이론통계학2-project #3 Option Price 계산

강아미, 고유정, 윤보인, 이혜린, 홍지원

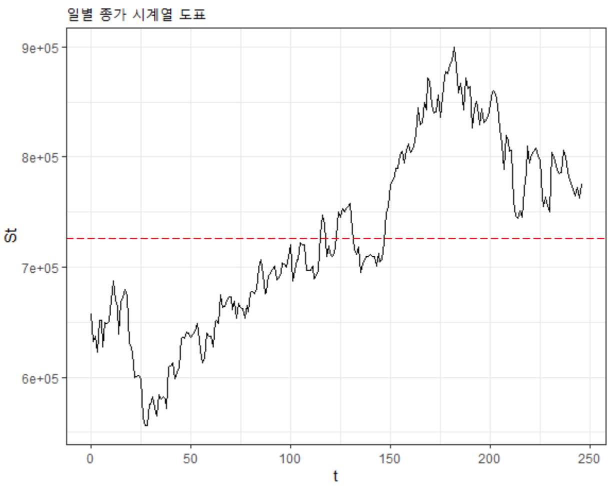
Problem : 2016년~2017년 네이버 주식시세 일별 종가 시계열자료를 이용해 주식의 Call/Put Option 가격을 Black Scholes 방법을 이용해 구하라.

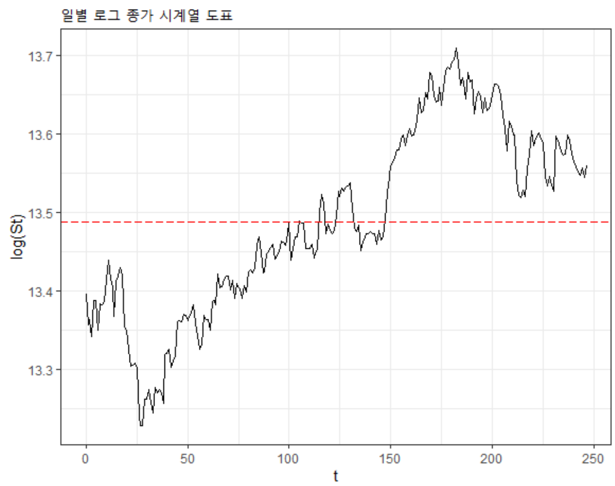
1년 금리 : t = 5% / 만기 : 1, 3, 6, 9, 12개월 / 행사가격 : K=2016년 12월 30일 종가 /

현재주가 : S_o=2017년 1월 2일 시가

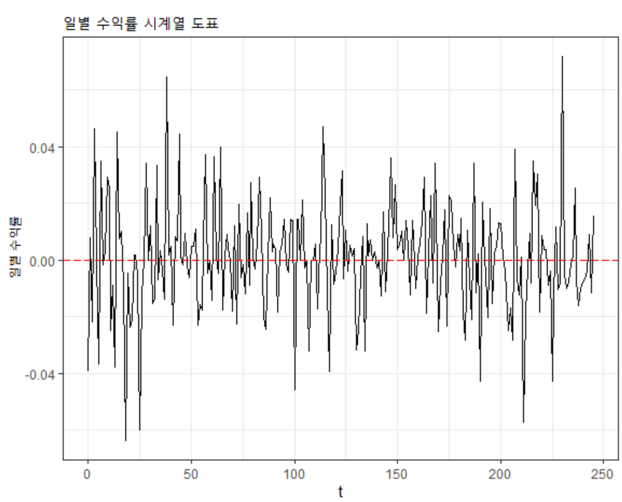
<part1> 연속시간 Stock Price Model

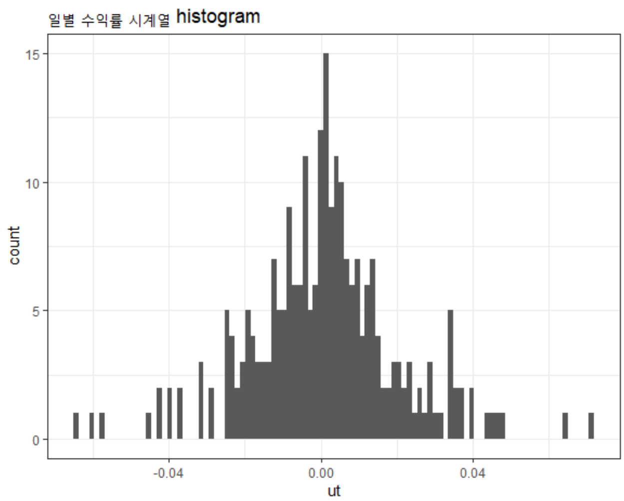
1) 2016년 한 해 동안 일별 종가 및 로그 종가 $(S_t, \ln S_t)$, t=0,1,...,n 에 대한 시계열 도표를 그리시오.



