Rabi – I

# 江源

*2024-04-30*

**Section 1:** 背景知识

* 1. **Baker-Campbell-Hausdorﬀ** 公式

Baker-Campbell-Hausdorﬀ 公式，又称 BCH 公式，是一个用于计算幺正变换公式，其形式 如下：

𝑒𝐴𝐵𝑒−𝐴 = 𝑛∑=1 𝐶𝑛𝑛!

= 𝐵 + [𝐴, 𝐵] + 21! [𝐴, [𝐴, 𝐵]] + 31! [𝐴, [𝐴, [𝐴, 𝐵]]] + ⋯

其中 𝐶0 = 𝐵， 𝐶𝑛 = [𝐴, 𝐶𝑛−1].

* 1. **Rabi** 模型

Rabi 模型是一个描述原子与光场相互作用的模型，其哈密顿量为

(1)

## 𝐻 = 𝜔𝑎̂†𝑎̂ + Ω2 𝜎̂𝑥 + 𝑔𝜎̂𝑧(𝑎̂† + 𝑎̂) (2)

其中第一项的物理含义是光子的能量，第二项的物理含义是原子的能级，第三项的物理含义是 原子的自旋与光子的耦合 .

# 幺正算符

幺正算符是一个满足 𝑈†𝑈 = 𝐼的算符，其中 𝐼是单位算符，这次推导选择的幺正算符为

𝑈 = exp 𝐴 = exp(𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†)) (3)

即 𝐴 = 𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†)，其中 𝜆是一个实数 .

在这个推导中，将会计算 𝑈𝐻𝑈†，根据 BCH 公式，有

𝑈𝐻𝑈† = exp(𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†))𝐻 exp(−𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†))

= 𝐻 + [𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†), 𝐻] + 21! [𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†), [𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†), 𝐻]] + ⋯

在这里（以及下文 ） ， 𝐴 = 𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†)， 𝐵 = 𝐻， 𝐶𝑛是 BCH 公式中的系数 .

(4)

由于哈密顿量 𝐻的每一项是线性相加的，因此可以分别计算每一项的变换，然后再合并 .

# 常用对易关系

对于升降算符 𝑎和 𝑎†，有以下对易关系：

[𝑎, 𝑎†] = 1 (5)

对于 Pauli 矩阵 𝜎̂𝑥, 𝜎̂𝑦, 𝜎̂𝑧，有以下对易关系：

[𝜎̂𝑥, 𝜎̂𝑦] = 2i𝜎̂𝑧

[𝜎̂𝑦, 𝜎̂𝑧] = 2i𝜎̂𝑥 [𝜎̂𝑧, 𝜎̂𝑥] = 2i𝜎̂𝑦

𝜎̂𝑥2 = 𝜎̂𝑦2 = 𝜎̂𝑧2 = 𝐼

𝜎̂𝑧 = 𝜎̂+ + 𝜎̂−

𝜎̂𝑦 = 𝑖(𝜎̂+ − 𝜎̂−)

(6)

同时，升降算符和 Pauli 矩阵之间对易 .

**Section 2:** 推导

𝑎̂ 𝑈

# 对

进行 的幺正变换

在这种情况下， 𝐵 = 𝑎̂

𝐶0 = 𝐵 = 𝑎̂ † †

𝐶1 = [𝐴, 𝐵] = [𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂ ), 𝑎̂] = 𝜆𝜎̂𝑧([𝑎̂, 𝑎̂] − [𝑎̂ , 𝑎̂]) = 𝜆𝜎̂𝑧

𝐶2 = [𝐴, 𝐶1] = [𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†), 𝜆𝜎̂𝑧] = 0

⇒ 𝐶𝑛 = 0(𝑛 ≥ 2)

因此，对于 𝑎，有

(7)

𝑈 𝑎̂𝑈 † = ∑𝑛 𝐶𝑛𝑛!

= 𝑎̂ + 𝜆𝜎̂𝑧

(8)

它的物理意义是，对于算符 𝑎̂做了一个平移 .

𝑎̂ 𝑈

# 对

† 进行 的幺正变换

在这种情况下， 𝐵 = 𝑎̂†

𝐶0 = 𝐵 = 𝑎̂† † †

† † †

𝐶1 = [𝐴, 𝐵] = [𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂ ), 𝑎̂ ] = 𝜆𝜎̂𝑧([𝑎̂, 𝑎̂ ] − [𝑎̂ , 𝑎̂ ]) = 𝜆𝜎̂𝑧

𝐶2 = [𝐴, 𝐶1] = [𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†), 𝜆𝜎̂𝑧] = 0

⇒ 𝐶𝑛 = 0(𝑛 ≥ 2)

因此，对于 𝑎̂†，有

(9)

# 对

# 进行 的幺正变换

𝜎̂𝑥 𝑈

在这种情况下， 𝐵 = 𝜎̂𝑥

𝑈 𝑎̂†𝑈 † = ∑𝑛 𝐶𝑛𝑛!

