Элементы Линейной Алгебры (Теория и Решения)

Факультатив «Введение в анализ данных и машинное обучение на Python»

13 ноября 2019 г.

1 Алгебра матриц

- Матрица таблица чисел. Числа, стоящие внутри матрицы называются её элементами. Чтобы назвать элемент, говорят номер столбца и строки, в которых он находится. Например, в матрице $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ (размер: 2×3), элемент, стоящий в первой строке и втором столбце это число 3.
- Размер матрицы число строк и столбцов матрицы, записанное следующим образом: $n \times k$ (n число строк, k число столбцов).
- ullet Вектор-столбец матрица размера n imes 1. Пример: $inom{1}{1}$ (размер: 2 imes 1).
- Вектор-строка матрица размера $1 \times k$. Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (размер: 1×3).
- Важно: когда мы говорим о векторе, мы всегда имеем в виду вектор-столбец.
- **Транспонированная матрица** A^T для матрицы A это матрица, в которой строки матрицы A «поменяли местами» с её столбцами, то есть первая строка матрицы A «стала» первым столбцом матрицы A^T , а первый столбец матрицы A «стал» первой строкой матрицы A^T и т.д. Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Понятно, что $\begin{pmatrix} A^T \end{pmatrix}^T = A$.
- Квадратная матрица матрица, у которой число строк равно числу столбцов (то есть n=k). Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (размер: 2×2).
- Главная диагональ диагональ квадратной матрицы, проведённая из левого верхнего элемента (то есть элемента в первой строке первого столбца) в правый нижний (то есть элемента в последней строке последнего столбца). В примере выше элементы, стоящие на главной диагонали это 1 и 4.
- Побочная диагональ диагональ квадратной матрицы, проведённая из правого верхнего элемента (то есть элемента в первой строке последнего столбца) в левый нижний (то есть элемента в последней строке первого столбца). В примере выше элементы, стоящие на побочной диагонали это 2 и 3.

- Симметричная матрица квадратная матрица, элементы которой симметричны относительно главной диагонали. То есть в i-ой строке j-го столбца стоит элемент, совпадающий с элементом j-ой строки i-го столбца, если $i \neq j$. Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ (размер: 3×3) симметричная матрица. На главной диагонали стоят числа 1, 4, 9. Элементы во:
 - 2 строке 1 столбца и 1 строке 2 столбца совпадают (=3).
 - 3 строке 1 столбца и 1 строке 3 столбца совпадают (=0).
 - 3 строке 2 столбца и 2 строке 3 столбца совпадают (=1).
- Диагональная матрица симметричная матрица, в которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, равны 0. Примеры: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (размер: 2×2). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (размер: 3×3).
- Единичная матрица диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят 1. Примеры: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (размер: 2×2). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (размер: 3×3). Мы будем обозначать единичную матрицу как $I_{n \times n}$, где n число строк и столбцов.

1.1

Определите размер следующих векторов и матриц:

a)
$$H_{n \times k}$$

Ответ: $n \times k$.

c)
$$(4 \ 5 \ 6)$$

Otbet: 1×3 .

e)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix}$$

Ответ: 3×1 .

d)
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ k & m \end{pmatrix}$$

Otbet: 3×2

f)
$$I_{n \times n}$$

Ответ: $n \times n$

• Для векторов определены стандартные операции сложения и умножения на число. Сумма двух векторов одинакового размера — это вектор, каждая координата которого равна сумме координат слагаемых. Произведение вектора на число — это произведение каждой координаты этого вектора с этим числом. В случае векторов 2×1 это можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + cb_1 \\ a_2 + cb_2 \end{pmatrix}.$$

2

Заметим, что последний вектор тоже имеет размер 2×1 .

