주식자료를 이용한 Option Price 계산과 수익률 분석

2조. 강아미 고유정 이혜린 윤보인 홍지원

INDEX

NAVER

사용자료 : 2016년~2017년 네이버 주식시세 일별 종가

1년 만기 무위험 금리 : 5%

만기 : 1, 3, 6, 9, 12개월

행사가격 : K=2016년 12월 30일 종가

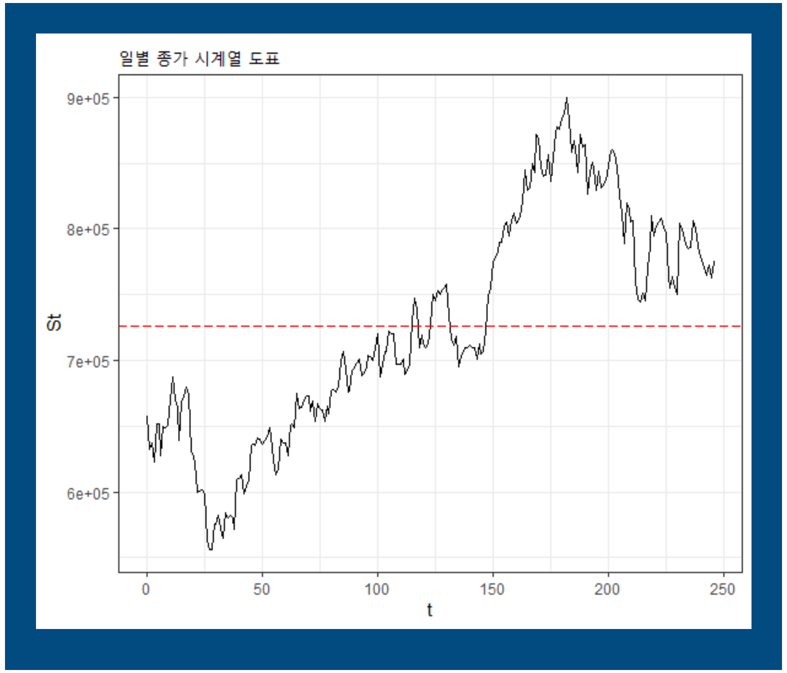
현재주가 : S_0=2017년 1월 2일 시가

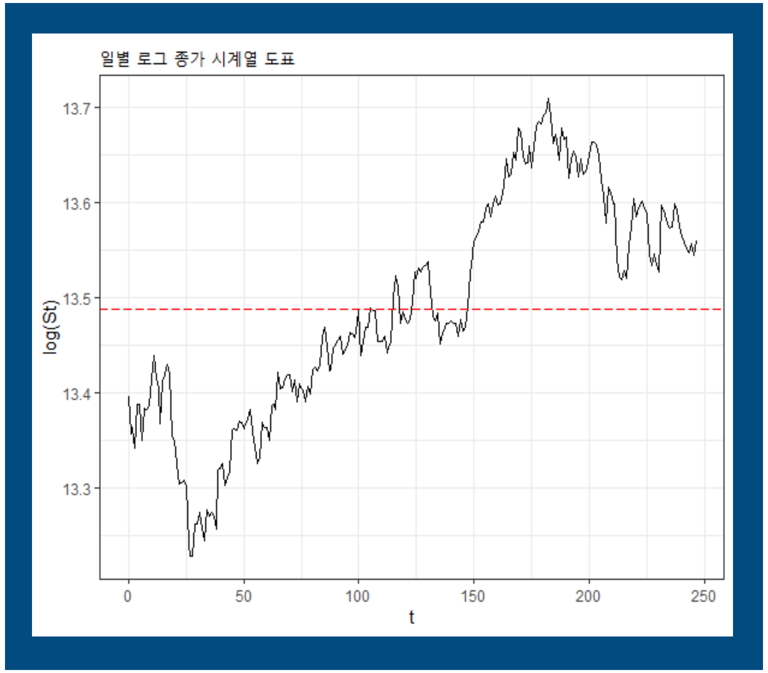
Part 1.

