#### МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС

#### "ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ" НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ “КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

#### ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

#### КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА **№3**

З КУРСУ "ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ"

**ТЕМА: «Відновлення функціональних залежностей у мультиплікативній формі по дискретно заданим вибіркам»**

#### Виконали: студенти 4-го курсу

#### Лупа А., КА-31

#### Чепига Ю., КА-33

#### Нестеренко В., КА-34

#### Мельник Ю., КА-31

#### Прийняла: Панкратова Н.Д.

#### Київ 2016

Зміст

[1.Постановка задачі 3](#_Toc438135198)

[2.Теоретичні відомості 4](#_Toc438135199)

[Власний вибір структури функцій 5](#_Toc438135200)

[3.Побудова приближаючих функцій в мультиплікативній формі для заданих вибірок 8](#_Toc438135201)

[3.1Робота алгоритму на тестовій вибірці 8](#_Toc438135202)

[3.2Робота алгоритму на вибірці «Індекс DST» 9](#_Toc438135203)

[3.2.1Робота алгоритму на заданих функціях 10](#_Toc438135204)

[Результат 10](#_Toc438135205)

[3.2.2Власний варіант функцій 15](#_Toc438135206)

[Результат 15](#_Toc438135207)

[4.Побудова приближаючих функцій в мультиплікативній формі для власної вибірки 16](#_Toc438135208)

[4.1.Робота алгоритму на заданих функціях 17](#_Toc438135209)

[Результат 17](#_Toc438135210)

[4.2 Робота алгоритму з використанням власних функцій 18](#_Toc438135211)

[4.3 Порівняння результатів з адитивною формою 19](#_Toc438135212)

[4.4 Передбачення 19](#_Toc438135212)

[4.Інтерфейс 21](#_Toc438135214)

[Висновок 23](#_Toc438135215)

[Огляд літератури з відновлення функціональних залежностей 24](#_Toc438135216)

# 1.Постановка задачі

Метою розв’язання задачі є відновлення цільових функцій в мультиплікативному вигляді згідно з теоретичним матеріалом, поданим вище, за дискретною вибіркою.

1. Побудувати за заданою дискретною вибіркою(тестова вибірка наведена в таблиці) і для реальної фізичної задачі оцінювання складових сонячних бурь DST в мультиплікативній формі (аналітичні та графічно представлені функціональні залежності), які з практично прийнятною похибкою в сенсі чебишевського наближення характеризують справжні функціональні залежності.

Для функцій  відомі границі інтервалів, які визначаються наступними умовами:

 ;

.

Для функцій  відомі границі інтервалів, які визначаються наступними умовами:



; 

1. Запропонувати свій варіант дискретної вибірки и  і побудувати наближувальні функції в мультиплікативній формі , .
2. Запропонувати свій варіант структури функцій ,  и построить в мультипликативной форме приближающие функции , 
3. Зробити огляд літератури за даним питанням.

# 2.Теоретичні відомості

Для виявлення багатофакторних закономірностей запропоновано сформувати ієрархічну багаторівневу систему моделей у класі мультиплікативних функцій, які характеризуються послідовністю таких рівнів:



;

;

.

Дана послідовність для зручності обчислень після нескладних перетворень представляється у наступній формі адитивних функцій:

 ;  ;;

**;** ;

**;** .

Для функцій  відомі границі інтервалів, які визначаються наступними умовами:



;



Для функцій  відомі границі інтервалів, які визначаються наступними умовами:





**ВАРІАНТ 5**





**Варианты функций** 

********

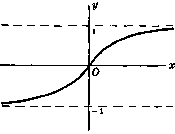
 ****; 



# Власний вибір структури функцій

Вибір : зміщені поліноми Чебишева.

