L8

Привет!! 2021-10-29

$\boxed{u \sim [\text{Rot}]\ [\text{Proj}]}$ $\boxed{u \sim N(0;\ \sigma^2 \cdot I)}$

вектор ожид. ков. м-ца

---

1) χ^2, t, F

2) CI в идеальных в регрессии → бутстрэп t-стат

наивн бутстрэп

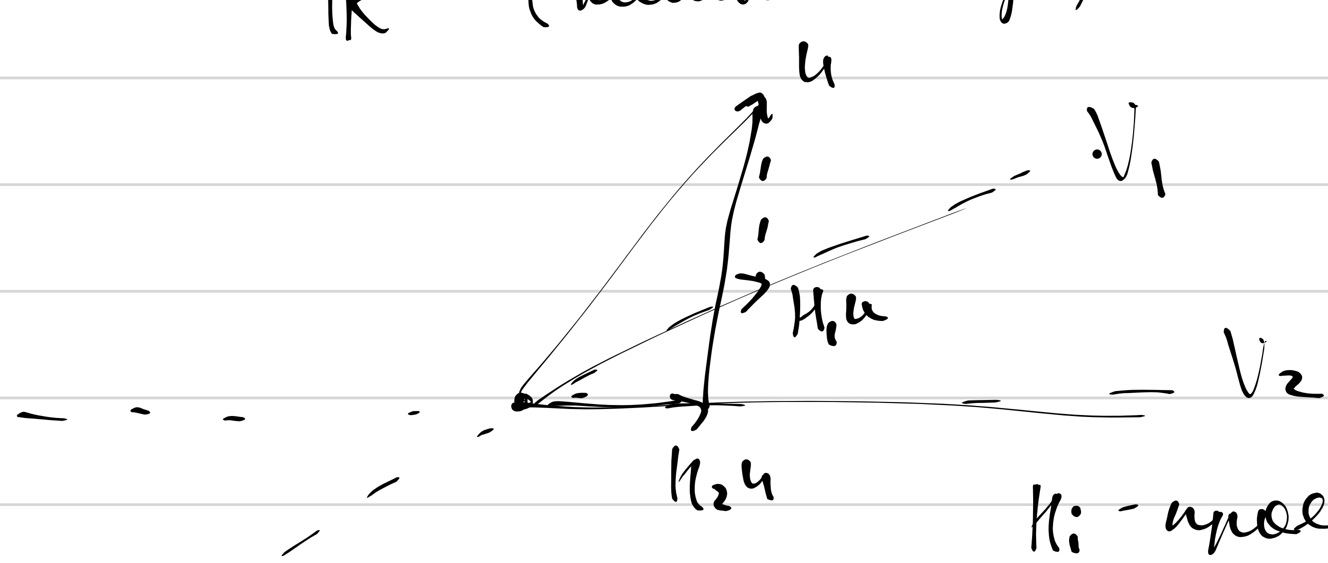
ослабляя идеал усл.

Всем сил!

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

1. Rot. R - м-ца поворота, $R \cdot u \sim u$
2. Proj незав орт-х проекций

$\mathbb{R}^n$ (камбала-style)



