Привет !! 2021-10-15

1) наивный бутстрэп + регрессия
2) бутстрэп t-статистики
3) про нормальное расп-ие и проекции

Постановка 1.

Линейная модель + Метод наименьших Квадратов

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad X = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}}_{k} \updownarrow n$$

традиционно

$$X = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & w_1 \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & & \\ \vdots & & \\ \vdots & z_n & w_n \end{bmatrix} \; [n \times k]$$

$$\hat{y} = X \cdot \hat{\beta} \qquad \hat{\beta} \; [k \times 1]$$

$$\boxed{\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 \cdot 1 + \hat{\beta}_2 \cdot z_i + \hat{\beta}_3 \cdot w_i}$$

Как оценить $\hat{\beta}$?

$\hat{E}(y_i | z_i, w_i)$ • → $\boxed{\text{МНК}}$ $\quad \min\limits_{\hat{\beta}} \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad \hat{\beta}_{OLS}$

OLS = ordinary least squares = МНК

$\widehat{Med}(y_i | z_i, w_i)$ • медианная регрессия $\quad \min\limits_{\hat{\beta}} \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i| \quad \hat{\beta}_M$

$\widehat{Quant}_p(y_i | z_i, w_i)$ • квантильная регрессия

$$\min_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{n} \Big(p \cdot |y_i - \hat{y}_i| \cdot I(y_i \geq \hat{y}_i) + (1-p) \cdot |y_i - \hat{y}_i| \cdot I(y_i < \hat{y}_i) \Big)$$

Факт из теории вер-тей

Утв.

y — одна с.в-на (не вектор)

$$\min_{\alpha} E\left[(y-\alpha)^2\right] \Rightarrow \alpha^* = E(y)$$

[робаст y-неупр] $$\min_{\alpha} E\left(|y-\alpha|\right) \Rightarrow \alpha^* = Med(y)$$

$0<p<1$

[робаст y неупр] $$\min_{\alpha} E\left[p|y-\alpha|\cdot I(y\geq\alpha) + (1-p)\cdot|y-\alpha|\cdot I(y<\alpha)\right]$$

$$\alpha^* = quantile_p(y)$$

Шут: $p=0.9999$ $\alpha^* = max(y)$

$p=0.0001$ $\alpha^* = min(y)$

Стат

$$\hat\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \widehat{Med}(y_i|w_i,z_i) = 2 + 1\cdot w_i + 3z_i$$

$\min_{\hat\beta} Q(\hat\beta)$ $\qquad \hat\beta_1 \quad \hat\beta_2 \quad \hat\beta_3$

$\boxed{\text{точность оценивания } \hat\beta ?}$

хотим: $\boxed{CI \ 95\% \text{ для } \beta}$

Самый простой способ — наивный бутстрэп (парный)

