

Формула оценки

$$\text{Норм} = 0.3 \times \text{ML} + 0.3 \times \text{KP} + 0.2 \times \exists + 0.2 \times K$$

1. ML
 2. KP
 3. Норм. кр.
 4(a): баллы
 (5*: Справоч.) октавы
песни.
отличн/органи?
*ТГ *Гитхаб

≈ 4-5 шт.
 на нормаль
 (первый - на 3-ем семинаре, по ML)

Ассистенты:
 Наталья Бондаренко
 Камилла Бахтиева

Семинары

- * После лекции, по теме лекции
- * Техника - Понятнее - Комп.
- * Викладиб-л.

Семинар 1

Точечные оценки

X_1, X_2, \dots, X_n - выборка сл. величин из какого-то распределения.

$\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k)$ - вектор параметров расп.

Доказ:

$$L(X_1, \dots, X_n | \Theta) = P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | \Theta\}$$

Член:

$$L(X_1, \dots, X_n | \Theta) = f(x_1, \dots, x_n | \Theta)$$

Если $X_i, j : X_i \perp\!\!\!\perp X_j$, то

$$L(X_1, \dots, X_n | \Theta) = \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i | \Theta\}$$

$$L(X_1, \dots, X_n | \Theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \Theta)$$

$$\ell := \ln L = \sum_{i=1}^n \ln P\{X_i = x_i | \Theta\} \\ = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i | \Theta)$$

Задача:

$$\hat{\Theta}_{ML} := \underset{\Theta}{\operatorname{argmax}} \ell(X | \Theta).$$

Пример 1 (точечное оценки для дискретного распределения)

$$Y_i \sim \text{iid} : \begin{array}{c} Y_i & 2 & 6 & 4 \\ P\{Y_i = y_i\} & 3a & 2a & 1-5a \end{array}$$

$$Y_1 = 6, Y_2 = 4, Y_3 = 6$$

$\hat{\alpha}_{ML}$ - ?

$$\ell = \prod_{i=1}^3 P\{Y_i = y_i\} = P\{Y_1 = 6\} \cdot P\{Y_2 = 4\} \cdot P\{Y_3 = 6\} = 4a^2(1-5a)$$

$$\ell = 2 \ln 2a + \ln(1-5a) \rightarrow \max_a$$

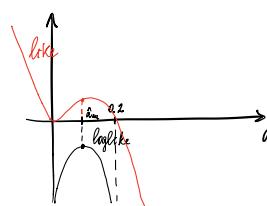
$$\ell'_a = \frac{4}{2a} - \frac{5}{1-5a} := S(a) - \text{score-function}$$

$$\frac{4}{2\hat{a}} - \frac{5}{1-5\hat{a}} = 0$$

$$4 - 20\hat{a} = 10\hat{a}$$

$$4 = 30\hat{a}$$

$$\hat{\alpha}_{ML} = \frac{4}{30}.$$



Пример 2 (точечные оценки для квадратичного распр. 1)

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

$$\hat{\mu}_{mc}, \hat{\sigma}_{mc}^2 - ?$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$$

$$\ell = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \rightarrow \max_{\mu, \sigma}$$

$$\ell'_{\mu} = +\frac{1}{2\sigma^2} \cdot 2 \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)$$

$$\ell'_{\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^3} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu}) = 0 \quad \frac{-n}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3} \sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2 = 0$$

$$\hat{\mu}_{mc} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}_{mc}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2}{n}$$

Убедимся, что находим максимум:

$$\ell''_{\mu\mu} = -\frac{n}{\hat{\sigma}^2}$$

$$\ell''_{\sigma\sigma} = \frac{n}{\hat{\sigma}^2} - \frac{3}{\hat{\sigma}^4} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \Big|_{\hat{\sigma}, \hat{\mu}} = \frac{n}{\hat{\sigma}^2} - \frac{3n \cdot \hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^4} = -\frac{2n}{\hat{\sigma}^2}$$

$$\ell'_{\mu\sigma} = -\frac{2}{\hat{\sigma}^3} \sum (x_i-\mu) = -\frac{2}{\hat{\sigma}^3} \left(\sum x_i - n\mu \right) \Big|_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}} = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2n}{\hat{\sigma}^2} \end{pmatrix} \text{ - опр. опред-а.}$$

Пример 3 (нарушение условий регулярности)