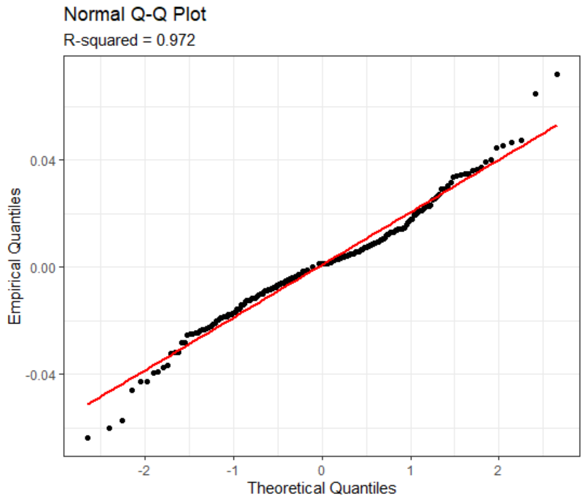


2) 일별수익률(daily return): $u_t = \Delta S_t / S_t$, t=0,1,...,(n-1) 자료의 시계열도표, 히스토그램 및 Normal, Logistic, Laplace, 자유도 k의 t분포의 Q-Q plot을 각각 그려보시오.

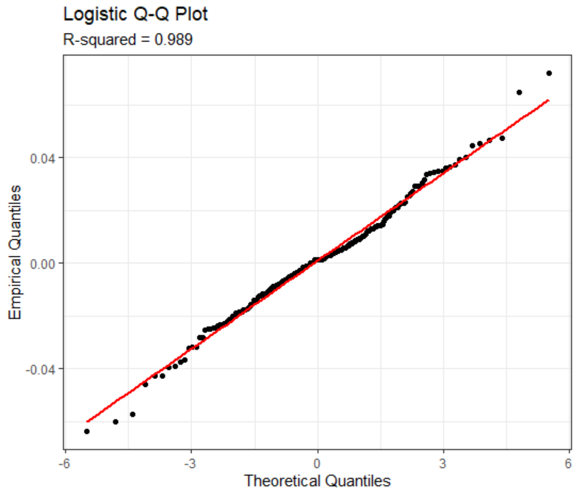




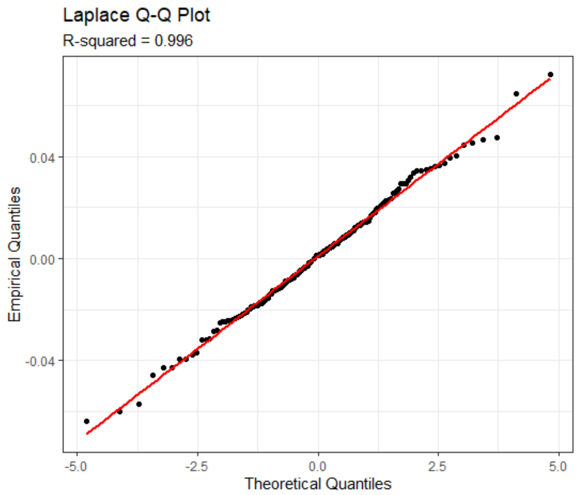
normal



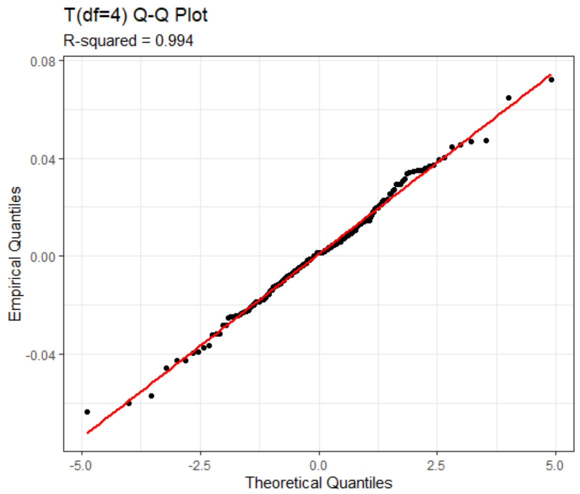
logistic



laplace



t-dist



a) $\mathrm{u_t}$에 대한 가장 적절한 분포를 찾고 정규성가정이 적절한지 검토하시오.