$\mathbb{R}^n$

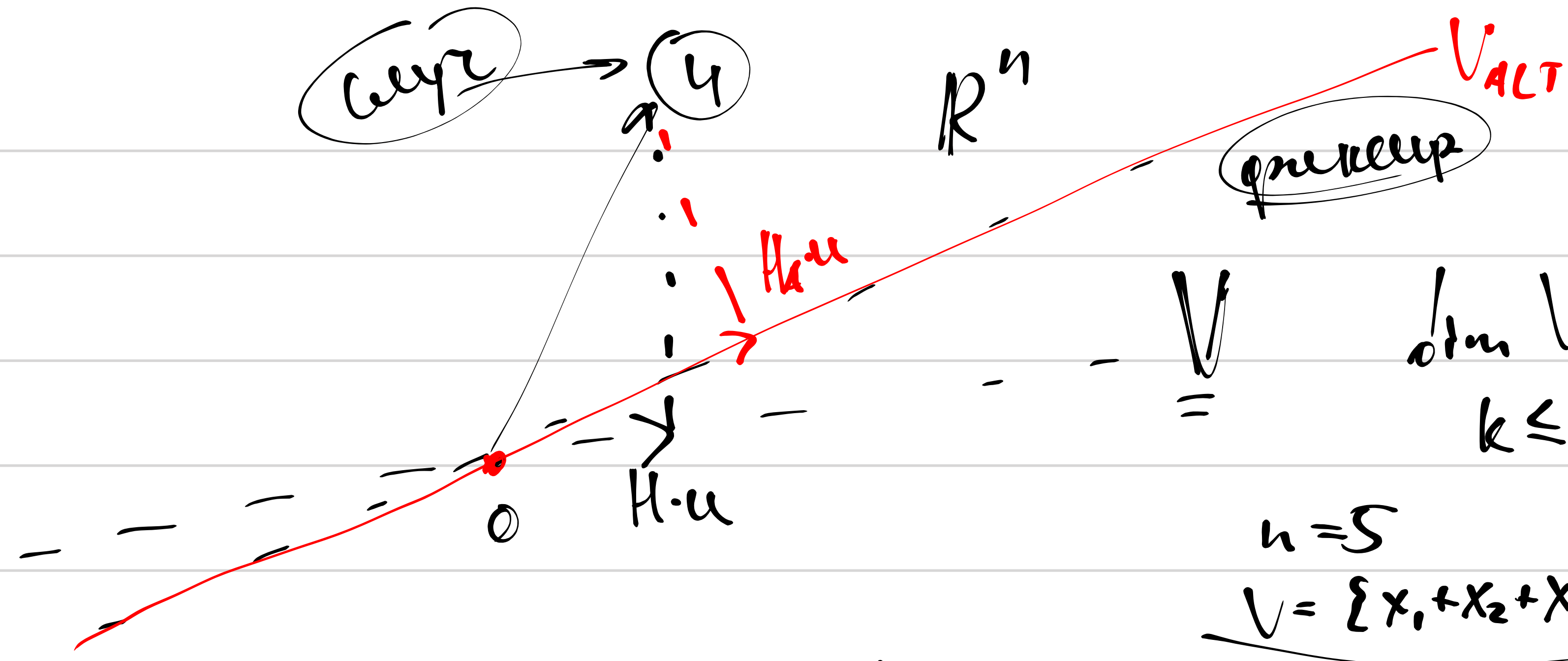
$V_1 \subset \mathbb{R}^n$

$V_2 \subset \mathbb{R}^n$

$V_1 \perp V_2$

H_i - проектор на V_i

$H_1 u$ и $H_2 u$ незав.



$\dim V = k$

$k \leq n$

$n = 5$

$V = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

Теорема Закон распр $\|Hu\|$ зависит только от k, но не от конкр-го выбора подп-ва V. (и даже от n)

Док-во: переведем V в V_{ALT} поворотом $R \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по [Rot] закон распр Ru такой же как у u.

def. Если $\mathbb{R}^n$ $u \sim$ [Rot] [Proj] $\sim N(0; \sigma^2 I)$

$\dim V = d$

H — проецирует на V

назовем $\dfrac{\|Hu\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_d$.

v. [Rot]
[Proj]
[$Var(v_i) = 1$]

