

Элементы Линейной Алгебры

Факультатив «Введение в анализ данных и машинное обучение на Python»

25 октября 2019 г.

1 Алгебра матриц

1.1

Определите размер следующих векторов и матриц:

a) $H_{n \times k}$

c) $(4 \ 5 \ 6)$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ k & m \end{pmatrix}$

f) $I_{n \times n}$

1.2

Вычислите:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $0_{4 \times 1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $3 \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.3

Вычислите:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $I + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $a \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + kl.$

1.4

Вычислите матричное произведение, если это возможно:

a) $I \times H$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times (1 \ 3)$

e) $7 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times I \times \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2 Определитель

2.1

Найдите определитель следующих матриц, если это возможно:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) I

g) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) (1)

f) $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

2.2

Найдите матрицу, обратную данной, если это возможно:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) (4)

e) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.3

Определите, являются ли векторы линейно зависимыми. Если дана матрица, определите, есть ли в ней линейно зависимые векторы.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 27 \\ 14 \\ 27 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 18 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

3 Векторы в пространстве

3.1

Вычислите скалярное произведение векторов:

$$a) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$b) \left\langle \begin{pmatrix} a \\ m \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ k \\ l \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$c) \langle a, b \rangle$$

3.2

Вычислите:

$$a) a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|a\| = ?$$

$$c) c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \|c\| = ?$$

$$b) b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \|b\|^2 = ?$$

$$d) d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \|d\|^2 = ?$$

3.3

Найдите косинус угла между векторами. Определите, являются ли векторы ортогональными.

$$\cos(\angle x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \times \|y\|}$$

$$a) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.4

Изобразите следующие векторы и системы векторов. Определите, содержит ли система векторов линейно зависимые векторы.

$$a) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f) y_n, x_n, \langle y, x \rangle = 0$$

$$c) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g) y_k, x_k, z_k, \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|z\|^2$$

$$d) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0.5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h) y_{100}, p_{100}, m_{100}, m_{100} = y_{100} + 2p_{100}$$

3.5

Изобразите проекцию вектора Y на указанное пространство. В пункте а) рассчитайте координаты проекции.

а) $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ на $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

б) $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ на $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}$

в) $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ на $X_{n \times k}$