일별수익률에 대한 Q-Q plot을 그려본 결과 Laplace 분포의 R^2값이 0.996으로 가장 높았으므로 Laplace 분포가 가장 적절하다고 볼 수 있다. 정규성가정을 보기 위해 Normal 분포의 Q-Q plot을 그려본 결과 R^2 값이 0.972의 높은 값이 나왔으므로 정규성가정이 적절하다.

b) $\mathrm{u_t}$및 $\mathrm{u_t^*} = \Delta \ln S_t \, , t = 0,1, \ldots, n-1$의 평균과 분산을 각각 구하여 이들이 Ito 변환공식을 만족하는지 검토하시오. (hint: check $dS(t)/S(t) \sim \mathrm{N}(\mu dt, \sigma^2 dt)$; $dln\, S(t) \sim N([\mu - \sigma^2/2]dt \, , \sigma^2 dt)$, $\mathrm{dt} = 1/\mathrm{n}$)

데이터로 구한 $\mathrm{u_t^*}$ 의 평균과 분산		Ito 변환공식으로 구한 $\mathrm{u_t^*}$의 평균과 분산	
평균	분산	평균	분산
0.0006652768	0.0003847484	0.000664525	0.0003853582

데이터 및 Ito 변환공식으로 구한 $\mathrm{u_t^*}$의 평균과 분산이 비슷한 값이 나온다. 로그 수익률이 Ito 변환 공식을 만족한다.

c) 위에서 구한 분포를 이용하여 $\mathrm{p}(\mathrm{u} < \mathrm{u}_\alpha) = \alpha$; $\alpha = 0.05, 0.01$조건을 만족하는 일별 VaR(Value at risk)를 구하고, 정규분포를 이용해 구한 VaR 값과 비교해 보시오.

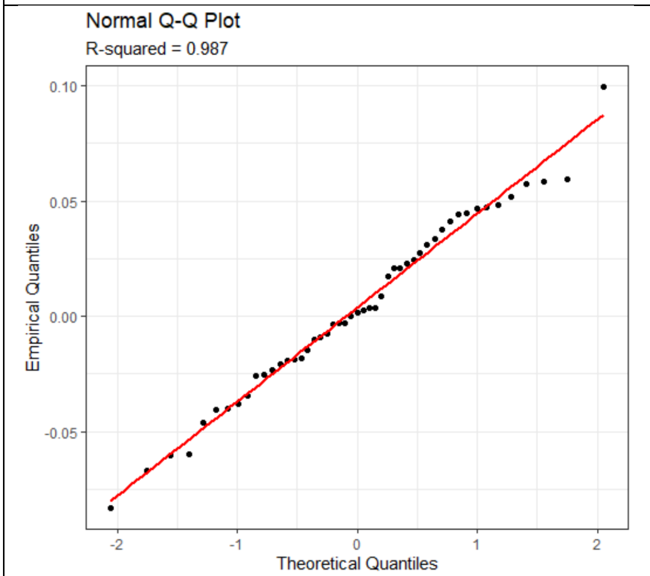
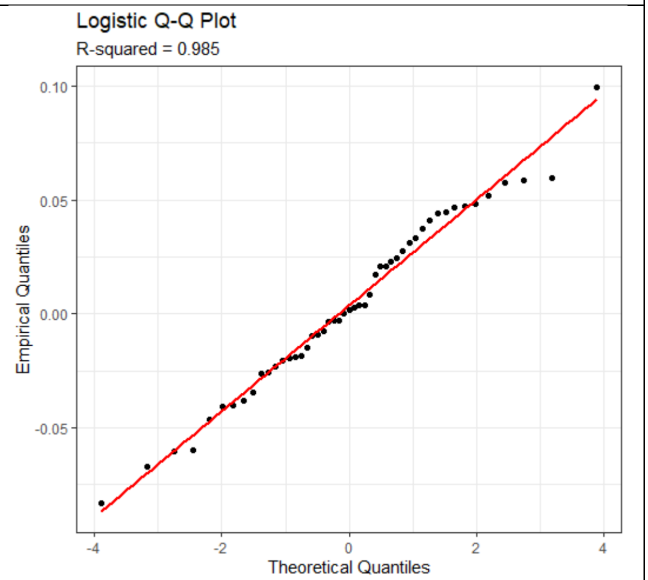
	Normal Dist	Laplace Dist
VaR, $\alpha = 0.05$	-0.03143216	-0.04434379
Var, $\alpha = 0.01$	-0.04481026	-0.07593793