1.2

Вычислите:

a)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

c)
$$0_{4\times 1} + \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$$
 d) $3\begin{pmatrix} 7\\-1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1\\4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19\\-11 \end{pmatrix}$

• Для матриц также определены стандартные операции сложения и умножения на число. Сумма двух матриц одинакового размера — это матрица, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых (то есть стоящих в той же строке того же столбца). Произведение матрицы на число — это произведение каждого элемента этой матрицы с этим числом. В случае матрицы 2 × 2 это можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + cb_1 & a_2 + cb_2 \\ a_3 + cb_3 & a_4 + cb_4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что последняя матрица тоже имеет размер 2×2 .

1.3

Вычислите:

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 $-3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -25 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

c)
$$I + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

d)
$$a \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + kI = \begin{pmatrix} 3a+k & 0 & 0 \\ 0 & a+k & a \\ 0 & 2a & 4a+k \end{pmatrix}$$

- Матричное произведение операция, обладающая следующими свойствами:
 - 1. Матрицы A и B можно матрично перемножить, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.
 - 2. Результат матричного произведения матрица C, размер которой равен: (число строк матрицы A) \times (число столбцов матрицы B).

$$A_{n\times k}\times B_{k\times m}=C_{n\times m}$$

3. Каждый элемент матрицы C равен сумме поэлементных произведений элементов соответствующей строки матрицы A и столбца матрицы B. То есть:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}.$$

1.4

Вычислите матричное произведение, если это возможно:

а)
$$I_{n \times n} imes H_{m \times k} = egin{cases} H_{n imes k}, \ \text{если } n = m \ \emptyset, \ \text{иначе} \end{cases}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 22 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} imes \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$
 — невозможно, т.к. размеры $2 imes 2$ и $1 imes 2$

e)
$$7 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times I \times \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 21 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 147 & 63 \\ 49 & 35 \end{pmatrix}$$

f)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

2 Определитель

Определитель – некоторое число, характеризующее свойства матрицы. Если A – некоторая матрица, то определитель A обозначается следующим образом:

$$\det(A)$$
 или $|A|$

Свойства определителя:

- 1. Определитель можно рассчитать только для квадратных матриц.
- 2. Общий множитель элементов некоторой строки можно выносить за знак определителя:

$$\det(cA_{n\times n})=c^n\det(A), c\in\mathbb{R}$$

Пример:
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
.

Пример:
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
.

- 3. Если матрица имеет две одинаковые строки (столбца) или нулевую строку (столбец), то её определитель равен 0.
- 4. det(I) = 1.
- 5. Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.
- 6. В случае матрицы размера 2×2 определитель можно найти по следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_4 - a_3 a_2$$

4

2.1

Найдите определитель следующих матриц, если это возможно:

a)
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 24 = -22$$

b)
$$\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

c)
$$\det \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 — невозможно, так как не квадратная.

d)
$$det(1) = 1$$

e)
$$det(I) = 1$$

f)
$$\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

g)
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

h)
$$egin{array}{c|c} 1 & 1 \ 2 & 2 \end{array} = 2 egin{array}{c|c} 1 & 1 \ 1 & 1 \end{array} = 0$$
 (две одинаковые строки)

Обратной матрицей A^{-1} для матрицы A называется матрица, обладающая следующим свойством:

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I$$

Свойства обратной матрицы:

- 1. Обратная матрица существует только для квадратных матриц с ненулевым определителем.
- 2. В случае матрицы размера 2×2 обратную матрицу можно найти по следующей формуле:

если
$$A=egin{pmatrix} a_1&a_2\a_3&a_4 \end{pmatrix}$$
 , то $A^{-1}=rac{1}{\det(A)}egin{pmatrix} a_4&-a_2\-a_3&a_1 \end{pmatrix}$

3. Для квадратной диагональной матрицы обратная матрица получается путём замены элементов, стоящих на главной диагонали, на обратные к ним (то есть a_{ii} заменяется на $1/a_{ii}$).

5

2.2

Найдите матрицу, обратную данной, если это возможно:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
 – невозможно, так как определитель исходной матрицы равен 0.

c)
$$A = (4) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}$$

d)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

e)
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

f)
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 – невозможно, так как не квадратная.