$\Rightarrow$ квадрат длины проекции на d-мерное подпр-во

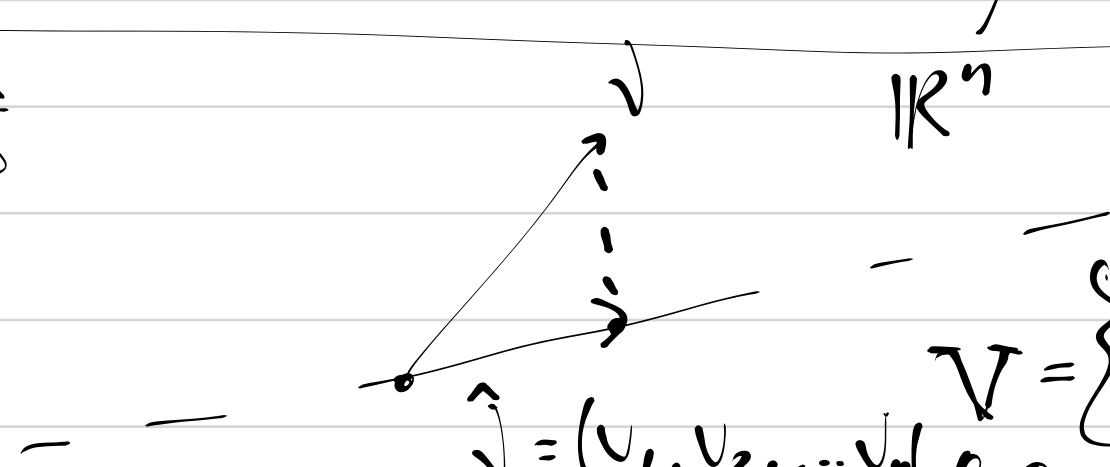
$\|Hv\|^2 \sim \chi^2_d$

[Это опр-ие совп-т со старым]

старое доброе: $v_i \sim N(0;1)$ незав

$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_d^2 \sim \chi^2_d$

$v = \dfrac{u}{\sigma}$



$V = \left\{ \begin{array}{l} x_{d+1} = 0 \\ x_{d+2} = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{array} \right\}$

$\hat{v} = (v_1, v_2, \ldots v_d, 0, 0, 0, 0 \ldots 0)$

$\|\hat{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_d^2 \sim \chi^2_d$

$u \sim [Rot]\,[Proj]$

$\Updownarrow$

$u \sim N(0;\ \sigma^2 \cdot I)$

[σ не изв-но!]