연속시간 Stock Price Model

Part 1. Stock Price Model

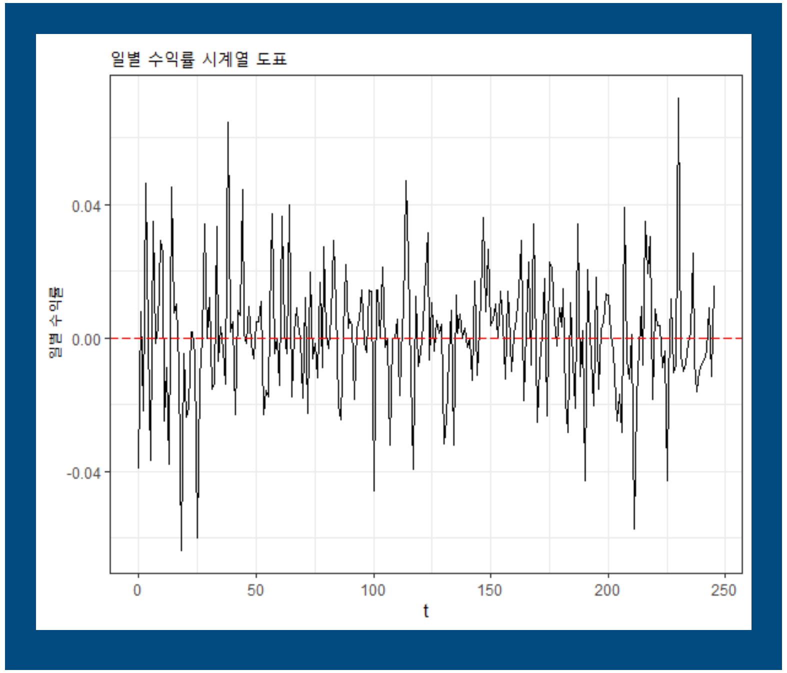
1) 2016년 한 해 동안 일별 종가 및 로그 종가 (S_t , $\ln S_t$) , t=0,1,…,n 에 대한 시계열 도표

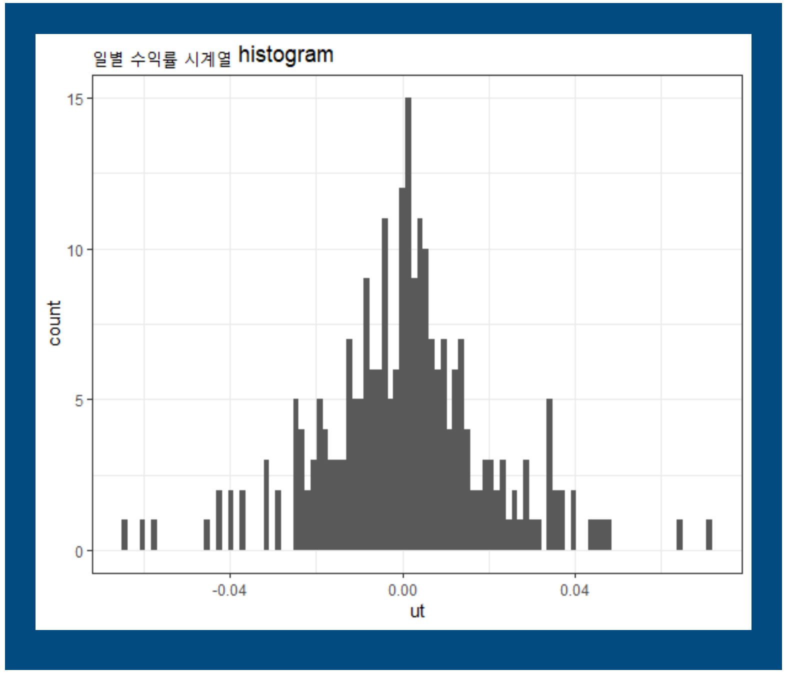




Part 1. Stock Price Model

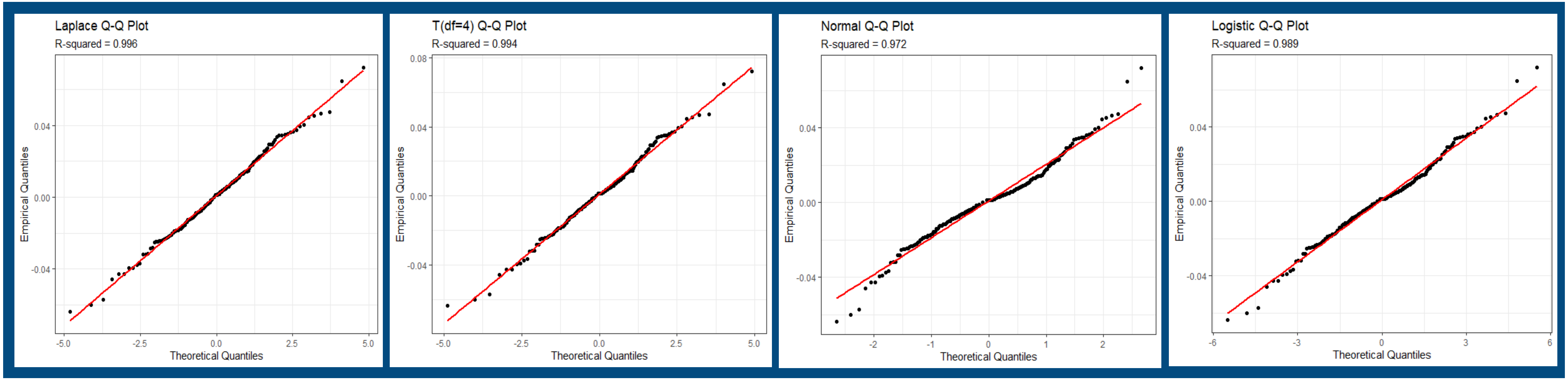
2) 일별수익률(daily return): $u_t = \Delta S_t / S_t$, t=0,1,…,(n-1) 자료의 시계열도표 & 히스토그램