= 𝑎̂† + 𝜆𝜎̂𝑧

(10)

𝐶0 = 𝐵

= 𝜎̂𝑥 † †

可以总结出

𝐶1 = [𝐴, 𝐵] = [𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂ ), 𝜎̂𝑥] = 𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂ )[𝜎̂𝑧, 𝜎̂𝑥]

= 2𝑖𝜆𝜎̂𝑦(𝑎̂ − 𝑎̂†)

𝐶2 = [𝐴, 𝐶1] = [𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†), 2𝑖𝜆𝜎̂𝑦(𝑎̂ − 𝑎̂†)]

= 2𝑖𝜆2(𝑎̂ − 𝑎̂†)2[𝜎̂𝑧, 𝜎̂𝑦]

= 4𝜆2𝜎̂𝑥(𝑎̂ − 𝑎̂†)2

𝐶3 = [𝐴, 𝐶2] = [𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†), 4𝜆2𝜎̂𝑥(𝑎̂ − 𝑎̂†)2]

= 4𝜆3(𝑎̂ − 𝑎̂†)3[𝜎̂𝑧, 𝜎̂𝑥]

= 8𝑖𝜆3𝜎̂𝑦(𝑎̂ − 𝑎̂†)3

𝐶4 = [𝐴, 𝐶3] = [𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ − 𝑎̂†), 8𝑖𝜆3𝜎̂𝑦(𝑎̂ − 𝑎̂†)3]

= 8𝑖𝜆4(𝑎̂ − 𝑎̂†)4[𝜎̂𝑧, 𝜎̂𝑦]

= 16𝜆4𝜎̂𝑥(𝑎̂ − 𝑎̂†)4

𝐶𝑛 = ⋯

𝑈 𝜎̂𝑥𝑈† = ∑𝑛 𝐶𝑛𝑛!

= 𝜎̂𝑥 + 12! 𝑖𝜆𝜎̂𝑦(𝑎̂ − 𝑎̂†) + 24! 𝜆2𝜎̂𝑥(𝑎̂ − 𝑎̂†)2 + 38! 𝑖𝜆3𝜎̂𝑦(𝑎̂ − 𝑎̂†)3 + 146! 𝜆4𝜎̂𝑥(𝑎̂ − 𝑎̂†)4 + ⋯

= ∑⎡⎢𝜎̂𝑥 (2𝜆(𝑎̂2−𝑛!𝑎̂†))2𝑛 + 𝑖𝜎̂𝑦 (2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†))2𝑛+1 ⎤⎥

(11)

(12)

𝑛=0⎣ †

(2𝑛 + 1)! ⎦

因此，对于 𝜎̂𝑥，有

= 𝜎̂𝑥 cosh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂ )) + 𝑖𝜎̂𝑦 sinh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†))

𝑈 𝜎̂𝑥𝑈† = 𝜎̂𝑥 cosh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†)) + 𝑖𝜎̂𝑦 sinh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†)) (13)

𝜎̂𝑧 𝑈

# 对

进行 的幺正变换

在这种情况下， 𝐵 = 𝜎̂𝑧

𝐶0 = 𝐵

= 𝜎̂𝑧

𝐶

= [𝐴, 𝐵] = [𝜆𝜎 (𝑎 − 𝑎 ), 𝜎 ] = 𝜆(𝑎 − 𝑎 )[𝜎 , 𝜎 ]

1

̂𝑧 ̂

̂† ̂𝑧

̂ ̂†

̂𝑧

̂𝑧

(14)

因此，对于 𝜎̂𝑧，有

𝐶𝑛 = 0(𝑛 ≥ 1)

𝑈 𝜎̂𝑧𝑈† = ∑𝑛 𝐶𝑛𝑛!

= 𝜎̂𝑧

(15)

**Section 3:** 对 进行 的幺正变换

𝐻 𝑈

对于哈密顿量 𝐻，可以分解为三个部分

## 𝐻 = 𝜔𝑎̂†𝑎̂ + Ω2 𝜎̂𝑥 + 𝑔𝜎̂𝑧(𝑎̂† + 𝑎̂) (16)

分别求解

# 对 𝐻1 进行 𝑈 的幺正变换

𝐻1 = 𝜔𝑎̂†𝑎̂

## 𝐻2 = Ω2 𝜎̂𝑥

𝐻3 = 𝑔𝜎̂𝑧(𝑎̂† + 𝑎̂)

(17)

