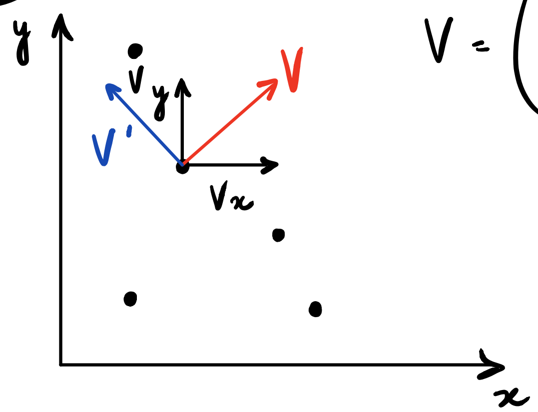
Семинар 7

№1



$$V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$$

a) Матрица поворота:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V' = Mv = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_y \\ V_x \end{pmatrix}$$

b) По предп. 1: $\operatorname{dist}(V) = \operatorname{dist}(V')$

$$\Rightarrow \operatorname{dist}(V_x) = \operatorname{dist}(-V_y)$$
$$\operatorname{dist}(V_y) = \operatorname{dist}(V_x)$$

c) $$\begin{matrix} \mathbb{E}(V_x) = \mathbb{E}(-V_y) \\ \mathbb{E}(V_y) = \mathbb{E}(V_x) \end{matrix} \Rightarrow \mathbb{E}(V_x) = \mathbb{E}(V_y) = 0.$$

d) (*) заметим, что (1) означает, что

$\mathbb{P}\{V_1 \le a, V_2 \le b\} = F_V(a, b)$ не зависит от выбора ортонормир-го базиса.

По предп. 1:

$$f_V(v_x, v_y) = \underbrace{h(v_x^2 + v_y^2)}_{\text{только функции такого вида инварианты к поворотам}}$$

$\Rightarrow$ совместная плотность зависит только от длины вектора V.

e) По предп. 2:

$$f_V(v_x, v_y) = f_{V_x}(v_x) \cdot f_{V_y}(v_y)$$

Из п. в: $f_{V_x}(a) = f_{V_y}(a)$

$V_x \sim V_y \sim (-V_y)$

$\Rightarrow f_{V_y}(a)$ симметрична относ. оси y.

$\Rightarrow f_{V_y}(a) = g(a^2)$

$$\Rightarrow f_V(v_x, v_y) = g(v_x^2)\, g(v_y^2).$$

f) Итого: $h(v_x^2 + v_y^2) = g(v_x^2)\, g(v_y^2)$.

Продиф-м по v_y^2:

$$h'(v_x^2 + v_y^2) = g(v_x^2)\, g'(v_y^2)$$

Рассм. в точке $v_y = 0$:

$$h'(v_x^2) = g(v_x^2) \cdot \underbrace{g'(0)}_{\text{const}}$$

Мы знаем, что

$$h(v_x^2 + 0) = g(v_x^2)\, g(0)$$

$$\Rightarrow h'(v_x^2) = h(v_x^2) \cdot k$$

$$\frac{h'(v_x^2)}{h(v_x^2)} = k.$$

g) Дифферен. ур-е с разд. перем.

$$\ln h(v_x^2) = k v_x^2 + \ln C_1, \quad C_1 - \text{const}$$

$$h(v_x^2) = C_1 e^{k v_x^2}$$

h) $f_V(v_x, v_y) = c\, e^{k(v_x^2 + v_y^2)}$.

Сравним с ф. пл-и бинорм. станд распр-я:

$$f(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)}.$$

№2 $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$$\hat{u} = \underbrace{X(X^T X)^{-1} X^T}_{\text{матрица проектора вектора } u \text{ на пр-о столбцов } X} u$$

a) Базис в V: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{u}_V = \bar{u}\,\vec{1} = \left[\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}\right] \vec{1}$

b) Базис в W: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\hat{u}_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1 - u_3 \\ 0 \\ u_3 - u_1 \end{pmatrix}$$

c) Да : $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$

d) $\|\hat{u}_v\| = \sqrt{\dfrac{(u_1+u_2+u_3)^2}{3}}.$

$\|\hat{u}_w\| = \sqrt{\dfrac{(u_1-u_3)^2}{2}}.$

независимы

[тервер : $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
$X \perp\!\!\!\perp Y$
$\Rightarrow (X+Y) \perp\!\!\!\perp (X-Y)$]

№ 3

a) Выберем базис в V: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\hat{u} = X(X^T X)^{-1} X^T u$

$\hat{u} = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.3 & 0.3 \\ -0.3 & 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0.3u_1 - 0.3u_2 + 0.3u_3 \\ -0.3u_1 + 0.8u_2 + 0.2u_3 \\ 0.3u_1 + 0.2u_1 + 0.8u_3 \end{pmatrix}$