За основу було взято функцію тангенс гіперболічний:



І так вибір решти функцій:

Дана послідовність для зручності обчислень після нескладних перетворень представляється у наступній формі адитивних функцій:

Функція tanh(x) вдало підходить для обмеження послідовностей так як за умовою:











Таким чином, завдяки tanh(x) функції гарантовано обмежені оскільки:

Аналогічно виконавши подібні розрахунки для отримаємо:

Дана функція зручна, оскільки є:

* однозначною
* зростаючою
* гладкою
* легко переводиться до адитивної форми (логарифмуванням)

## 3.Побудова приближаючих функцій в мультиплікативній формі для заданих вибірок

# 3.1Робота алгоритму на тестовій вибірці

Тестова вибірка: data\_u.txt

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 5,05 | 8,65 | 7,75 | 6,975 | 4,879 | 3,501 | 5,967 | 254,621 | 98,145 | 119,406 | 117,683 |
| 2 | 5,052 | 8,7 | 7,78 | 6,955 | 4,886 | 3,553 | 5,978 | 198,163 | 73,368 | 92,651 | 90,123 |
| 3 | 5,055 | 8,745 | 7,80 | 6,95 | 4,897 | 3,611 | 5,984 | 187,411 | 91,084 | 87,691 | 83,576 |
| 4 | 5,06 | 8,75 | 7,82 | 6,945 | 4,916 | 3,652 | 5,987 | 167,197 | 123,567 | 78,793 | 74,789 |
| 5 | 5,063 | 9,8 | 7,845 | 6,925 | 4,938 | 3,723 | 5,996 | 166,547 | 163,813 | 79,497 | 74,316 |
| 6 | 5,064 | 10,25 | 7,851 | 6,895 | 4,947 | 3,758 | 5,999 | 153,789 | 261,378 | 77,082 | 72,817 |
| 7 | 5,067 | 11,85 | 7,852 | 6,865 | 4,954 | 3,784 | 5,976 | 110,926 | 355,579 | 67,758 | 77,425 |
| 8 | 5,07 | 12,87 | 7,853 | 6,854 | 4,967 | 3,809 | 5,964 | 151,381 | 440,432 | 51,956 | 89,519 |
| 9 | 5,075 | 14,90 | 8,854 | 6,856 | 4,978 | 3,825 | 5,958 | 187,364 | 336,283 | 91,123 | 121,374 |
| 10 | 5,08 | 16,91 | 8,855 | 6,855 | 4,984 | 3,845 | 5,937 | 236,123 | 223,657 | 112,859 | 149,173 |
| 11 | 5,085 | 18,92 | 9,856 | 6,856 | 4,987 | 3,851 | 5,916 | 292,341 | 118,624 | 153,717 | 184,136 |
| 12 | 5,09 | 15,92 | 10,86 | 6,865 | 4,996 | 3,8534 | 5,874 | 344,324 | 91,324 | 117,965 | 179,152 |
| 13 | 5,095 | 12,93 | 11,85 | 7,859 | 4,999 | 3,8536 | 5,842 | 426,939 | 68,926 | 155,912 | 201,239 |
| 14 | 5,1 | 11,93 | 12,87 | 7,876 | 4,976 | 3,854 | 5,814 | 477,128 | 44,675 | 169,359 | 225,482 |
| 15 | 5,125 | 9,935 | 11,89 | 7,895 | 4,964 | 3,856 | 5,756 | 505,327 | 29,367 | 192,924 | 240,976 |
| 16 | 5,135 | 8,941 | 9,925 | 7,925 | 4,958 | 3,859 | 5,718 | 558,386 | 18,567 | 218,549 | 275,846 |
| 17 | 5,15 | 7,945 | 8,945 | 7,945 | 4,937 | 3,867 | 5,671 | 618,859 | 23,932 | 247,354 | 316,124 |
| 18 | 5,153 | 6,951 | 7,945 | 7,951 | 4,916 | 3,879 | 5,629 | 895,737 | 35,124 | 284,167 | 363,928 |
| 19 | 5,157 | 5,965 | 6,95 | 6,955 | 4,874 | 3,886 | 5,567 | 906,168 | 61,946 | 316,375 | 403,153 |