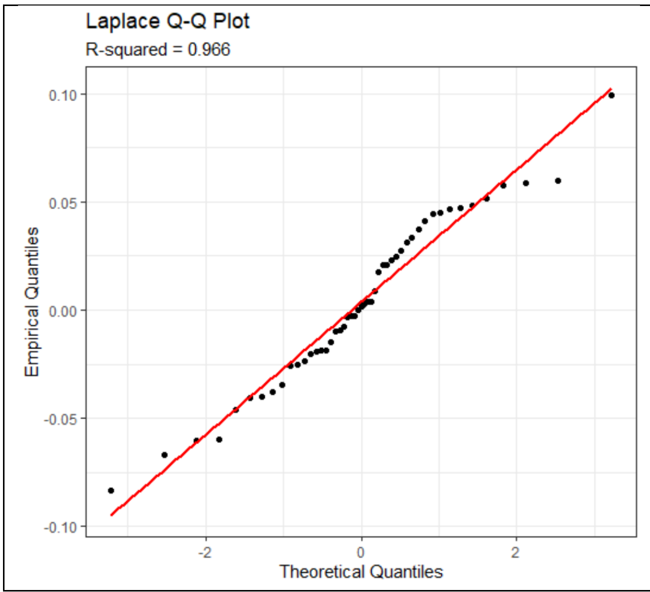
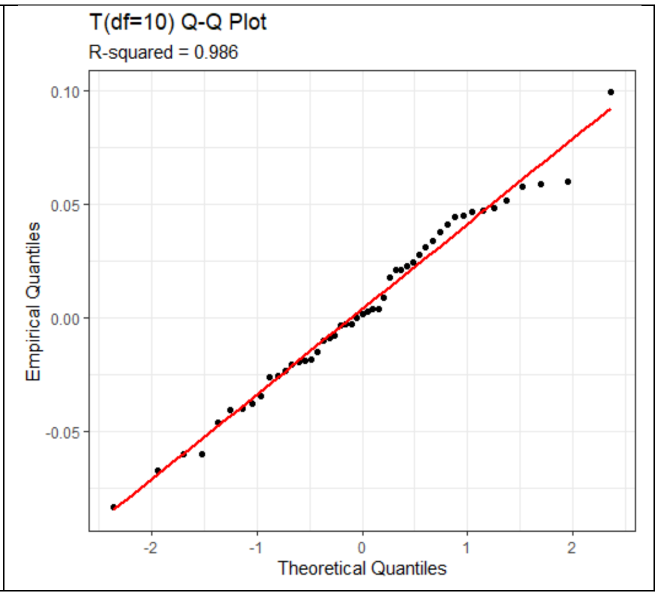
최대예상손실(Value at Risk)은 주어진 신뢰 수준에서 발생 가능한 최대 손실을 의미한다. 예를 들어, 위의 표에서 정규분포 가정 시 VaR($\alpha = 0.05$)은 1년간 발생할 수 있는 최대 일별손해율이 -0.0314이하일 가능성이 5%라는 의미이다.

신뢰수준 1%와 5%에서 라플라스 분포를 이용하여 VaR을 구한 결과 정규분포를 사용했을 때보다 더 작은 값을 가졌다. 주어진 데이터에서 일별수익률의 경우 라플라스 분포가 더욱 적합했기 때문에 정규분포 이용 시 손실 위험을 과소평가하는 문제가 발생할 수 있다.

d) 주별수익률(weekly return) : $v_t = \Delta_5 S_t / S_t, t = 0, 5, 10, \cdots, (n-5)$ 및 월별수익률(monthly return): $\omega_t = \Delta_{21} S_t / S_t, t = 0, 21, 42, \cdots, (n-21)$ 자료에 대해서 Q-Q plot을 이용하여 적절한 분포를 찾고 이를 이용하여 주별 및 월별 VaR 값 v_α, ω_α; $\alpha = .05, .01$을 구하여 u_α와 서로 비교해 보시오.

