# Тема 4. Элементарные функции и их свойства

В этом материале мы познакомимся с так называемыми элементарными функциями. Они называются элементарными потому, что представляют собой базовые элементы, из которых строятся более сложные функции, которые часто используются в машинном обучении и анализе данных. Без знания свойств элементарных функций невозможно будет понять, как устроены функции моделей машинного обучения. Например, очень важная в нейросетях логистическая функция содержит в себе экспоненциальную функцию (это такая степенная функция, у которой основанием является константа $e$). Также в качестве функции активации служат арктангенс и функции, содержащие корни, а степенные функции применяются в полиномиальной регрессии.

Рассмотрим функции, с которыми вам чаще всего придётся иметь дело: линейную и квадратичную функции, функцию корня, показательную функцию, а также её частный случай — экспоненту, и логарифмическую функцию.

## Линейная функция

Линейная функция — очень простая и очень важная функция. Это основа линейных моделей (поэтому они так и называются), например знаменитой логистической регрессии.

Функция называется линейной, потому что её график — это прямая линия, легко запомнить. Область определения линейной функции — все действительные числа, то есть *x* может быть любым. Какой бы *x* мы не выбрали на оси *OX,* для него всегда найдётся точка графика. В общем виде линейная функция записывается так:

$$f(x) = kx + b$$

Вспомним нашу запись для функции из темы 1:

область значений

$$f : X \to Y$$

область определения

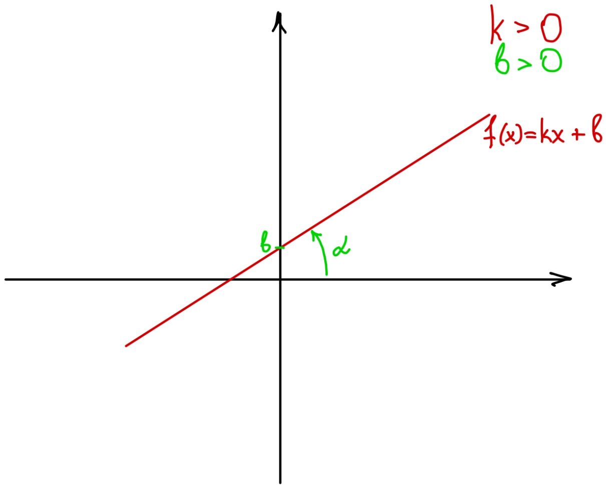
название функции

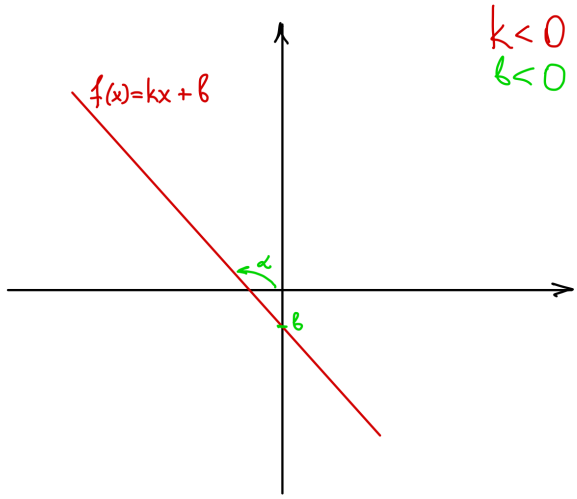
Получается, что для линейной функции она запишется так:

$$kx + b : (-\infty; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$$

$k$ и $b$ — это числа, которые называются коэффициентами. Коэффициент $k$ называется угловым, потому что от него зависит, под каким углом к оси абсцисс (*X*) проходит прямая. Если говорить точнее, то коэффициент $k = tg(\alpha)$ равен тангенсу угла наклона прямой. То есть с помощью коэффициента $k$ можно узнать, под каким углом к оси *X* проходит прямая. Коэффициент

$b$ отвечает за высоту, на которой прямая пересекает вертикальную ось. Он, конечно, может быть и отрицательным, значит, прямая пересекает вертикальную ось ниже оси абсцисс.




Если $k > 0$, то $tg(\alpha)$ будет положительным, значит, прямая будет всё время возрастать (левый график), если же, наоборот, $k < 0$ — убывать (правый график). Если же $k = 0$, график будет представлять собой горизонтальную прямую.

