Элементы Линейной Алгебры
(Теория и Решения)

Факультатив «Введение в анализ данных и машинное обучение на Python»

6 ноября 2019 г.

1 Алгебра матриц

- **Матрица** – таблица чисел. Числа, стоящие внутри матрицы называются её **элементами**. Чтобы назвать элемент, говорят номер столбца и строки, в которых он находится. Например, в матрице $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ (размер: 2×3), элемент, стоящий в первой строке и втором столбце – это число 3.

- **Размер матрицы** – число строк и столбцов матрицы, записанное следующим образом: $n \times k$ (n – число строк, k – число столбцов).

- **Вектор-столбец** – матрица размера $n \times 1$. Пример: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (размер: 2×1).

- **Вектор-строка** – матрица размера $1 \times k$. Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (размер: 1×3).

- **Важно:** когда мы говорим о *векторе*, мы всегда имеем в виду *вектор-столбец*.

- **Транспонированная матрица** A^T для матрицы A – это матрица, в которой строки матрицы A «поменяли местами» с её столбцами, то есть первая строка матрицы A «стала» первым столбцом матрицы A^T, а первый столбец матрицы A «стал» первой строкой матрицы A^T и т.д. Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Понятно, что $\left(A^T\right)^T = A$.

- **Квадратная матрица** – матрица, у которой число строк равно числу столбцов (то есть $n = k$). Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (размер: 2×2).

- **Главная диагональ** – диагональ квадратной матрицы, проведённая из левого верхнего элемента (то есть элемента в первой строке первого столбца) в правый нижний (то есть элемента в последней строке последнего столбца). В примере выше элементы, стоящие на главной диагонали – это 1 и 4.

- **Побочная диагональ** – диагональ квадратной матрицы, проведённая из правого верхнего элемента (то есть элемента в первой строке последнего столбца) в левый нижний (то есть элемента в последней строке первого столбца). В примере выше элементы, стоящие на побочной диагонали – это 2 и 3.

- **Симметричная матрица** – квадратная матрица, элементы которой симметричны относительно главной диагонали. То есть в i-ой строке j-го столбца стоит элемент, совпадающий с элементом j-ой строки i-го столбца, если $i \neq j$. Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ (размер: 3×3) – симметричная матрица. На главной диагонали стоят числа 1, 4, 9. Элементы во:
  - 2 строке 1 столбца и 1 строке 2 столбца совпадают (=3).
  - 3 строке 1 столбца и 1 строке 3 столбца совпадают (=0).
  - 3 строке 2 столбца и 2 строке 3 столбца совпадают (=1).
- **Диагональная матрица** – симметричная матрица, в которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, равны 0. Примеры: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (размер: 2×2). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (размер: 3×3).
- **Единичная матрица** – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят 1. Примеры: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (размер: 2×2). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (размер: 3×3). Мы будем обозначать единичную матрицу как $I_{n\times n}$, где n – число строк и столбцов.

1.1

Определите размер следующих векторов и матриц:

a) $H_{n\times k}$
Ответ: $n \times k$.

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
Ответ: 3×1.

c) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Ответ: 1×3.

d) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ k & m \end{pmatrix}$
Ответ: 3×2.

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
Ответ: 3×3.

f) $I_{n\times n}$
Ответ: $n \times n$.

- Для векторов определены стандартные операции сложения и умножения на число. Сумма двух векторов одинакового размера – это вектор, каждая координата которого равна сумме координат слагаемых. Произведение вектора на число – это произведение каждой координаты этого вектора с этим числом. В случае векторов 2×1 это можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + cb_1 \\ a_2 + cb_2 \end{pmatrix}.$$

  Заметим, что последний вектор тоже имеет размер 2×1.

1.2

Вычислите:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}$

c) $0_{4\times 1} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

d) $3\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19\\-11\end{pmatrix}$

- Для матриц также определены стандартные операции сложения и умножения на число. Сумма двух матриц одинакового размера – это матрица, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых (то есть стоящих в той же строке того же столбца). Произведение матрицы на число – это произведение каждого элемента этой матрицы с этим числом. В случае матрицы 2×2 это можно записать так:

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\a_3 & 4\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\b_3 & b_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 + cb_1 & a_2 + cb_2\\a_3 + cb_3 & a_4 + cb_4\end{pmatrix}.$$

  Заметим, что последняя матрица тоже имеет размер 2×2.