| 20 | 5,2 | 4,965 | 5,965 | 6,975 | 4,842 | 3,897 | 5,486 | 885,761 | 121,387 | 341,326 | 431,195 |
| 21 | 5,25 | 3,974 | 4,975 | 7,001 | 4,814 | 3,916 | 5,452 | 790,639 | 310,519 | 375,651 | 471,588 |
| 22 | 5,3 | 2,981 | 5,000 | 7,125 | 4,756 | 3,938 | 5,501 | 723,784 | 485,142 | 446,856 | 436,847 |
| 23 | 5,315 | 3,985 | 6,975 | 7,145 | 4,718 | 3,947 | 5,554 | 731,438 | 588,125 | 548,314 | 441,842 |
| 24 | 5,325 | 4,990 | 7,955 | 7,165 | 4,671 | 3,954 | 5,621 | 721,321 | 683,435 | 644,716 | 439,425 |
| 25 | 5,35 | 5,995 | 8,945 | 7,195 | 4,629 | 3,,967 | 5,658 | 691,845 | 772,834 | 729,942 | 422,147 |
| 26 | 5,353 | 7,997 | 9,935 | 7,209 | 4,567 | 3,978 | 5,712 | 508,614 | 880,562 | 849,316 | 435,954 |
| 27 | 5,357 | 9,001 | 10,92 | 7,225 | 4,482 | 3,984 | 5,753 | 429,956 | 687,987 | 748,231 | 450,492 |
| 28 | 5,4 | 10,94 | 11,89 | 7,25 | 4,452 | 3,987 | 5,781 | 330,129 | 488,951 | 647,987 | 454,897 |
| 29 | 5,425 | 12,90 | 12,86 | 7,975 | 4,364 | 3, 996 | 5,802 | 127,152 | 385,494 | 442,967 | 458,289 |
| 30 | 5,445 | 10,88 | 14,85 | 7,955 | 4,326 | 3, 999 | 5,825 | 78,654 | 211,209 | 232,856 | 172,164 |
| 31 | 5,465 | 8,944 | 15,85 | 7,95 | 4,264 | 3,976 | 5,845 | 52,145 | 196,197 | 115,632 | 153,356 |
| 32 | 5,475 | 6,780 | 12,85 | 7,945 | 4,184 | 3,964 | 5,851 | 86,243 | 87,325 | 93,135 | 127,168 |
| 33 | 5,485 | 6,764 | 10,85 | 7,925 | 4,156 | 3,958 | 5,854 | 126,345 | 64,615 | 77,824 | 106,123 |
| 34 | 5,495 | 6,568 | 8,865 | 7,895 | 4,136 | 3,937 | 5,856 | 132,879 | 52,534 | 63,453 | 82,659 |
| 35 | 5,497 | 6,437 | 6,859 | 7,865 | 4,129 | 3,916 | 5,854 | 167,156 | 32,178 | 52,167 | 93,834 |
| 36 | 5,5 | 5,325 | 4,876 | 7,854 | 4,116 | 3,874 | 5,856 | 170,531 | 66,176 | 42,836 | 91,345 |
| 37 | 5,515 | 5,206 | 2,895 | 7,853 | 4,098 | 3,842 | 5,859 | 184,243 | 70,364 | 37,192 | 96,841 |
| 38 | 5,525 | 5,149 | 1,925 | 7,855 | 4,0816 | 3,814 | 5,867 | 191,956 | 76,428 | 25,834 | 93,952 |
| 39 | 5,545 | 5,089 | 3,945 | 7,856 | 4,0686 | 3,756 | 5,879 | 216,829 | 83,475 | 50,985 | 109,463 |
| 40 | 5,575 | 4,933 | 4,953 | 7,865 | 4,0486 | 3,718 | 5,886 | 383,329 | 104,924 | 98,591 | 133,415 |
| 41 | 5,6 | 4,889 | 5,955 | 7,859 | 4,0246 | 3,671 | 5,005 | 279,421 | 184,183 | 102,861 | 108,613 |
| 42 | 5,65 | 3,935 | 6,975 | 7,876 | 4,0126 | 3,629 | 5,027 | 225,356 | 286,324 | 105,817 | 107,319 |
| 43 | 5,7 | 3,941 | 7,001 | 7,895 | 4,0114 | 3,567 | 5,049 | 176,578 | 366,457 | 78,473 | 82,263 |
| 44 | 5,745 | 2,945 | 7,125 | 7,925 | 4,0026 | 3,484 | 5,095 | 170,948 | 265,814 | 81,417 | 84,132 |
| 45 | 5,75 | 3,95 | 7,145 | 7,945 | 4,0019 | 3,452 | 5,189 | 158,334 | 184,549 | 78,653 | 81,953 |

