№2 $X_1 \dots X_N \sim N(\mu, \sigma^2)$

(ММП) $\hat{\mu}_{ML}$ - ? $\hat{\sigma}^2_{ML}$ - ?

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Число наблюдений, $\boxed{N = n}$ (будем считать)

$$L = \prod_{i=1}^{N} f_i(x) \; ; \quad l = \sum_{i=1}^{N} \ln f_i(x)$$

$$l = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 \longrightarrow \max_{\mu,\sigma}$$

$$l'_\mu = +\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu) \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i - n\hat{\mu} = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}.$$

$$l'_\sigma = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$$

$$n = \frac{1}{\hat{\sigma}^3}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$ – смещ. оц-а дисп.

$$l''_{\mu\mu} = -\frac{n}{\sigma^2}$$

$$l''_{\sigma\sigma} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\sum(x_i-\mu)^2 = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3\sigma^2 \cdot n}{\sigma^4} = \frac{-2n}{\sigma^2}$$

$$l'_{\mu\sigma} = -\frac{2}{\sigma^3}\sum(x_i-\mu)$$

$$H\Big|_{\hat{\mu},\hat{\sigma}} = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2n}{\hat{\sigma}^2} \end{pmatrix}$$ – отр. опред. $\left(\begin{array}{l} |\,|_1 = -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} < 0 \\ |\,|_2 = \frac{2n^2}{\hat{\sigma}^4} > 0 \end{array} \right)$

по крит. Сильвестра

Св-а ML-оценок:

1. Неасимп-е:

$$\widehat{g(\theta)}_{ML} = g(\hat\theta_{ML}) \quad \forall \text{ гладкой } g(\cdot)$$

Пример: $\widehat{(p_1 - p_2)}_{ML} = \hat p_{1ML} - \hat p_{2ML}$

2. Асимп-е:
если у L сущ-т единств. max
$\exists L'''$
Обл. знач. выб-и не зависит от парам-в, то при $n\to\infty$:

1. $\mathbb{E}(\hat\theta_{ML}) \overset{n\to\infty}{=} \theta$
2. $\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\ \hat\theta_{ML} = \theta$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(\hat\theta' - \theta)^2 \overset{n\to\infty}{>} \mathbb{E}(\hat\theta_{ML} - \theta)^2 \quad \forall \hat\theta' \neq \hat\theta_{ML}$
4. $\hat\theta \overset{n\to\infty}{\sim} N(\theta, Var(\hat\theta))$

N3 (ММП) $\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\quad \underset{n\to\infty}{\text{plim}}$: 1) Все св-а обыч. пределов 2) ЗБЧ: $\bar X \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}(X_1)$

$$\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\ \hat\sigma_{ML} = \underset{n\to\infty}{\text{plim}} \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar X)^2}{n} = \underset{n\to\infty}{\text{plim}} \frac{\sum X_i^2}{n} - \frac{2\bar X \sum X_i}{n} + \frac{n\bar X^2}{n} =$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{plim}} \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar X^2 = \underset{n\to\infty}{\text{plim}}\ \underbrace{\overline{(X^2)}}_{\to \mathbb{E}(X_1^2)} - \underbrace{(\bar X)^2}_{\to \mathbb{E}(X_1)^2} =$$

$$= \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = Var(X_1). \Rightarrow \hat\sigma^2_{ML} - \text{сост. оценка } \sigma^2.$$

Информация Фишера

$s(\theta) := \text{grad}\ s(\theta)$

$I(\theta) := Var(s(\theta)) = \mathbb{E}(s^2(\theta)) = \mathbb{E}(-H(\theta))$ – теор. инф. Фиш.

$\mathbb{E}(s s^T)$ – в матрицах

№4, a Для примера с норм. распред.-м:

ММП $\quad I(\Theta) = \mathbb{E}(-H) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\sigma^2} \end{pmatrix}$ — теоретическая величина!

Как оценить $I(\Theta)$?

① $\hat{I}(\hat{\Theta}) = I(\Theta)\Big|_{\hat{\Theta}}$

② $I_{obs}(\hat{\Theta}) = -H\Big|_{\hat{\Theta}}$

$\boxed{T:}$ $I(\Theta) \cdot Var(\hat{\Theta}) \xrightarrow{n\to\infty} Id$ (если вып. услов. регул.).

единичная матрица

$\Rightarrow \quad Var(\hat{\Theta}) = I(\Theta)^{-1}$

крышек нет ⇒ теор. инф. Фишера и дисперсия оценки (истинные)

$\widehat{Var}(\hat{\Theta}) = \hat{I}(\hat{\Theta})^{-1}$ — крышки ⇒ оценки инф. Фишера и дисперсии оценки

№4 (прод.)

ММП

$$\hat{I}(\hat{\Theta}) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\hat{\sigma}^2} \end{pmatrix}$$

$$\widehat{Var}(\hat{\Theta}) = \hat{I}(\hat{\Theta})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\sigma}^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\sigma}^2}{2n} \end{pmatrix}$$

$\widehat{Var}(\hat{\mu})$

$\widehat{Var}(\hat{\sigma})$

95%-ый CI для μ:

$$\mu \in \left[\hat{\mu}_{ML} - 1.96\, se(\hat{\mu});\ \hat{\mu}_{ML} + 1.96\, se(\hat{\mu})\right].$$

$se(\hat{\mu}) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\mu})}$

берём из $\widehat{Var}(\hat{\Theta})$.