МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теоретической и прикладной механики

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ КОЛЕБАНИЙ

Курсовая работа

Штыка Владимира Владимировича
студента 2 курса,
специальность «Механика и математическое моделирование совместного института ДПУ и БГУ»

Научный руководитель:
доцент, кандидат физ.-мат. наук
Николайчик М.А.

Минск, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В условиях стремительного развития технологий и повышения требований к точности инженерных расчётов анализ механических вибраций приобретает всё более сложный характер. Традиционные подходы — аналитические и численные методы — долгое время успешно применялись для исследования линейных и умеренно-нелинейных колебательных процессов [1]. Однако при переходе к более сложным задачам, включающим высоко-нелинейные, стохастические или слабо формализуемые явления, возможности классических методов оказываются ограниченными. На этом фоне особое значение приобретают нейронные сети, способные обучаться на больших объёмах данных и выявлять скрытые закономерности в сложных динамических системах [2]. В отличие от традиционных численных методов, нейронные сети не требуют явной формализации уравнений движения, а позволяют моделировать поведение вибрационных систем по эмпирическим данным, включая шумы и нелинейности [2]. Это делает их особенно эффективными для задач, где аналитическое описание либо невозможно, либо чрезмерно трудоёмко. Благодаря возможности работы в режиме онлайн и обучению по экспериментальным данным, нейросети становятся не просто вспомогательным инструментом, а полноценным методом анализа, способным дополнить или даже заменить классические подходы в ряде практических задач.

Целью данной работы является исследование возможностей использования нейронных сетей для приближенного решения уравнения, описывающего колебания механической системы.

Для достижения данной цели в работе решаются следующие задачи:

- Вывод аналитического решения уравнения колебаний материальной точки.
- Построение структуры нейронной сети, предназначенной для аппроксимации функциональной зависимости, заданной указанной формулой.
- Анализ результатов, полученных с использованием построенной модели нейронной сети, с результатами, полученными, используя традиционные методы.

Рассматриваемая тема является актуальной, поскольку сочетание традиционных методик математического моделирования с современными подходами машинного обучения представляет значительный интерес как для фундаментальных исследований, так и для прикладного анализа сложных динамических систем. Применение методов нейронных сетей в данной области способствует не только повышению точности вычислений, но и расширяет возможности для моделирования реальных инженерных систем, где часто возникают ситуации, требующего быстроты принятия решений на основе сложных нелинейных зависимостей.

Данная работа является одним из этапов объединения классических представлений о механических вибрациях с новейшими достижениями в области нейронных сетей, что позволяет посмотреть на задачи динамики под новым углом и предложить эффективные решения для сложных механических систем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается задача моделирования колебательного движения материальной точки, на которую действуют как внешние так и внутренние силы, с целью определения её положения в произвольный момент времени. Задача относится к классу задач о вынужденных колебаниях с параметрами, изменяющимися в зависимости от начальных условий и внешнего воздействия. Схема рассматриваемой задачи представлена на рисунке 1.

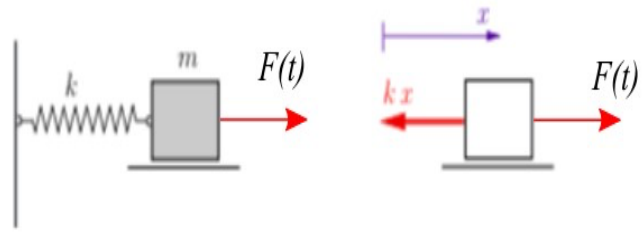

Рисунок 1. Схема задачи колебаний

Колебательное движение описывается аналитическим уравнением, включающим следующие параметры:

v_0- начальная скорость, м/с

x_0- начальное положение материальной точки

m- масса материальной точки

t - момент времени, в который нужно вычислить положение материальной точки

F_0 - амплитудная сила

w_0 - фазовая частота

k - жесткость пружины

ВЫВОД АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

При выводе аналитического решения уравнения колебаний материальной точки использовался Второй закон Ньютона $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (1).

