Привет !! 24 сент

→ LR + LM + W

→ EM алгоритм (начать)

MaxLik: $\hat{\theta}$, $se(\hat{\theta}) = \sqrt{\hat{Var}(\hat{\theta})}$ $[\hat{\theta}_L ; \hat{\theta}_R]$

Цель:

$\theta\,[p \times 1]$ $\qquad \theta = \begin{pmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{pmatrix}$

$\theta_a\,[p_a \times 1]$

$H_0: \theta_a = 0$

H_A: хотя бы одно рав-во нар-но.

$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ 1-\sum p_i \end{pmatrix}$ $\qquad H_0: \begin{cases} p_1 = p_2 \\ p_3 = p_4 \end{cases}$

$\theta_1 = p_1 - p_2$

$\theta_2 = p_3 - p_4$

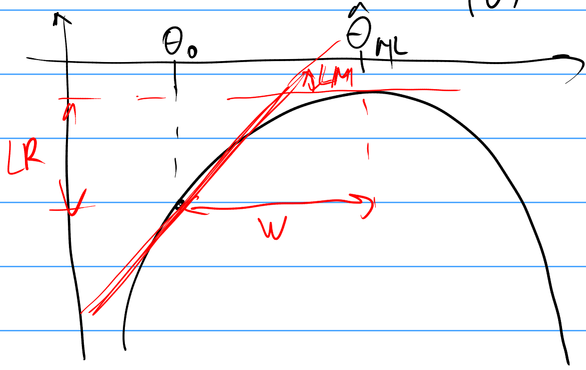
⋮

$H_0: \begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{идея}}$

„Похожи ли эксперименты на гипотезу"?

$l(\theta)$



① $(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0)^2$

θ

W — правильно

масштабирует $(\theta_{ML} - \theta_0)^2$

если $W > \chi^2_{crit}$, то H_0 отвергается.

② LR (likelihood ratio) правильно масштабирует $l(\hat{\theta}) - l(\theta_0)$ и тоже сравнивает с χ^2_{crit}

если $LR \geq \chi^2_{crit}$, то H_0 отверг.

③ LM (Lagrange multiplier)

Скалярный случай

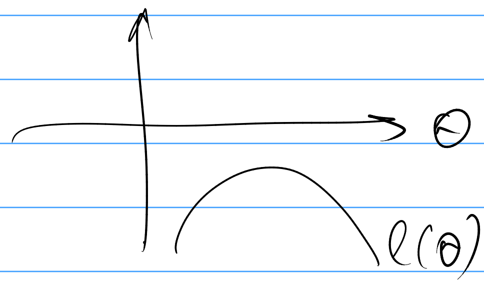
$\hat{\theta}_{ML}$ (считаем по данным)

θ_T (наст., не знаем)

θ_0 (тестируемое) известно!

θ — произвольное

H_0 $\theta_T = 12$ ← θ_0



При выполнении условий регулярности и верной $H_0: \theta_T = \theta_0$ ($H_A: \theta_T \neq \theta_0$)

скалярный

def $LR = 2\cdot\left(l(\hat{\theta}) - l(\theta_0)\right) \xrightarrow{dist} \chi^2_1$

Wald → def $W = \dfrac{(\hat{\theta} - \theta_0)^2}{\hat{Var}(\hat{\theta})} = \hat{I}_F \cdot (\hat{\theta} - \theta_0)^2 \xrightarrow{dist} \chi^2_1$

$\hat{Var}(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{\hat{I}_F}$

$\hat{I}_F = -H_l(\hat{\theta})$

$\hat{I}_F = -E(H_l)\Big|_{\hat{\theta}}$

$l'(\theta)$

def $LM = \dfrac{(l'(\theta_0) - 0)^2}{\hat{Var}(l'(\theta_0))} = \dfrac{(l'(\theta_0))^2}{I_F(\theta_0)} \xrightarrow{dist} \chi^2_1$