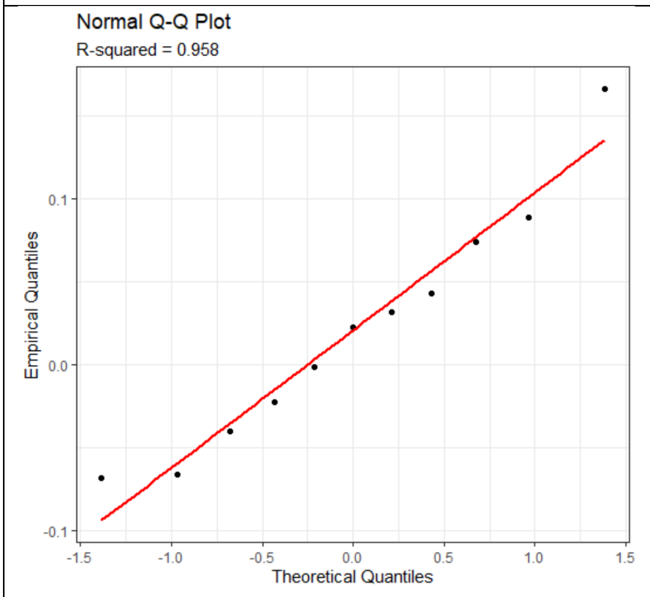
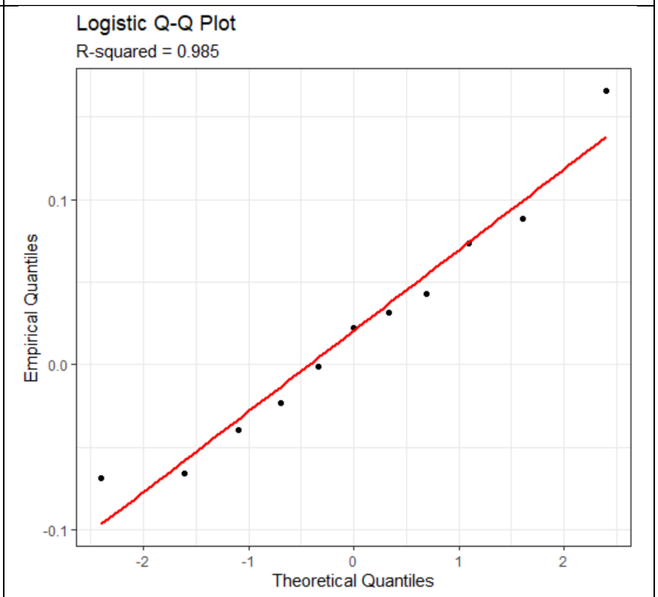
주별수익률 Q-Q plot

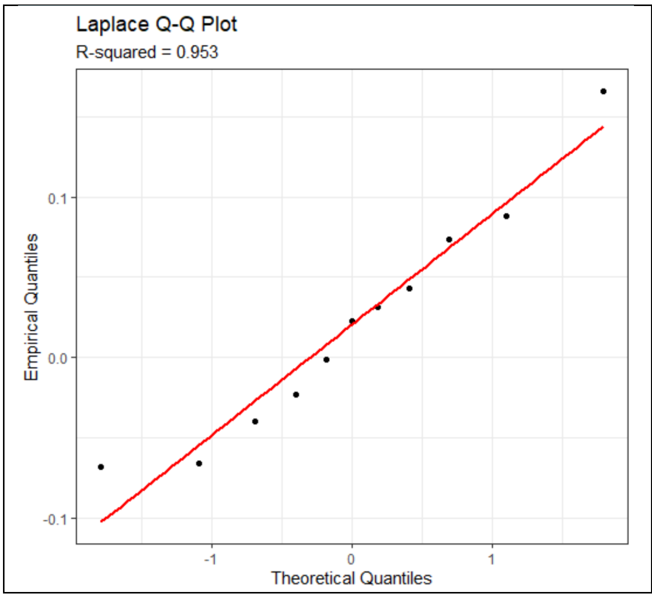
<table>
<tr><td>normal</td><td>logistic</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>laplace</td><td>t-dist</td></tr>
</table>

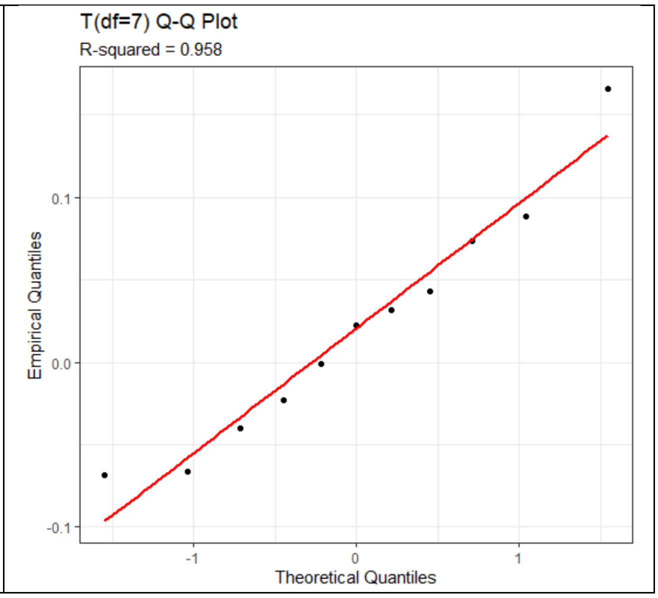
	

주별수익률에 대한 Q-Q plot을 그려본 결과, 정규분포 가정 시 R^2값이 0.987로 가장 높았다. 정규성 가정이 적절하다.