可以通过幺正算符 𝑈†𝑈 = 𝐼的性质和 [式 8](#_bookmark1) 和 [式 10](#_bookmark2) 的结果求解

𝑈𝐻1𝑈† = 𝑈 𝜔𝑎̂†𝑎̂𝑈 †

= 𝜔𝑈 𝑎̂†𝑈 †𝑈 𝑎̂𝑈 †

= 𝜔(𝑎̂† + 𝜆𝜎̂𝑧)(𝑎̂ + 𝜆𝜎̂𝑧)

= 𝜔𝑎̂†𝑎̂ + 𝜔𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ + 𝑎̂†) + 𝜔𝜆2

𝐻[2](#_bookmark3) 𝑈

(18)

# 对 进行 的幺正变换

根据 [式 13](#_bookmark3) 的结果，可以求解

## 𝑈𝐻2𝑈† = 𝑈 Ω2 𝜎̂𝑥𝑈†

= Ω2 [𝜎̂𝑥 cosh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†)) + 𝑖𝜎̂𝑦 sinh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†))]

𝐻[3](#_bookmark1) [𝑈](#_bookmark2)

# 对 进行 的幺正变换

根据 [式 8](#_bookmark1) 和 式 [10](#_bookmark2) 的结果求解

𝑈𝐻3𝑈† = 𝑈 𝑔𝜎̂𝑧(𝑎̂† + 𝑎̂)𝑈 †

= 𝑔𝜎̂𝑧(𝑈 𝑎̂†𝑈 † + 𝑈 𝑎̂𝑈 †)

= 𝑔𝜎̂𝑧(𝑎̂† + 𝜆𝜎̂𝑧 + 𝑎̂ + 𝜆𝜎̂𝑧)

= 𝑔𝜎̂𝑧(𝑎̂† + 𝑎̂) + 2𝑔𝜆

(19)

(20)

# 合并得到

将以上结果合并，得到

𝐻̃ = 𝑈𝐻𝑈† = 𝑈𝐻1𝑈† + 𝑈𝐻2𝑈† + 𝑈𝐻3𝑈†

= 𝜔𝑎̂†𝑎̂ + 𝜔𝜆𝜎̂𝑧(𝑎̂ + 𝑎̂†) + 𝜔𝜆2 +

Ω2 [𝜎̂𝑥 cosh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†)) + 𝑖𝜎̂𝑦 sinh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†))] +

𝑔𝜎̂𝑧(𝑎̂† + 𝑎̂) + 2𝑔𝜆

= 𝜔𝑎̂†𝑎̂ + (𝜔𝜆 + 𝑔)𝜎̂𝑧(𝑎̂ + 𝑎̂†) + (𝜔𝜆2 + 2𝑔𝜆) + Ω2 [𝜎̂𝑥 cosh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†)) + 𝑖𝜎̂𝑦 sinh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†))]

(21)

至此，推导结束 .

**Section 4:** 连带拉盖尔多项式

连带拉盖尔多项式是一个用于求解量子力学问题的数学工具，其定义如下：

𝐿𝜇𝑛(𝑥) = ∑∞

(−1)𝑖 (𝑛 + 𝜇)!

𝑥𝑖

(𝑖=𝑛0+ 𝜇)!

(∞𝑛 − 𝑖)!(𝜇 + 𝑖)! 𝑖! 𝑖

(22)

=

* 1. **BHC** 公式的另一个形式

BHC 公式的另一个形式如下：

𝑛! ∑𝑖=0 (−1)𝑖 (𝑛 − 𝑖)𝑛!(!𝜇 + 𝑖)! 𝑥𝑖!

𝑒𝐴𝑒𝐵 = 𝑒𝐴+𝐵+12 [𝐴,𝐵]+ 112 [𝐴,[𝐴,𝐵]]− 112 [𝐵,[𝐴,𝐵]]+⋯ (23)

当 [𝐴, [𝐴, 𝐵]] = [𝐵, [𝐴, 𝐵]] = 0时， BHC 公式的另一个形式可以简化为

𝑒𝐴+𝐵 = 𝑒𝐴𝑒𝐵𝑒−12 [𝐴,𝐵] (24)

# 展开 sinh cosh项

† 𝑚 𝑛

先要解决一个问题，升降算符的幂乘积的问题，即 (𝑎̂ )

(𝑎̂)

的简化问题，首先定义算符

𝑁̂ = 𝑎̂†𝑎̂。它与 𝑎̂† 和

先让 𝑚 ≥ 𝑛，有

𝑎̂ 的对易关系为

[𝑁̂, 𝑎̂†] = [𝑎̂†𝑎̂, 𝑎̂†] = 𝑎̂†𝑎̂𝑎̂† − 𝑎̂†𝑎̂†𝑎̂ = 𝑎̂†[𝑎̂, 𝑎̂†] = 𝑎̂† [𝑁̂, 𝑎̂] = [𝑎̂†𝑎̂, 𝑎̂] = 𝑎̂†𝑎̂𝑎̂ − 𝑎̂𝑎̂†𝑎̂ = 𝑎̂[𝑎̂†, 𝑎̂] = −𝑎̂