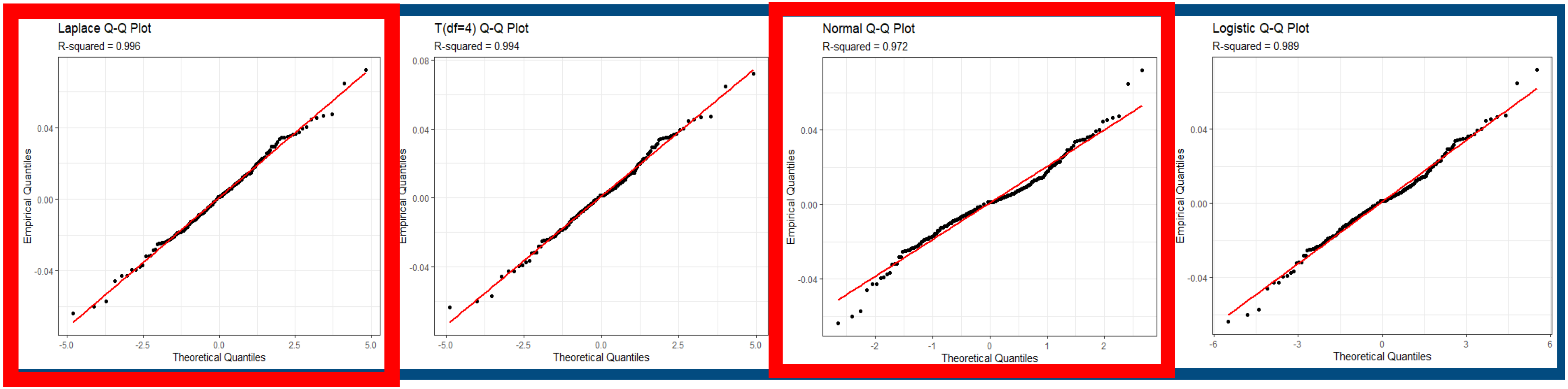
Part 1. Stock Price Model

2) 일별수익률(daily return): $u_t = \Delta S_t / S_t$, t=0,1,…,(n-1) 자료의 Q-Q plot



Part 1. Stock Price Model

2-a) u_t에 대한 가장 적절한 분포를 찾고 정규성가정이 적절한지 검토하기



R^2값이 가장 높은 Laplace 분포가 가장 적절하다.

정규성가정을 보기 위해 Normal 분포의 Q-Q plot을 그려본 결과 R^2 값이 0.972로 높은 값이 나왔으므로 정규성가정이 적절하다.

Part 1. Stock Price Model

2-b) $\mathrm{u_t}$ 및 $\mathrm{u_t^*} = \Delta \ln S_t\,, t = 0,1,\dots,n-1$의 평균과 분산을 각각 구하여 이들이 Ito 변환공식을 만족하는지 검토하기

* hint: check $dS(t)/S(t)\ \sim \mathrm{N}\left(\mu dt, \sigma^2 dt\right)$;$dln\, S(t) \sim N(\left[\mu - \sigma^2/2\right]dt\,, \sigma^2 dt)$, $\mathrm{dt} = 1/\mathrm{n})$

데이터로 구한 $\mathrm{u_t^*}$ 의 평균과 분산		Ito 변환공식으로 구한 $\mathrm{u_t^*}$의 평균과 분산	
평균	분산	평균	분산
0.0006652768	0.0003847484	0.000664525	0.0003853582

데이터 및 Ito 변환공식으로 구한 $\mathrm{u_t^*}$의 평균과 분산이 비슷한 값이 나온다.

로그 수익률이 Ito 변환 공식을 만족한다.