## Квадратичная функция (парабола)

Теперь, когда мы немного разобрались с линейными функциями, перейдём к квадратичной. Она часто применяется в машинном обучении, например в функциях потерь. Из названия легко догадаться, что в этой функции присутствует квадрат. Так и есть, эта функция известна нам со школы по квадратным уравнениям. Её область определения — все действительные числа. Она выглядит так:

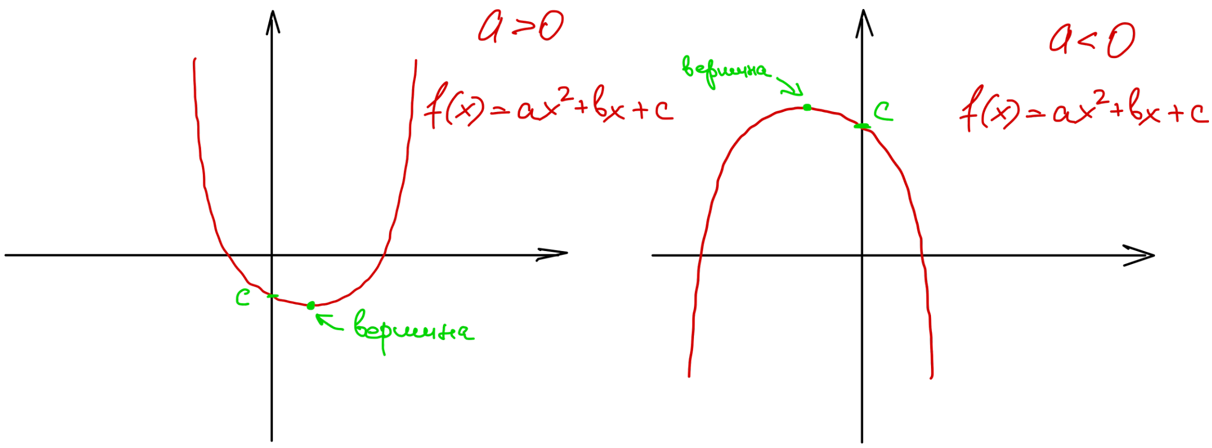
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Причём $a$ не может быть равно нулю, иначе получится просто линейная функция.

Получается, что наша запись квадратичной функции по форме из темы 1 примет такой вид:

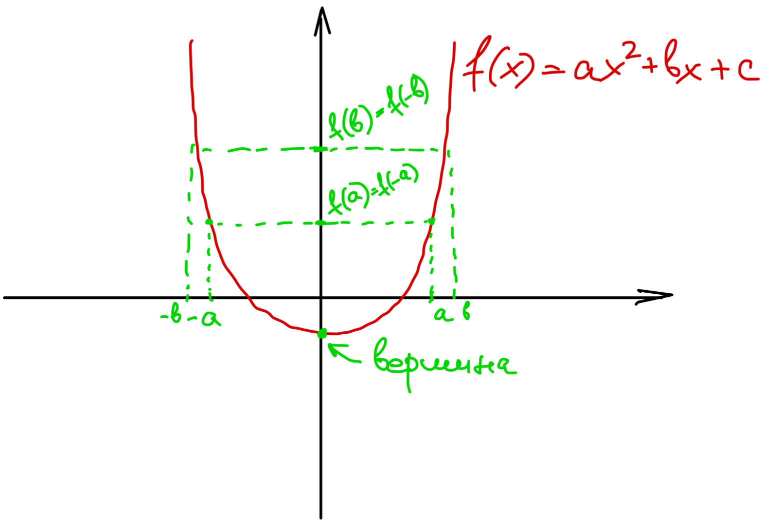
$$ax^2 + bx + c : (-\infty; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$$

График квадратичной функции — парабола. Если $a > 0$, её ветви направлены вверх, а если $a < 0$ — вниз. Точка, в которой одна ветвь переходит в другую, называется вершиной параболы. Коэффициент $c$, как и в случае прямой, отвечает за высоту пересечения с вертикальной осью $OY$.




Можно заметить, что и в линейной функции есть член без икса, и в квадратичной. И там и там он отвечает за высоту пересечения с осью *OY*. Это не случайно. Такой член в функциях называется свободным членом. Изменяя его, можно двигать график вверх и вниз.