(𝑎̂†)𝑚(𝑎̂)𝑛 = 𝑎⏟̂†⏟𝑎̂⏟†𝑎̂†…⏟⏟𝑎̂†⏞𝑎̂𝑎̂𝑎̂𝑛…𝑎̂

(25)

𝑚

⏞n-1

= 𝑎⏟̂†⏟𝑎̂⏟†𝑎̂†…⏟⏟𝑎̂†𝑁̂ 𝑎̂𝑎̂𝑎̂…𝑎̂

m-1

⏞n-2

= 𝑎⏟̂†⏟𝑎̂⏟†𝑎̂†…⏟⏟𝑎̂†𝑎̂(𝑁̂ − 1)𝑎̂𝑎̂𝑎̂…𝑎̂

m-1

⏞n-2

= 𝑎⏟̂†⏟𝑎̂⏟†𝑎̂†…⏟⏟𝑎̂†𝑁̂(𝑁̂ − 1)𝑎̂𝑎̂𝑎̂…𝑎̂

m-2

⏞n-3

(26)

= 𝑎⏟̂†⏟𝑎̂⏟†𝑎̂†…⏟⏟𝑎̂†𝑁̂(𝑎(𝑁̂ − 1) − 𝑎)𝑎̂𝑎̂𝑎̂…𝑎̂

m-2

⏞n-3

= 𝑎⏟̂†⏟𝑎̂⏟†𝑎̂†…⏟⏟𝑎̂†𝑁̂𝑎(𝑁̂ − 2)𝑎̂𝑎̂𝑎̂…𝑎̂

m-2

⏞n-3

= 𝑎⏟̂†⏟𝑎̂⏟†𝑎̂†…⏟⏟𝑎̂†𝑎(𝑁̂ − 1)(𝑁̂ − 2)𝑎̂𝑎̂𝑎̂…𝑎̂

m-2

⏞n-3

= 𝑎⏟̂†⏟𝑎̂⏟†𝑎̂†…⏟⏟𝑎̂†𝑁̂(𝑁̂ − 1)(𝑁̂ − 2)𝑎̂𝑎̂𝑎̂…𝑎̂

= ⋯ m-3

可以总结出规 律̂ ，即 ̂(𝑎̂†̂)𝑚(𝑎̂)𝑛 =̂(𝑎̂†)𝑚−𝑛𝑁̂(𝑁̂ − 1)…(𝑁̂ − 𝑛 + 1)，其中 𝑁̂ = 𝑎̂†𝑎̂，令连乘 对于 𝑚 < 𝑛 的情况，同样可以得到 (𝑎̂†)𝑚(𝑎̂)𝑛 = ℎ𝑚(𝑁̂)𝑎̂𝑛−𝑚。

项为函数 ℎ𝑛(𝑁) = 𝑁(𝑁 − 1)…(𝑁 − 𝑛 + 1).

* + 1. 展开 cosh 项

令 𝜈 = −2𝜆， [式 21](#_bookmark4) 的 cosh 项 可以展开为

cosh(𝜈(𝑎̂† − 𝑎̂)) = 2 (𝑒𝜈(𝑎̂†−𝑎̂) + 𝑒−𝜈(𝑎̂†−𝑎̂))

= 12 (𝑒𝜈𝑎̂† 𝑒−𝜈𝑎̂𝑒−12 [𝜈𝑎̂†,−𝜈𝑎̂] + 𝑒−𝜈𝑎̂† 𝑒𝜈𝑎̂𝑒−12 [−𝜈𝑎̂†,𝜈𝑎̂])

= 12 (𝑒𝜈𝑎̂† 𝑒−𝜈𝑎̂𝑒−𝜈22 + 𝑒−𝜈𝑎̂† 𝑒𝜈𝑎̂𝑒−𝜈22 )

= 12 𝑒−𝜈22 (𝑒𝜈𝑎̂† 𝑒−𝜈𝑎̂ + 𝑒−𝜈𝑎̂† 𝑒𝜈𝑎̂)

(27)

1 −𝜈22 ∞



= 2 𝑒  ∑

𝑚,𝑛

𝑚1!𝑛! [𝜈𝑚(−𝜈)𝑛 + (−𝜈)𝑚𝜈𝑛](𝑎̂†)𝑚𝑎̂𝑛

这里我们先假定了 [𝐴, [𝐴, 𝐵]] = [𝐵, [𝐴, 𝐵]] = 0，实际情况

[𝐴, 𝐵] = [𝜈𝑎̂†, −𝜈𝑎̂] = 𝜈2 ≡ 常数 (28)

