1 Zielsetzung

In dem folgend protokollierten Versuch soll das Relaxationsverhalten des RC-Kreises untersucht werden. Das konkrete Ziel besteht darin, die Zeitkonstante $\tau := RC$ des Auf- bzw. Entladevorgangs des Kondensators zu bestimmen. Ferner wird der Zusammenhang zwischen der Amplitude der Kondensatorspannug, sowie der Phasenverschiebung der Ausgangs- und Kondensatorspannug und der Kreisfrequenz ω der Ausgangsspannung anlysiert. Zusätzlich soll gezeigt werden, unter welchen Voraussetzungen der RC-Kreis als Integrator arbeiten kann.

2 Theorie

2.1 Relaxationsgleichung eines RC-Kreises

Unter einem *Relaxationsvorgang* wird die zeitliche Entwicklung eines Systems verstanden, welches sich aus seinem Ausgangszustand entfernt, nach einer gewissen Zeit jedoch nicht-oszillatorisch wieder in seinen Anfangszustand zurückkehrt. Oftmals besteht dabei ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Änderungsgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ der physikalischen Größe A und der Abweichung von A zum Endzustand $A(\infty)$:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = c\,(A(t) - A(\infty)) \tag{1}$$

Die Seperation der Variablen A und t in dieser Differentialgleichung und der Integration beider Seiten vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t liefert

$$\int_{A(0)}^{A(t)} \frac{\mathrm{d}\tilde{A}}{\tilde{A} - A(\infty)} = \int_0^t c\,\mathrm{d}\tilde{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad A(t) = A(\infty)\,(A(0) - A(\infty))\,e^{ct} \tag{2}$$

Dabei muss in Gleichung (**??**) $c < 0$ sein, damit die Funktion $A(t)$ beschränkt ist. Ein beispielhafter Vorgang für ein Relaxationsverhalten wird durch die Ent- und Aufladung eines Kondensators in einem RC-Kreis dar.

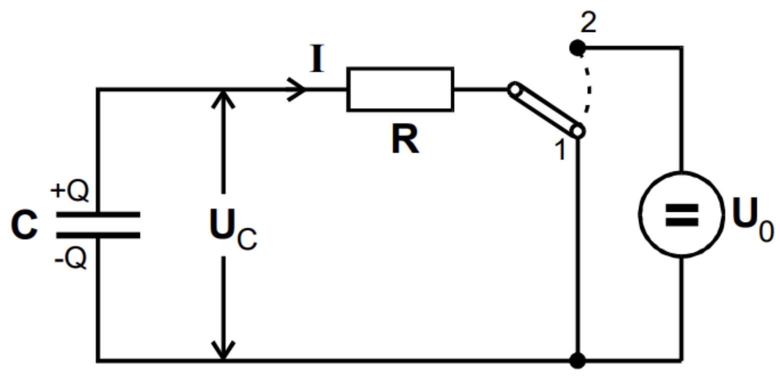

Abbildung 1: Ent- und Aufladung des Kondensator.

Entladevorgang:
Wie der Abbildung **??** entnommen werden kann, befinden sich inverse Ladungen Q^+ und Q^- auf den Platten des Kondensators, weswegen eine Potentialdifferenz, also eine Spannung zwischen Ihnen besteht. Diese Spannung kann mittels der Kapazität C wie folgt ausgedrückt werden:

$$U_C = \frac{Q}{C} \tag{3}$$

Um diese Potentialdifferenz wieder auszugleichen, fließen die Ladungsträger über einen ohm'schen Widerstand R zur anderen Platte. Dieser Vorgang kannn somit durch das Ohm'sche Gesetz beschrieben werden:

$$I = \frac{U_C}{R} \tag{4}$$

Hierbei bezeichnet I die Stromstärke. Diese ist definiert als die geflossen Ladungsmnge $\mathrm{d}Q$ pro Zeitintervall $\mathrm{d}t$ und kann dementsprechend durch die Beziehung

$$-I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{d}Q = -I\mathrm{d}t \tag{5}$$

Durch Äquivalenzumformungen und Einsetzen der Gleichungen (**??**), (**??**) und (**??**) ergibt sich resultierend die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q(t)}{RC}. \tag{6}$$

