Эндогенность.

$$\boxed{\operatorname{cov}(x_{ij}, u_i) \neq 0}$$

ТГМ для стохаст. регрессоров

Если:

"модель прав-о спец-а"
$$\begin{cases} 1.\ y = X\beta + u \\ 2.\ \beta - \text{const} \\ 3.\ \hat{y} = X\hat{\beta},\ \hat{\beta} - \text{при пом. МНК} \end{cases}$$

4. $\mathbb{P}\{$в м-це X есть ЛЗ столбцы$\} = 0$
5. $\mathbb{E}(u \mid X) = 0$
   $Var(u \mid X) = \sigma^2 \cdot I$,

то

1. $\hat{\beta}$ сущ-т и единств. с вер-ю 1.
2. $\hat{\beta}$ лин. по y; $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$
3. $\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid X) = \beta$
4. $\hat{\beta}$ Эф-н в классе лин. по y, усл. несм. оц-к.

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\beta} = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} (X^T X)^{-1} X^T y = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + u) =$$

$$= \beta + \operatorname*{plim}_{n\to\infty} (X^T X)^{-1} \frac{X^T u}{n} \cdot n = \beta + \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left(\frac{X^T X}{n}\right)^{-1} \frac{X^T u}{n} =$$

ЗБЧ $\mathbb{E}(X^T u) = 0$

Tower property: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(A \mid B)) = \mathbb{E}(A)$

$\mathbb{E}(u_i \mid X) = 0 \Rightarrow$

$$\mathbb{E}(u_i) = \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(u_i \mid X)}_{=0}) = 0$$

$$\mathbb{E}(u_i x_i) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(u_i x_i \mid X)) = \mathbb{E}(x_i\, \overbrace{\mathbb{E}(u_i \mid X)}^{0}) = 0$$

$= \beta$

$$\mathrm{cov}(x_i, u_i) = \underset{0}{\mathbb{E}(x_i u_i)} - \underset{0}{\mathbb{E}(x_i)}\,\mathbb{E}(u_i) = 0$$

Если $\mathbb{E}(u_i \mid X) \neq 0 \Rightarrow \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat\beta \neq \beta$

№2 Причины эндогенности:

1) Пропущ. перем.
2) Ошибки измер-я

$\Big\}$ наруш. предп. 1-3 ТГМ

3) ...
4) ...
5) $\mathbb{E}(u_i \mid X) \neq 0$ по какой-то прич.
6) ...
7) ...

(a) $\boxed{y_i = \beta x_i + u_i}$

За кадром: $\tilde y_i = \beta_0 + \beta_1 \tilde x_i + \tilde u_i$ — среднее из к. пер.

Средние всех перем. равны 0 (подразумевается)

ТГМ, кроме $\mathbb{E}(u_i \mid X) \neq 0$

$$\hat y_i = \hat\beta \cdot x_i \qquad \hat\beta = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$$

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat\beta = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} =$$

$$\textcircled{=}\ \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{\sum_i x_i(\beta x_i + u_i)}{\sum x_i^2} = \beta + \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sum_i x_i u_i / n}^{cov(x_i,u_i)}}{\underbrace{\sum_i x_i^2 / n}_{Var(x_i)}} =$$

$$= \beta + \frac{cov(x_i, u_i)^{\neq 0}}{Var(x_i)}$$

(б) Пропущ. перем.

$y_i = \beta x_i + \gamma z_i + u_i$

$\boxed{\hat{y}_i = \hat{\beta} x_i}$ ТГМ $\textcircled{v}$

1) Сложно/невозм. включить

2) Истин. модель:

$y_i = \beta x_i + \gamma z_i + u_i$

(не знаем), а думаем

$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\beta} = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} =$$

$$= \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{\sum_i x_i(\beta x_i + \gamma z_i + u_i)}{\sum_i x_i^2} =$$

$$= \beta + \underbrace{\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{\sum_i \gamma x_i z_i}{\sum_i x_i^2}}_{cov(x_i, z_i) \neq 0 \Rightarrow \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\beta} \neq \beta \Rightarrow \text{эндог.}} + \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{\sum_i x_i u_i}{\sum_i x_i^2}^{\,//\,0}$$

(в) Ошибки измерения

$\longrightarrow y_i = \beta x_i + u_i$

$x_i^* = x_i + \alpha + v_i$

α – const

v_i – сл. вел.