1.3

Вычислите:

a) $\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 10\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\2 & 0 & 9\\1 & 1 & 0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\9 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 4 & -2\\-25 & -3 & 3\\-2 & 1 & -3\end{pmatrix}$

c) $I + \begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 3\end{pmatrix}$

d) $a\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 2 & 4\end{pmatrix} + kI = \begin{pmatrix}3a + k & 0 & 0\\0 & a + k & a\\0 & 2a & 4a + k\end{pmatrix}$

- **Матричное произведение** – операция, обладающая следующими свойствами:

  1. Матрицы A и B можно матрично перемножить, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.
  2. Результат матричного произведения – матрица C, размер которой равен: (число строк матрицы A) $\times$ (число столбцов матрицы B).

  $$A_{n\times k} \times B_{k\times m} = C_{n\times m}.$$

  3. Каждый элемент матрицы C равен сумме поэлементных произведений элементов соответствующей строки матрицы A и столбца матрицы B. То есть:

  $$\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\a_3 & a_4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1 & b_2\\b_3 & b_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4\\a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4\end{pmatrix}.$$

1.4

Вычислите матричное произведение, если это возможно:

a) $I_{n\times n} \times H_{m\times k} = \begin{cases} H_{n\times k}, & \text{если } n = m \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 22 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ – невозможно, т.к. размеры 2×2 и 1×2

e) $7\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times I \times \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 21 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 147 & 63 \\ 49 & 35 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

2 Определитель

Определитель – некоторое число, характеризующее свойства матрицы. Если A – некоторая матрица, то определитель A обозначается следующим образом:

$$\det(A) \text{ или } |A|$$

Свойства определителя:

1. Определитель можно рассчитать **только для квадратных** матриц.
2. Общий множитель элементов некоторой строки можно выносить за знак определителя:

   $$\det(cA_{n\times n}) = c^n \det(A), c \in \mathbb{R}$$

   Пример: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.

   Пример: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.
3. Если матрица имеет две одинаковые строки (столбца) или нулевую строку (столбец), то её определитель равен 0.
4. $\det(I) = 1$.
5. Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.
6. В случае матрицы размера 2×2 определитель можно найти по следующей формуле:

   $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_4 - a_3 a_2$$

2.1

Найдите определитель следующих матриц, если это возможно:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 24 = -22$

b) $\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$

c) $\det \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – невозможно, так как не квадратная.

d) $\det(1) = 1$

e) $\det(I) = 1$

f) $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14$

g) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (две одинаковые строки)

Обратной матрицей A^{-1} для матрицы A называется матрица, обладающая следующим свойством:

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I$$

Свойства обратной матрицы:

1. Обратная матрица существует только для **квадратных матриц с ненулевым определителем**.
2. В случае матрицы размера 2×2 обратную матрицу можно найти по следующей формуле:

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \text{то } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

3. Для квадратной диагональной матрицы обратная матрица получается путём замены элементов, стоящих на главной диагонали, на обратные к ним (то есть a_{ii} заменяется на $1/a_{ii}$).

2.2

Найдите матрицу, обратную данной, если это возможно:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ – невозможно, так как определитель исходной матрицы равен 0.

c) $A = (4) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – невозможно, так как не квадратная.

Векторы $b_1, b_2 \dots b_n$ называют **линейно зависимыми** (ЛЗ), если существую такие числа $a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{R}$, из которых хотя бы одно не равно 0, что верно следующее равенство:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_n b_n = 0$$

Если же это равенство верно только при всех $a_i = 0$, то векторы $b_1, b_2 \dots b_n$ называют **линейно независимыми** (ЛНЗ).

Пример: векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ – линейно независимы, так как система уравнений:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + 3a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– имеет единственное решение при $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$.

