Правдоподобный привет !!
2021-09-10

(+) H байт $= E(\log_{\frac{1}{256}} p_x)$ [байт]

бит 0 ~ $\frac{1}{2}$

байт 11001101 ~ $\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$

H нат $= E(\log_{\frac{1}{e}} p_x)$

natural ~~Bit~~

$= -E(\ln p_x)$ [нат]

(упр) $H = 10$ бит $H = ?$ нат

Правдоподобие.

мальн. мир   модель (θ)

Занудность:

θ_T — ист. значения

θ_H — θ из гипотезы

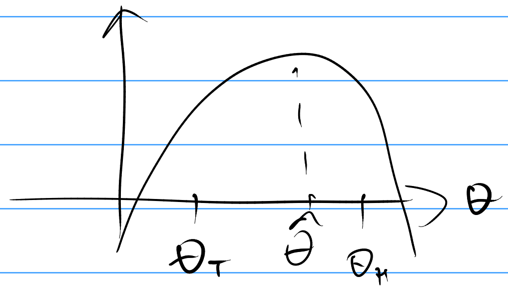
$\hat{\theta}$ — оценка

θ — „бегающий" параметр

Кратко:

$\hat{\theta}$ - оценка

θ - настоящий



Цель: универс. метод для оценки неизв-го θ_T.

$\boxed{\text{Интуит:}}$ неизв племя

данные: М → синяя
Ж → желтая

H_*: каждый день М носит синюю, а Ж – желтую

H_+: сегодня праздник повод 1 раз в 10 лет

$$P(\text{данные} \mid H_*) = 1$$
$$P(\text{данные} \mid H_+) = \frac{1}{3650}$$

Метод макс правд: выбирайте ту гипотезу (такое значение θ) при к-ром $P(\text{данные} \mid \theta)$ макси- мально.

↑ f (плотность вер-сти)

Пример 1 — ловлю спинов — X_i ~ незав. один. расп.

x	2	3	4
$P(X_i=x)$	α	2α	$1-3\alpha$

$\alpha \in [0; \frac{1}{3}]$

данные: 3, 4, 3, 3, 3, 4, 2

$\hat{\alpha}_{ML}$?

ML = maximum likelihood

трад: $X_1, \ldots, X_7$ – случ. вел.
$x_1 \ldots x_7$ – выч. знач.

Прод. $x_1, \ldots, x_7$ – случ. вел
$x_1^{obs} \ldots x_7^{obs}$ – выч. знач.

трад $x_1, \ldots x_7$ (из конт-та ясно) ф.-ция правд-ия (likelihood function)

$$L(\alpha) = P(X_1=3, X_2=4, X_3=3, X_4=3, X_5=3, X_6=4, X_7=2 \mid \alpha) =$$

$$= (2\alpha)\cdot(1-3\alpha)\cdot(2\alpha)\cdot(2\alpha)\cdot(2\alpha)\cdot(1-3\alpha)\cdot\alpha$$

$\|$

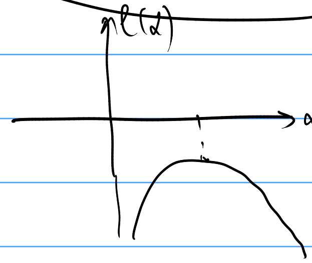
$L(x \mid \alpha)$ $\qquad x=(x_1,\dots,x_7)$

$l(\alpha) = \ln L(\alpha)$ — лог. ф-ция правдоподобия

Метод макс. правд.: $\hat{\alpha} = \arg\max_{\alpha} l(\alpha)$

$$l(\alpha) = \ln\left[(2\alpha)^4\cdot(1-3\alpha)^2\cdot\alpha\right] = 4\ln 2 + 5\ln\alpha + 2\ln(1-3\alpha)$$

$\hat{\alpha}(x_1,\dots,x_n)$ $\quad\oplus$



$$l'(\alpha) = \frac{5}{\alpha} + \frac{2}{1-3\alpha}\cdot(-3)$$

$$\frac{5}{\hat{\alpha}} + \frac{2}{1-3\hat{\alpha}}\cdot(-3) = 0 \qquad \hat{\alpha} = \frac{5}{21}$$