→ оценить σ

→ сократить σ

Идея: Поделим длину одной на длину другой проекции

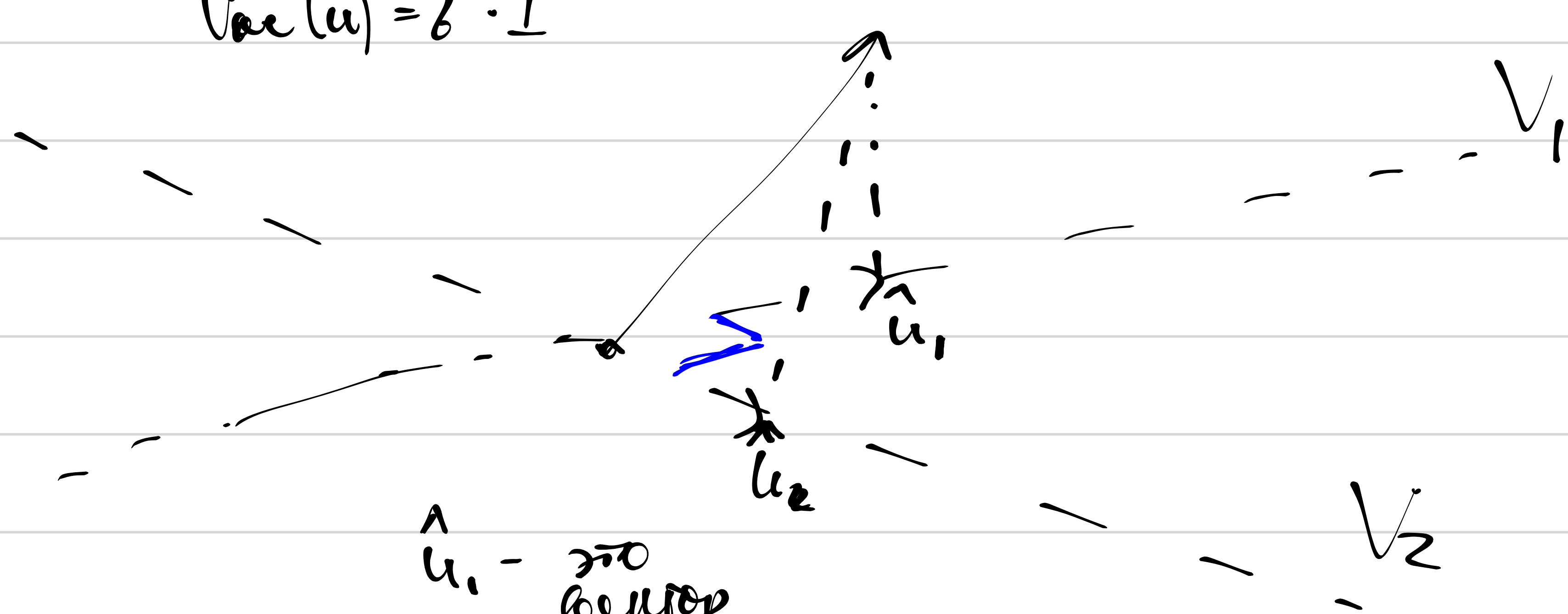
↓ t

↓ F

$u \sim [Rot]\,[Proj]$

$Var(u) = \sigma^2 \cdot I$

$\mathbb{R}^n$



$\hat{u}_1$ – это вектор (а не первая комп-та!)

$V_1 \perp V_2$

$\dim V_1 = d_1$

$\dim V_2 = d_2$

$\left.\begin{array}{l} \|\hat{u}_1\|^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{d_1} \\ \|\hat{u}_2\|^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{d_2} \end{array}\right\}$ незав.

[Теор]

зак распр $\dfrac{\|\hat{u}_1\|^2}{\|\hat{u}_2\|^2}$ зависит только от d_1, d_2 !

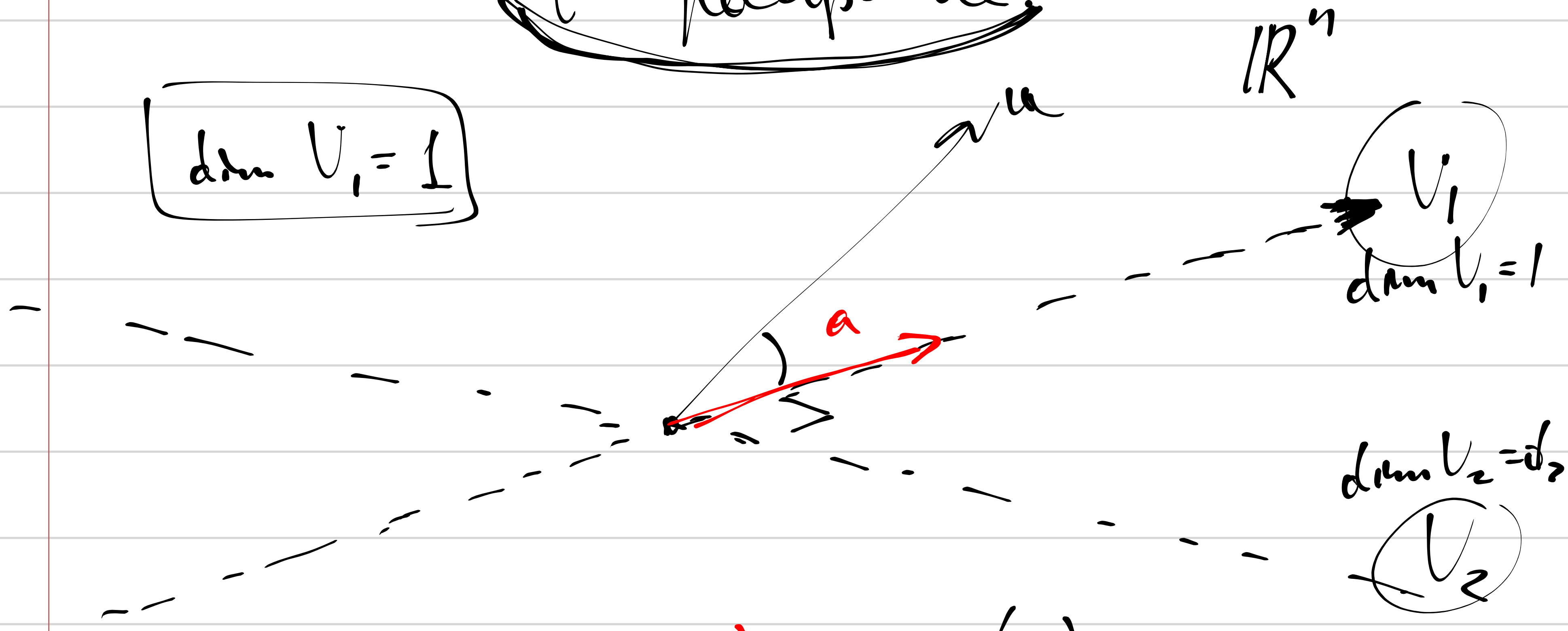
Опр. [договорились]