! не надо считать $\hat{\theta}$

W, LM: $I_F = Var(l')$

$\dfrac{(M - E(M))^2}{\hat{Var}(M)}$

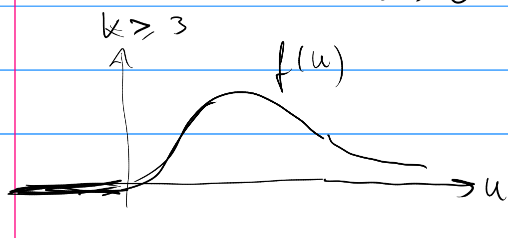
W: $M = \hat{\theta}$ $\hat{Var}(M) = \dfrac{1}{I_F}$

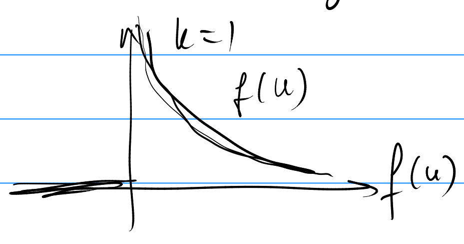
LM: $M = l'(\theta_0)$ $\hat{Var}(M) = I_F(\theta_0)$

напоминалка про χ^2_k (техническое)

def Если случ. величина $S = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_k^2$, где $Z_i \sim N(0,1)$ и независимы, то закон распр-ия сл. вел S наз-т χ^2-м с k степенями свободы.

$S \geq 0$





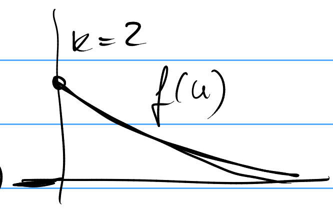


Схема док-ва:

① $W \xrightarrow{dist} \chi^2$

② LR, LM, W в ряд Тейлора

$$\text{plim} \frac{LR}{LM} = 1 \quad \text{plim} \frac{LR}{W} = 1$$

Векторный случай

$$\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \theta_a \ [p_a \text{ пар-в}] \\ \leftarrow \theta_b \ [p_b \text{ пар-в}] \end{matrix} \qquad \theta = \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{pmatrix}$$

истинное

предпол. в гипотезе (чаще 0)

$H_0: \theta_A^T = \theta_A^0$

H_A: хотя бы одно рав-во нарушено.

→ неогр. экстремум $\max_{\theta} \ell(\theta)$ $\quad \hat{\theta}_{UR} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_A \\ \hat{\theta}_B \end{pmatrix}$ (unrestricted)

→ огранич. экстремум $\max_{\theta_B} \ell\left(\begin{pmatrix} \theta_A^0 \\ \theta_B \end{pmatrix}\right)$ $\quad \hat{\theta}_R = \begin{pmatrix} \theta_A^0 \\ \hat{\theta}_B^R \end{pmatrix}$ (restricted)

$\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ $\quad H_0: \begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \end{cases}$

$\max_{\theta} \ell(\theta)$ $\quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \\ \hat{d} \end{pmatrix}$

$\max_{\substack{a=5 \\ b=7}} \ell(\theta)$ $\quad \hat{\theta}_R = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ \hat{c}_R \\ \hat{d}_R \end{pmatrix}$

неогр огранич

$$LR = 2 \cdot \left(\ell(\hat{\theta}) - \ell(\hat{\theta}_R)\right) \xrightarrow{dist} \chi^2_{pa}$$

$2 \cdot (\ell(\hat{\theta}) - \ell(\theta_0))$

число степеней свободы равно числу ур-ий в H_0

дост-во LR стат: инвариантна к перепараметризации

скаляр:

$W = \hat{I}_F \cdot (\hat{\theta} - \theta_0)^2$

$W = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)^2}{\widehat{Var}(\hat{\theta})}$

$$W = (\hat{\theta}_A - \theta_A^0)^T \cdot \left[\widehat{Var}(\hat{\theta}_A)\right]^{-1} \cdot (\hat{\theta}_A - \theta_A^0) \xrightarrow{dist} \chi^2_{pa}$$