Для відновлення функціональних залежностей спочатку запустили підбір степенів. Оскільки за результатами попередньої лабораторної роботи, найкращими поліномами були зміщені поліноми Чебишева другого роду(Scaled), тому перебір будемо робити на зміщенних поліномаї Чебишева другого роду.

Перебір здійснювався до 10 степеня.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип поліному | Тип вагових коеф. | Оптимальні степені | Максимальна похибка |
|  | Scaled | (8, 8, 2) | 0.2067 |

Тому краще вибирати В, як нормовані значення . На даному етапі бачимо, що максимальна похибка є доволі малою. (0.2067)

# 3.2Робота алгоритму на вибірці «Індекс DST»

Вибірка «Індекс DST»

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Данные с 15 по 17 мая 1995 года за каждый час, начало 12 часов дня 15 мая, конец - 11 часов дня 17 мая | | | | | | | | |
| N | X1=[V/1000, B] | | X2=[Bz, VBs] | | X3=[Dst(k-1), Dst(k-2)] | | Y1=Dst(k) | Y2=Dst(k+1) |
| X11=V/1000 | X12=B | X21=Bz | X22=VBs | X31=Dst(k-1) | X32=Dst(k-2) |
| 1 | 0.3250 | 2.4 | -1.4 | 0.4550 | 0 | -2 | -2 | -3 |
| 2 | 0.3190 | 2.4 | -1.4 | 0.4466 | -2 | 0 | -3 | -2 |
| 3 | 0.3170 | 2.0 | -1.4 | 0.4438 | -3 | -2 | -2 | -1 |
| 4 | 0.3140 | 1.9 | -0.4 | 0.1256 | -2 | -3 | -1 | 1 |
| 5 | 0.3180 | 2.1 | 1.1 | 0 | -1 | -2 | 1 | 2 |
| 6 | 0.3180 | 1.9 | 0.8 | 0 | 1 | -1 | 2 | 4 |
| 7 | 0.3170 | 2.5 | 1.9 | 0 | 2 | 1 | 4 | 8 |
| 8 | 0.3230 | 3.2 | 1.0 | 0 | 4 | 2 | 8 | 8 |
| 9 | 0.3260 | 2.3 | 0.2 | 0 | 8 | 4 | 8 | 4 |
| 10 | 0.3220 | 3.9 | -3.5 | 1.1270 | 8 | 8 | 4 | -1 |
| 11 | 0.3270 | 3.7 | -2.8 | 0.9156 | 4 | 8 | -1 | -4 |
| 12 | 0.3360 | 4.7 | -1.4 | 0.4704 | -1 | 4 | -4 | -2 |
| 13 | 0.3350 | 5.1 | 0.6 | 0 | -4 | -1 | -2 | 6 |
| 14 | 0.3440 | 4.0 | 2.2 | 0 | -2 | -4 | 6 | 18 |
| 15 | 0.3520 | 7.8 | -4.8 | 1.6896 | 6 | -2 | 18 | 4 |
| 16 | 0.3710 | 13.1 | -5.1 | 1.8921 | 18 | 6 | 4 | 2 |
| 17 | 0.3790 | 12.9 | -6.9 | 2.6151 | 4 | 18 | 2 | -9 |