$\boxed{\hat{y}_i = x_i^* \hat{\beta}}$

$E(u_i) = E(v_i) = 0$

$$\begin{cases} cov(x_i, v_i) = 0 \\ cov(x_i, u_i) = 0 \\ cov(u_i, v_i) = 0 \\ cov(u_i, u_j) = cov(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i, j \end{cases}$$

$$\underset{n\to\infty}{plim}\, \hat{\beta} = \underset{n\to\infty}{plim} \frac{\sum_i x_i^* y_i}{\sum_i (x_i^*)^2} =$$

$\sum_i x_i^* y_i \to cov(x_i^*, y_i)$

$\sum_i (x_i^*)^2 \to Var(x_i^*)$

$$= \frac{cov(x_i + \alpha + v_i,\ \beta x_i + u_i)}{Var(x_i + \alpha + v_i)} =$$

$$= \beta \underbrace{\frac{Var(x_i)}{Var(x_i) + Var(v_i)}}_{< 1} \neq \beta$$

α не ок. вл. на смещ-е

№3 $Z_1, \dots Z_m$ – инструм-е (инструм-ы):

1. Релевантность.

$$\mathbb{E}(x_i, z_{ij}) \neq 0 \sim cov(x_i, z_{ij}) \neq 0 \sim \underset{n\to\infty}{\text{plim}}\ z_j^T x \neq 0$$

2. Валидность

$$\mathbb{E}(u_i, z_{ij}) = 0 \sim cov(u_i, z_{ij}) = 0 \sim \underset{n\to\infty}{\text{plim}}\ z_j^T u = 0$$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dd, leftrightarrow, "\not"] \\ X \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ & u \end{tikzcd}$$

Если $Z_1 .. Z_m$ есть: 2SLS

Шаг 1: $X_j = Z\gamma + u$

$$\hat{\gamma} = (Z^T Z)^{-1} Z^T X_j$$

$$\hat{X}_j = Z\hat{\gamma}$$

собираем $\hat{X}$

Шаг 2: $y = \hat{X}\beta + \varepsilon$

$$\hat{\beta}_{2sls} = \underline{(\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \hat{X}^T y}$$

$$\hat{X} = Z (Z^T Z)^{-1} Z^T X$$

$\underset{n\times k}{X}$ $\underset{n\times m}{Z}$

2sls: $m \geqslant k$

IV: $m = k$

$$\hat{\beta}_{IV} = (Z^T X)^{-1} Z^T y$$

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\beta}_{IV} = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} (Z^T X)^{-1} Z^T y = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} (Z^T X)^{-1} Z^T (X\beta + \varepsilon) =$$

$$= \beta + \operatorname*{plim}_{n\to\infty} (Z^T X)^{-1} \underbrace{Z^T u}_{\operatorname{plim} \cdot = 0} = \beta$$

<u>Тесты.</u>

1. Идентификация: тест Хаусмана.

$$\begin{cases} H_0: \hat{\beta}_{мнк} \text{ и } \hat{\beta}_{IV} \text{ сост-ы} \\ H_1: \hat{\beta}_{IV} \text{ сост, а } \hat{\beta}_{мнк} \text{ не сост.} \end{cases}$$

$$(\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}_{мнк})^T \left(\widehat{Var}(\hat{\beta}_{IV}) - \widehat{Var}(\hat{\beta}_{мнк}) \right)^{-1} (\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}_{мнк})$$

$\sim \chi^2_k$

k ← число регрессоров

2. Релев-ь

$$X_j = Z\gamma + u$$

$$\begin{cases} H_0: \gamma_1 = \ldots = \gamma_m \\ H_1: \gamma_1^2 + \ldots + \gamma_m^2 > 0 \end{cases} \quad \text{F-тест}$$

3. Валидность $(m>k)$

H_0: $\underset{n\times m}{Z}$ - валидные

H_1: $\underset{n\times m}{Z}$ - не валидные

$J \sim \chi^2_{m-k}$

Гомоск.: Сарган $\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\hat{u}^T Z (Z^T Z)^{-1} Z^T \hat{u}$

Гетероск: Хансен $\hat{u}^T Z (Z^T \hat{\Omega} Z)^{-1} Z^T \hat{u}$

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{u}_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$