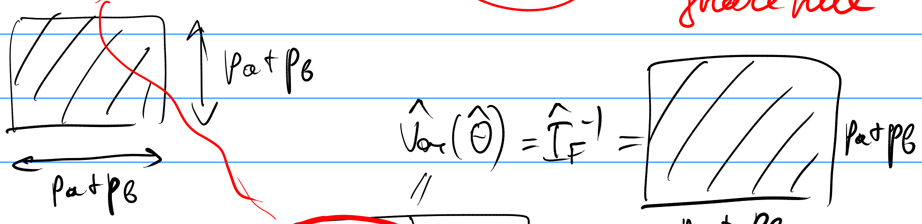
$(\ldots\ldots) \cdot [\ ] \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

неогр

гипот. предп значение

неогр оценка I_F:

$$\hat{I}_F = -H(\hat{\theta})$$



$p_a + p_b$

$p_a + p_b$

$$\widehat{Var}(\hat{\theta}) = \hat{I}_F^{-1} =$$

$p_a + p_b$

$p_a + p_b$

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_A \\ \hat{\theta}_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{Var}(\hat{\theta}_A) & \widehat{Cov}(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B) \\ & \widehat{Var}(\hat{\theta}_B) \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{grad} \ell = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ell}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta_p} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p_a \\ \updownarrow p_B \end{matrix}$$

$$H_0: \theta_A^T = \theta_A^0$$

$$s(\hat\theta) = \operatorname{grad} \ell(\hat\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s(\hat\theta_R) = \operatorname{grad} \ell(\hat\theta_R) = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$LM = \frac{(\ell'(\theta_0))^2}{I_F(\theta_0)}$$

$$LM = \left(s_A(\hat\theta_R)\right)^T \cdot \left(I_F^A(\hat\theta_R)\right)^{-1} \cdot s_A(\hat\theta_R)$$

$$s(\hat\theta_R) = \begin{pmatrix} s_A(\hat\theta_R) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$LM \xrightarrow{dist} \chi^2_{p_a}$$

$$I_F(\hat\theta_R) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} I_F^A(\hat\theta_R) & \\ & \end{pmatrix} \\ \overset{p_A}{\longleftrightarrow} \quad \overset{p_B}{\longleftrightarrow} \end{array} \begin{matrix} \updownarrow p_A \\ \updownarrow p_B \end{matrix}$$

$$\hat\theta_R = 42 \qquad H_0: \theta_1 = 42$$

Упр.

	A	B	C
кол	40	50	30

$$H_0: p_A = 0{,}1$$
$$H_A: p_A \neq 0{,}1$$

$$p = \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \end{pmatrix}$$

$$p_C = 1 - p_A - p_B$$

(набл. независимы)

$$\ell(y|p) = \ln P(y_A = 40, y_B = 50 \mid p) = \ln\left(p_A^{40} \cdot p_B^{50} \cdot (1 - p_A - p_B)^{30} \cdot \frac{120!}{40!\,50!\,30!}\right)$$

неогр. задача $\hat p = \begin{pmatrix} \frac{40}{120} \\ \frac{50}{120} \end{pmatrix}$

огран. задача $\hat p_R = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ \ \end{pmatrix}$

огранич. правд.

$$\ell = \ln\left(\text{const}\,(0{,}1)^{40} \cdot p_B^{50} \cdot (0{,}9 - p_B)^{30}\right) = \boxed{\text{const} + 50 \ln p_B + 30 \ln(0{,}9 - p_B)}$$

$$\ell'_{p_B} = \frac{50}{p_B} + \frac{30}{0{,}9 - p_B}\cdot(-1)$$

$$\frac{5}{\hat{p}_B^R} = \frac{3}{0{,}9 - \hat{p}_B^R}$$

$$4{,}5 - 5\hat{p}_B^R = 3\hat{p}_B^R \qquad \hat{p}_B^R = \frac{9}{16}$$

$$\hat{p}_R = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 9/16 \end{pmatrix}$$

W

1) $\hat{I}_F = -H(\hat{p})$ $[2\times2]$

2) $\hat{Var}(\hat{p}) = (\hat{I}_F)^{-1} =$

3) $\hat{Var}(\hat{p}_A)$ выругания

нужно в W

LM

1) $\hat{I}_F^R = -H(\hat{p}^R)$ $[2\times2]$

2) $\hat{I}_F^{A,R} =$

в формулу LM стат