| 18 | 0.3840 | 15.5 | -7.3 | 2.8032 | 2 | 4 | -9 | -26 |
| 19 | 0.4190 | 23.3 | 4.1 | 0 | -9 | 2 | -26 | -24 |
| 20 | 0.4190 | 23.9 | 12.1 | 0 | -26 | -9 | -24 | -10 |
| 21 | 0.4130 | 21.9 | 12.9 | 0 | -24 | -26 | -10 | 4 |
| 22 | 0.4010 | 15.9 | 10.5 | 0 | -10 | -24 | 4 | 0 |
| 23 | 0.4290 | 18.7 | 8.8 | 0 | 4 | -10 | 0 | -4 |
| 24 | 0.4410 | 21.3 | -12.7 | 5.6007 | 0 | 4 | -4 | -22 |
| 25 | 0.4360 | 17.0 | -14.3 | 6.2348 | -4 | 0 | -22 | -57 |
| 26 | 0.4530 | 12.1 | -9.8 | 4.4394 | -22 | -4 | -57 | -75 |
| 27 | 0.4610 | 13.7 | -7.9 | 3.6419 | -57 | -22 | -75 | -77 |
| 28 | 0.4530 | 11.8 | -9.4 | 4.2582 | -75 | -57 | -77 | -66 |
| 29 | 0.4300 | 8.3 | -5.2 | 2.2360 | -77 | -75 | -66 | -66 |
| 30 | 0.4630 | 7.0 | -1.5 | 0.6945 | -66 | -77 | -66 | -61 |
| 31 | 0.5040 | 7.0 | -5.6 | 2.8224 | -66 | -66 | -61 | -63 |
| 32 | 0.4970 | 8.9 | -5.9 | 2.9323 | -61 | -66 | -63 | -75 |
| 33 | 0.4750 | 8.4 | -6.6 | 3.1350 | -63 | -61 | -75 | -83 |
| 34 | 0.4590 | 6.9 | -6.3 | 2.8917 | -75 | -63 | -83 | -93 |
| 35 | 0.4430 | 7.7 | -6.9 | 3.0567 | -83 | -75 | -93 | -85 |
| 36 | 0.4410 | 7.0 | -5.2 | 2.2932 | -93 | -83 | -85 | -69 |
| 37 | 0.4580 | 6.0 | -0.8 | 0.3664 | -85 | -93 | -69 | -63 |
| 38 | 0.4880 | 5.0 | -2.6 | 1.2688 | -69 | -85 | -63 | -56 |
| 39 | 0.4740 | 5.3 | -4.6 | 2.1804 | -63 | -69 | -56 | -59 |
| 40 | 0.4790 | 6.0 | -5.2 | 2.4908 | -56 | -63 | -59 | -67 |
| 41 | 0.4760 | 6.6 | -6.3 | 2.9988 | -59 | -56 | -67 | -66 |
| 42 | 0.4700 | 7.9 | -7.2 | 3.3840 | -67 | -59 | -66 | -62 |
| 43 | 0.4720 | 8.2 | -7.0 | 3.3040 | -66 | -67 | -62 | -61 |
| 44 | 0.4790 | 6.1 | -3.9 | 1.8681 | -62 | -66 | -61 | -64 |
| 45 | 0.4630 | 5.1 | -3.0 | 1.3890 | -61 | -62 | -64 | -55 |
| 46 | 0.4580 | 3.7 | -2.6 | 1.1908 | -64 | -61 | -55 | -47 |
| 47 | 0.4530 | 4.8 | -1.7 | 0.7701 | -55 | -64 | -47 | -33 |
| 48 | 0.4700 | 3.0 | -1.0 | 0.4700 | -47 | -55 | -33 | -38 |

