Привет :)

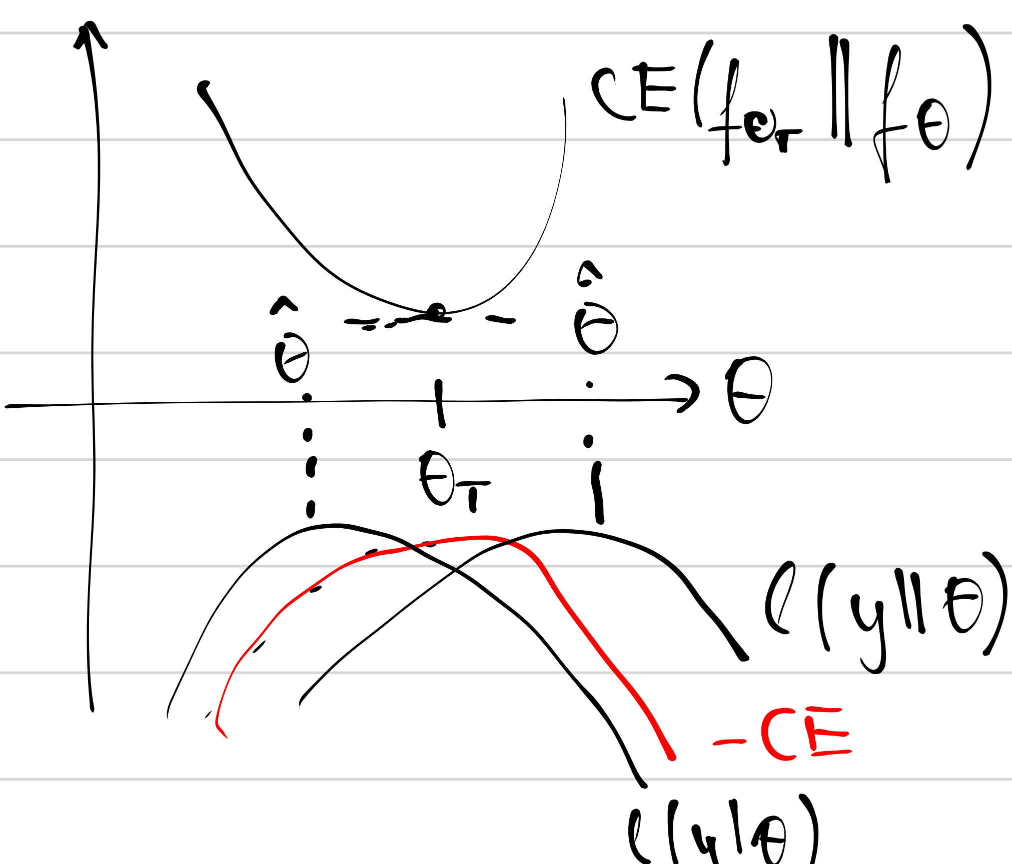
Если [регулярность], то [хорошие св-ва].
↳ pdf

$l(y|\theta) = \ln L(y|\theta)$ – лог ф. правд.

$s(y|\theta) = \frac{\partial l}{\partial \theta}$ s-score function

θ – скаляр $\Rightarrow$ s – скаляр

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix} \Rightarrow s = \begin{pmatrix} \partial l/\partial \theta_1 \\ \vdots \\ \partial l/\partial \theta_p \end{pmatrix}$$