월별수익률 Q-Q plot

normal	logistic
	
laplace	t-dist





월별수익률에 대한 Q-Q plot을 그려본 결과, 로지스틱 분포 가정 시 R^2값이 0.985로 가장 높았다.

	일별수익률 Laplace Dist	주별수익률 Normal Dist	월별수익률 Logistic Dist
VaR, $\alpha = 0.05$	-0.04434379	-0.05980844	-0.09491468
VaR, $\alpha = 0.01$	-0.07593793	-0.08614449	-0.1596704

동일한 신뢰수준에서 일별, 주별, 월별수익률 순으로 VaR 값이 컸다. 이는 수익률 계산 시 각 수익률 발생 시점 사이의 기간이 길수록 더 큰 위험이 존재할 수 있다는 것을 의미한다.

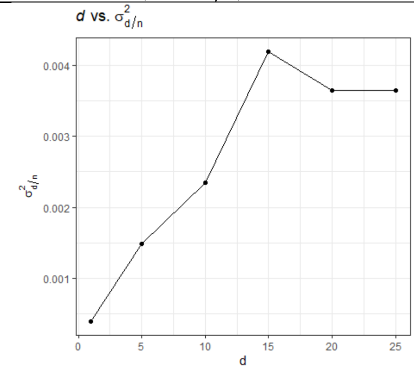
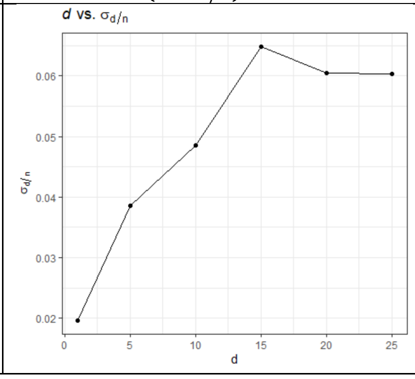
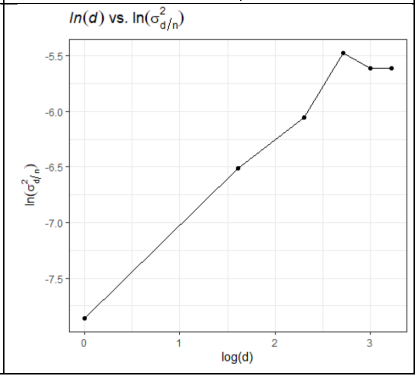
e) $\{lnS(t)\}$의 random walk 가설 ;

$lnS(t) = lnS(0) + \mu^* t + \sigma W(t);\ \mu^* = \mu - \sigma^2/2$에서

$Var[lnS(t+\Delta t) - lnS(t)] = \sigma^2 Var[W(t+\Delta t) - W(t)] = \sigma^2 \Delta t$ 이 성립한다.

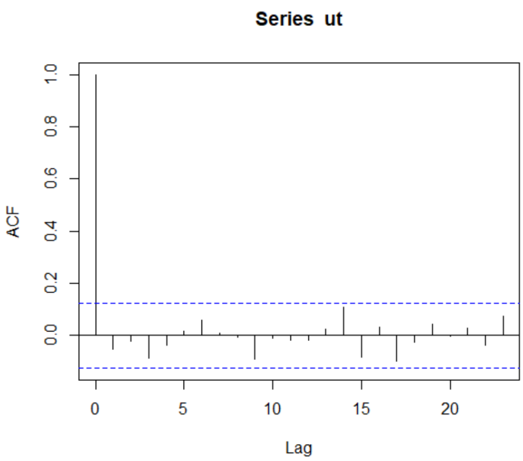
이를 검정하기 위해 ${\sigma^2}_{d/n} = Var[\Delta_d lnS_t]; d = 1, 5, 10, 15, 20, 25$를 각각 추정하여

${\sigma^2}_{d/n} = d \cdot \sigma_{1/n}^2$, $\sigma_{d/n} = \sqrt{d} \cdot \sigma_{1/n}$ 관계가 성립하는지 $(d,\ {\sigma^2}_{d/n})$, $(d,\ \sigma_{d/n}), (lnd, ln{\sigma^2}_{d/n})$ 그래프를 그려서 확인해보시오.