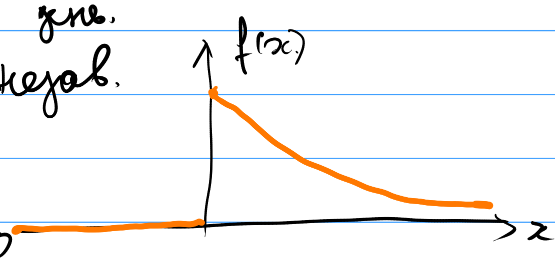
$$5 - 15\hat{\alpha} = 6\hat{\alpha}$$

Пример 2. Непрерывн.

X_i — время ож-ия автобуса в i-ый дня.

$X_i \sim Exp(\lambda)$ незав.

мин $\qquad \lambda$ (мин) [авт / мин]



$$f(x) = \begin{cases} \lambda\cdot e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

а) $X_1=5 \quad X_2=10 \quad X_3=4 \qquad \hat{\lambda}_{ML}$

б) в общем виде

$$L = f(x_1,x_2,x_3 \mid \alpha) = \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot 5}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot 10}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot 4}$$

а) $\hat{\lambda} = \frac{3}{19}$ (мин) $\qquad l(\lambda) = 3\ln\lambda - \lambda\cdot(5+10+4) \qquad l'(\lambda) = \frac{3}{\lambda} - (5+10+4)$

$\frac{3}{\hat{\lambda}} = 5+10+4$ $\qquad$ $\frac{3}{19} = \hat{\lambda}$ (estimate) ← оценка

$$\boxed{\ell(x|\lambda) = n\ln\lambda - \sum x_i \cdot \lambda}$$

$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum x_i}$

$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum X_i}$ (estimator)

оценка

Хорошие свойства.

1. Привязка к энтропии [нат]

$CE(f_{\theta_T} \| f_\theta)$ $\qquad$ θ_T — наст. пар-р.

θ — произв-ый

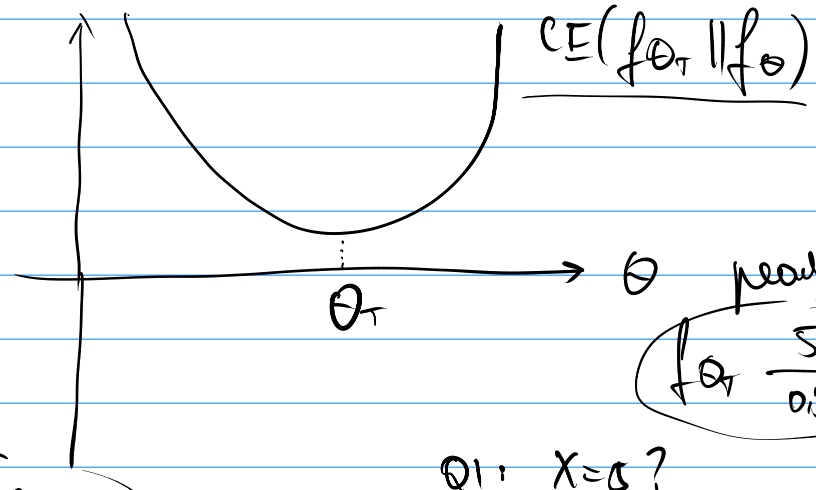
$H(f_{\theta_T})$

Хочу отгадать $X_1, \dots, X_n$

если я знаю θ_T то в среднем мне надо получить $H(f_{\theta_T})$ нат инф-ции

$CE(f_{\theta_T} \| f_\theta)$

если я хочу угадать $X_1 \dots X_n$, но подстрою вопросы опт-но под θ (а не под θ_T по к-рому генерируются природой $X_1 \dots X_n$) то в среднем надо получить $CE(f_{\theta_T} \| f_\theta)$ нат инф.



реальн. мир

f_{θ_T}	5	6	7
	0,3	0,6	0,1

Q1: $X=5$?