Из Второго закона Ньютона (1) следует

$$m \cdot x'' + k \cdot x = F(t);$$

Также можно переписать в таком виде

$$x'' + w^2 \cdot x = \frac{F(t)}{m};$$

Общее решение можно записать так

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t), \text{ где}$$

$$x_0(t) = A \cdot \sin(w \cdot t + \phi)$$

- решение однородного дифференциального уравнения, $x_p(t)$ - частное решение.

Считая, что

$$F(t) = F_0 \cdot \sin\left(w_0 \cdot t\right);$$

Из этого следует

$$x'' + w^2 \cdot x = F_0 \cdot \frac{\sin\left(w_0 \cdot t\right)}{m} \; (2);$$

Учитывая частное решение в виде

$$x_p(t) = X \cdot \sin(w_0 \cdot t)$$, где X - константа.

Подставляя x_p в (2), получим,

$$-X \cdot w_0^2 \cdot \sin(w_0 \cdot t) + w^2 \cdot (X \cdot \sin(w_0 \cdot t)) = \frac{F_0 \cdot \sin(w_0 \cdot t)}{m};$$

Разделив выражение на $\sin(w_0 \cdot t)$ и выразив X, получается

$$X = \frac{\frac{F_0}{m}}{w^2 - w_0^2} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{w_0}{w}\right)^2};$$

Подставив X в частное решение получаем

$$x_p(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{w_0}{w}\right)^2} \cdot \sin(w_0 \cdot t);$$

Подставив частное решение и решение однородного дифференциального уравнения в общее решение, получим

$$x(t) = A \cdot \sin(w \cdot t + \phi_0) + \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{w_0}{w}\right)^2} \cdot \sin(w_0 \cdot t) \quad (3);$$

Также учитывая

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{w^2}} \ (4)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0 \cdot w}{v_0}\right) (5) ;$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \ (6)$$

Учитывая (4), (5), (6), можно переписать (3) в виде

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2 \cdot m}{k}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \tan^{-1}\left(\frac{x_0 \cdot}{v_0} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}\right)\right) +$$

$$+ \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - w_0^2 \cdot \frac{m}{k}} \cdot \sin\left(w_0 \cdot t\right)$$

Полученное уравнение движения является аналитическим решением уравнения колебаний материальной точки.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

1. Основные применяемые методы нейронных сетей:

Нейронная сеть состоит из нескольких слоёв, каждый из которых содержит определённое количество нейронов. Каждый нейрон принимает входные значения, умноженные на соответствующие веса, добавляет смещение, после чего применяется функция активации, и результат передаётся на следующий слой. Такой процесс называется прямым распространением

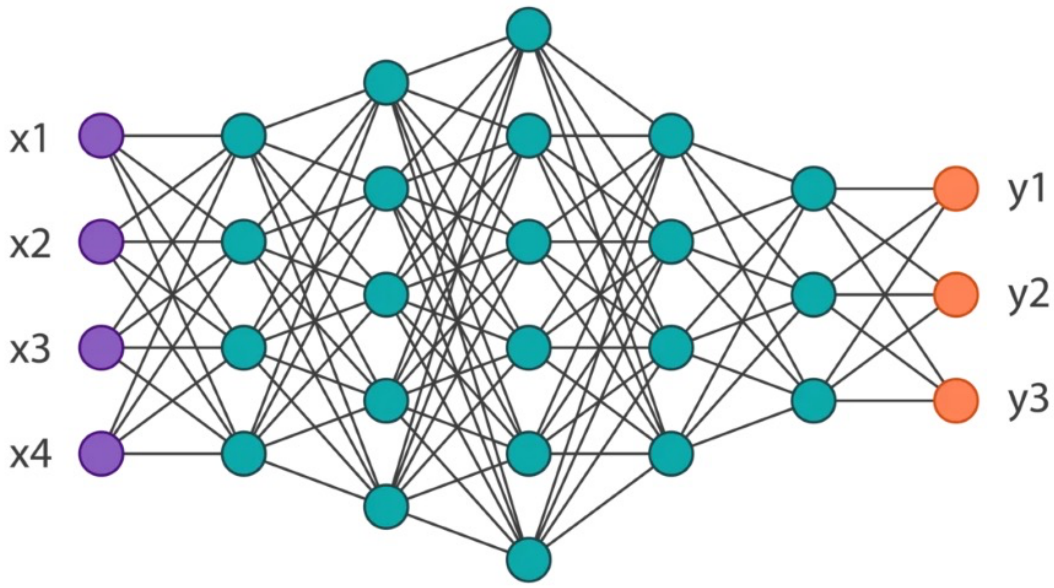

Рисунок 1. Структура нейронной сети

На рисунке 1: фиолетовые нейроны составляют входной слой нейронной сети, зеленые нейроны составляют скрытые слои, а оранжевые нейроны составляют выходной слой.