$$\frac{\|\hat{u}_1\|^2/d_1}{\|\hat{u}_2\|^2/d_2} \sim F_{d_1, d_2}$$

↳ сравнение простой/сл. модели.

t - распр-ие

$\boxed{\dim V_1 = 1}$



$\|a\| = 1 \qquad V_1 = \mathrm{lin}(a) = \mathrm{Span}(a)$ linear span

$$H_1 u = \cos(u, a) \cdot a \|u\| = \frac{\langle u, a\rangle}{\|u\|\|a\|} \|u\| \cdot a = \frac{\langle u, a\rangle}{\|u\|} \|u\| \cdot a = \langle u, a\rangle a$$

$$\|H_1 u\| = \frac{|\langle u, a\rangle|}{\|u\|} \cdot \|u\| \cdot \|a\| = \frac{|\langle u, a\rangle|}{\|u\|} \cdot \|u\| = \|u\| \cdot |\cos(a, u)|$$

def

$$t = \frac{\langle u, a\rangle}{\sqrt{\|H_2 u\|^2 / d_2}}$$

длина проекц. с учётом напр отн-но a.

корень из квадр-та длин

CI для β_j в идеал. условиях

Предп-ки:

$u, y\ [n\times 1]$

1. истина $y = X\cdot\beta + u$ — n - набл., k - колич-в β_j
2. регр (МНК) $\hat{y} = X\cdot\hat{\beta}$ — $\beta\ [k\times 1]$
3. $(u|X) \sim [Rot][Proj]$ — $X\ [n\times k]$