тип 1

5	6	7
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

← f_θ

тип 2

5	6	7
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

← f_θ

Q1: $X=6$?

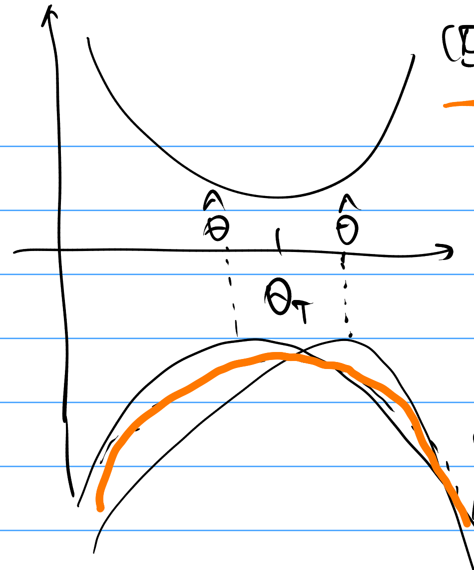
[код]

$CE(f_{\theta_T} \| f_\theta) =$

$= -E_{\theta_T}(\ln f_\theta(x_1, \ldots, x_n))$

$l(x|\theta) = \ln f_\theta(x_1, \ldots, x_n)$

$-CE = E_{\theta_T}(l(x|\theta))$



$CE(f_{\theta_T} \| f_\theta)$ [код]

$\hat\theta$(выборка)

$-CE(f_{\theta_T} \| f_\theta)$

$l(x|\theta) \to \max$

$l(x|\theta)$

$l(x|\theta)$ – случ-ая ф-ция

Пример 1.

2	3	4	
α	2α	$1-3\alpha$	α

2	3	4
α_T	$2\alpha_T$	$1-3\alpha_T$

$CE(f_{\alpha_T} \| f_\alpha) =$

$= -\alpha_T \cdot \ln\alpha - 2\alpha_T \cdot \ln(2\alpha) +$

$(-(1-3\alpha_T)) \cdot \ln(1-3\alpha) \to \min_\alpha$

ответ: α_T

Что случайно?

θ – не случ-но

θ_T – не случ.но

θ_H – не случ-но

$X_1, \ldots, X_n$ – случ-ны

$\hat\theta(X_1, \ldots, X_n)$ – случ-на

2. инвар-сть оценок Max lik

Винни-Пух $\max_\theta l_B(x|\theta)$ $\hat\theta$

$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$

$\lambda = \frac{1}{E(X_1)}$

$f(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{1}{\alpha} x}$

$\alpha = E(X_1)$

$\alpha = d(\theta)$ [биекция]

Пятачок $\max_\alpha l_P(x|\alpha)$ $\hat\alpha$

Ув: $\hat\alpha = d(\hat\theta)$

Условия регулярности (доп)

RIID $\quad X_1, \dots, X_n$ – незав и один распр

RIdent $\quad$ Если $\theta \neq \theta'$ то f_θ и $f_{\theta'}$ – разные распр-ия

~~RIdent~~

$f(x) = \theta^2 \cdot e^{-\theta^2 x}$ $\quad \to \theta = 5$, $\quad \to \theta' = -5$ $\quad$?

RInternal $\quad \theta_T$ – внутр точка (H) ← все возм θ

RDiff1 $\quad f_\theta(x_i)$ диффер 1 раз по θ при $\forall x$

RSupp $\quad supp(f_\theta(x_i))$ не зависит от θ

$\updownarrow$

Носитель = замыкание мн-ва возм x

Пример 1

$X_i \sim U[a, b]$

$\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

~~RSupp~~

Пример 2

$X_i \sim N(\mu ; \sigma^2)$

$\theta = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$

RSupp !!

RUnique $\quad$ при $\forall x$ решение ур-ия $\ell'(\theta) = 0$ единств-нно

Теорема: Если R.. вып-ны, то $\operatorname{plim}_{n \to \infty} \hat{\theta}_n = \theta_T$

↑ предел по вер-сти

$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_T$

$P_{\theta_T}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ для $\forall \varepsilon > 0$