Analog zur Gleichung (**??**) wird nun eine Seperation der Variablen und die Integration beider Seiten durchgeführt:[1]

$$Q(t) = Q(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{7}$$

Aufladevorgang:
Gemäß der Abbildung **??** wird der Kondensator durch Umlegen des Schalters in Stellung 2 mittels der Spannung U_0 aufgeladen. Im Gegensatz zum Entladevorgang gilt somit nun folgendes Verhalten an den Rändern:

$$Q(0) = 0 \quad \text{und} \quad Q(\infty) = CU_0$$

Der Aufladung kann somit folgendermaßen als Funktion der Zeit formuliert werden:

$$Q(t) = CU_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{8}$$

[1]Hierbei wurde $Q(\infty) = 0$ angenommen, da der Kondensator nach langer Zeit entladen ist.

2.2 Relaxationsvorgänge durch periodische Auslenkung

Auch im Falle einer periodischen Auslenkung kann sich einer Analogie zwischen mechanischen und elektrotechnischen Systemen bedient werden. Die mathematische Beschreibung eines durch eine periodische Kraft beeinflussten harmonischen Oszillator weist eine Vielzahl von Parallelen zu einer sinusförmigen Wechselspannung auf. Dementsprechend wird sich im Folgende erneut auf den RC-Kreis berufen, an welchem eine sinusförmige Wechselspannung anliegt.
Allgemein hat die Wechselspannung mit der Kreisfrequenz ω als Funktion der Zeit die Form

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t). \tag{9}$$

Abhängig davon, welchen Betrag die Kreisfrequenz ω der Ausgangsspannung hat, stellt sich nach gewisser Zeit eine Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ zwischen der Ausgangsspannung $U(t)$ und der Kondensatorspannug $U_C(t)$ ein. Auch die Amplitude $A(\omega)$ der Kondensatorspannug wird sich durch die Wahl von ω von der Ausgangsamplitude U_0 unterscheiden. Den genauen Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz ω und der Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ sowie der Amplitude $A(\omega)$ gilt es im Folgenden zu untersuchen.
Durch die allgemeine Abhängigkeit von der Kreisfrequenz lässt sich jedoch bereits ein Ausdruck für die Kondensatorspannug finden:

$$U_C(t) = A(\omega) \cdot \cos\left(\omega t + \varphi(\omega)\right)$$

Nun wird versucht konkrete Audrücke für die Terme dieser Gleichung zu finden. Mit Hilfe des zweiten Kirchhoff'schen Gesetzes

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t),$$

welches besagt, dass die Summe aller Teilspannungen in einer Masche Null ergibt und der bereits aus (**??**) und (**??**) bekannten Äquivalenz

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$$

lässt sich resultierend folgende Gleichung formulieren:

$$U_0 \cos(\omega t) = -A(\omega) \cdot \omega RC \sin\left(\omega t + \varphi(\omega)\right) + A(\omega)\cos\left(\omega t + \varphi(\omega)\right) \tag{10}$$

Aus der Gleichung (**??**) lassen sich nun zwei Ausdrücke für kreisfrequenzabhängige Phasenverschiebung und Amplitude der Kondensatorspannug finden:

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \tag{11}$$

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{12}$$

2.3 Die Funktion des RC-Kreises als Integrator

Sind bestimmte Voraussetzungen erfüllt kann der RC-Kreis auch als Integrator dienen. Diese Voraussetzungen spiegelt sich wieder, indem die Kreisfrequenz ω der Ausgangsspannung wesentlich größer als der Kehrwert der Zeitkonstante $\tau = RC$ ist ($\omega >> 1/RC$). Dementsprechend kann ein proportionaler Zusammenhang zwischen $U_C(t)$ und $\int U(t)\mathrm{d}t$ bewiesen werden.
Wird erneut von der zweiten Kirchhoff'schen Regel gestartet und auf die Gleichungen (**??**) und (**??**) Bezug genommen, so zeigt sich

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = RC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + U_C(t). \tag{13}$$

Unter Berücksichtigung der Voraussetzung $\omega >> \frac{1}{RC}$ folgt letzlich

$$U_C(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t U(\tilde{t})\mathrm{d}\tilde{t}. \tag{14}$$

3 Fehlerrechnung