Part 1. Stock Price Model

2-c) 위에서 구한 분포를 이용하여 $p(u < u_\alpha) = \alpha\ ;\ \alpha = 0.05\,, 0.01$ 조건을 만족하는 일별 VaR 구하고, 정규분포를 이용해 구한 VaR 값과 비교하기

	Normal Dist	Laplace Dist
VaR, $\alpha = 0.05$	-0.03143216	-0.04434379
VaR, $\alpha = 0.01$	-0.04481026	-0.07593793

최대예상손실(Value at Risk)은 주어진 신뢰 수준에서 발생 가능한 최대 손실을 의미한다.
예를 들어, 위의 표에서 정규분포 가정 시 VaR($\alpha = 0.05$)은 1년간 발생할 수 있는 최대 일별손해율이 -0.0314이하일 가능성이 5%라는 의미이다.

Part 1. Stock Price Model

2-c) 위에서 구한 분포를 이용하여 $p(u < u_\alpha) = \alpha\ ;\ \alpha = 0.05\,, 0.01$ 조건을 만족하는 일별 VaR 구하고, 정규분포를 이용해 구한 VaR 값과 비교하기

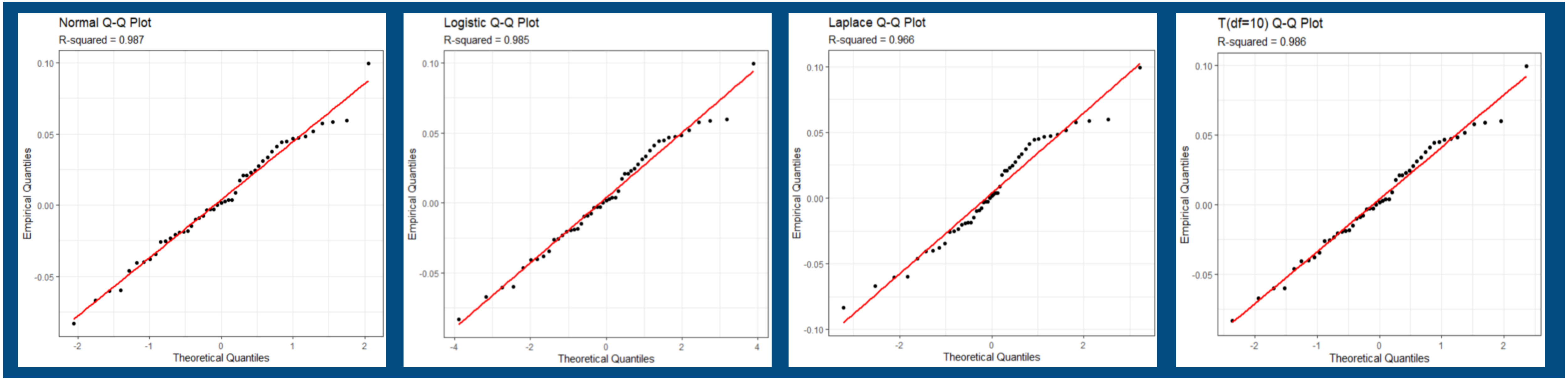
	Normal Dist	Laplace Dist
VaR, $\alpha = 0.05$	-0.03143216	-0.04434379
VaR, $\alpha = 0.01$	-0.04481026	-0.07593793

라플라스 분포를 이용하여 VaR을 구한 결과 정규분포를 사용했을 때보다 더 작은 값을 가졌다.
일별수익률의 경우 라플라스 분포가 더욱 적합했기 때문에 정규분포 이용 시
손실 위험을 과소평가하는 문제가 발생할 수 있다.

Part 1. Stock Price Model

2-d) 주별수익률 $v_t = \Delta_5 S_t / S_t\,, t = 0, 5, 10, \cdots, (n-5)$ 및 월별수익률 $\omega_t = \Delta_{21} S_t / S_t\,, t = 0, 21, 42, \cdots, (n-21)$ 에 대해서 Q-Q plot을 이용하여 적절한 분포를 찾고 주별 및 월별 VaR 값을 구하여 u_α와 서로 비교해 보기