Квадратичная функция обладает таким замечательным свойством, как симметричность. Это значит, что если мы проведём вертикальную прямую через вершину параболы, окажется, что относительно этой прямой парабола симметрична. Если вершина лежит на оси *OY*, это свойство называется чётностью функции. Чётные функции обладают замечательным свойством, заключающимся в том, что противоположные аргументы имеют одинаковое значение функции. Например, если у нас есть два значения аргумента $x$ — $a$ и $-a$, то $f(a) = f(-a)$, и так для любых двух противоположных чисел.




Мы уже многое сказали о свойствах функций и преобразованиях графиков. Наверное, у вас уже возник закономерный вопрос: какова практическая польза этих преобразований или, говоря проще, зачем они нужны?

Многие алгоритмы машинного обучения, по сути, занимаются именно тем, что подбирают коэффициенты функций так, чтобы функция соответствовала данным. Чтобы понимать, как именно это происходит, необходимо знать свойства этих коэффициентов.

С другой стороны, если в задаче мы имеем дело с какой-то функцией, свойства которой знаем, мы можем сильно облегчить себе жизнь. Простейший пример — это применение свойства чётности функции. Ведь если функция чётная, нам достаточно посчитать её значения только на одной половине области определения, и мы уже будем знать её значения на другой, потому что они равны. Так можно сильно сэкономить вычислительные ресурсы.

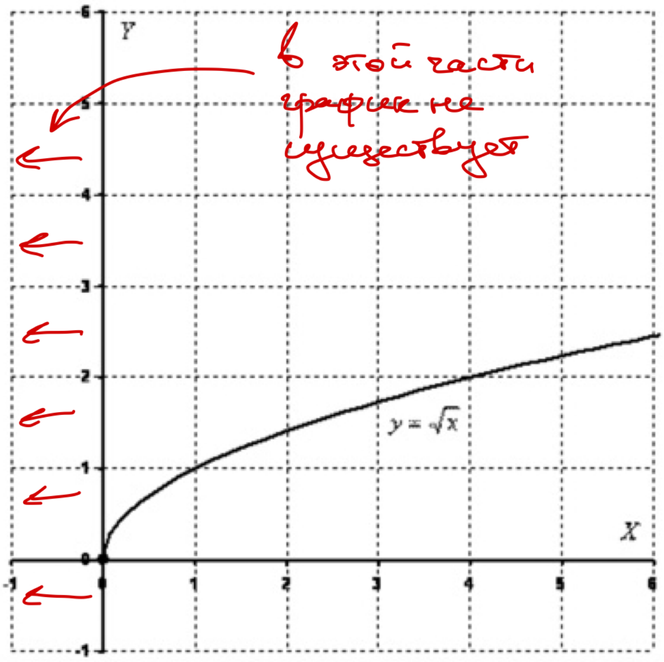
## Корень

Следующая важная функция, которой мы коснёмся, — это функция корня. Она также играет важную роль в машинном обучении, например, присутствует в некоторых функциях потерь, то есть используется при расчёте эмпирического риска. Мы будем говорить в основном о квадратном корне, поскольку именно он нам и нужен.

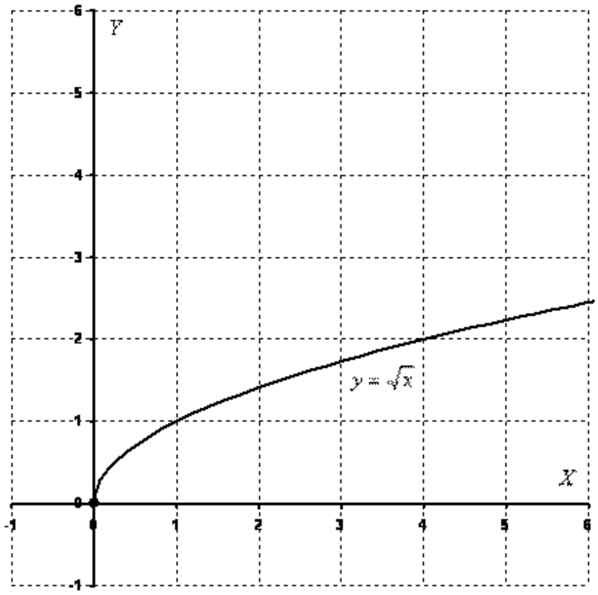
Нам уже известно, что извлечение квадратного корня — это операция, **обратная** к возведению в квадрат. Если бы мы возвели число в квадрат, а потом захотели отменить эту операцию, то есть вернуть всё **обратно,** мы могли бы сделать это с помощью корня. Здесь, как видите, ключевое слово — **обратно.**

Извлечение корня из отрицательного числа не имеет смысла. Это значит, что в функцию нельзя подставлять отрицательные значения. Здесь мы впервые сталкиваемся с ограниченной областью определения.