$(u|X) \sim N(0; \sigma^2\cdot I)$

$E(u|X)=0 \qquad Var(u|X) = \sigma^2\cdot I.$

4. $P(\underline{X \text{ полного ранга}}) = 1.$

$n \geq k+1$

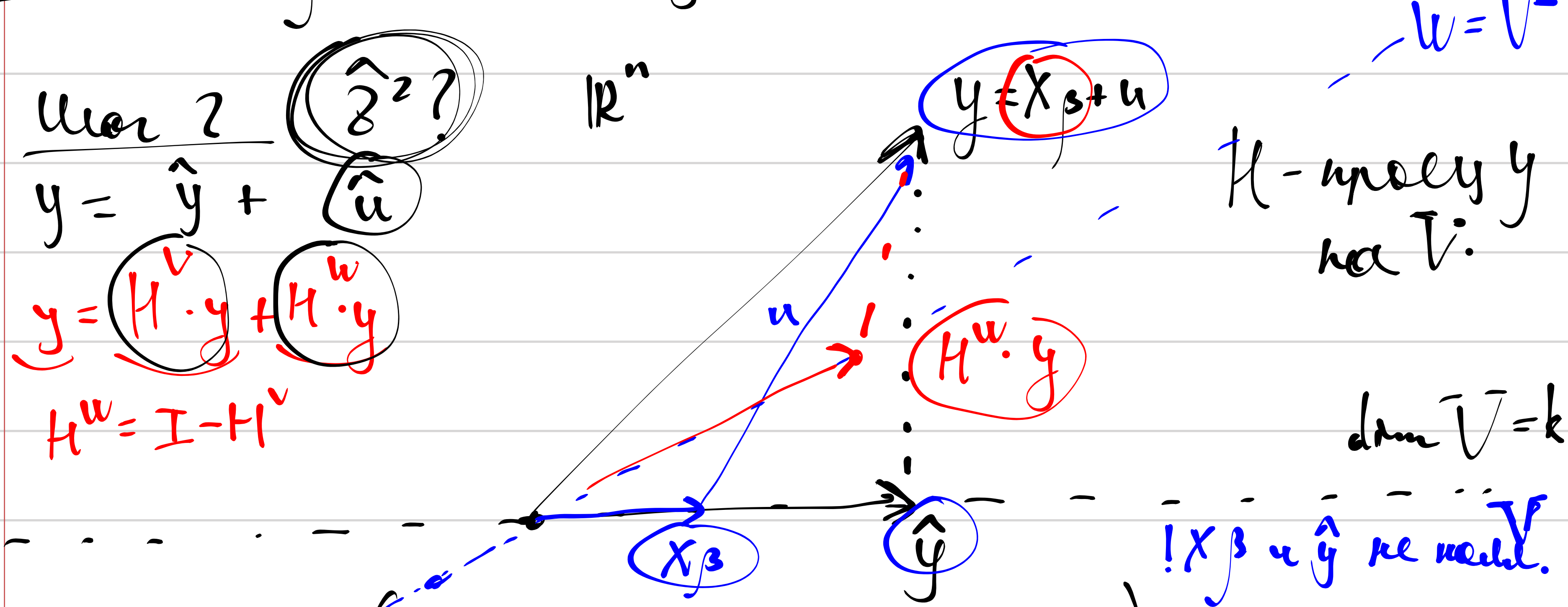
Шаг 1. $\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^Ty.$ 🙂 $\dim W = n-k.$

Шаг 2 $\hat{\sigma}^2$?

$y = \hat{y} + \hat{u}$

$y = H^V\cdot y + H^W\cdot y$

$H^W = I - H^V$



$V = Lin(col_1 X, col_2 X, \ldots col_k X)$ — $col_i X$ - i-ый столб X

$$\boxed{\frac{\|\hat{u}\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}}$$

$\hat{y} = \underline{\underline{H}}\cdot y \qquad H?$

$y - \hat{y} \perp V$

$\forall i:\ col_i X \perp y - \hat{y}$

$X^T\cdot(y-\hat{y}) = 0$

$H^W\cdot y = H^W(X\beta + u)$

$= 0 + H^W\cdot u$

$X^T\cdot(y - X\hat{\beta}) = 0$

$$\boxed{\hat{u} = y - \hat{y}}$$

проекц u на W — проекц y на V

$(X^TX)\hat{\beta} = X^Ty$

$\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^Ty$

$\hat{y} = X\cdot\hat{\beta} = \underbrace{X(X^TX)^{-1}X^T}_{H}y$

шпарг: $E(\chi^2_d) = E(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_d^2) = d \cdot 1.$

$v_i \sim N(0;1)$

$\frac{\|\hat u\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$ $\qquad E(\|\hat u\|^2) = \sigma^2 \cdot (n-k)$

опр. $(\hat\sigma)^2 = \frac{\|\hat u\|^2}{n-k}$ $\qquad \hat\sigma \overset{def}{=} \sqrt{\frac{\|\hat u\|^2}{n-k}}$

оценка $\hat\sigma^2$ несмещенная.