Теор-ма:
Если [регул], то $E_{\theta_T}(s(y|\theta_T)) = 0$

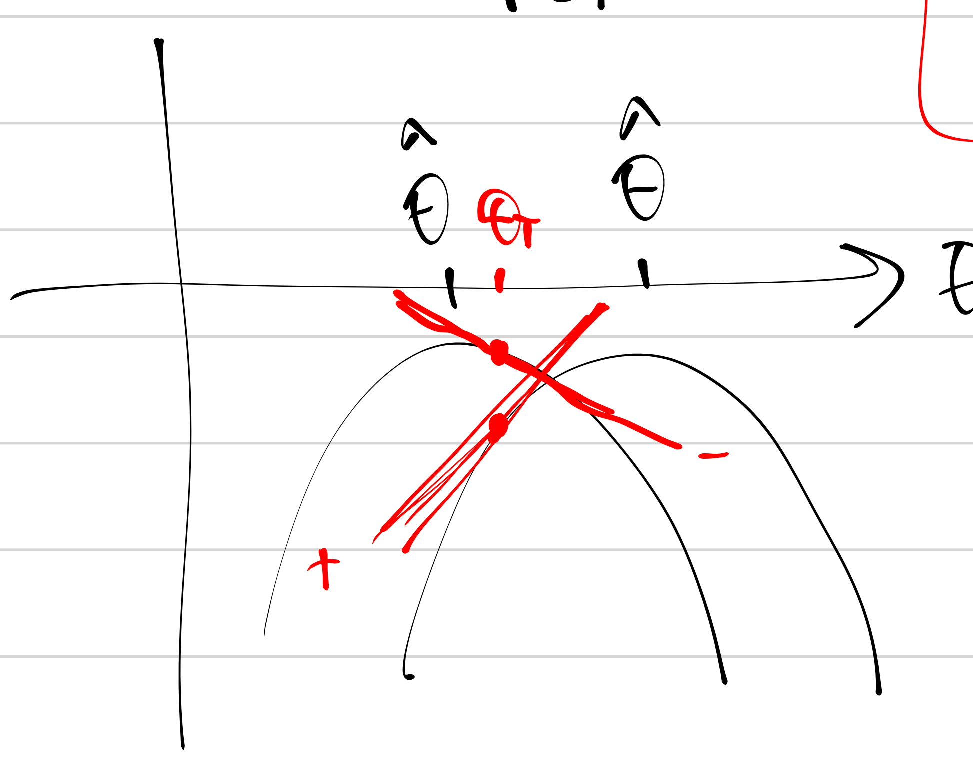
док-во:

θ_T – минимизи $CE(f_{\theta_T} \| f_\theta)$

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{\partial CE(f_{\theta_T} \| \theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta_T} = 0$$

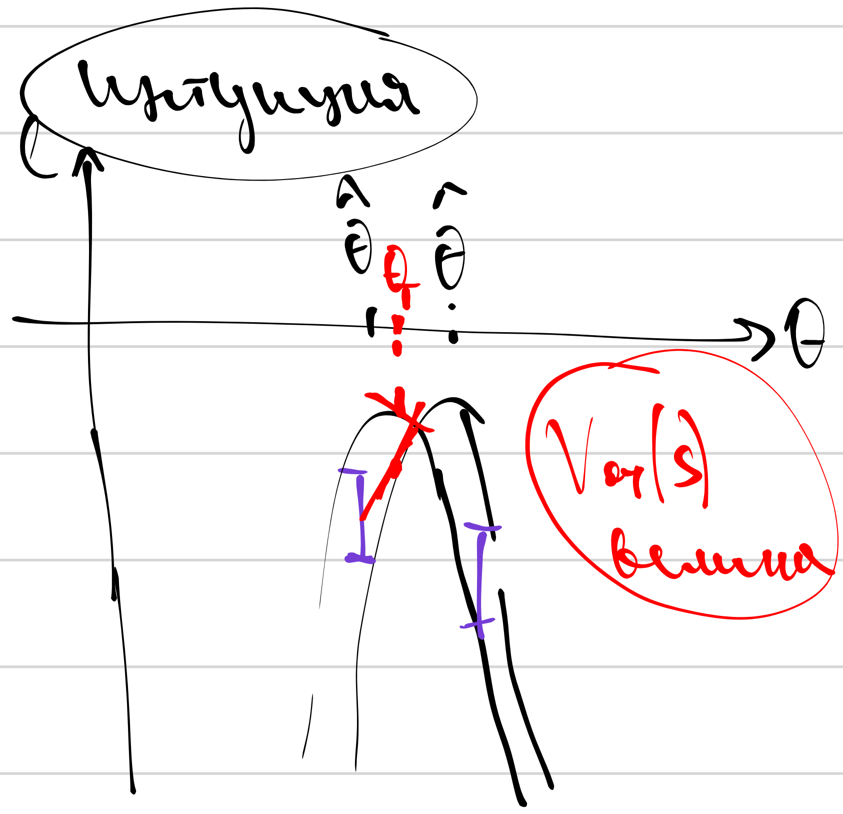
$$\left.\frac{\partial}{\partial \theta} E_{\theta_T}\left(-\ln f(y|\theta)\right)\right|_{\theta_T} = 0 \xrightarrow{[\text{регул}]} \left. E_{\theta_T}\left(-\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)\right|_{\theta_T} = 0 \quad \#$$