Каждый нейрон принимает входное значение, умноженное на коэффициент (данный коэффициент называется вес), после принятая сеть применяет функцию активации, после этих действий данное значение становится входным значением для следующего и так до последнего слоя нейронной сети, который является выходным слоем - этот процесс называется прямым распространением.

2. Функция активации - это функция, которая принимает входное значение умноженное на вес и либо активирует нейрон либо нет [2]. В данной нейронной сети для скрытых слоев используется функция Leaky ReLU

$$f(x) = \begin{cases} x & при\ x \geq 0 \\ k \cdot x & при\ x < 0 \end{cases},$$

где k - некоторое число, обычно меньшее 0,01. На выходном слое используется линейная функция активации $f(x) = x$, так как задача регресионная, и выходное значение должно быть непрерывным. График функции Leaky ReLU на рисунке 1. График линейной функции на рисунке 2.

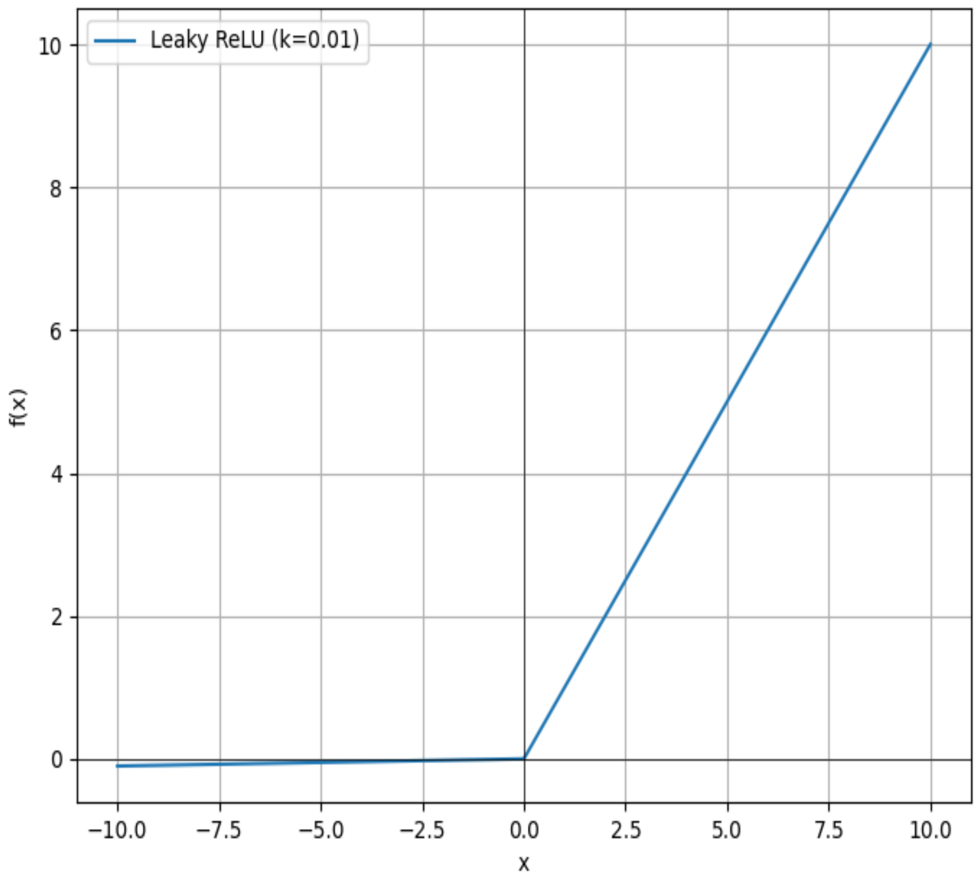

Рисунок 2. График функции Leaky LeRU

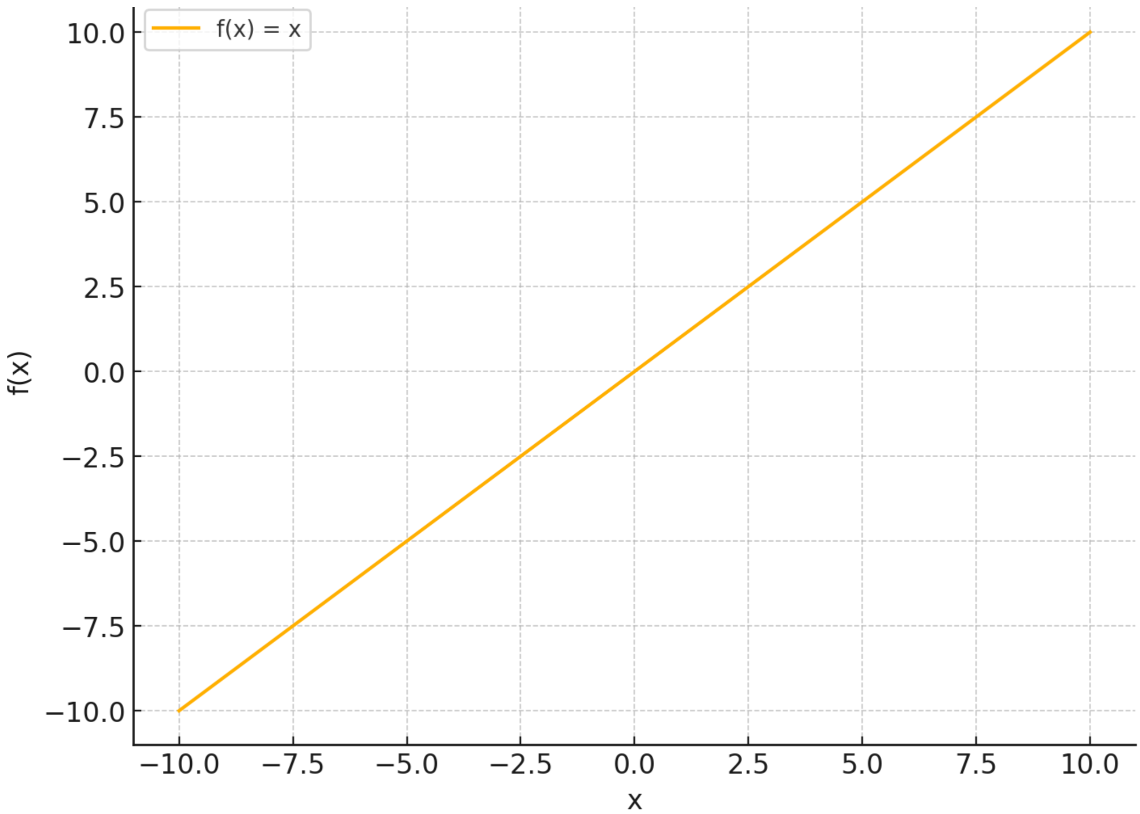

Рисунок 3. График линейной функции

3. Метод обучения нейронной сети

В рассматриваемой нейросети примем метод обучения – «обратное распространение ошибки» с использованием градиентного спуска [2]. Данный метод обучения работает согласно следующему алгоритму:

1) Прямое распространение: входной вектор проходит через все слои сети, и на выходе получается предсказанное значение.

2)Вычисление ошибки: находится разность между предсказанным значением и эталонным (аналитическим) значением из обучающей выборки.

3)Обратное распространение: ошибка распространяется обратно по сети, и для каждого веса вычисляется градиент — производная функции ошибки по этому весу.

4)Обновление весов: веса корректируются в направлении, уменьшающем ошибку. Используется метод градиентного спуска с заданной скоростью обучения.