주별수익률 Q-Q plot



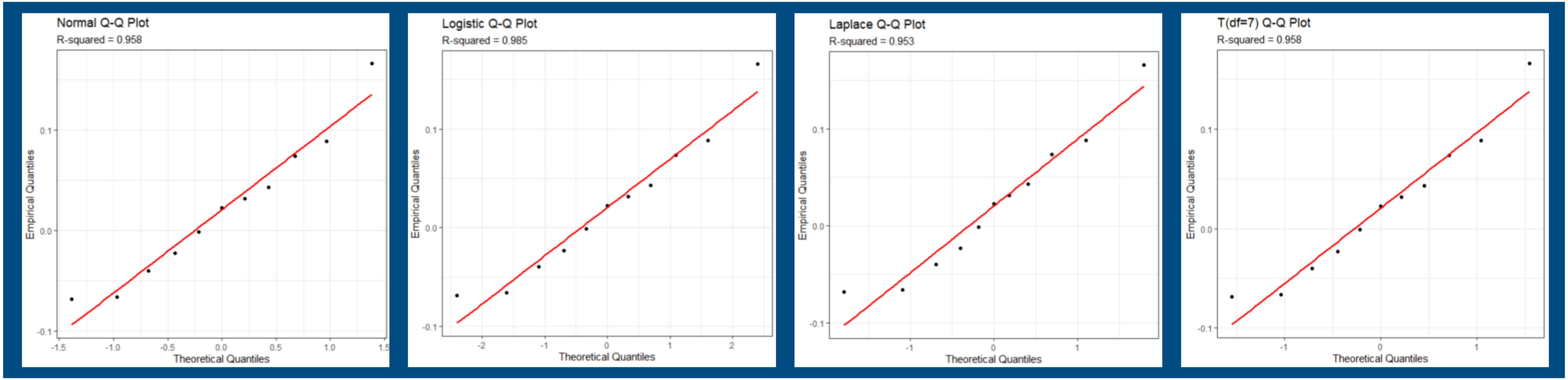
주별수익률에 대한 Q-Q plot을 그려본 결과, 정규분포 가정 시 R^2값이 0.987로 가장 높았다.

정규성 가정이 적절하다.

Part 1. Stock Price Model

2-d) 주별수익률 $v_t = \Delta_5 S_t / S_t\,, t = 0, 5, 10, \cdots, (n-5)$ 및 월별수익률 $\omega_t = \Delta_{21} S_t / S_t\,, t = 0, 21, 42, \cdots, (n-21)$ 에 대해서 Q-Q plot을 이용하여 적절한 분포를 찾고 주별 및 월별 VaR 값을 구하여 u_α와 서로 비교해 보기

월별수익률 Q-Q plot



월별수익률에 대한 Q-Q plot을 그려본 결과, 로지스틱 분포 가정 시 R^2값이 0.985로 가장 높았다.

Part 1. Stock Price Model

2-d) 주별수익률 $v_t = \Delta_5 S_t / S_t\,, t = 0, 5, 10, \cdots, (n-5)$ 및 월별수익률 $\omega_t = \Delta_{21} S_t / S_t\,, t = 0, 21, 42, \cdots, (n-21)$ 에 대해서 Q-Q plot을 이용하여 적절한 분포를 찾고 주별 및 월별 VaR 값을 구하여 u_α와 서로 비교해 보기

	일별수익률 Laplace Dist	주별수익률 Normal Dist	월별수익률 Logistic Dist
VaR, $\alpha = 0.05$	-0.04434379	-0.05980844	-0.09491468
VaR, $\alpha = 0.01$	-0.07593793	-0.08614449	-0.1596704

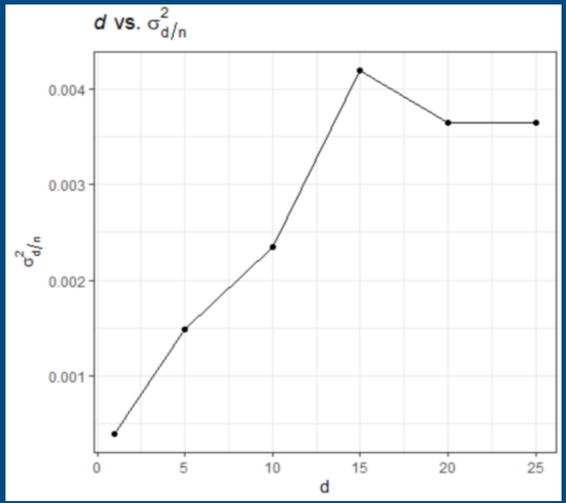
동일한 신뢰수준에서 일별 > 주별 > 월별수익률 순으로 VaR 값이 컸다.

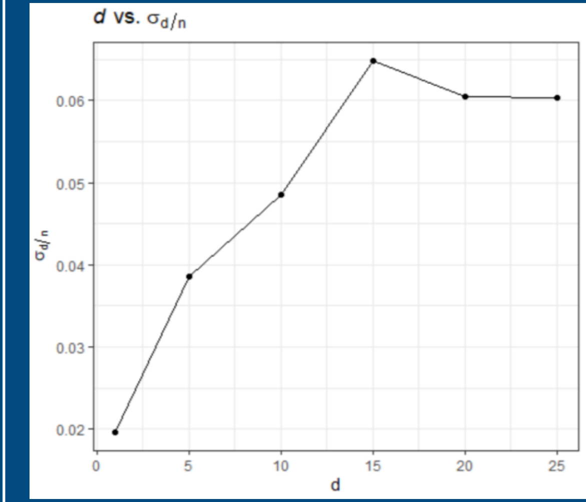
이는 수익률 계산 시 각 수익률 발생 시점 사이의 기간이 길수록 더 큰 위험이 존재할 수 있음을 의미한다.