常数与任何算符对易，假定成立 . 对于 𝑚 − 𝑛 = 2𝑘 ≥ 0 的情况（由于 cosh只有偶次幂项 ） ，有

𝐼𝑥+ = 12 𝑒−𝜈22 ∑∞ 𝑚1!𝑛! [𝜈𝑚(−𝜈)𝑛 + (−𝜈)𝑚𝜈𝑛](𝑎̂†)𝑚𝑎̂𝑛

𝑚,𝑛

= 12 𝑒−𝜈22 ∑∞ ∑∞ (2𝑘 +1𝑛)!𝑛! [𝜈𝑛+2𝑘(−𝜈)𝑛 + (−𝜈)𝑛+2𝑘𝜈𝑛](𝑎̂†)𝑛+2𝑘𝑎̂𝑛

𝑘=0 𝑛=0 𝑛

= 12 𝑒−𝜈22 ∑∞ ∑∞ (−)

ℎ𝑛(𝑁̂)2𝜈2𝑛+2𝑘(𝑎̂†)2𝑘

𝑘=0 𝑛=0

(2𝑘 + 𝑛)!𝑛!

𝑛 𝜈2𝑛

−𝜈22 ∞



= 𝑒  ∑

𝑘=0

= 𝑒−𝜈22 ∑∞

(𝑎̂†)2𝑘𝜈2𝑘 ∑∞ (𝑎̂†)2𝑘𝜈2𝑘 ∑∞

(−)𝑛ℎ (𝑁̂)

(2𝑘 + 𝑛)!𝑛!

(−)𝑛𝑁̂!

𝑛=0

(𝜈2)𝑛

(29)

𝑘=0

𝑛=0 (2𝑘 + 𝑛)!(𝑁̂ − 𝑛)!

𝑛!

= 𝑒−𝜈22 ∑∞

(𝑎̂†)2𝑘𝜈2𝑘

̂ 𝑁̂!

∑∞ (−)𝑛(𝑁̂ + 2𝑘)!

(𝜈2)𝑛

𝑘=0

(𝑁 + 2𝑘)! 𝑛=0 (2𝑘 + 𝑛)!(𝑁̂ − 𝑛)!

𝑛!

−𝜈22 ∞



= 𝑒  ∑

̂

𝑘=0

(𝑎̂†)2𝑘𝜈2𝑘

𝑁̂! (𝑁 + 2𝑘)!

𝐿2𝑁̂𝑘(𝜈2)

对于 𝑛 − 𝑚 = 2𝑘 ≥ 0 的情况，有

𝐼𝑥− = 12 𝑒−𝜈22 ∑∞ 𝑚1!𝑛! [𝜈𝑚(−𝜈)𝑛 + (−𝜈)𝑚𝜈𝑛](𝑎̂†)𝑚𝑎̂𝑛

𝑚,𝑛

= 12 𝑒−𝜈22 ∑∞ ∑∞ (𝑚 + 21𝑘)!2𝑘! [𝜈𝑚+2𝑘(−𝜈)𝑚 + (−𝜈)𝑚+2𝑘𝜈𝑚](𝑎̂†)𝑚𝑎̂𝑚+2𝑘

𝑘=0 𝑚=0 𝑚

= 12 𝑒−𝜈22 ∑∞ ∑∞ (−)

ℎ𝑚(𝑁̂)2𝜈𝑚+2𝑘(𝑎̂†)𝑚𝑎̂𝑚+2𝑘

𝑘=0 𝑚=0 (𝑚 + 2𝑘)!2𝑘!

= 𝑒−𝜈22 ∑∞

𝜈2𝑘 ∑∞

(−)𝑚ℎ𝑚(𝑁̂)𝜈𝑚𝑎̂2𝑘

(30)

𝑘=0

𝑚=0 (𝑚 + 2𝑘)!2𝑘! 𝑚

= 𝑒−𝜈22 ∑∞

𝜈2𝑘 ∑∞

(−)𝑚𝑁̂!

(𝜈2)

𝑎̂2𝑘

𝑘=0

𝑚=0 (𝑚 + 2𝑘)!(𝑁̂ − 𝑚)!

𝑚!

= 𝑒−𝜈22 ∑∞

𝜈2𝑘

̂ 𝑁̂!

∑∞ (−)𝑚(𝑁̂ + 2𝑘)!

(𝜈2)𝑚 𝑎̂2𝑘

𝑘=0

(𝑁 + 2𝑘)! 𝑚=0 (𝑚 + 2𝑘)!(𝑁̂ − 𝑚)!

𝑚!

−𝜈22 ∞



= 𝑒  ∑

̂

𝑘=0

𝜈2𝑘

𝑁̂! (𝑁 + 2𝑘)!

𝐿2𝑁̂𝑘(𝜈2)𝑎̂2𝑘

定义一个函数

可以得到

𝑓(𝜈, 𝑁̂, 𝑚) = 𝑒−𝜈22 𝜈𝑚

𝑁̂! (𝑁 + 𝑚)!