$\not\Leftrightarrow E(\hat\theta) = 0$

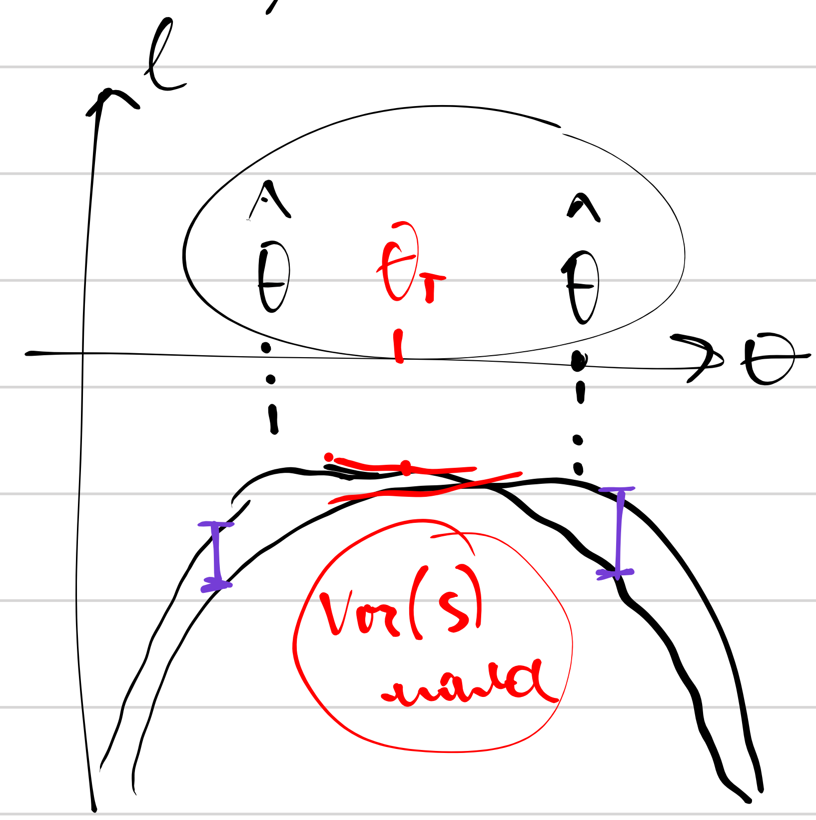
def Информация Фишера. [о неизв-м θ]

$$I_F = Var_T\left(s(y|\theta_T)\right) = Var_T\left(\frac{\partial l(y|\theta)}{\partial \theta_T}\right)$$



крутая

$\hat\theta$ близко к θ_T



пологая

$\hat\theta$ дальше от θ

Теор.
$$I_F = Var\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right) \overset{*}{=} \boxed{E\left(\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^2\right) - \Big(\underbrace{E\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)}_{=0}\Big)^2 = E\left(\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^2\right).}$$

Var - variance дисперсия

E/Var

M/D

$$I_F = -E_{\theta_T}\left(H(y|\theta)\right)$$

$H(y|\theta)$ – м-ца Гессе для $l(y|\theta)$ (м-ца вторых пр-х)

* для вектора
$$I_F = E_{\theta_T}\left[\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right) \cdot \left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^T\right]$$
столб строка.