Пример: векторы $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ – линейно зависимы, так как

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

при, например, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$ (для доказательства линейной зависимости достаточно привести хотя бы одно $a_i \neq 0$).

Правило: определитель системы линейно зависимых векторов равен 0.

2.3

Определите, являются ли векторы линейно зависимыми. Если дана матрица, определите, есть ли в ней линейно зависимые векторы.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ЛНЗ

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ - ЛЗ, $a_1 = -3$, $a_2 = 1$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 27 \\ 14 \\ 27 \end{pmatrix}$ – ЛНЗ

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ – ЛЗ, $a_1 = -3$, $a_2 = 1$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 18 & 6 & 12 \end{pmatrix}$ – есть ЛЗ, т.к. третья строка – это первая строка, умноженная на 3.

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – нет ЛЗ (определитель не равен 0)

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ – есть ЛЗ (определитель равен 0, так как есть нулевой столбец)

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ – есть ЛЗ (третий столбец равен второму столбцу, умноженному на 3)

3 Векторы в пространстве

Скалярное произведение векторов – операция, выполняемая по следующему правилу:

$$\text{Для векторов } a_{n\times 1} \text{ и } b_{n\times 1}\text{: } \langle a, b\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_n b_n$$

3.1

Вычислите скалярное произведение векторов:

a) $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle = 2 + 4 = 6$

b) $\langle \begin{pmatrix} a \\ m \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ k \\ p \end{pmatrix} \rangle = ac + mk + dp$

c) $\langle a_{n\times 1}, b_{n\times 1}\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_n b_n$

Норма (длина) вектора вычисляется по следующей формуле:

$$||a_{n\times 1}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2} = \sqrt{\langle a, a\rangle}$$

3.2

Вычислите:

a) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, ||a|| = \sqrt{5}$

b) $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, ||b||^2 = 25 + 4 + 1 = 30$

c) $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, ||c|| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \dots c_n^2}$

d) $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, ||d||^2 = 1$

Косинус угла между векторами x и y вычисляется по следующей формуле:

$$\cos(\angle x, y) = \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \times ||y||}$$

Ортогональные (перпендикулярные) векторы – векторы, косинус угла между которыми равен 0.
Важное следствие: векторы ортогональны, когда их скалярное произведение равно 0.

3.3

Найдите косинус угла между векторами (обозначим этот угол как α). Определите, являются ли векторы ортогональными.

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{105}}$, не ортогональны

b) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, не ортогональны

c) $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \cos(\alpha) = 0$, ортогональны

d) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{12}}$, не ортогональны

e) $\begin{pmatrix}-1\\-2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \cos(\alpha) = 0$, ортогональны

f) $\begin{pmatrix}0\\-2\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12\\-1\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \cos(\alpha) = 0$, ортогональны

3.4

Изобразите следующие векторы и системы векторов. Определите, содержит ли система векторов линейно зависимые векторы.

a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ – в системе координат XY

b) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ – в системе координат XY, ЛНЗ

c) $\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\4 & 0 & 1\end{pmatrix}$ – в системе координат XY, ЛЗ

d) $\begin{pmatrix}4 & 2\\1 & 0.5\\2 & 0\end{pmatrix}$ – в системе координат XYZ, ЛНЗ

e) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 2 & 1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ – в системе координат XYZ, ЛЗ

f) y_n, x_n, $\langle y, x\rangle = 0$ – любые два ортогональных вектора.

g) y_k, x_k, z_k, $||x||^2 + ||y||^2 = ||z||^2$ – любые три вектора, образующие прямоугольный треугольник с гипотенузой z.

h) y_{100}, p_{100}, m_{100}, $m_{100} = y_{100} + 2p_{100}$ – любые три вектора из 100 элементов, один из которых равен сумме второго и удвоенного третьего.