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} U[a, b]$$

$$\hat{a}_{mc}, \hat{b}_{mc} - ?$$

$$f(x_i | a, b) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{I}\{x_i \in [a, b]\}$$

$$L = \left(\frac{1}{b-a} \right)^n, \quad \underline{a \leq x_i \leq b}$$

$$\ell = -n \ln(b-a)$$

$$\ell'_a = \frac{n}{b-a} \quad || \quad \Rightarrow \quad \hat{a}_{mc} = \min_i \{x_i\}$$

$$\ell'_b = -\frac{n}{b-a} \quad \Rightarrow \quad \hat{b}_{mc} = \max_i \{x_i\}$$

Свойства МЛ-оценок

1. Нелинейность:

$$\widehat{g}(\widehat{\Theta}_{ML}) = g(\widehat{\Theta}_{ML}) \neq \text{наглой } g(\cdot)$$

2. Асимптотика:

Если $y \in \mathcal{L}$ сущ-т единств. max, $\exists L''$, обл. знач. выборки не зависит от параметров, то при $n \rightarrow \infty$:

1. $E(\widehat{\Theta}_{ML}) = \Theta$
2. $\operatorname{plim}_{n \rightarrow \infty} \widehat{\Theta}_{ML} = \Theta$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\Theta' - \Theta)^2 \geq E(\widehat{\Theta}_{ML} - \Theta)^2 + \Theta' + \widehat{\Theta}_{ML}$
4. $\widehat{\Theta}_{ML} \sim N(\Theta, \operatorname{Var}(\widehat{\Theta}_{ML}))$.

Пример 4. Свойства МЛ-оценок.

Мы примера 2: $\widehat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$

Покажите, что $\widehat{\sigma}_{ML}^2$ есть-а и асимм. нелиней.

$$\operatorname{plim}_{n \rightarrow \infty} \widehat{\sigma}_{ML}^2 = \operatorname{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \operatorname{plim}_{n \rightarrow \infty} \bar{x}^2 - 2\bar{x} + \bar{x}^2 = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \operatorname{Var}(X_1).$$

$$E(\widehat{\sigma}_{ML}^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}\right) = \frac{1}{n} (nE(X_1^2) - nE(\bar{x}^2)) = E(X_1^2) - E(\bar{x})^2 - \operatorname{Var}(\bar{x}) = \operatorname{Var}(X_1) - \frac{\operatorname{Var}(X_1)}{n} (1 - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Var}(X_1).$$

Информация Римера

$$I(\Theta) := \operatorname{Var}(S(\Theta)) = E(S^2(\Theta)) - E(S(\Theta))^2.$$

Если выполнено условие регулярности, то $\operatorname{Var}(\widehat{\Theta}_{ML}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{I(\Theta)}$.

Пример 5 (Информация Римера)

Для примера 2:

$$I(\Theta) = -E(H) = E\left(\begin{array}{cc} \frac{n}{\sigma^2} & \frac{2}{\sigma^3} \left(\sum x_i - n\mu \right) \\ \frac{2}{\sigma^3} \left(\sum x_i - n\mu \right) & -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\sigma^2} \end{pmatrix}$$

↑
информация
оценка
имп. примера

$$\widehat{I}(\Theta) = I(\Theta) \Big|_{\widehat{\Theta}_{ML}, \widehat{\mu}_{ML}} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\widehat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\widehat{\sigma}^2} \end{pmatrix}$$

↑
оценка
имп. Римера

Интервальные оценки

Пример 6. (Интерв. оценки)

Найдите 95% деб. интервал для $\widehat{\mu}_{ML}$.

$$\widehat{\operatorname{Var}}(\widehat{\Theta}) = \widehat{I}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\widehat{\sigma}^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\widehat{\sigma}^2}{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\operatorname{Var}}(\widehat{\mu}) & 0 \\ 0 & \widehat{\operatorname{Var}}(\widehat{\sigma}) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hat{\mu} - \mu}{\text{se}(\hat{\mu})} \sim N(0, 1) \Rightarrow \hat{\mu} - 1.96 \cdot \text{se}(\hat{\mu}) \leq \mu \leq \hat{\mu} + 1.96 \cdot \text{se}(\hat{\mu}).$$

Пример 7 (с числами).

$X_1 = -3, X_2 = 4, X_3 = 2$ (будем считать, что $n=3$ достаточно велико, чтобы норм. асимпт. св-а. Это неверно, но сейчас главное - понять технику).

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{-3 + 4 + 2}{3} = 1$$

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{(-4)^2 + 3^2 + 1^2}{3} = \frac{16 + 9 + 1}{3} = \frac{26}{3}$$

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \frac{9}{26} & 0 \\ 0 & \frac{18}{26} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\text{Var}}(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{26}{9} & 0 \\ 0 & \frac{26}{18} \end{pmatrix}$$

$$\mu \in [1 - 1.96 \sqrt{\frac{26}{9}}, 1 + 1.96 \sqrt{\frac{26}{9}}]$$