In [1]:

```python
from PIL import ImageGrab
from IPython.display import display, Image

def ins(ratio=1.0):
    im_data = ImageGrab.grabclipboard()
    new_size = tuple([int(i*ratio) for i in im_data.size])
    thumb = im_data.resize(new_size)
    fn = "temp.PNG"
    thumb.save(fn)
    img = Image(filename=fn)
    display(img)
```

In [2]:

```python
ins(1)
```

5.7. Корзина содержит 75 шаров, среди которых 12 – красных и 6 – синих. Из корзины, случайным образом, без возвращения извлекаются 8 шаров. Пусть X и Y обозначают количество красных и синих шаров среди извлеченных, соответственно. Найдите ковариацию $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Ответ: Ковариация $\mathrm{Cov}(X, Y) = -0{,}093$.

Решение для ковариации $\mathrm{Cov}(X, Y)$:

Мы рассматриваем выборку без возвращения из урны с N шарами: k красных, m синих и $N-k-m$ шаров других цветов. Случайные величины:

- X — количество выбранных красных шаров,
- Y — количество выбранных синих шаров.

Общий подход через совместное распределение

Ковариация определяется как:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \tag{1}$$

а) Математические ожидания:

- $\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{k}{N}$ (гипергеометрическое распределение),
- $\mathbb{E}[Y] = n \cdot \frac{m}{N}$.

б) Смешанный момент $\mathbb{E}[XY]$:

Для его вычисления представим X и Y как суммы индикаторов:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j, \tag{2}$$

где:

- $X_i = 1$, если i-й выбранный шар красный, иначе 0,
- $Y_j = 1$, если j-й выбранный шар синий, иначе 0.

Тогда:

$$XY = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i + \sum_{i \neq j} X_i Y_j. \tag{3}$$

- Для $i = j$: $X_i Y_i = 0$ (шар не может быть одновременно красным и синим),
- Для $i \neq j$: $\mathbb{E}[X_i Y_j] = P(X_i = 1, Y_j = 1) = \frac{k}{N} \cdot \frac{m}{N-1}$.

Таким образом:

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i Y_j] = n(n-1) \cdot \frac{km}{N(N-1)}. \tag{4}$$

в) Итоговая ковариация:

Подставляем в формулу:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = n(n-1) \cdot \frac{km}{N(N-1)} - \left(n \cdot \frac{k}{N}\right)\left(n \cdot \frac{m}{N}\right). \tag{5}$$

Упрощаем:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{n(n-1)km}{N(N-1)} - \frac{n^2 km}{N^2} = \frac{nkm}{N}\left(\frac{n-1}{N-1} - \frac{n}{N}\right). \tag{6}$$

Приводим к общему знаменателю:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{nkm}{N} \cdot \frac{N(n-1) - n(N-1)}{N(N-1)} = \frac{nkm}{N} \cdot \frac{-(N-n)}{N(N-1)}. \tag{7}$$

Окончательно:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = -\frac{nkm(N-n)}{N^2(N-1)}. \tag{8}$$

Итоговый ответ:

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = -\frac{nkm(N-n)}{N^2(N-1)}} \tag{9}$$