𝐿𝑁𝑚̂ (𝜈2) (31)

𝐼𝑥+ = ∑∞ (𝑎̂†)2𝑘𝑓 (𝜈, 𝑁̂, 2𝑘)

̂

− 𝑘=0∞

̂ 2𝑘 (32)

总结得到

𝐼𝑥 = ∑𝑘=0 𝑓(𝜈, 𝑁, 2𝑘)𝑎̂

cosh(𝜈(𝑎̂ − 𝑎̂†)) = 𝐼𝑥+ + 𝐼𝑥− = 𝑓(𝜈, 𝑁̂, 0) + ∑∞ [(𝑎̂†)2𝑘𝑓 (𝜈, 𝑁̂, 2𝑘) + 𝑓(𝜈, 𝑁̂, 2𝑘)𝑎̂2𝑘]. (33)

𝑘=1

* + 1. 展开 项

sinh

同理，对于 sinh 项，有

sinh(𝜈(𝑎̂ − 𝑎̂†)) = ∑∞ [(𝑎̂†)2𝑘+1𝑓 (𝜈, 𝑁̂, 2𝑘 + 1) − 𝑓(𝜈, 𝑁̂, 2𝑘 + 1)𝑎̂2𝑘+1]. (34)

𝑘=0

**Section 5:** 的绝热形式

𝐻̃

𝐻̃ = 𝜔𝑎̂†𝑎̂ + (𝜔𝜆 + 𝑔)𝜎̂𝑧(𝑎̂ + 𝑎̂†) + (𝜔𝜆2 + 2𝑔𝜆) +

Ω2 [𝜎̂𝑥 cosh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†)) + 𝑖𝜎̂𝑦 sinh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†))]

(35)

首先，令 𝜆 = − 𝜔𝑔 ，有

𝐻̃ = 𝜔𝑎̂†𝑎̂ + (𝜔 ∗ (−𝜔𝑔 ) + 𝑔)𝜎̂𝑧(𝑎̂ + 𝑎̂†) + (𝜔(−𝜔𝑔 )2 + 2𝑔 ∗ (−𝜔𝑔 )) + Ω2 [𝜎̂𝑥 cosh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†)) + 𝑖𝜎̂𝑦 sinh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†))]

= 𝜔𝑎̂†𝑎̂ − 𝑔2 + Ω[𝜎̂𝑥 cosh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†)) + 𝑖𝜎̂𝑦 sinh(2𝜆(𝑎̂ − 𝑎̂†))]

(36)

𝜔 2

绝热近似只取 Ω2 的展开零阶项，即

𝐻̃𝐴𝐴 ≈ 𝜔𝑎̂†𝑎̂ − 𝑔2 + Ω 𝜎̂𝑥𝑓(−2𝜆, 𝑁̂, 0)

𝜔 2

= ⎛⎜

𝜔𝑎̂†𝑎̂ − 𝑔𝜔2

## Ω2 𝑓(−2𝜆, 𝑁̂, 0)⎞⎟

(37)

求本征值，有

## ⎝Ω2 𝑓(−2𝜆, 𝑁̂, 0)

𝜔𝑎̂†𝑎̂ − 𝑔𝜔2 ⎠

本征函数为

𝜔 2

𝐸𝐴±,𝐴𝑁 = 𝜔𝑎̂†𝑎̂ − 𝑔2 ± Ω𝑓(−2𝜆, 𝑁̂, 0) (38)

|Ψ̃ ±𝐴,𝐴𝑁 ⟩ = |±𝑥, 𝑁⟩ (39)

**Section 6:** 广义旋转波近似

̂

取一阶项 𝑓(−2𝜆, 𝑁 , 1)

哈密顿量写为

根据 [式 6](#_bookmark0) 可以简化为

𝐻̃𝐺𝑅𝑊 𝐴 = 𝐻̃𝐴𝐴 + Ω2 [𝑖𝜎̂𝑦𝑎̂†𝑓 (−2𝜆, 𝑁̂, 1) + ⋯] (40)

## 𝐻̃𝐺𝑅𝑊 𝐴 ≈ 𝐻̃𝐴𝐴 − Ω2 [(𝜎̂+ − 𝜎̂−)𝑎̂†𝑓 (−2𝜆, 𝑁̂, 1) − (𝜎̂+ − 𝜎̂−)𝑓(−2𝜆, 𝑁̂, 1)𝑎̂] (41)

做旋转波近似

## 𝐻̃𝐺𝑅𝑊 𝐴 ≈ 𝐻̃𝐴𝐴 + Ω2 [𝜎̂−𝑎̂†𝑓 (−2𝜆, 𝑁̂, 1) + 𝜎̂+𝑓(−2𝜆, 𝑁̂, 1)𝑎̂] (42)

𝑎̂†, 𝑎̂对本征函数的作用：

𝑎̂†|𝑁 ⟩ = √𝑁 + 1|𝑁 + 1⟩

√

(43)