Вот график функции корня. Функция корня определена не для всех действительных чисел. Она сопоставляет значения только неотрицательным числам.




Кроме того, область значений корня также ограничена, ведь, как мы помним, корень не может быть отрицательным. Получается, что функция квадратного корня сопоставляет неотрицательным числам неотрицательные числа. Графически это соответствует тому, что график располагается в правой верхней четверти:




Это логично, ведь если бы точки графика были левее или ниже, хотя бы одна координата была бы отрицательной, а область определения и область значений корня этого не позволяют.

Получается, что наша запись для функции из темы 1 примет такой вид:

$$\sqrt{x} : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$$

## Показательная функция и экспонента

Поговорим ещё об одной важной функции — показательной. Показательная функция — это положительное число, возведённое в степень переменной. Как вы уже знаете, она часто применяется в машинном обучении.

Например, пять в степени икс. То есть, чтобы посчитать значение этой показательной функции при каком-то икс, нужно возвести пять в степень икс. Например, для икс, равного трём, значение этой функции будет равно пяти в третьей степени, то есть 125:

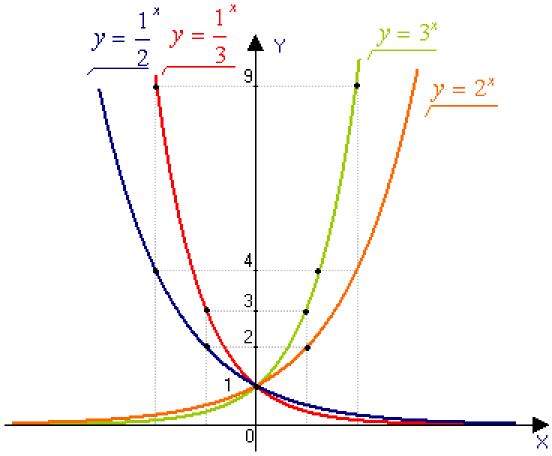
$$f(x) = 5^{x},\ f(5) = 5^{3} = 125$$

А для икс, равного нулю, значение функции будет равно пяти в нулевой степени, то есть единице:

$$f(0) = 5^{0} = 1$$

Но ведь любое положительное число в нулевой степени равно единице. Получается, что все показательные функции при икс, равном нулю, будут равны единице. То есть если у нас есть показательная функция вида $f(x) = a^{x}$ (кстати, это общий вид показательной функции), то каким бы ни было $a,\ f(0) = a^{0} = 1$.

Вот несколько различных показательных функций, но мы видим, что все они проходят через точку (0,1).

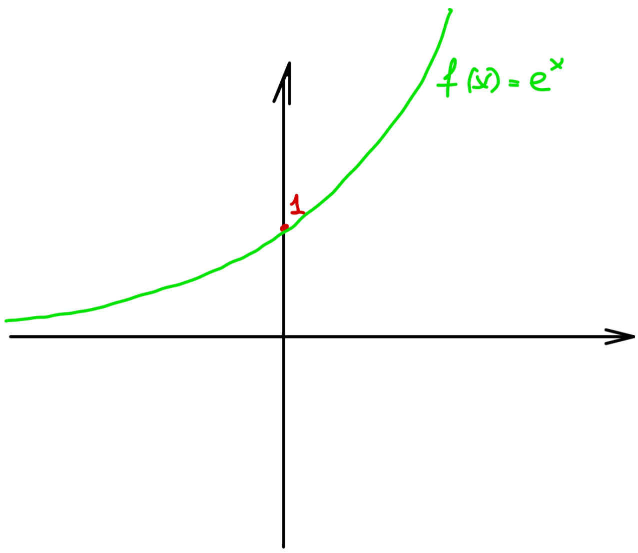



Область определения показательной функции хорошая, все действительные числа, что логично — возводить можно в любую степень. А вот область значений ограничена: только положительные числа. Обратите внимание, что ноль не входит в область значений функции: нельзя добиться, чтобы число стало нулём из-за возведения в степень.