$(d, \sigma^2{}_{d/n})$	$(d, \sigma_{d/n})$	$(lnd, ln\sigma^2{}_{d/n})$
		

$\sigma^2{}_{d/n} = d \cdot \sigma^2_{1/n}$, $\sigma_{d/n} = \sqrt{d} \cdot \sigma_{1/n}$ 관계가 성립하는지 확인하기 위해 세가지 그래프를 그려보았다. 모든 그림이 비선형적 모양을 보이므로 위와 같은 관계가 성립하지 않는다는 것을 알 수 있다.

3) 시계열 자료 $\{u_t\}$ 의 자기상관계수 도표 $\rho_k = Corr(u_t, u_{t-k}), k = 1,2,\cdots$(coefficients of autoregression)를 각각 그려보고 u_t의 독립성가정이 정당한지 검토하시오.



ρ_1을 제외한 모든 값이 유의하지 않으므로 u_t는 독립성가정을 만족한다.

4) 2016년 일별 주가자료에서 $u_i{}^* = \Delta lnS_i = lnS_{i+1} - lnS_i$일 때 $u_i{}^* \sim N(\mu^* dt, \sigma^2 dt), i = 0,1,\cdots,(n-1), \mu^* = \mu - \sigma^2/2$; $dt = 1/n$ 가정을 이용하여 순간 무위험 이자율 r 및 μ, Volatility σ를 추정하시오.

r	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
0.049	0.2109821	0.3076493

5) 주가 $S(t)$가 Geometric Brownian Motion Process;

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), t \geq 0$$

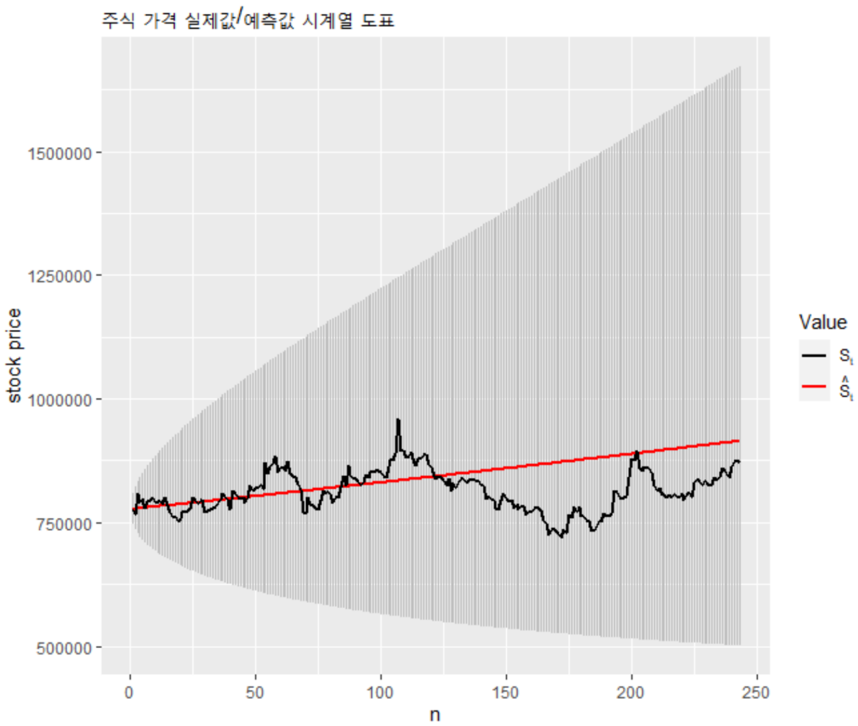
$$\ln[S(t)/S(0)] \sim N(\mu^* t, \sigma^2 dt), \mu^* = \mu - \sigma^2/2$$

$$S(t) = S(0)\exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W(t)], W(t) \sim N(0, t)$$

를 따른다고 가정하자. 이 때 4)에서 추정된 μ, σ값과 2017년 1월 2일 시가 S_0를 이용하여 2017년 미래시점 $t = 1/n, 2/n, \cdots, 1$에서의 주식가격 $S(t)$에 대한 예측값 $\hat{S}(t)$ 및 95% 예측구간 (prediction interval) $\hat{S}_\alpha^\pm(t)$을 구하여 이들을 실제값 $S(t)$와 겹쳐서 시계열 도표를 그려 보고 위 가정이 적절한지 검토하시오.

단 $\hat{S}(t) = S_0 \exp[(\hat{\mu} - \hat{\sigma}^2/2)t]$;

$$\hat{S}_\alpha^\pm(t) = S_0 \exp\left[(\hat{\mu} - \hat{\sigma}^2/2)t \pm z_\alpha \hat{\sigma}\sqrt{t}\right];\ z_\alpha = 1.96$$



주식 가격과 예측값의 시계열 도표를 그려보았다. 2017년 실제 주식 가격이 추정값의 95% 예측 구간 안에 포함되므로 위 가정이 적절하다고 할 수 있다.

