

Семинар 2.

Установление:

$$1. I \begin{cases} \rightarrow \text{Var}(s(\Theta)) \\ \rightarrow \mathbb{E}(ss^T) \\ \rightarrow \mathbb{E}(-H) \end{cases}$$

$$2. \text{Var}(s(\Theta)) \cdot \text{Var}(\hat{\Theta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{I_{n \times n}}_{\text{единичная матрица!}} \quad (\text{не унор. Критерия})$$

$$3. LR = 2(l_{uR} - l_R), \text{ где } l_{uR} := \max_{\Theta_{uR}} l$$

$$W = (\hat{y}_{uR} - y_0)^T \cdot \widehat{\text{Var}}(\hat{y}_{uR})^{-1} (\hat{y}_{uR} - y_0),$$

где y - частота вектора Θ :

$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_A: p \neq p_0 \end{cases}$$

$$LM = \hat{S}_R^T \cdot \widehat{\text{Var}}(\hat{S}_R)^{-1} \cdot \hat{S}_R$$

Пример 1 (различия, в скобках)

$$X_1, X_2, \dots, X_{50} \sim \exp(\lambda)$$

Оказывается, что $\bar{X} = 1.5$

$$\begin{cases} H_0: \lambda = 1 \\ H_A: \lambda \neq 1 \end{cases} \text{ на уровне значимости 0.05}$$

LR, W, LM - ?

Решение:

$$f_i(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$L = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}$$

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum x_i$$

$$S(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i \Rightarrow \hat{\lambda}_{uR} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{10}{15}.$$

В скалярах:

$$LR = 2(l_{uR} - l_R)$$

$$W = \frac{(\hat{\Theta} - \Theta_0)^2}{\text{Var}(\hat{\Theta})}$$

$$LM = \frac{(l'(\hat{\Theta}) - l'(\Theta_0))^2}{\widehat{\text{Var}}(l'(\Theta_0))} = \frac{(l'(\Theta_0))^2}{\widehat{\text{Var}}(l'(\Theta_0))}$$

$$I(\lambda) = \mathbb{E}(-\hat{l}_{\lambda R}'') = \frac{n}{\lambda^2}$$

$$\hat{I}(\lambda) = \frac{n}{\hat{\lambda}^2} = \frac{50 \cdot 225}{100} = 112.5$$

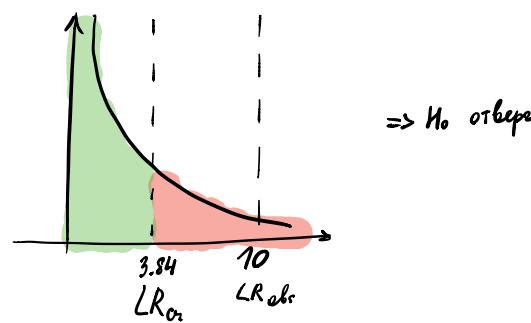
$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\lambda}) = \frac{1}{112.5} = 0.009$$

$$1. \ell_{UR} = \underbrace{50 \ln \frac{10}{15}}_{-20} - \frac{10}{15} \cdot 50 \cdot 1.5 = -70$$

$$\ell_R = 50 \cdot \ln 1 - 50 \cdot 1.5 = -75$$

$$\Delta R = 2(\ell_{UR} - \ell_R) = 10$$

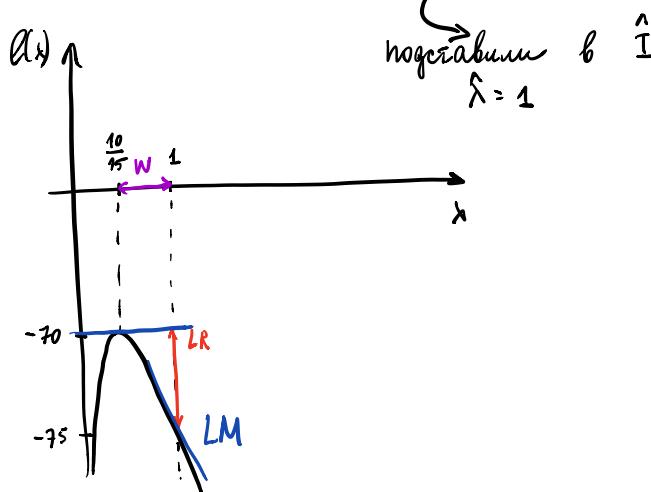
$$\Delta R \sim \chi^2_1$$



$\Rightarrow H_0$ отвергн.

$$2. W = \frac{\left(\frac{10}{15} - 1\right)^2}{0.009} = 12.34 \Rightarrow H_0$$
 отвергн.

$$3. LM = \left(50 - 50 \cdot 1.5 \right)^2 \cdot \frac{1}{50} = 12.5 \Rightarrow H_0$$
 отвергн.