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix}$$

[док. во] по шаблону

! Нюансы: если θ - вектор, то I_F

$$Var(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} Var\left(\frac{\partial l}{\partial \theta_1}\right) & Cov\left(\frac{\partial l}{\partial \theta_1}, \frac{\partial l}{\partial \theta_2}\right) & \\ -//- & Var\left(\frac{\partial l}{\partial \theta_2}\right) & \\ & & \ddots \end{bmatrix}}_{p}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$I_n^F(\theta_T)$ ← есть зав-ть от n и от θ_T

Теор [нер-во Крамера-Рао]

Если [$\hat{\theta}$ - несм-нная оценка (не обяз прав.)] для θ_T

($E(\hat{\theta}) = \theta_T$) и [регулярность правдоп.]

то [Слишком точных оценок быть не может] слова

$$\boxed{Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I_F}}$$ ← скалярно

$$\Delta = I_F \cdot Var(\hat{\theta}) - I$$ ← вект. θ

полож. полуопр-на. /неотриц. опр-на/

I_F — инф. Фишера

I — identity matrix.

док-во:

$$Corr^2(\hat{\theta}, s) \leq 1$$

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \in [-1; 1] \qquad \rho(X, Y)$$

$$\boxed{\frac{1}{Var(\hat{\theta}) \cdot I_F} \leq 1 \qquad Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I_F}}$$

$$\frac{Cov^2(\hat{\theta}, s)}{Var(\hat{\theta}) \cdot \underbrace{Var(s)}_{= I_F}} \leq 1$$

$$\boxed{E(\hat{\theta}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta} f(y|\theta) \, dy}$$

$$Cov(\hat{\theta}, \underset{\frac{\partial \ell}{\partial \theta}}{s}) = E(\hat{\theta} \cdot s) - \underbrace{E(s)}_{= 0} \cdot E(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} \cdot s) =$$

что тут

Q. случ-е?

A. $y_1 \ldots y_n$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta} \cdot \underset{s}{\frac{\partial \ell}{\partial \theta}} \cdot \underbrace{f(y|\theta_T)}_{\text{ф. плотн}} \, dy =$$

$y \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\ell = \ln f} \; ! \qquad s = \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta} \cdot \frac{\partial f(y|\theta_T)}{\partial \theta_T} \, dy \overset{①}{\underset{\text{регул.}}{=}} \frac{\partial}{\partial \theta_T}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta} \cdot f(y|\theta_T) \, dy\right) \overset{②}{=} \frac{\partial}{\partial \theta_T} E(\hat{\theta}) \overset{③}{=} \frac{\partial \theta_T}{\partial \theta_T} = 1$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad h(y)$$

$$E(h(y)) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) \cdot f(y|\theta)\, dy$$

получим: $\boxed{Cov(\hat{\theta}, s) = \ldots\ldots = 1}$

(1) $Corr^2(\hat{\theta}, s) \le 1$

(2) $\dfrac{Cov^2(\hat{\theta}, s)}{Var(\hat{\theta}) \cdot Var(s)} \le 1$

(3) $\dfrac{1}{Var(\hat{\theta}) \cdot Var(s)} \le 1$

(4) $Var(\hat{\theta}) \ge \dfrac{1}{Var(s)} = \dfrac{1}{I_F}$

(!) Когда у несм-ой оценки нельзя снизить $Var(\hat{\theta})$?

$\boxed{Corr^2(s, \hat{\theta}) = 1}$

Между сл. вел-ми $s(y|\theta)$ и $\hat{\theta}$ есть лин-ая зав-сть (as)

(!) если (регул) то $\boxed{1/I_n^F \to 0}$ $\boxed{\Theta}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Θ - вектор $\quad (I_n^F)^{\frac{1}{2}} \cdot (\hat{\Theta}_{ML} - \Theta) \xrightarrow[n\to\infty]{dist} N(0; I)$

I — ед. матр.

