)}(0) = a(a-1)\dots(a-n+1).$$

Подставляя эти значения в формулу (2), получим требуемое разложение:

$$(1+x)\hat{}a \ =$$

$$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 +$$

$$\dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

Этот ряд сходится при$(x \in (-1;1))$.

## Вопр 58 Постановка задачи лин программирования в симметр и канон форме

Пусть f$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} C_j + x_j$; (1)- целевая ф-ия $x_j \geq 0, \forall\ j = 1, n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n \leq a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n \leq a_{20} \quad (2) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \leq a_{m0} \end{cases}$$

Если требуется найти max f(x) удовл условию (2), то это задача лин прог в симм форме

Если огран заданны в виде (2)(но вместо$\leq$ будет $=$ ), то  - в какон форме

Можно перейти от симм формы какон, вводя доп пер

$$\begin{cases} 3x_1 - \ x_2 \leq 5; \\ 2x_1 + \ x_2 \leq 3; \end{cases} \to \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \end{cases} \quad x_3, x_4 \geq 0, x_1, x_2 \geq 0$$

Опр Решение получ при своб перем $= 0$, наз базисным

Опр Баз реш у кот все баз переменные $\geq 0$, наз опорным

Т-мы 58, 59

Т-ма 1 Если мн-во всех планов $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Удовл (2) в канон форме не пусто то $\rightarrow$ $\exists$ хотя бы 1 опорн план

Т-ма 2 Всякому опорн плану соотв вершина многогран план и наоборот: каждой верш соотв план

Т-ма 3: Лин ф-ия(целевая) f$(x_1, x_2, \dots., x_n) = \sum_{j=1}^{n} C_j + x_j$; достиг своё наиб и наим знач на выпукл n-мерном многограннике в одной тз его вершин. Если наиб знач достиг в нескольких верш т е f$(\overline{x_1})=$ f$(\overline{x_2}) =$ f$(\overline{x_3}) = M$, то это же знач будет достиг в $\forall$ точке $\overline{x}$, кот явл выпуклой мин комю этих вершин т е $\forall\ \overline{x} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$, где $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_1 = 1 \rightarrow f(\overline{x}) = M$

## Вопр 59 Симплекс - метод решения задачи лин программ

Пусть дана задача л п в какон форме: 1 Находим max при усл что вып огранич (2) В силу т-мы 3 оптим план этой задачи совпад с одним из опорных планов

### Симплекс метод:

Шаг 1: Находим произвл опорный план

Шаг 2: Переходим к другому опорному плану, для кот $f(\overline{x_2}) > f(\overline{x_1})$,
и тд пока не получим опт опорный план т ч $f(\overline{x}*) = max$

Критерий оптимальности: полученный план явл оптимальным если все эл-ы f строки (кроме св члена)$\geq$ 0

Т-ма Решением оптимального плана явл одна из вершин многогранника