4. Использование батчей

Для повышения эффективности обучения используется метод обучения по мини-батчам. Это означает, что обучающая выборка разбивается на небольшие группы (батчи), и веса обновляются не после каждой отдельной обучающей точки, а после прохождения целого батча. В данной нейронной сети размер батча составляет 32 (так как батч такого размера дает достаточную усредненность для устойчивого вычисления градиента, также ресурсы памяти используются рационально, также NumPy оптимизирован под размеры батчей, кратные 2). Каждый батч проходит через полный цикл: прямое распространение, обратное распространение, обновление весов. Использование батчей позволяет сгладить случайные колебания в градиентах, ускорить обучение и более эффективно использовать ресурсы процессора.

5. Обработка данных

Так как параметры задачи имеют различную размерность и порядок величин (например, масса варьируется от 10 до 100, а жесткость пружины от 1 до 10), предварительная нормализация данных необходима для приведения всех признаков к нужному масштабу. В данной работе применялась нормализация по максимуму (диапазон значений становится в полуинтервале (0, 1]) по формуле:

$$x_i^{норм} = \frac{x_i}{x_i^{max}}, \text{ где}$$

- x_i - значение признака

- x_i^{max} - максимальное значение во всей обучающей выборке

Нормализация данных позволяет стабилизировать вычисления в процессе градиентного спуска также снижает риск переобучения.

Структура нейронной сети:

Нейронная сеть состоит из 7 скрытых слоев (использовано столько скрытых слоев, так как решение данной задачи – это нелинейная зависимость от входных данных), первых четыре скрытых слоя имеют 512 нейронов, а оставшиеся три скрытых слоя имеют 256 нейронов (число нейронов на каждом слое является степенью двойки, так как это эмпирическая рекомендация, используя количество нейронов кратных двойке легко быстро высчитывать количество связей между нейронами).

Прямое распространение вычисляется с помощью библиотеки NumPy. NumPy – это библиотека для работы с многомерными массивами и математическими операциями в Python. Основные возможности NumPy [3]:

1) работа с массивами (многомерные массивы с быстрой обработкой данных);
2) быстрые математические операции (матричные вычисления);
3) функции для генерации данных (создание случайных чисел)

Данные для тренировки и тестов нейронной сети:

Реализация генерации данных происходит в другой программе, чтобы не загромождать одну (отдельная программа позволяет легко менять параметры генерации данных, не изменяя основную программу (реализующую нейронную сеть)).

Создается массив input, в который будут записываться сгенерированные значения и после этого передаваться в файл.

Открывается файл input_train.csv для записи данных для тренировки нейронной сети.

Создается цикл с количеством итераций равным количеству массивов входных данных (в данном случае массив входных данных состоит из одного набора начальных значений и ответа задачи, найденного аналитического).

После этого генерируется случайно : начальное положение (значения от 10 до 100), начальная скорость (значения от 10 до 100), масса (значения от 10 до 100), амплитудная сила (значения от 10 до 100), жесткость пружины (значения от 1 до 5), амплитудная угловая скорость (значения от 10 до 100) и момент времени, в который нужно вычислить положение материальной точки (значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$) - все эти значения принадлежат действительным числам. После генерации этих чисел вычисляется аналитическое решение по формуле (3) со случайным отклонением в интервале от -5 до 5 процентов.

1	80.1220556237949,42.91373140659985,91.99341103310623,40.00874959969727,4.388110494721298,87.75236667503611,0.8662219058454792,90.67751077102622
2	92.09523831122983,44.35637537157088,66.77748116910823,23.745158326444745,2.0522106854983004,94.73990109144783,0.6565647072438552,101.86243883722513
3	94.23762158896962,42.12531817026378,49.84118472498327,25.162456210673746,2.5702840727844993,19.629483182924464,1.0478984989385325,103.71839185552395
4	42.89225266994975,70.00111180767288,76.55582780385011,40.87537401913795,4.07252129130057,13.559820202467069,1.2843692868849141,60.59117830192195
5	53.30626089810909,37.83280981089001,24.889832528331873,64.43466940460156,1.7682652366075344,21.03662482135661,0.9188946225701804,64.70236705963126
6	70.29775902819006,55.118304115442115,38.98311195781369,18.797470548822343,2.9227320887954407,30.713705201866254,1.1450876991651606,88.33467323772753
7	60.50428829115899,31.11195447442284,20.636176846730294,57.04176811155694,1.0706078708163513,76.45163257124074,0.6310246885210034,64.7613775975586
8	70.92766442087273,24.912571922421733,55.18688536338591,14.032958657721702,1.6611472741846267,17.979064291788156,1.3015677882131937,76.79932833229596
9	61.10597680181743,63.2440165668525,97.55691424958985,79.75263719898578,2.6427168021881644,51.69805964863075,1.3724264551889944,77.29085612472736
10	55.98682714673927,59.47494631541454,30.708987183217992,29.575910995221722,1.7773903715826145,27.268312385048137,1.461723934524577,80.03132462563286