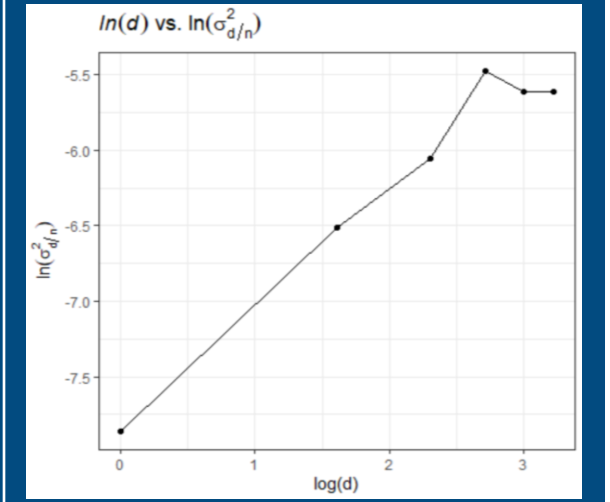
Part 1. Stock Price Model

2-e) $\{lnS(t)\}$의 random walk 가설에서 $\sigma^2{}_{d/n} = Var[\Delta_d lnS_t]; d = 1,5,10,15,20,25$를 각각 추정하여 $\sigma^2{}_{d/n} = d \cdot \sigma^2_{1/n}$, $\sigma_{d/n} = \sqrt{d} \cdot \sigma_{1/n}$ 관계가 성립하는지 $(d, \sigma^2{}_{d/n})$, $(d,\ \sigma_{d/n})$, $(lnd, ln\sigma^2{}_{d/n})$ 그래프를 그려서 확인해보기

$(d, \sigma^2{}_{d/n})$	$(d, \sigma_{d/n})$	$(lnd, ln\sigma^2{}_{d/n})$



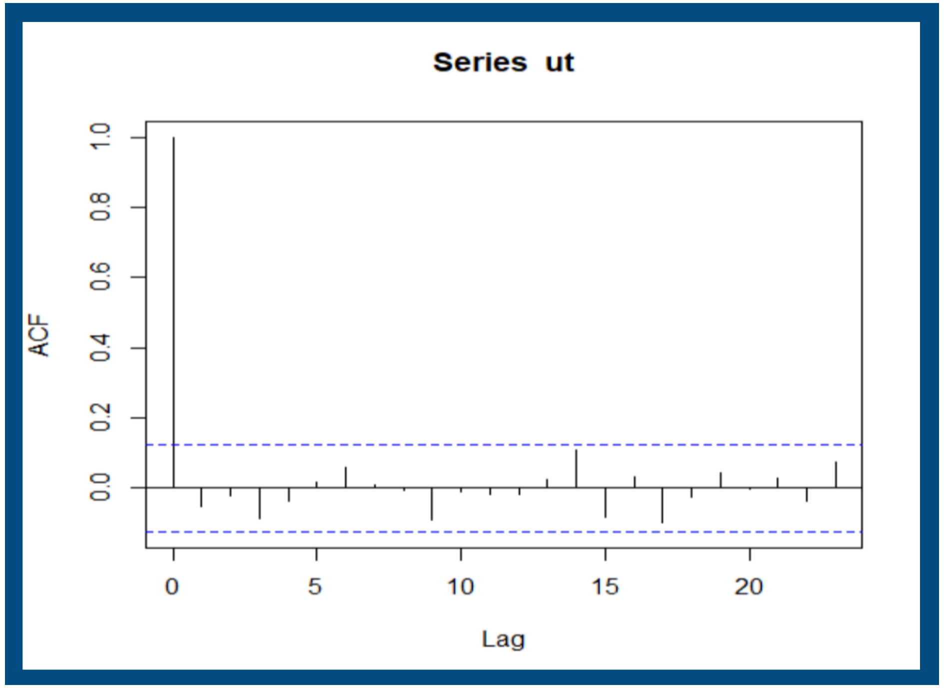




모든 그림이 비선형적 모양을 보이므로 위와 같은 관계가 성립하지 않는다는 것을 알 수 있다.