Θ - скаляр $\quad \sqrt{I_n^F} \cdot (\hat{\Theta}_{ML} - \Theta) \xrightarrow[n\to\infty]{dist} N(0; 1)$

$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_p \end{pmatrix}$ $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

p- фикс $\quad n \to \infty$

$\hat{\Theta}_{ML}$ - асимптотически норм-ые

$\hat{\Theta}_{ML}$ - асимпт несмещ-ые

$\hat{\Theta}_{ML}$ - асимпт эффек-ые

$$\frac{\hat{\Theta}_{ML} - \Theta}{\sqrt{1/I_n^F}} \xrightarrow[n\to\infty]{dist} N(0;1)$$

$$\boxed{\frac{Var(\hat{\Theta}_n^{ML})}{1/I_n^F} \to 1}$$

т. Кр-ра - Рао:

$$\sqrt{Var(\hat{\Theta}_{unb})} \geq \sqrt{1/I_n^F}$$

! к мод. неслн

эффективность $\quad \hat{\Theta}_A, \hat{\Theta}_B, \hat{\Theta}$

def

$\hat{\Theta}_{best}$ эффек-ая среди множ-ва $\{\hat{\Theta}_A, \hat{\Theta}_B \ldots\}$

$$E\left[(\hat{\Theta}_{best} - \Theta)^2\right] \leq E\left[(\hat{\Theta} - \Theta)^2\right]$$

для любой $\hat{\Theta}$ из заданного класса.

т. Пифагора:

$$E\left[(\hat{\Theta} - \Theta)^2\right] = Var(\hat{\Theta}) + \underbrace{\left(E(\hat{\Theta}) - \Theta\right)^2}_{\text{если } = 0}$$

Теорема (+) Если (регул.)

$I_n^F(\theta_T)$ зависит от неизв. θ_T ?!

тут раньше была I^F

$$\sqrt{\hat I_n^F}\cdot\left(\hat\theta_n^{ML}-\theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{dist} N(0;1)$$

Как оценить I^F?

$$I^F = -E\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial\theta^2}\right)$$

(v) способ А: $\hat I^F = -\frac{\partial^2\ell}{\partial\theta^2}\Big|_{\hat\theta_{ML}}$

способ Б: $\hat I^F = I_n^F(\hat\theta)$

Практика

Предп. $f(y|\theta)$

$$\frac{\partial^2\ell(y|\theta)}{\partial\theta^2}\Big|_{\hat\theta_n^{ML}}$$

Шаг 1. $\hat\theta_{ML}$ — точечная

Шаг 2. $\hat I_F = -\frac{\partial^2\ell}{\partial\theta^2}\Big|_{\hat\theta_{ML}}$

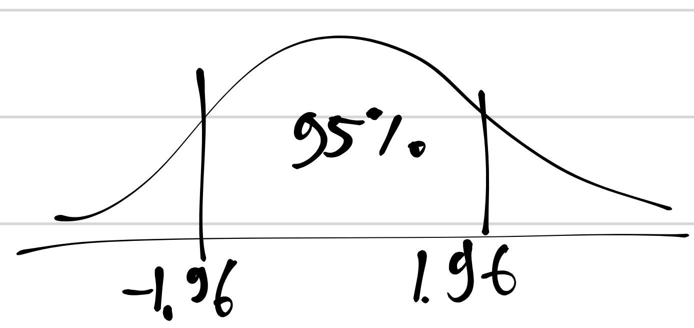
Шаг 3. $\widehat{Var}(\hat\theta_{ML}) = 1/\hat I_F$

$se(\hat\theta_{ML}) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat\theta_{ML})}$

$se(\hat{☺})$ - оценка для $\sqrt{Var(\hat{☺})}$

se - standard error

$$\frac{\hat\theta-\theta}{se(\hat\theta)} \xrightarrow{dist} N(0;1)$$



CI: Шаг 4.

$$-1.96 \le \frac{\hat\theta-\theta}{se(\hat\theta)} \le 1.96$$

$$\left[\hat\theta - 1.96\cdot se(\hat\theta) \le \theta \le \hat\theta + 1.96\cdot se(\hat\theta)\right]$$

классич.

bootstrap поправит -1.96 и 1.96