Рисунок 4. Массивы данных в файле input_train.csv

Каждая строчка – один массив данных для тренировки (первое число – начальное положение, второе число – начальная скорость, третье число – масса материальной точки, четвертое число – амплитудная сила, пятое число – жесткость пружины, шестое число – амплитудная угловая скорость, седьмое число – момент времени, в который нужно определить положение материальной точки, восьмое число – аналитический ответ с отклонением).

Количество строк-массивов в файле равно количеству тренировочных данных. Все входные данные и ответ к задачи записываются в массив input и после этого массив input передается в файл input_train.csv.

Данные действия генерации чисел и вычисления аналитического ответа к задаче повторяются в цикле, а после окончания работы цикла в файле input_train.csv записано массивы данных для тренировки нейронной сети, количество которых равно количеству итераций.

Создается массив input, в который будут записываться сгенерированные значения для тестирования и после этого передаваться в файл. Открывается файл input_test.csv для записи данных для тестирования нейронной сети.

Создается цикл с количеством итераций равным количеству массивов входных данных (в данном случае массив входных данных состоит из одного набора начальных значений и ответа задачи с отклонением, найденного аналитического).

После этого генерируется случайно : начальное положение (значения от 10 до 100), начальная скорость (значения от 10 до 100), масса (значения от 10 до 100), амплитудная сила (значения от 10 до 100), жесткость пружины (значения от 1 до 5), амплитудная угловая скорость (значения от 10 до 100) и момент времени, в который нужно вычислить положение материальной точки (значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$) - все эти значения принадлежат действительным числам. После генерации этих чисел вычисляется аналитическое решение по формуле (3).

1	10.318261550599294,17.232374325732586,77.61779105395516,89.5725950213087,4.827010820377977,33.402743078229506,0.7680949326775255,13.60551436807464
2	99.88239034040411,49.905624334589014,82.26661624397248,11.21404886075744,4.021412771540092,33.94148339521985,0.621445266643553,106.69209283596354
3	46.126990027095985,35.93482581430598,64.05652128026145,33.286565880145325,1.094088246820319,96.04265763314079,0.6301121101780549,49.083527212963475
4	42.456973842430465,40.94701921124573,69.71070654574214,56.75147731005845,1.4317789925603113,41.69341005240867,1.1178410977434565,49.004776651043436
5	89.84482453761277,11.614241339560667,32.661314132483284,42.97883424652302,3.4292142304519624,67.210989090433,0.813740644020225,92.57603512137808
6	44.01747187528049,61.7303062884144,89.11017146524831,48.94112187827941,2.4243638096779234,75.75365483180589,0.635647828107261,50.48282431502983
7	95.08913175060151,93.7639135518185,97.8660203862879,68.6409850122588,4.343850946755673,95.70447465753743,0.09925148513427777,97.04883200461613
8	70.36203869233287,11.236908817114688,23.373472951347814,56.78158260216818,3.511374500891221,54.241508159497435,0.08691209657511934,70.73538942302488

Рисунок 5. Массивы данных в файле input_test.csv

Каждая строчка – один массив данных для тренировки (первое число – начальное положение, второе число – начальная скорость, третье число – масса материальной точки, четвертое число – амплитудная сила, пятое число – жесткость пружины, шестое число – амплитудная угловая скорость, седьмое число – момент времени, в который нужно определить положение материальной точки, восьмое число – аналитический ответ с отклонением). Количество строк-массивов в файле равно количеству тестировочных данных.

