Формула оценки

$$\text{Итог} = 0.3 \times ДЗ + 0.3 \times КР + 0.2 \times Э + 0.2 \times К$$

4:
1. ML
2. Регр
3. Инф.кр.
4(5): Байес

(5*: Сюрприз)

октябрь

письм.
онлайн/офлайн?

≈4-5 шт.
на порешать
(первый - на 3-ем семинаре, по ML)

* ТГ
* Гитхаб

Ассистенты:
Наталия Бондаренко
Камилла Бахтиева

Семинары

* После лекций, по теме лекции
* Техника - Поинтереснее - Комп.
* Выкладыв-е.

Семинар 1

Точечные оценки

$X_1, X_2 \dots X_n$ - выборка сл. величин из какого-то распределения.

$\Theta = (\Theta_1\ \Theta_2 \dots \Theta_k)$ - вектор парам-в распр.

Дискр:

$$L(X_1 \dots X_n \mid \Theta) = \mathbb{P}\{X_1 = x_1 \dots X_n = x_n \mid \Theta\}$$

Непр:

$$L(X_1 \dots X_n \mid \Theta) = f(x_1 \dots x_n \mid \Theta)$$

Если $\forall i, j$: $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$, то

$$L(X_1 \dots X_n \mid \Theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{X_i = x_i \mid \Theta\}$$

$$L(X_1 \dots X_n \mid \Theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \Theta)$$

$$\ell := \ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln \mathbb{P}\{X_i = x_i \mid \Theta\} = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i \mid \Theta)$$

Задача:

$$\hat{\Theta}_{ML} := \underset{\Theta}{\operatorname{argmax}}\ \ell(x \mid \Theta).$$

Пример 1 (Точечные оценки для дискретного распределения)

$Y_i \sim iid$:

y_i	2	6	4
$P\{Y_i = y_i\}$	$3a$	$2a$	$1-5a$

$Y_1 = 6,\ Y_2 = 4,\ Y_3 = 6$

$\hat{a}_{ML}$ - ?

$$L = \prod_{i=1}^{3} \mathbb{P}\{Y_i = y_i\} = \mathbb{P}\{Y_1 = 6\}\ \mathbb{P}\{Y_2 = 4\}\ \mathbb{P}\{Y_3 = 6\} = 4a^2(1-5a)$$

$$\ell = 2\ln 2a + \ln(1-5a) \to \max_a$$

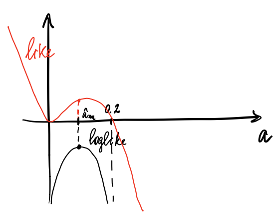
$$\ell'_a = \frac{4}{2a} - \frac{5}{1-5a} := S(a) \text{ - score-function}$$

$$\frac{4}{2\hat{a}} - \frac{5}{1-5\hat{a}} = 0$$

$$4 - 20\hat{a} = 10\hat{a}$$

$$4 = 30\hat{a}$$

$$\hat{a}_{ML} = \frac{4}{30}.$$



Пример 2 (точечные оценки для непрерывного распр-я)

$X_1 \dots X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$\hat{\mu}_{ml}, \hat{\sigma}^2_{ml} - ?$ $\quad f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$l = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \longrightarrow \max_{\mu,\sigma}$$

$$l'_\mu = +\frac{1}{2\sigma^2}\cdot 2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

$$l'_\sigma = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^3}\cdot 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}) = 0 \qquad\qquad -\frac{n}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$n\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad\qquad \hat{\sigma}^2_{ml} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$$

$$\hat{\mu}_{ml} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

Убедимся, что нашли максимум:

$$l''_{\mu\mu} = \frac{-n}{\hat{\sigma}^2}$$

$$l''_{\sigma\sigma} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\Big|_{\hat{\sigma},\hat{\mu}} = \frac{n}{\hat{\sigma}^2} - \frac{3n\cdot\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^4} = -\frac{2n}{\hat{\sigma}^2}.$$

$$l'_{\mu\sigma} = -\frac{2}{\sigma^3}\sum(x_i-\mu) = -\frac{2}{\sigma^3}\left(\sum x_i - n\mu\right)\Big|_{\hat{\mu},\hat{\sigma}} = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2n}{\hat{\sigma}^2} \end{pmatrix} \text{ — отр. определ-а.}$$

Пример 3 (нарушение условий регулярности)