Получается, что наша запись для функции из темы 1 примет такой вид:

$$a^x : (-\infty; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$$

Важнейший пример показательной функции — экспоненциальная функция. Это частный случай показательной функции, когда $a = e$. Мы уже говорили о константе $e$ ранее и помним, что это такое иррациональное число, равное примерно 2,7. Получается, что экспоненциальная функция — это всего лишь показательная функция $f(x) = e^x$. Её график выглядит так:




Вид графика показательной функции (а значит, и экспоненты) зависит от того, $a$ больше единицы или нет. Это связано с тем, что если возводить во всё большую степень число, большее единицы, оно будет увеличиваться, а если то же самое делать с числом меньше единицы, оно будет уменьшаться.

Давайте посмотрим:

$$2^{-2} = 0.25,\ 2^{-1} = 0.5,\ 2^{0} = 1,\ 2^{1} = 2,\ 2^{2} = 4,\ 2^{3} = 8,...$$

Видим, что растёт. Посмотрим для основания меньше единицы:

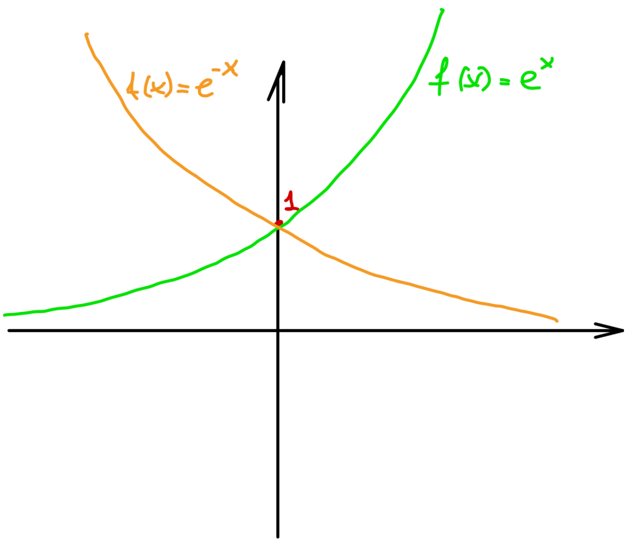
$$0.5^{-2} = 4,\ 0.5^{-1} = 2,\ 0.5^{0} = 1,\ 0.5^{1} = 0.5,\ 0.5^{2} = 0.25,\ 0.5^{3} = 0.125,...$$

Видим, что убывает.

Обратите внимание, что обе функции оказались равны друг другу и равны единице в точке 0, как мы и говорили.

В качестве ещё одного примера рассмотрим опять экспоненциальную функцию, но немного другого вида. Чтобы основание степени стало меньше единицы (мы хотим рассмотреть именно такой пример), возьмём вместо экспоненты обратное к ней число, то есть единицу, делённую на экспоненту: $\frac{1}{e}$ (примерно 0,37, то есть меньше единицы, как мы и хотели), и будем использовать её в качестве основания показательной функции. В результате получится такая функция: $f(x) = (\frac{1}{e})^{x}$. Мы помним, что дробь можно записать в виде отрицательной степени, давайте так и сделаем. Получим: $f(x) = e^{-x}$.

График подобной функции выглядит так:

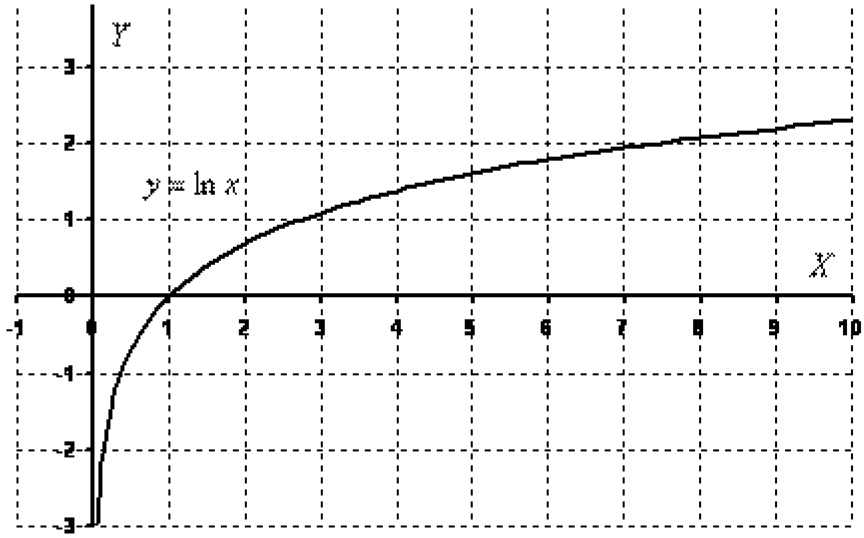



Получается, что если основание показательной функции меньше единицы, можно преобразовать эту функцию так, что основание будет больше единицы (что удобнее), заплатив за это сменой знака показателя степени. Также можно заметить, что смена знака степени в экспоненциальной функции отразила её относительно оси $OY$. Это свойство справедливо для всех показательных функций.

## Логарифмическая функция

Следующая функция, о которой мы поговорим, — логарифмическая. Это функция, которая возвращает для каждого икс значение логарифма этого икс. То есть она выглядит так: $f(x) = log_{a}x$. В машинном обучении большую роль играет именно натуральный логарифм (то есть с основанием, равным $e$), поэтому будем рассматривать в основном функцию с ним: $f(x) = lnx$.

Мы помним, что брать логарифм можно только от положительных чисел, значит, область определения логарифмической функции будет ограничена: подставлять в неё можно только положительные числа. А вот область значений — все числа. График функции натурального логарифма такой:




Как видите, слева от оси $OY$ график логарифма «не живёт». Но чем меньше становится икс, тем ближе график прижимается к $OY$, но никогда его не пересекает и не касается.

Получается, что наша запись для функции из темы 1 примет такой вид:

$$\log_a x : (0; +\infty) \to -\infty; +\infty)$$

Мы помним, что все логарифмы равны нулю, если подставить в них единицу. По этой причине все логарифмические функции равны нулю при $x = 1$, а их графики проходят через точку (1;0).

## Итоги

Итак, в этом материале мы рассмотрели некоторые элементарные функции и познакомились с их свойствами. Важно помнить, что элементарные функции представляют собой базовые элементы, из которых строятся более сложные функции, которые часто используются в машинном обучении и анализе данных.

**Линейная функция** — очень простая и очень важная функция, её графиком является прямая, а сама функция записывается так:

$$f(x) = kx + b$$

Коэффициент $k = tg(\alpha)$ равен тангенсу угла наклона прямой, а коэффициент $b$ отвечает за высоту, на которой прямая пересекает вертикальную ось.

**Квадратичная функция** не менее важна, она используется в функциях потерь, а её графиком является парабола. Область определения квадратичной функции — все действительные числа. Она выглядит так:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Важно помнить про **симметричность квадратичной функции.** Если мы проведём вертикальную прямую через вершину параболы, окажется, что относительно этой прямой парабола симметрична.

Симметричность приводит нас к свойству, которое называется **чётностью функции.** У чётных функций противоположные аргументы имеют одинаковое значение функции. Например, если у нас есть два значения аргумента $x$ — $a$ и $-a$, то $f(a) = f(-a)$, и так для любых двух противоположных чисел.

**Функция квадратного корня** — ещё одна не менее важная функция, которая является обратной функцией к возведению в квадрат. Извлечение корня из отрицательного числа не имеет смысла, поэтому область определения корня ограничена. Кроме того, область значений корня также ограничена, ведь корень не может быть отрицательным.

**Показательная функция** — это положительное число, возведённое в степень переменной. Например, $f(x) = 5^x$. Область определения показательной функции — все действительные числа, а вот область значений — только положительные числа. Ноль не входит в область значений функции.

Важнейший пример показательной функции — **экспоненциальная функция.** Это частный случай показательной функции, когда $a = e$, то есть $f(x) = e^x$.

Последняя функция — **логарифмическая.** Она возвращает для каждого икс значение логарифма этого икс: $f(x) = log_a x$. В машинном обучении большую роль играет именно натуральный логарифм: $f(x) = lnx$.

Брать логарифм можно только от положительных чисел, значит, область определения логарифмической функции будет ограничена: только положительные числа, а область значений — все числа.