Векторы b_1 , b_2 ... b_n называют **линейно зависимыми** (ЛЗ), если существую такие числа a_1 , a_2 ... $a_n \in \mathbb{R}$, из которых хотя бы одно не равно 0, что верно следующее равенство:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots a_nb_n = 0$$

Если же это равенство верно только при всех $a_i=0$, то векторы $b_1,b_2...b_n$ называют линейно независимыми (ЛН3).

Пример: векторы $\binom{1}{2}$ и $\binom{0}{3}$ – линейно независимы, так как система уравнений:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + 3a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– имеет единственное решение при $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$.

Пример: векторы $b_1=inom{1}{1}$ и $b_2=inom{2}{2}$ – линейно зависимы, так как

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

при, например, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$ (для доказательства линейной зависимости достаточно привести хотя бы одно $a_i \neq 0$).

Правило: определитель системы линейно зависимых векторов равен 0.

2.3

Определите, являются ли векторы линейно зависимыми. Если дана матрица, определите, есть ли в ней линейно зависимые векторы.

a)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ЛНЗ

b)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 и $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ - ЛЗ, $a_1 = -3$, $a_2 = 1$

c)
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
 и $\begin{pmatrix} 27 \\ 14 \\ 27 \end{pmatrix}$ – ЛНЗ

d)
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
 и $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ – ЛЗ, $a_1=-3$, $a_2=1$

e)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 18 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$
 – есть ЛЗ, т.к. третья строка – это первая строка, умноженная на 3.

f)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
 – нет ЛЗ (определитель не равен 0)

g)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$
 — есть ЛЗ (определитель равен 0, так как есть нулевой столбец)

h)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$
 – есть ЛЗ (третий столбец равен второму столбцу, умноженному на 3)

3 Векторы в пространстве

Скалярное произведение векторов - операция, выполняемая по следующему правилу:

Для векторов
$$a_{n\times 1}$$
 и $b_{n\times 1}$: $\langle a,b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + ... a_nb_n$

3.1

Вычислите скалярное произведение векторов:

a)
$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle = 2 + 4 = 6$

b)
$$\langle \begin{pmatrix} a \\ m \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ k \\ p \end{pmatrix} \rangle = ac + mk + dp$$

c)
$$\langle a_{n\times 1}, b_{n\times 1} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + ... a_nb_n$$

Норма (длина) вектора вычисляется по следующей формуле:

$$||a_{n\times 1}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2} = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

3.2

Вычислите:

a)
$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
, $||a|| = \sqrt{5}$
c) $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $||c|| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \dots c_n^2}$

b)
$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
, $||b||^2 = 25 + 4 + 1 = 30$ d) $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $||d||^2 = 1$

Косинус угла между векторами x и y вычисляется по следующей формуле:

$$\cos(\angle x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \times ||y||}$$

Ортогональные (перпендикулярные) векторы – векторы, косинус угла между которыми равен 0. **Важное следствие:** векторы ортогональны, когда их скалярное произведение равно 0.

3.3

Найдите косинус угла между векторами (обозначим этот угол как α). Определите, являются ли векторы ортогональными.

а)
$$egin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
, $egin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos(lpha) = rac{4}{\sqrt{105}}$, не ортогональны

b)
$$\binom{1}{2}$$
, $\binom{-1}{0}$ \Rightarrow $\cos(lpha)=rac{-1}{\sqrt{5}}$, не ортогональны

с)
$$egin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
, $egin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos(lpha) = 0$, ортогональны

d)
$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$
, $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ \Rightarrow $\cos(lpha)=rac{1}{\sqrt{12}}$, не ортогональны

е)
$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$
, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ \Rightarrow $\cos(lpha)=$ 0, ортогональны

f)
$$egin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
, $egin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ \Rightarrow $\cos(lpha)=0$, ортогональны

3.4

Изобразите следующие векторы и системы векторов. Определите, содержит ли система векторов линейно зависимые векторы.