$X_1 \dots X_n \overset{iid}{\sim} U[a,b]$

$\hat{a}_{ml}, \hat{b}_{ml} - ?$

$$f(x_i \mid a, b) = \frac{1}{b-a}\cdot \mathbb{I}\{x_i \in [a;b]\}$$

$$L = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n, \quad \underline{a \le x_i \le b}$$

$$l = -n\ln(b-a)$$

$$l'_a = \frac{n}{b-a} \qquad\qquad \hat{a}_{ml} = \min_i\{X_i\}$$

$$\neq \quad \Rightarrow$$

$$l'_b = \frac{-n}{b-a} \qquad\qquad \hat{b}_{ml} = \max_i\{X_i\}$$

Свойства ML-оценок

1. Неасимптотич:

$$\widehat{g(\Theta_{ML})} = g(\hat{\Theta}_{ML}) \quad \forall \text{ гладкой } g(\cdot)$$

2. Асимптотич:

Если у L сущ-т единств. max, $\exists L'''$, обл. знач. выборки не зав-т от параметров, то при $n \to \infty$:

1. $\mathbb{E}(\hat{\Theta}_{ML}) \overset{n\to\infty}{=} \Theta$
2. $\operatorname{plim}_{n\to\infty} \hat{\Theta}_{ML} = \Theta$
3. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\Theta' - \Theta)^2 \overset{n\to\infty}{\geq} \mathbb{E}(\hat{\Theta}_{ML} - \Theta)^2 \quad \forall \Theta' \neq \hat{\Theta}_{ML}$
4. $\hat{\Theta}_{ML} \overset{n\to\infty}{\sim} N(\Theta, Var(\hat{\Theta}_{ML}))$.

Пример 4. Свойства ML-оценок.

Из примера 2: $\hat{\sigma}^2_{ML} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$

Покажите, что $\hat{\sigma}^2_{ML}$ сост-а и асимп. несмещ.

$$\operatorname{plim}_{n\to\infty} \hat{\sigma}^2_{ML} = \operatorname{plim}_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n} = \operatorname{plim}_{n\to\infty} (\overline{X^2} - 2\bar{X} + \bar{X}^2) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = Var(X_1).$$

$$\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2_{ML}) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(n\mathbb{E}(X_1^2) - n\,\mathbb{E}(\bar{X}^2)\right) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(\bar{X})^2 - Var(\bar{X}) = Var(X_1) - \frac{Var(X_1)}{n} = Var(X_1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} Var(X_1).$$

Информация Фишера

$$I(\Theta) := Var(s(\Theta)) = \mathbb{E}(s^2(\Theta)) = \mathbb{E}(-H(\Theta)).$$

Если выполнены усл-я регулярности, то $Var(\hat{\Theta}_{ML}) \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{I(\hat{\Theta})}$.

Пример 5 (информация Фишера)

Для примера 2:

$$I(\Theta) = -\mathbb{E}(H) = \mathbb{E}\begin{pmatrix} +\frac{n}{\sigma^2} & +\frac{2}{\sigma^3}\left(\sum x_i - n\mu\right) \\ +\frac{2}{\sigma^3}\left(\sum x_i - n\mu\right) & -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\sigma^2} \end{pmatrix}$$

истинная инф. Фишера

$$\hat{I}(\Theta) = I(\Theta)\Big|_{\hat{\sigma}_{ML}, \hat{\mu}_{ML}} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\hat{\sigma}^2} \end{pmatrix}$$

оценка инф. Фишера

Интервальные оценки

Пример 6. (Интерв. оценки)

Найдите 95% дов. интервал для $\hat{\mu}_{ML}$.

$$\widehat{Var}(\hat{\Theta}) = \hat{I}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\sigma}^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\sigma}^2}{2n} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \widehat{Var}(\hat{\mu}) & 0 \\ 0 & \widehat{Var}(\hat{\sigma}) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hat{\mu}-\mu}{se(\hat{\mu})} \sim N(0,1) \Rightarrow \hat{\mu} - 1.96 \cdot se(\hat{\mu}) \leq \mu \leq \hat{\mu} + 1.96 \cdot se(\hat{\mu}).$$

Пример 7 (с числами).

$X_1 = -3,\ X_2 = 4,\ X_3 = 2$ (Будем считать, что $n=3$ достаточно велико, чтобы выпол. асимпт. св-а. Это неверно, но сейчас главное — понять технику).

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{-3+4+2}{3} = 1$$

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{(-4)^2 + 3^2 + 1^2}{3} = \frac{16+9+1}{3} = \frac{26}{3}$$

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \frac{9}{26} & 0 \\ 0 & \frac{18}{26} \end{pmatrix}$$

$$\hat{Var}(\hat{\Theta}) = \begin{pmatrix} \frac{26}{9} & 0 \\ 0 & \frac{26}{18} \end{pmatrix}$$

$$\mu \in \left[1 - 1.96\sqrt{\frac{26}{9}};\ 1 + 1.96\sqrt{\frac{26}{9}} \right]$$