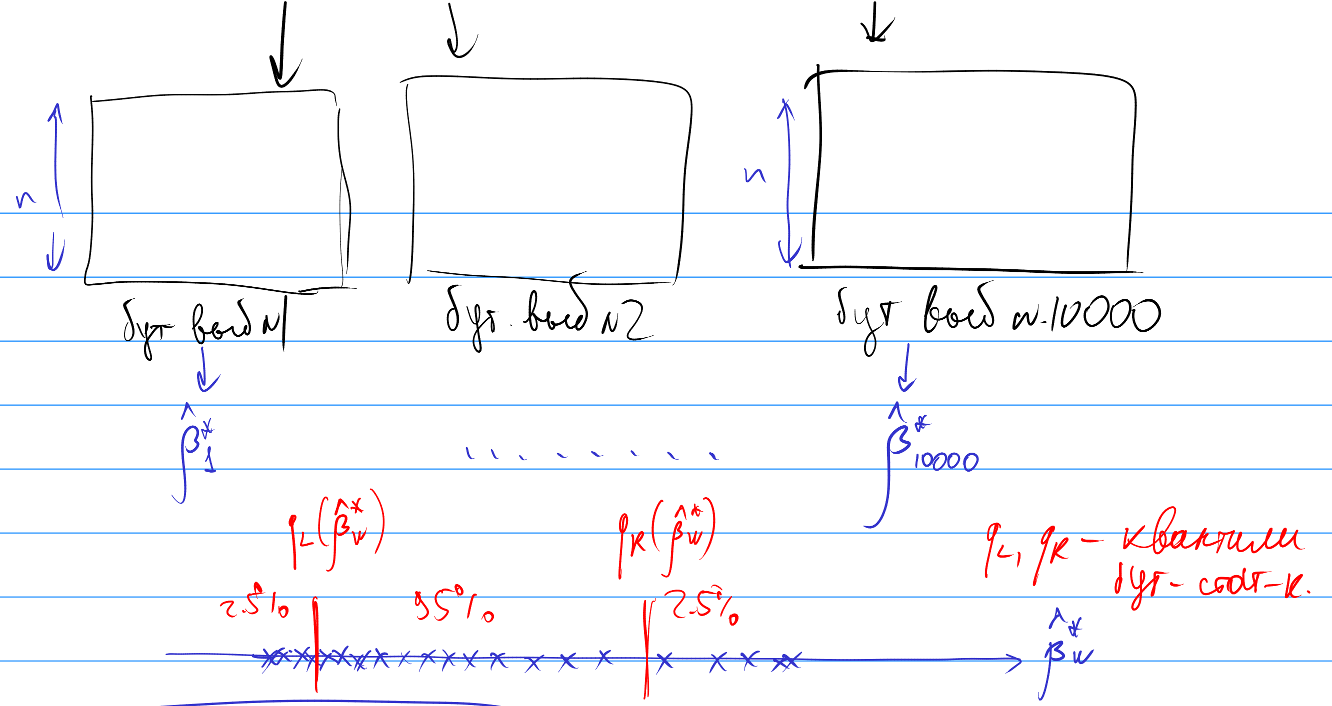
	y	X		
1	y_1	1	w_1	z_1
2	⋮			
⋮	y			
n	y_n	1	w_n	z_n

$\longrightarrow \hat\beta_{Med}$ $\qquad \min_{\hat\beta} \sum |y_i - \hat y_i|$

$$\hat y_i = \hat\beta_1 + \hat\beta_2\cdot w_i + \hat\beta_3 z_i$$

каждая бут-выборка: из исходных n набл.-ий выбираем n (с возможностью повт. выбора) случ-но, равновер-но.

...



q_L, q_R — квантили бут-стат-к.

$\boxed{\text{CI } \beta_w \text{ ? } 95\%}$

CI = confidence interval

$$\beta_w \in [q_L(\hat\beta^*_w); q_R(\hat\beta^*_w)]$$

Теорема „Бутстрэп (даже наивный) работает"

если 1) набл - случ-ая выборка

2) $Med(y_i|X) = x_i^T \cdot \beta$

3) $(y_i|X)$ ~ непрер-ые

y | X

то: при $n \to \infty$

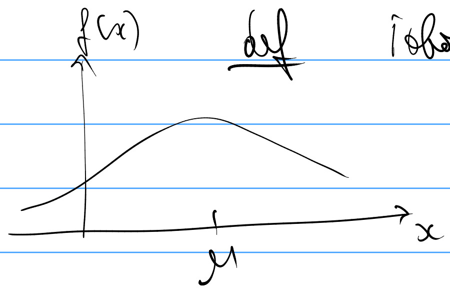
$$P(\beta_w \in [q_L(\hat\beta^*_w); q_R(\hat\beta^*_w)]) \to 1-\alpha$$

$row_i X = x_i^T$

Хотим сх-сти побыстрее!

МНК при идеальных обстоятельствах.

Трад рассказ про N:



def Говорят, что $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ распр-не, если

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

откуда эта штуковина???
π? e?

Правильный рассказ про N

Вар-т 1

$35°$, $36°$, $37°$, $48°$

$$\hat{\mu} = \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$$

„Усреднители"

удаление набл.
надо брать
с меньшим весом

$$\hat{\mu} = ?35° + ?36° + ?37° + ?48°$$

Гаусс

1) истинное μ
2) y_i — нез. сл. величины сим-но распр отн μ
3) „усреднители правы"

3) имеющиеся данные наиболее вероятны (плотность) при $\mu = \bar{y}$

диф. ур

док-ть

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Вар-т 2. Аксиоматика Хершела-Максвелла.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

в орт. системе коорд-т скорости случайно движ-ой частицы.

$R \cdot x$ $\quad R^T R = I$

Rot Inv. Закон распр-ия x не изм-ся, если если систему коорд-т повернуть.

