

1 Zielsetzung

In dem folgend protokollierten Versuch soll die Wärmeleitung von Aluminium, Messing und Edelstahl untersucht werden. Das konkrete Ziel besteht darin, den zeitlichen Verlauf der Temperaturänderung der jeweiligen Stäbe zu analysieren und die Wellenlänge sowie Frequenz der „Temperaturwelle“ zu bestimmen. Zusätzlich soll die Wärmeleitfähigkeit der zu Beginn aufgeführten Metalle ermittelt werden.

2 Theorie

In einem System kann genau dann ein Wärmetransport beobachtet werden, falls ein Temperaturgefälle vorhanden ist. Dieser Wärmetransport kann sich durch Wärmestrahlung, Konvektion und Wärmeleitung realisieren. In dem folgenden Versuch wird sich jedoch auf die Wärmeleitung beschränkt.

Das soeben angesprochene System wird durch einen Stab der Länge L und Querschnittsfläche A dargestellt. Die Massendichte wird im Folgenden als ρ und die spezifische Wärme als c bezeichnet.

Existiert nun eine Temperaturdifferenz an den Enden des Stabes, so fließt die Wärmemenge

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

in der Zeit dt entlang des Temperaturgefälles. Hierbei steht der Faktor κ für die Wärmeleitfähigkeit des Materials. Der Wärmestrom fließt dabei immer in Richtung der niedrigeren Temperatur was mathematisch durch das negative Vorzeichen in (1) repräsentiert wird. Unter Hinzunahme der *Kontinuitätsgleichung*

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (2)$$

und den Ausdrücken

$$dQ = mc \cdot \partial T \quad (3)$$

für die Wärmemenge dQ , sowie

$$j_\omega = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4)$$

für die Wärmestromdichte j_ω , ergibt sich die eindimensionale *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Der materialabhängige Vorfaktor $\frac{\kappa}{\rho c}$ gibt die Geschwindigkeit des Temperatenausgleichs an und wird daher als *Temperaturleitfähigkeit* tituliert.

Findet nun ein periodisches Wechselspiel zwischen Erwärmung und Abkühlung des Stabes statt, so breitet sich eine *Temperaturwelle* der Form

$$T(x, t) = T_{\max} e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x} \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x \right) \quad (6)$$

durch den Stab aus, wobei $T(x, t)$ die Periodendauer in Abhängigkeit von Ort und Zeit und T_{\max} die Amplitude bezeichnet. Bei genauer Betrachtung von (6) ergibt sich somit eine *Phasengeschwindigkeit* v mit

$$v = \frac{\omega}{k} = \omega / \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} = \sqrt{2\kappa \omega \rho c}. \quad (7)$$

Aus dem Amplitudenverhältnis $A_{\text{nah}}/A_{\text{fern}}$ ergibt sich die Dämpfung der Welle. Um einen mathematischen Ausdruck für die Wärmeleitfähigkeit κ zu erhalten, dienen die Ausdrücke

$$\omega = \frac{2\pi}{T_*} \qquad \phi = \frac{2\pi \Delta t}{T_*}$$

mit der Periodendauer T_* und der Phase ϕ . Damit resultiert aus (7) die Gleichung

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t \ln(A_{\text{nah}}/A_{\text{fern}})}. \quad (8)$$

Hierbei drückt δx den Abstand zwischen den beiden Messtellen und δt die Phasenverschiebung zwischen den Messtellen aus.

3 Vorbereitung

[sample]