𝑎̂|𝑁 ⟩ = 𝑁|𝑁 − 1⟩

用 |±𝑥, 𝑁⟩ 作为本征函数求它的非对角矩阵元有

⟨−𝑥, 𝑁| Ω2 𝜎̂−𝑎̂†𝑓 (−2𝜆, 𝑁̂, 1)|+𝑥, 𝑁 − 1⟩ = Ω2 𝑓(−2𝜆, 𝑁 − 1, 1)⟨−𝑥, 𝑁|𝜎̂−𝑎̂†|+𝑥, 𝑁 − 1⟩

= Ω2 √𝑁𝑓(−2𝜆, 𝑁 − 1, 1)⟨−𝑥, 𝑁|𝜎̂−|+𝑥, 𝑁⟩

= Ω2 √𝑁𝑓(−2𝜆, 𝑁 − 1, 1) ⋅ ⟨−𝑥, 𝑁|−𝑥, 𝑁⟩

= Ω2 √𝑁𝑓(−2𝜆, 𝑁 − 1, 1)

⟨+𝑥, 𝑁 − 1| Ω2 𝜎̂+𝑓(−2𝜆, 𝑁̂, 1)𝑎̂|−𝑥, 𝑁⟩ = Ω2 √𝑁⟨+𝑥, 𝑁 − 1|𝜎̂+𝑓(−2𝜆, 𝑁̂, 1)|−𝑥, 𝑁 − 1⟩

(44)

块矩阵元为

= Ω2 √𝑁𝑓(−2𝜆, 𝑁 − 1, 1)⟨+𝑥, 𝑁 − 1|𝜎̂+|−𝑥, 𝑁 − 1⟩

= Ω2 √𝑁𝑓(−2𝜆, 𝑁 − 1, 1) ⋅ ⟨+𝑥, 𝑁 − 1|+𝑥, 𝑁 − 1⟩

= Ω2 √𝑁𝑓(−2𝜆, 𝑁 − 1, 1)

𝐻̃GBRLOWCAK = ⎛⎜  √

𝐸𝐴+𝑥𝐴,𝑁−1

Ω2 √𝑁𝑓(−2−𝜆,,𝑁𝑁 − 1, 1)⎞⎟

(45)

本征值求解得到

⎝Ω2

𝑁𝑓(−2𝜆, 𝑁 − 1, 1)

𝐸𝐴𝑥𝐴 ⎠

## ⎣ Ω√

𝐸G±R,𝑁WA = 12 ⎡⎢𝐸𝐴+𝑥𝐴,𝑁−1 + 𝐸𝐴−𝑥𝐴,

2 + ,𝑁−1

− ,𝑁

2⎤ (46)

±√4 ⋅ ( 2

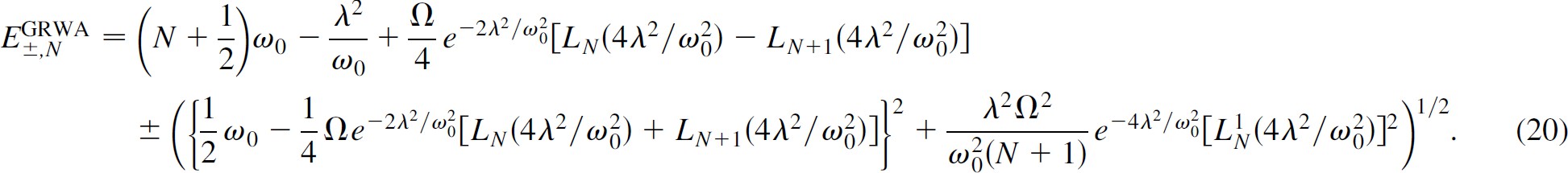
对应文献 [[1]](#_bookmark6)的参数，有

𝑁𝑓(−2𝜆, 𝑁 − 1, 1)) + (𝐸𝐴𝑥𝐴 − 𝐸𝐴𝑥𝐴 ) ⎥⎦

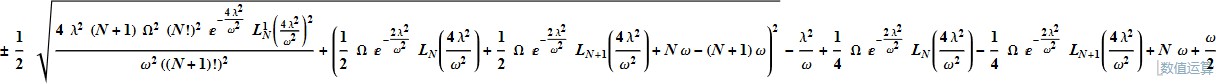
文献 [[1]](#_bookmark6)的形式为

0

𝑔 → 𝜆, 𝜆 → 𝜔𝜆 𝑁 → 𝑁 + 1 (47)