Part 1. Stock Price Model

3) 시계열 자료 $\{u_t\}$ 의 자기상관계수 도표 $\rho_k = Corr(u_t, u_{t-k}), k = 1,2,\cdots$(coefficients of autoregression)를 각각 그려보고 u_t의 독립성가정이 정당한지 검토하기



ρ_1을 제외한 모든 값이 유의하지 않으므로 u_t는 독립성가정을 만족한다.

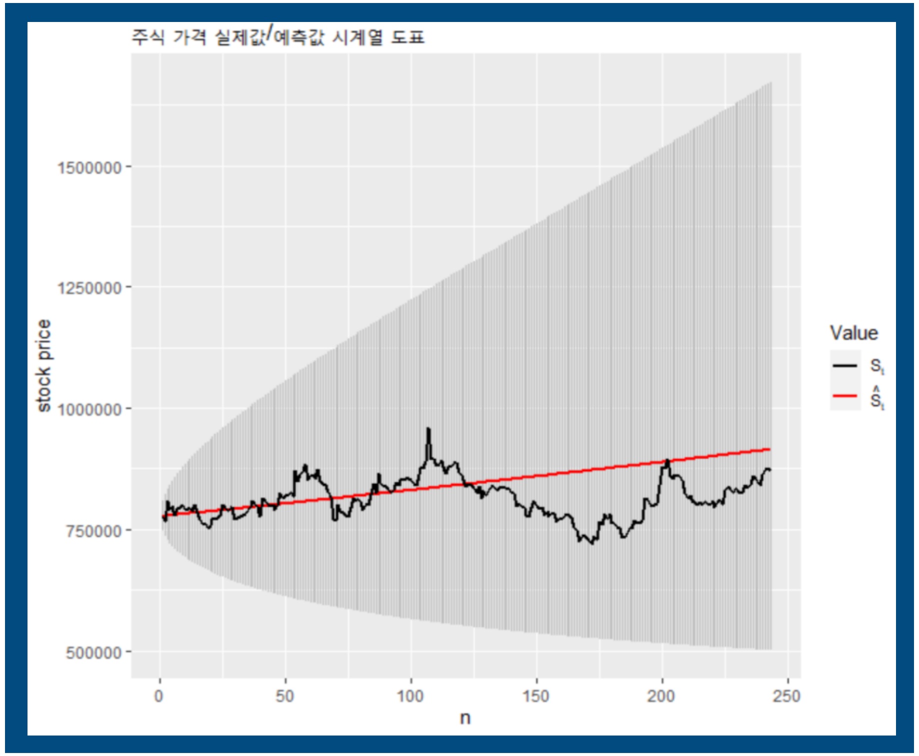
Part 1. Stock Price Model

4) 2016년 일별 주가자료에서 $u_i{}^* = \Delta lnS_i = lnS_{i+1} - lnS_i$일 때 $u_i{}^* \sim N(\mu^* dt, \sigma^2 dt), i = 0,1,\cdots,(n-1), \mu^* = \mu - \sigma^2/2\ ; dt = 1/n$ 가정을 이용하여 순간 무위험 이자율 r 및 μ, Volatility σ 추정하기

r	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
0.049	0.2109821	0.3076493

Part 1. Stock Price Model

5) $S(t)$가 Geometric Brownian Motion Process를 따른다고 가정할때, 4)에서 추정된 값과 2017년 1월 2일 시가 S_0를 이용하여 2017년 주식가격 $S(t)$에 대한 예측값 $\hat{S}(t)$ 및 95% 예측구간 $\hat{S}_\alpha^\pm(t)$을 구하여 이들을 실제값 $S(t)$와 겹쳐서 시계열 도표를 그리고 위 가정이 적절한지 검토하기



2017년 실제 주식 가격이 추정값의 95% 예측 구간 안에 포함되므로 위 가정이 적절하다고 할 수 있다.

Part 2.

No arbitrage 조건 이용한 Option Price 계산

Part 2. No Arbitrage 조건 이용한 Option Price 계산

1) No Arbitrage 조건 : $\mu = r$ 이라는 가정 하에 주가 $\{S(t)\}$가 확률미분방정식을 따를 때, Black-Scholes Call/Put option 가격을 Monte-Carlo Simulation 과 Black-Scholes-Merton 공식을 이용해서 각각 계산하고 서로 비교해 보기

Monte Carlo Simulation

t (년)	1/12	3/12	6/12	9/12	1년
c	69251.64	123457.44	178500.5	223948.4	262521.1
p	58263.77	97934.89	131467.4	155449.3	173392.9

Part 2. No Arbitrage 조건 이용한 Option Price 계산

1) No Arbitrage 조건 : $\mu = r$ 이라는 가정 하에 주가 $\{S(t)\}$가 확률미분방정식을 따를 때, Black-Scholes Call/Put option 가격을 Monte-Carlo Simulation 과 Black-Scholes-Merton 공식을 이용해서 각각 계산하고 서로 비교해 보기

Black Scholes Merton

t (년)	1/12	3/12	6/12	9/12	1년
c	68719.13	121905.1	177643.3	223048.9	262505.5
p	58407.35	97058.6	131215.2	155300.8	173696.0

Monte-Carlo Simulation 과 Black-Scholes-Merton 공식을 각각 사용한 결과는

큰 차이가 없고 (1000 이내), 비슷한 값을 가진다.