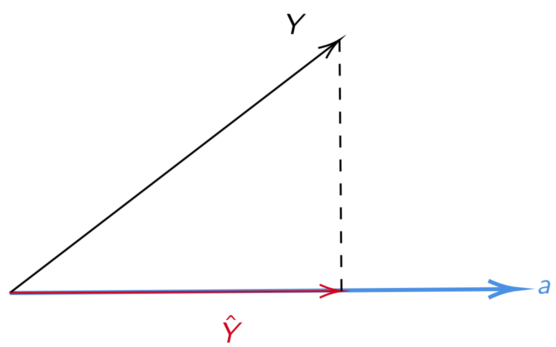
Линейное пространство (неформально) – вектор или система векторов, удовлетворяющие некоторым аксиомам. В частности, для них должны быть определены операции сложения и умножения на число.

Ортогональная проекция – изображение вектора, лежащего в одном линейном пространстве, в другом линейном пространстве так, чтобы расстояние между исходным вектором и его проекцией было минимальным. Для вектора Y ортогональную проекцию будем обозначать как $\hat{Y}$.

3.5

Изобразите проекцию вектора Y на указанное пространство. В пункте а) рассчитайте координаты проекции.

а) $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ на $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



По определению, ортогональная проекция строится так, чтобы расстояние от исходного вектора до его проекции было минимальным. По рисунку видно, что это расстояние – это длина вектора $(Y - \hat{Y})$. Заметим, что так как мы проецируем вектор Y на вектор a, то $\hat{Y}$ будет лежать на a, то есть a и $\hat{Y}$ – коллинеарны. Это означает, что $\hat{Y} = pa$, где p – некоторое число, не равное 0. Тогда нужно минимизировать:

$$||Y - \hat{Y}|| = ||Y - pa|| = \sqrt{(3-p)^2 + (1-p)^2 + (2-p)^2}.$$

Понятно, что если мы минимизируем корень, то мы минимизируем подкоренное выражение. Тогда:

$$(3-p)^2 + (1-p)^2 + (2-p)^2 = 3p^2 - 12p + 14$$

Парабола с ветвями вверх относительно $p \Rightarrow$ минимум достигается в вершине при $p = 2$.

Тогда координаты проекции:

$$\hat{Y} = pa = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Заметим, что мы так же могли бы решить другую задачу:

$$\langle Y - \hat{Y}, a \rangle = 0,$$

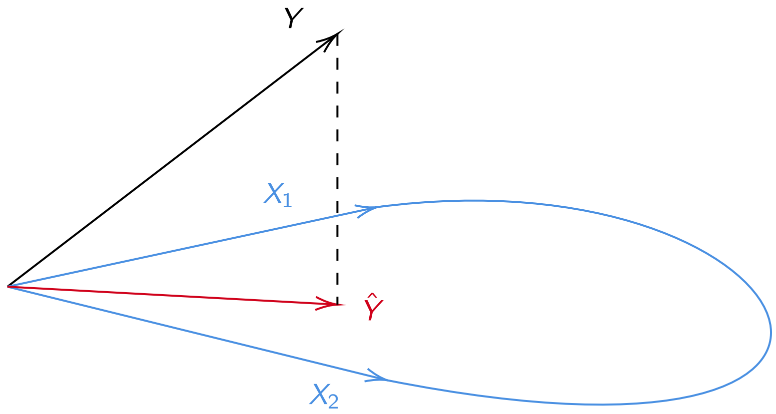
так как, как известно, наименьшее расстояние между точкой (концом вектора Y) и прямой a проходит по перпендикуляру от точки до прямой. То есть чтобы расстояние между Y и $\hat{Y}$ было минимальным, $Y - \hat{Y}$ и a должны быть перпендикулярны.

Тогда подставляем:

$$\langle \begin{pmatrix} 3-p \\ 1-p \\ 2-p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0,$$

откуда $3p = 3+1+2 \Rightarrow p = \dfrac{3+1+2}{3} = 2$, как и получилось до этого.
Заметим, что p – это среднее арифметическое из координат вектора Y (среднее по координатам вектора обозначается как $\bar{Y} = \dfrac{Y_1 + \ldots Y_n}{n}$), то есть $\hat{Y} = \bar{Y}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Это свойство выполнено для **любого** вектора Y: при проецировании вектора Y на вектор из единиц проекцией будет являться вектор из средних по элементам вектора Y.

b) $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ на $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}$



c) $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ на $X_{n\times k}$