$E(\hat\sigma^2) = \sigma^2$

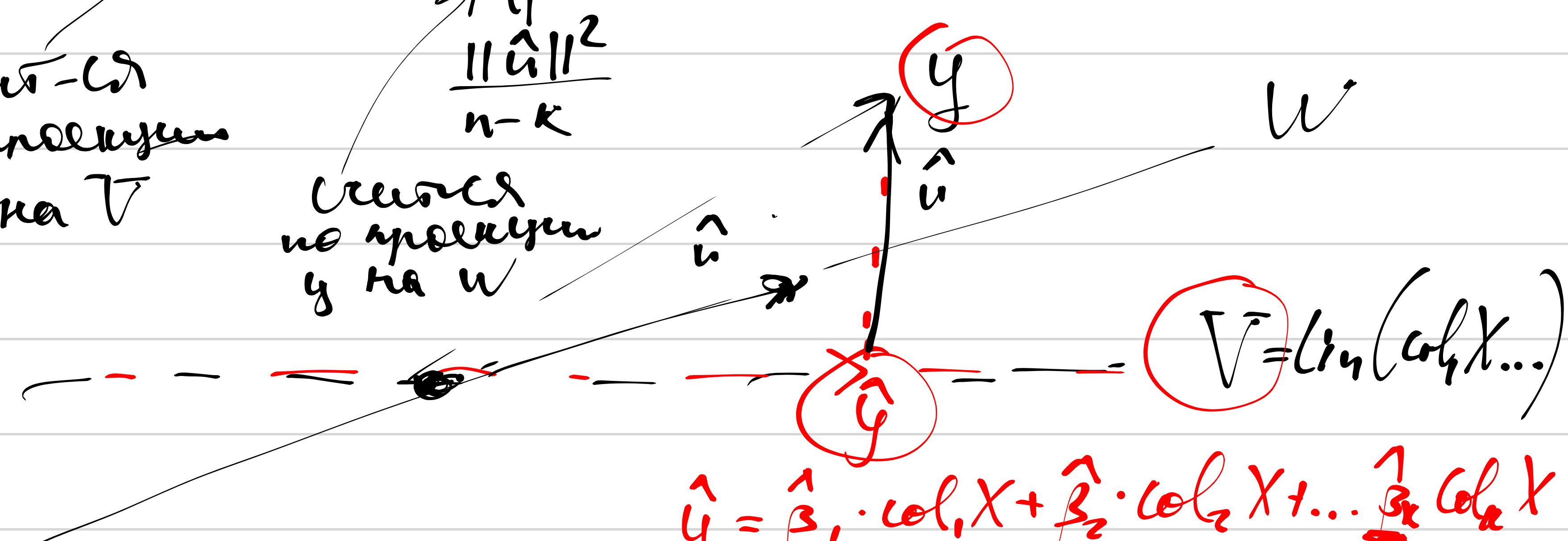
$E(\hat\sigma) \neq \sigma$

Утв. $\hat\beta$ и $\hat\sigma^2$ независимы! $\qquad W + V = \mathbb{R}^n$

$\hat\sigma^2 = \frac{\|\hat u\|^2}{n-k}$

Счит-ся по проекции y на V

Считается по проекции y на W



$\hat y = \hat\beta_1 \cdot col_1 X + \hat\beta_2 \cdot col_2 X + \dots \hat\beta_k \, col_k X$

Шаг 1. $\hat\beta$

Шаг 2. $\hat\sigma^2$

Шаг 3. $\hat\beta$ и $\hat\sigma^2$ незав.