загадка π

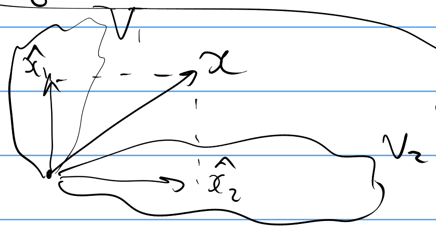
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}$$

x и $\tilde{x}$ — скорости в разных (орт-х) сист. коорд.

$$P(x_1 \le t_1, x_2 \le t_2, x_3 \le t_3) = P(\tilde{x}_1 \le t_1, \tilde{x}_2 \le t_2, \tilde{x}_3 \le t_3)$$

Proj Ind независимость орт-х проекций $\mathbb{R}^n$

чаи с горчат



если $V_1 \perp V_2$ и $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ — это проекции x на V_1 и V_2, то $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ незав.

[X-M]

Определение: Мы говорим, что $x \sim N(0; \sigma^2 \cdot I)$, если x удовл-т [Rot Inv] и [Proj Ind] выполнена.

Теорема Опр-ие X-M и классическое (с плотностью) эквивалентны.

гораздо сложн → [при доп. предп-ие, f - ф-ция плотности существует].

→ [для $n=2$]

$$f(x_1, x_2) \overset{[Proj]}{=} f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \overset{[Rot]}{=} f(x_1) \cdot f(x_2) \quad \forall x_1, x_2$$

$$f(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_2$$

[Rot] $f(x_1,x_2)$ м. зависеть только от $x_1^2+x_2^2$

[Rot] $f(x_1)$ м. зависеть только от x_1^2

$$f(x_1,x_2) = \ell(x_1^2+x_2^2)$$
$$f(x_1) = r(x_1^2)$$

$$\boxed{\ell(x_1^2+x_2^2) = r(x_1^2)\cdot r(x_2^2)} \quad \forall x_1, x_2$$

$$\begin{cases} \ell(a+b) = r(a)\cdot r(b) \\ \ell'(a+b) = r'(a)\cdot r(b) \end{cases}$$

$a = x_1^2$

$b = x_2^2$

$\forall a, b$

$a = 0$

$$\begin{cases} \ell(b) = r(0)\cdot r(b) \\ \ell'(b) = r'(0)\cdot r(b) \end{cases}$$

$$\ell'(b) = \ell(b)\cdot\frac{r'(0)}{r(0)} \quad \forall b$$

const

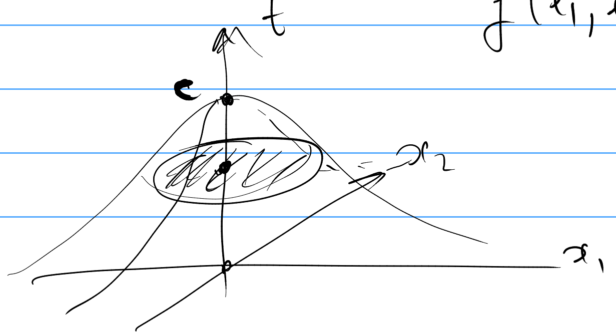
$$\boxed{\ell(b) = c\cdot\exp(kb)}$$

$$f(x_1,x_2) = \ell(x_1^2+x_2^2) = c\cdot\exp\left(k\cdot(x_1^2+x_2^2)\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1 \Rightarrow k<0$$

$$k = -\frac{1}{2\sigma^2}$$

$$f(x_1,x_2) = c\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2+x_2^2)\right)$$



$$\int_0^\infty \pi\cdot r^2(t)\,dt = 1$$

$$t = c \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2+x_2^2)\right) \qquad x_1^2+x_2^2 = r^2(-1)$$

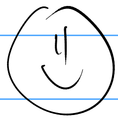
$$\ln t = \ln c - \frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{(x_1^2+x_2^2)}$$

$$x_1^2+x_2^2 = (\ln c - \ln t)\cdot 2\sigma^2$$

$$\int_0^c \pi(\ln c - \ln t)\cdot 2\sigma^2 \, dt = 1$$

$$\hookrightarrow c = \frac{1}{2\pi\sigma^2}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2+x_2^2)\right)$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}\right)$$