我们的形式为



每项完全一致，认为我们的推导是正确的 . 令 𝜔0 = 34 Ω，绘制不同能级 𝐸Ω 的图像

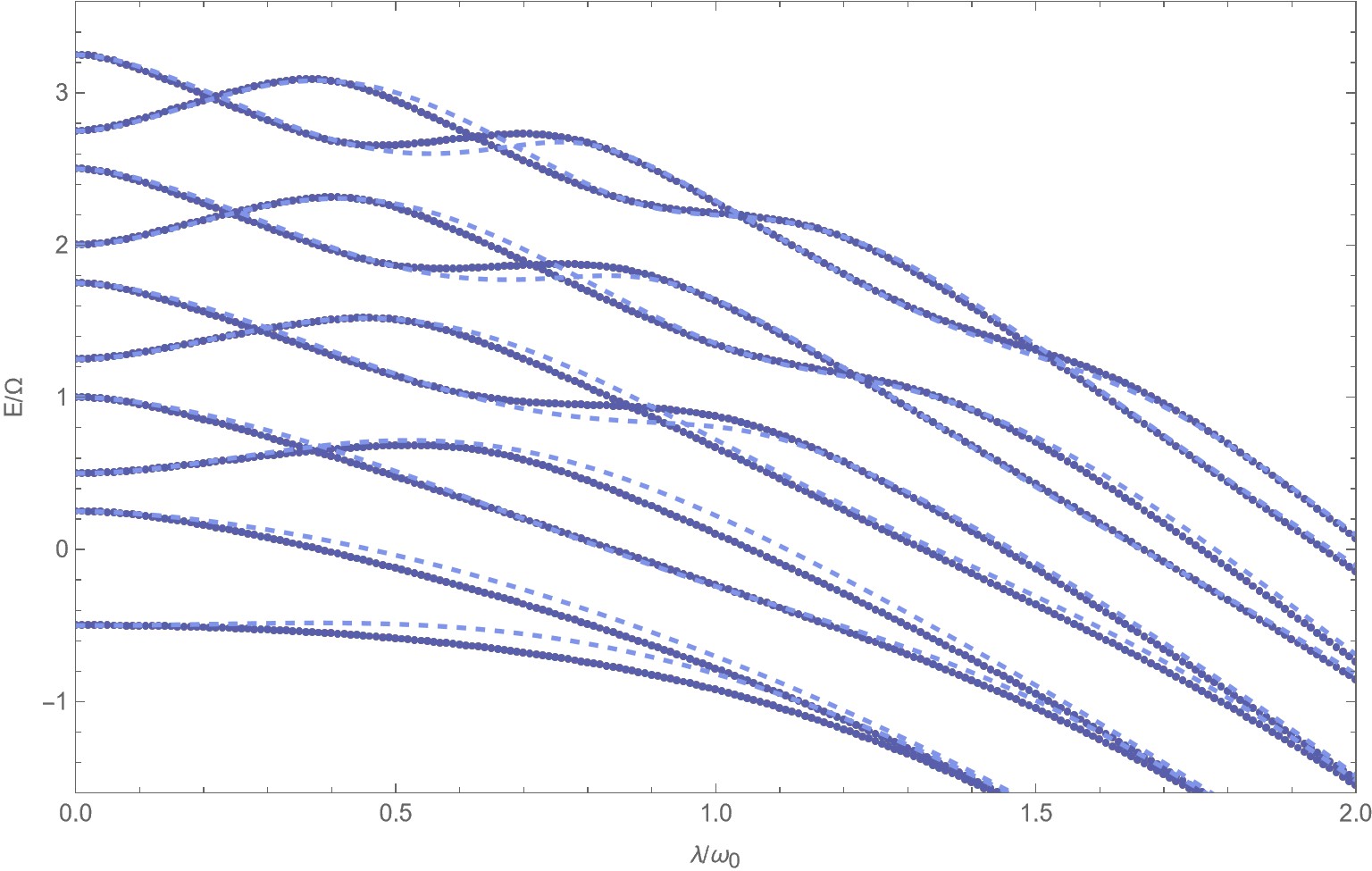


Figure 1: 广义旋转波近似下不同能级的能量图像 ,

虚线为 GRWA 近似的结果，实线为数值解的结果 选择参数关系 0

𝜔 = 0.75Ω

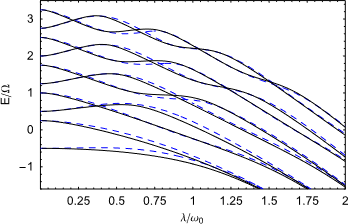


Figure 2: 文献 [1]的结果

**Bibliography**

[[1]](#_bookmark5) E. K. Irish, “Generalized Rotating-Wave Approximation for Arbitrarily Large Coupling,” *Physical Review Letters*, vol. 99, no. 17, p. 173601–173602, Oct. 2007, doi: [10/dj5z3b](https://doi.org/10/dj5z3b).