а)
$$\binom{1}{2}$$
 – в системе координат XY

b)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – в системе координат ХҮ, ЛНЗ

c)
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 — в системе координат XY, ЛЗ

d)
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0.5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
 – в системе координат XYZ, ЛНЗ

e)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
 – в системе координат XYZ, ЛЗ

- f) y_n , x_n , $\langle y,x\rangle=0$ любые два ортогональных вектора.
- g) y_k , x_k , z_k , $||x||^2 + ||y||^2 = ||z||^2$ любые три вектора, образующие прямоугольный треугольник с гипотенузой z.
- h) y_{100} , p_{100} , m_{100} , $m_{100}=y_{100}+2p_{100}$ любые три вектора из 100 элементов, один из которых равен сумме второго и удвоенного третьего.

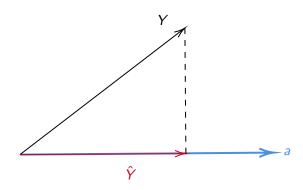
Линейное пространство (неформально) – вектор или система векторов, удовлетворяющие некоторым аксиомам. В частности, для них должны быть определены операции сложения и умножения на число.

Ортогональная проекция – изображение вектора, лежащего в одном линейном пространстве, в другом линейном пространстве так, чтобы расстояние между исходным вектором и его проекцией было минимальным. Для вектора Y ортогональную проекцию будем обозначать как \hat{Y} .

3.5

Изобразите проекцию вектора Y на указанное пространство. В пункте a) рассчитайте координаты проекции.

a)
$$Y=egin{pmatrix} 3 \ 1 \ 2 \end{pmatrix}$$
 на $a=egin{pmatrix} 1 \ 1 \ 1 \end{pmatrix}$



По определению, ортогональная проекция строится так, чтобы расстояние от исходного вектора до его проекции было минимальным. По рисунку видно, что это расстояние – это длина вектора $(Y-\hat{Y})$. Заметим, что так как мы проецируем вектор Y на вектор a, то \hat{Y} будет лежать на a, то есть a и \hat{Y} – коллинеарны. Это означает, что $\hat{Y}=pa$, где p – некоторое число, не равное 0. Тогда нужно минимизировать:

$$||Y - \hat{Y}|| = ||Y - pa|| = \sqrt{(3-p)^2 + (1-p)^2 + (2-p)^2}.$$

Понятно, что если мы минимизируем корень, то мы минимизируем подкоренное выражение. Тогда:

$$(3-p)^2 + (1-p)^2 + (2-p)^2 = 3p^2 - 12p + 14$$

Парабола с ветвями вверх относительно $p \Rightarrow$ минимум достигается в вершине при p = 2.

Тогда координаты проекции:

$$\hat{Y} = pa = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Заметим, что мы так же могли бы решить другую задачу:

$$\langle Y - \hat{Y}, a \rangle = 0$$
,

так как, как известно, наименьшее расстояние между точкой (концом вектора Y) и прямой a проходит по перпендикуляру от точки до прямой. То есть чтобы расстояние между Y и \hat{Y} было минимальным, $Y-\hat{Y}$ и a должны быть перпендикулярны.

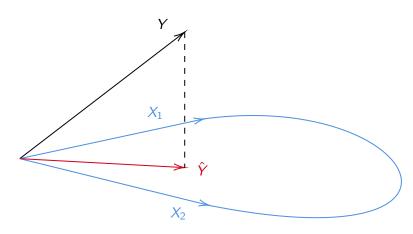
Тогда подставляем:

$$\langle \begin{pmatrix} 3-p\\1-p\\2-p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} \rangle = 0,$$

откуда $3p=3+1+2 \Rightarrow p=\frac{3+1+2}{3}=2$, как и получилось до этого.

Заметим, что p – это среднее арифметическое из координат вектора Y (среднее по координатам вектора обозначается как $\bar{Y}=\frac{Y_1+...Y_n}{n}$), то есть $\hat{Y}=\bar{Y}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Это свойство выполнено для **любого** вектора Y: при проецировании вектора Y на вектор из единиц проекцией будет являться вектор из средних по элементам вектора Y.

b)
$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
 на $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}$



c)
$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
 на $X_{n \times k}$