После генерации чисел вычисляется решение задачи аналитически. Все входные данные и ответ к задачи записываются в массив input после этого массив input передается в файл input_test.csv. Данные действия генерации чисел и вычисления аналитического ответа к задаче повторяются в цикле, а после окончания работы цикла в файле input_train.csv записываются массивы данных для тестировки нейронной сети, количество которых равно количеству итераций.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОСТРОЕННОЙ МОДЕЛИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ, С РЕЗУЛЬТАТАМИ, ПОЛУЧЕННЫМИ, ИСПОЛЬЗУЯ ТРАДИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

В ходе выполнения работы была построена нейронная сеть, обученная на выборке данных, сгенерированных на основе аналитического решения задачи о колебаниях материальной точки. После завершения обучения была проведена проверка точности предсказаний модели на тестовой выборке. Сравнение результатов нейронной сети с аналитическими значениями позволило провести качественную и количественную оценку эффективности предложенного подхода.

1. Сравнение точности

Для оценки точности работы нейронной сети использовалась средняя абсолютная процентная ошибка между предсказанными и аналитическими значениями:

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i^{пред} - x_i^{аналит}}{x_i^{аналит}} \right| \cdot 100\% \text{, где}$$

- $x_i^{пред}$ - предсказанное значение;

- $x_i^{аналит}$ - значение, рассчитанное по аналитической формуле (3);

- n – количество тестовых примеров

Средняя ошибка по тестовой выборке составила 1.46%, что подтверждает высокую точность аппроксимации даже при наличии случайных отклонений в интервале от -5 до 5 процентов в тренировочных данных.

Аналитический метод при известной формуле даёт результат мгновенно, однако его применение требует:

- точного задания всех параметров;
- вывода аналитического решения вручную или используя компьютерную алгебру.

Нейронная сеть, в свою очередь:

- требует времени на предварительное обучение, однако это действие нужно сделать однократно;
- после обучения нейронная сеть позволяет выполнять предсказания за минимальное время.

Таким образом, в случае необходимости большого количества повторяющихся вычислений с разными параметрами нейросеть оказывается более производительной.

2. **Универсальность и адаптивность**

Если рассматривать традиционный подход, то он привязан к конкретному уравнению и любое изменение модели требует перерасчета и, довольно часто, нового аналитического вывода.

Рассматривая же, нейронную сеть в данном случае получим, что нейронная сеть адаптируется к изменениям параметров системы, учитывает шум и может быть перенастроена под модифицированную задачу без необходимости полного пересмотра алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной курсовой работе была рассмотрена задача приближённого решения уравнения движения материальной точки, находящейся под действием внешних и внутренних сил. Аналитически полученная модель движения представляет собой сложное выражение, учитывающее начальные параметры системы и параметры внешнего воздействия. Для решения поставленной задачи была построена и обучена нейронная сеть, способная на основе заданных параметров системы предсказывать положение материальной точки в выбранный момент времени. Архитектура нейронной сети включала семь скрытых слоёв, что позволило успешно аппроксимировать сложную нелинейную зависимость между входными и выходными величинами. Проведённый количественный анализ показал, что средняя ошибка модели на тестовой выборке составляет незначительную долю от точного аналитического значения, что подтверждает высокую точность предложенного подхода. В дополнение к этому, нейронная сеть продемонстрировала способность к быстрой генерализации и стабильности при варьировании параметров, а также значительно выигрывает в скорости при многократных вычислениях. Таким образом, можно сделать вывод, что применение нейронных сетей в задачах механики является не только допустимым, но и целесообразным шагом, особенно в условиях усложнения моделей и увеличения объёмов расчётов. Полученные результаты подтверждают практическую применимость нейросетевых методов в инженерной среде и открывают перспективы для их дальнейшего использования в задачах анализа вибраций.

Список используемых источников

1. Мещерский И. В. *Динамика. Учебник для вузов*. — М.: Наука, 2004. — 512 с.
2. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс: [пер. с англ.]. — 2-е изд. М.: Вильямс, 2006. — 1104 с.
3. NumPy: Fundamental package for array computing [Электронный ресурс]. — URL: https://numpy.org/doc/stable/.