Шаг 4. $E(\hat\beta|X)$ $\quad Var(\hat\beta|X)$

Шаг 5. t для CI для β_j

$\hat\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$

$y = X\beta + u$

$E(u|X) = 0$

$Var(u|X) = \sigma^2 \cdot I$

матр

① $E(Az) = AE(z)$

м-ца случ.

конст

② $Var(Az) = A\,Var(z) \cdot A^T$

скал

$E(\lambda \cdot z) = \lambda E(z)$

$Var(\lambda z) = \lambda^2 Var(z)$

Шаг 4.1. $\quad E(u|X)=0 \quad Var(u|X)=\sigma^2\cdot I$

$$E(y|X)=E(X\beta+u|X)=X\beta+0$$

$$Var(y|X)=Var(X\beta+u|X)=Var(u|X)=\sigma^2\cdot I$$

$$\boxed{\hat\beta=\underbrace{(X^TX)^{-1}X^T}_{A}\cdot y}=A\cdot y$$

$$E(\hat\beta|X)=E((X^TX)^{-1}X^Ty|X)=(X^TX)^{-1}X^T\cdot X\beta=$$

$$=\beta$$

$$Var(\hat\beta|X)=Var((X^TX)^{-1}X^Ty|X)=$$

T

$$=(X^TX)^{-1}X^T\cdot Var(y|X)\cdot((X^TX)^{-1}X^T)^T=$$

$$=(X^TX)^{-1}X^T\cdot\sigma^2\cdot I\cdot X\cdot(X^TX)^{-1}=$$

$$=\sigma^2(X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1}=\sigma^2\cdot(X^TX)^{-1}$$

$$E(\hat\beta|X)=\beta \qquad Var(\hat\beta|X)=\boxed{\sigma^2(X^TX)^{-1}}$$

$$=\begin{bmatrix} Var(\hat\beta_1|X) & & \\ & \ddots & \\ & & Var(\hat\beta_k|X)\end{bmatrix}_{[k\times k]}$$

Если бы я знал σ?

$$\frac{\hat\beta_1-\beta_1}{\sqrt{Var(\hat\beta_1|X)}}\sim N(0;1)$$

Но мы не знаем σ!

$$\operatorname{Var}(\hat\beta \mid X) = \underbrace{\sigma^2}_{\text{не знаем}} \cdot \underbrace{(X^T X)^{-1}}_{\text{набл-мы}} \leftarrow \text{не знаем}$$

$$\widehat{\operatorname{Var}}(\hat\beta \mid X) = \hat\sigma^2 \cdot (X^T X)^{-1} = \text{знаем!!}$$

$$= \frac{\|\hat u\|^2}{n-k} \cdot (X^T X)^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \widehat{\operatorname{Var}}(\hat\beta_1 \mid X) & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}}_{(k \times k)}$$

$$\hat u = y - \hat y$$

Обозн-м: $se(\hat\beta_1) = \sqrt{\widehat{\operatorname{Var}}(\hat\beta_1 \mid X)}$

$$t = \frac{\hat\beta_1 - \beta_1}{se(\hat\beta_1)} = \frac{(\hat\beta_1 - \beta_1) / \sqrt{\operatorname{Var}(\hat\beta_1 \mid X)}}{\sqrt{\widehat{\operatorname{Var}}(\hat\beta_1 \mid X)} / \sqrt{\operatorname{Var}(\hat\beta_1 \mid X)}} \sim t_{n-k}.$$

$\sim N(0;1)$

незав.

$\|\hat u\|^2 / n-k$

в идеальных условиях:

$$-t_{crit} < \frac{\hat\beta_1 - \beta_1}{se(\hat\beta_1)} < t_{crit}$$

CI: $\beta_1 \in [\hat\beta_1 - t_{crit} \cdot se(\hat\beta_1); \hat\beta_1 + t_{crit} \cdot se(\hat\beta_1)]$