Part 2. No Arbitrage 조건 이용한 Option Price 계산

2) 2017년 옵션 만기일의 실제 주가자료(St)를 이용하여 2017년 1월 2일에 위(5) 에서 계산한 call/put 옵션 가격으로 각 만기별로 매입했을 때 각 Portfolio에 대해 만기별 실제 수익률을 계산하고 주식의 수익률 $100 \times (St - S0)/ S0$ 과 비교하기

a) Call option 150주 및 Put option 50주

만기 t	$150 \times c_t$	$50 \times p_t$	$150 \times (S_t - K)+$	$50 \times (K - S_t)+$	순수입	수익률(%)
1월 말	10387750	2913189	25200000	0	11899070	89.46037
3월 말	18518620	4896745	38250000	0	14834640	63.35431
6월 말	26775080	6573370	85800000	0	52451560	157.2834
9월 말	33592260	7772465	113850000	0	72485280	178.2345
12월 말	39378170	8669645	111450000	0	63402190	131.9565

Part 2. No Arbitrage 조건 이용한 Option Price 계산

2) 2017년 옵션 만기일의 실제 주가자료(St)를 이용하여 2017년 1월 2일에 위(5) 에서 계산한 call/put 옵션 가격으로 각 만기별로 매입했을 때 각 Portfolio에 대해 만기별 실제 수익률을 계산하고 주식의 수익률 $100 \times (St - S0)/ S0$ 과 비교하기

b) Call option 100주 및 Put option 100주

만기 t	$150 \times c_t$	$50 \times p_t$	$100 \times (S_t - K)+$	$100 \times (K - S_t)+$	순수입	수익률(%)
1월 말	6925164	5826377	16800000	0	4048459	31.74878
3월 말	12345740	9793489	25500000	0	3360767	15.18014
6월 말	17850050	13146740	57200000	0	26203210	84.53524
9월 말	22394840	15544930	75900000	0	37960230	100.0539
12월 말	26252110	17339290	74300000	0	30708600	70.44646

Part 2. No Arbitrage 조건 이용한 Option Price 계산

2) 2017년 옵션 만기일의 실제 주가자료(St)를 이용하여 2017년 1월 2일에 위(5) 에서 계산한 call/put 옵션 가격으로 각 만기별로 매입했을 때 각 Portfolio에 대해 만기별 실제 수익률을 계산하고 주식의 수익률 $100 \times (St - S0)/\, S0$ 과 비교하기

c) Call option 50주 및 Put option 150주

만기 t	$150 \times c_t$	$50 \times p_t$	$50 \times (S_t - K)+$	$150 \times (K - S_t)+$	순수입	수익률(%)
1월 말	3462582	8739566	8400000	0	-3802148	-31.15966
3월 말	6172872	14690230	12750000	0	-8113106	-38.88733
6월 말	8925025	19720110	28600000	0	-45135	-15.75660
9월 말	11197420	23317400	37950000	0	3435185	9.952784
12월 말	13126050	26008940	37150000	0	-1984990	-5.072162

Part 2. No Arbitrage 조건 이용한 Option Price 계산

a, b, c 비교분석

1 계산 시점의 가격 (K) 보다, 각 만기 시점에서의 가격이 항상 높음

→ 현재 시점에서는 가격이 상승될 것으로 예상되기에 수익을 내려면 put option보다는 call option을 구매하는 것이 타당하다.

2 여러 케이스 중 put option을 call option보다 많이 구매했을 때 수익률이 마이너스 값이 나옴

→ a, b, c 케이스를 비교해본 결과 call option을 put option보다 많이 구입할수록 수익률을 낼 수 있음을 알 수 있다.

→ 현 상황에서 수익을 내려면 call option을 구매하는 것이 타당하다는 이론적 추측을 뒷받침하는 결과이다.

3 만기를 9월말로 잡는 경우가 모든 경우에서 수익률이 가장 높음

→ 만기가 가장 길다고 해서 무조건 수익률이 높은 것은 아니라는 것을 알 수 있다.

(만기가 9월 말일 때 수익률 > 만기가 12월 말일 때 수익률)

Part 3.

Asian option 가격계산
Application

감사합니다!