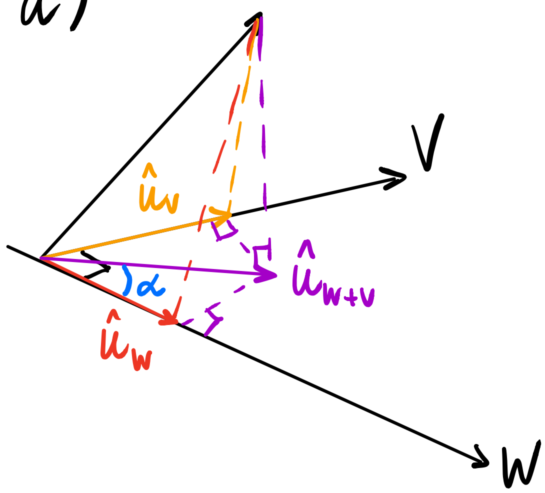
$\|\hat{u}_v\|^2 \sim \chi^2_2$

в) $\dim V^\perp = n-2. = 1$

$\Rightarrow \|\hat{u}_{v^\perp}\|^2 \sim \chi^2_{n-2} = \chi^2_1$

№4 $u \sim N(0, I)$

a)



$\|\hat{u}_V\|^2 \sim \chi^2_k$

$\|\hat{u}_W\|^2 \sim \chi^2_m$

d) $tg^2\alpha = \dfrac{\|\hat{u}_V\|^2}{\|\hat{u}_W\|^2}$

$$\frac{\|\hat{u}_V\|^2 / \dim V}{\|\hat{u}_W\|^2 / \dim W} \sim F(\dim V, \dim W)$$

e) Модели можно сравнить через тангенс угла между их прогнозами.

⊛ UR – модель (полная, неогранич.)

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + u_i$

$H_0: \beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = 0$
$H_1: \exists i: \beta_i \neq 0$
$i = 1, \ldots, k-1$

Предположим, что $\beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = 0$:

⊛ R – модель (огранич.)

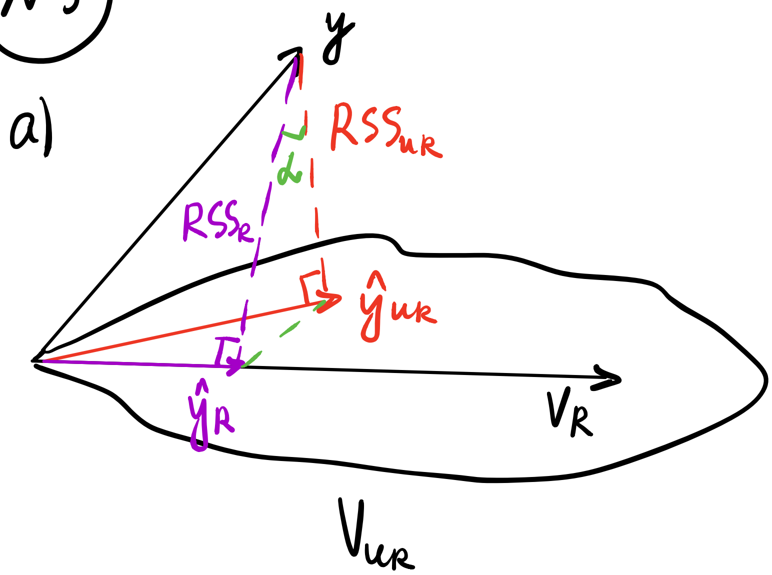
$y_i = \beta_0 + \beta_k x_{ki} + u_i$

H_0: верны и UR, и R модели

H_1: UR модель верна, а R – нет

№5

a)



c) $\underbrace{\|\hat{y}^{uR} - \hat{y}^{R}\|^2}_{\text{катет}} = \underbrace{\|y - \hat{y}^{R}\|^2}_{\text{гипотен.}} - \underbrace{\|y - \hat{y}^{uR}\|^2}_{\text{катет}} = RSS^{R} - RSS^{uR}.$

d) $$tg^2\alpha = \frac{\|\hat{y}_{uR} - \hat{y}_R\|^2}{\|y - \hat{y}_{uR}\|^2}$$

e) $y - \hat{y}_{uR}$ – проекция y на $(V_{uR})^\perp$

$\dim (V^{uR})^\perp = n - K_{uR}$

$y - \hat{y}_R$ – проекция y на $(V_R)^\perp$

$\hat{y}_{uR} - \hat{y}^R$ – проекция y на $\underbrace{(V^{uR} \cap (V^R)^\perp)}_{\text{на ту часть } V^{uR}\text{, к. перпенд. } V^R}.$

$\dim (V_{uR} \cap V_R^\perp) = k_{uR} - k_R$

f) $$F = \frac{\|\hat{y}_{UR} - \hat{y}_R\|^2 / \dim(V_{UR} \cap V_R^{\perp})}{\|y - \hat{y}_{UR}\|^2 / \dim(V_{UR}^{\perp})} =$$

$$= \frac{(RSS_R - RSS_{UR}) / [(n - k_R) - (n - k_{UR})]}{RSS_{UR} / (n - k_{UR})} =$$

$$= \frac{(RSS_R - RSS_{UR}) / (k_{UR} - k_R)}{RSS_{UR} / (n - k_{UR})} =$$

число огранич. в H_0

$$= \frac{(RSS_R - RSS_{UR}) / q}{RSS_{UR} / (n - k_{UR})}$$