Пример 2 (продолжение испытания с нормальным распределением)

$$X_1, \dots, X_{100} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} X_i &= 20 \\ \sum_{i=1}^{100} (X_i - \bar{X})^2 &= 400 \end{aligned}$$

$$LR, LM, W - ? \quad 95\%$$

$$\ell = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\sigma^2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{400}{100} = 4$$

$$\ell'_{\mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$$

$$\ell'_{\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}$$

$$l_{UR} = -50 \ln 2\pi - 100 \ln 2 - \frac{1}{8} \cdot 400$$

$$l_R = -50 \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum x_i^2$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + \bar{x}^2 n = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - 100 \cdot 0.004 = 400$$

$$\sum x_i^2 = 404$$

$$LR = 2(l_{UR} - l_R) = 2 \left(-100 \ln 2 - \frac{400}{8} + \frac{404}{2} \right) = 82 \Rightarrow \text{No отвергн.}$$

$$\chi^2_2$$

$$W = \left[\begin{pmatrix} 0.2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0.2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\hat{\sigma}_R^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu^R)^2 \\ -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu^R)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -100 + 404 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 304 \end{pmatrix}$$

$$LM = \begin{pmatrix} 20 & 304 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & \frac{1}{200} \end{pmatrix}}_{\text{Подстановка и обратные}} \begin{pmatrix} 20 \\ 304 \end{pmatrix}$$

Пример 3 (оценка и тестирование членов в модели AR-1).

$$y_t = a_1 + a_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \perp \varepsilon_j \quad \forall i, j$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, 1)$$

$$y_1, \dots, y_{100} - \text{дано}, y_0 = 0$$

$$\text{тогда } \sum_{t=1}^{99} y_t = 100, y_{100} = 2$$

$$\sum_{t=1}^{100} y_t y_{t-1} = 80$$

$$\sum_{t=1}^{99} y_t^2 = 400$$

a) Найдите $\begin{pmatrix} \hat{a}_0^{ML} \\ \hat{a}_1^{ML} \end{pmatrix}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: \begin{pmatrix} \hat{a}_0^{ML} \\ \hat{a}_1^{ML} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ H_1: \begin{pmatrix} \hat{a}_0^{ML} \\ \hat{a}_1^{ML} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

yp-б znac: 0.05
LR-test

Зависимость от y_t и y_{t-1} ?

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \text{Cov}(a_1 + a_2 y_{t-1} + \varepsilon_t, y_{t-1}) = a_2 \text{Var}(y_{t-1}) \Rightarrow \text{если game коррелирует!}$$

Унаследованное распределение $y_t | y_{t-1}$

$$\mathbb{E}(y_t | y_{t-1}) = \mathbb{E}(a_1 + a_2 y_{t-1} + \varepsilon_t | y_{t-1}) = a_2 \cdot y_{t-1} + a_1.$$

$$\text{Var}(y_t | y_{t-1}) = \text{Var}(a_1 + a_2 y_{t-1} + \varepsilon_t | y_{t-1}) = \text{Var}(\varepsilon_t) = 1.$$

$$\Rightarrow y_t | y_{t-1} \sim N(a_1 + a_2 y_{t-1}, 1)$$

$$l = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (y_t - a_2 y_{t-1} - a_1)^2$$

$$\begin{cases} l'_{a_1} = +\frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{t=1}^n (y_t - a_2 y_{t-1} - a_1) \\ l'_{a_2} = \sum_{t=1}^n (y_t - a_2 y_{t-1} - a_1) y_{t-1} \end{cases} \quad \begin{cases} l''_{a_1 a_1} = -n \\ l''_{a_1 a_2} = -\sum_{t=1}^n y_{t-1} \\ l''_{a_2 a_2} = -\sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^n y_t - \hat{a}_2 \sum_{t=1}^n y_{t-1} - n \hat{a}_1 = 0 \\ \sum_{t=1}^n y_t y_{t-1} - \hat{a}_2 \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 - \hat{a}_1 \sum_{t=1}^n y_{t-1} = 0 \end{cases}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum y_t - \hat{a}_2 \sum y_{t-1}}{n}$$

$$\sum y_t y_{t-1} - \hat{a}_2 \sum y_{t-1}^2 - \left(\frac{\sum y_t - \hat{a}_2 \sum y_{t-1}}{n} \right) \sum y_{t-1} = 0$$

$$\hat{a}_2 = \frac{\sum y_t y_{t-1} - \frac{\sum y_t \sum y_{t-1}}{n}}{\sum y_{t-1}^2 + \frac{\sum y_{t-1}}{n}}$$

$$\hat{a}_2^{ml} = \frac{80 - \frac{102 \cdot 100}{100}}{\frac{400 + \frac{100}{100}}{100}} = \frac{-22}{401} \quad , \quad \hat{a}_1^{ml} = \frac{102 + \frac{22}{401} \cdot 100}{100} = 1.074 \\ - 0.05$$

$$\hat{y}_t = 1.074 - 0.05 \hat{y}_{t-1}$$

$$l_{UR} = C - \frac{1}{2} \sum (y_t - 1.074 + 0.05 y_{t-1})^2 \quad LR = 2(l_{UR} - l_K) \dots$$

$$l_R = C - \frac{1}{2} \sum y_t^2$$