<Part 2> No Arbitrage 조건을 이용한 Option Price 계산

1) No Arbitrage 조건 : $\mu = r$ 이라는 가정 하에 주가 $\{S(t)\}$가 확률미분방정식을 따를 때, Black-Scholes Call/Put option 가격을 Monte-Carlo Simulation 과 Black-Scholes-Merton 공식을 이용해서 각각 계산하고 서로 비교해 보시오.

- Monte Carlo Simulation

t (년)	1/12	3/12	6/12	9/12	1년
c	69251.64	123457.44	178500.5	223948.4	262521.1
p	58263.77	97934.89	131467.4	155449.3	173392.9

- Black Scholes Merton

t (년)	1/12	3/12	6/12	9/12	1년
c	68719.13	121905.1	177643.3	223048.9	262505.5
p	58407.35	97058.6	131215.2	155300.8	173696.0

Monte-Carlo Simulation 과 Black-Scholes-Merton 공식을 각각 사용한 결과는 큰 차이가 없고 (1000 이내), 비슷한 값을 가진다.

2) 2017년 1월, 3월, 6월, 9월, 12월말 옵션 만기일의 실제 주가자료(St)를 이용하여 2017년 1월 2일에 위(5) 에서 계산한 call/put 옵션 가격으로 각 만기별로 매입했을 때 각 Portfolio에 대해 만기별 실제 수익률을 각각 계산하여 이를 주식의 수익률 $100 \times (St - S0)/\, S0$ 과 비교해 보고 그 장단점을 설명하시오.

a) Call option 150주 및 Put option 50주

만기 t	$150 \times c_t$	$50 \times p_t$	$150 \times (S_t - K)+$	$50 \times (K - S_t)+$	순수입	수익률(%)
1월 말	10387750	2913189	25200000	0	11899070	89.46037
3월 말	18518620	4896745	38250000	0	14834640	63.35431
6월 말	26775080	6573370	85800000	0	52451560	157.2834
9월 말	33592260	7772465	113850000	0	72485280	178.2345
12월 말	39378170	8669645	111450000	0	63402190	131.9565

b) Call option 100주 및 Put option 100주

만기 t	$150 \times c_t$	$50 \times p_t$	$100 \times (S_t - K)+$	$100 \times (K - S_t)+$	순수입	수익률(%)
1월 말	6925164	5826377	16800000	0	4048459	31.74878
3월 말	12345740	9793489	25500000	0	3360767	15.18014
6월 말	17850050	13146740	57200000	0	26203210	84.53524
9월 말	22394840	15544930	75900000	0	37960230	100.0539
12월 말	26252110	17339290	74300000	0	30708600	70.44646

c) Call option 50주 및 Put option 150주

만기 t	$150 \times c_t$	$50 \times p_t$	$50 \times (S_t - K)+$	$150 \times (K - S_t)+$	순수입	수익률(%)
1월 말	3462582	8739566	8400000	0	-3802148	-31.15966
3월 말	6172872	14690230	12750000	0	-8113106	-38.88733
6월 말	8925025	19720110	28600000	0	-45135	-15.75660
9월 말	11197420	23317400	37950000	0	3435185	9.952784
12월 말	13126050	26008940	37150000	0	-1984990	-5.072162

먼저, 계산 시점의 가격 (K) 보다, 각 만기 시점에서의 가격이 항상 높았다. 즉, 현재 시점에서는 가격이 상승될 것으로 예상할 수 있기 때문에 수익을 내려면 put option보다는 call option을 구매하는 것이 타당하다.

또한 여러 케이스 중 put option을 call option보다 많이 구매했을 때 수익률이 마이너스 값이 나왔다. 그리고 a, b, c 케이스를 비교해본 결과 call option을 put option보다 많이 구입할수록 수익률을 낼 수 있음을 알 수 있었다. 이는 현 상황에서는 수익을 내려면 call option을 구매하는 것이 타당하다는 이론적 추측을 뒷받침하는 결과이다.

덧붙여서, 만기를 9월말로 잡는 경우가 모든 경우에서 수익률이 가장 높았는데, 이를 통해 만기가 무조건적으로 가장 길다고 해서 수익률이 높은 것은 아니라는 것을 알 수 있었다. (만기가 9월 말일 때 수익률 > 만기가 12월 말일 때 수익률)