## 3.2.1Робота алгоритму на заданих функціях

Результат перебору степенів до 16 степеня включно представимо у вигляді таблиці:

Таблиця. Перебір степенів для вибірки «Індекс DST»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Тип поліному | Оптимальні степені | Максимальна похибка |
|  | (7, 10, 9) | 0.2067 |
|  | (8, 12, 12) | 0.1819 |

Як видно з таблиці, найкращу похибку дає зміщені поліноми Чебишева другого порядку( ). Для цього виду поліномів виведем результат роботи при відповідних оптимальних степенях.

## Результат

**Error normalised (Y - F)**

**--------- --------**

**0.0908163 0.181992**

**--------- --------**

**Error (Y\_ - F\_))**

**------- -------**

**10.0806 20.2011**

**------- -------**

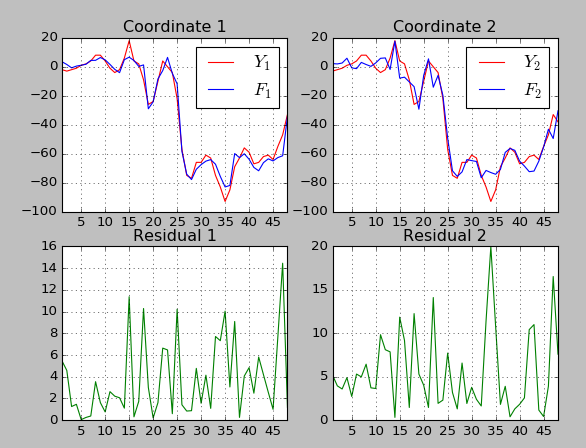
**F^1 in standard basis denormed:**

**176.929770462 \* (-3.30526315789 + 10.526315789473685(x11)^1)^(-0.047924) \* (25.3803878116 + -120.8494921514312(x11)^1 + 147.73776546629733(x11)^2)^(-0.017441) \* (-154.293346552 + 1160.12363318268(x11)^1 + -2862.224814112845(x11)^2 + 2332.7015599941687(x11)^3)^(0.081273) \* (1056.09772504 + -10534.377252476577(x11)^1 + 39166.491355959515(x11)^2 + -64274.52214148143(x11)^3 + 39287.60522095443(x11)^4)^(-0.034809) \* (-7466.26004159 + 93325.84777609189(x11)^1 + -463942.2398969778(x11)^2 + 1146774.179869222(x11)^3 + -1409528.9943307333(x11)^4 + 689256.2319465688(x11)^5)^(-0.028340) \* (54359.1065635 + -816009.8529160509(x11)^1 + 5080202.411027653(x11)^2 + -16789690.45946567(x11)^3 + 31068566.691918716(x11)^4 + -30522131.606560234(x11)^5 + 12437706.441141093(x11)^6)^(0.025323) \* (-403943.97363 + 7079329.179544338(x11)^1 + -52959118.24951024(x11)^2 + 219219657.95100284(x11)^3 + -542303747.0837862(x11)^4 + 801758925.2813376(x11)^5 + -655958091.5444965(x11)^6 + 229115644.96838856(x11)^7)^(-0.006660) \* (3049436.98429 + -61108307.80915665(x11)^1 + 533865967.36160356(x11)^2 + -2655852853.1789255(x11)^3 + 8228876785.125399(x11)^4 + -16261138178.787474(x11)^5 + 20014574831.32775(x11)^6 + -14028844731.444536(x11)^7 + 4287544233.3265696(x11)^8)^(0.009624) \* (-0.172727272727 + 0.09090909090909091(x12)^1)^(0.040946) \* (2.50038567493 + -0.284297520661157(x12)^1 + 0.011019283746556474(x12)^2)^(0.064642) \* (-1.05295116454 + 0.6592486851990985(x12)^1 + -0.05815176558978212(x12)^2 + 0.0015026296018031556(x12)^3)^(-0.066690) \* (3.95185150741 + -1.3650228263096782(x12)^1 + 0.19839300594221707(x12)^2 + -0.01127791817498805(x12)^3 + 0.00021856430571682266(x12)^4)^(-0.039200) \* (-3.40089383661 + 2.675750265443866(x12)^1 + -0.5558219446013996(x12)^2 + 0.051100996992671066(x12)^3 + -0.0021359693513234943(x12)^4 + 3.311580389648828e-05(x12)^5)^(-0.027042) \* (7.73904588311 + -5.090137814065029(x12)^1 + 1.392709414062352(x12)^2 + -0.18129885935140172(x12)^3 + 0.012101804969902654(x12)^4 + -0.00039945400855919886(x12)^5 + 5.1609045033488225e-06(x12)^6)^(-0.012234) \* (-9.5296896963 + 9.51165925073229(x12)^1 + -3.2511477412827134(x12)^2 + 0.5553163635706795(x12)^3 + -0.05207722762837151(x12)^4 + 0.0027202388689461393(x12)^5 + -7.414108492197255e-05(x12)^6 + 8.21052989169131e-07(x12)^7)^(0.053378) \* (17.7113274779 + -17.573140331402733(x12)^1 + 7.232169867976442(x12)^2 + -1.5421782740550882(x12)^3 + 0.1889087133024671(x12)^4 + -0.013777121070155243(x12)^5 + 0.0005901934564068232(x12)^6 + -1.3694168643596658e-05(x12)^7 + 1.3269543259299087e-07(x12)^8)^(-0.003770) \* (1.05147058824 + 0.07352941176470587(x21)^1)^(-0.025449) \* (0.670198961938 + 0.010092272202998853(x21)^1 + 0.007208765859284888(x21)^2)^(0.003423) \* (0.948802125738 + -0.07236063759413795(x21)^1 + 0.0016696773865255456(x21)^2 + 0.0007950844697740684(x21)^3)^(0.019259) \* (1.19366432731 + -0.0180377539780414(x21)^1 + -0.012700772859520343(x21)^2 + 0.00026191017827851735(x21)^3 + 9.353934938518451e-05(x21)^4)^(-0.017131) \* (1.05074527759 + 0.07042644216144213(x21)^1 + -0.004413154407157559(x21)^2 + -0.0020640557904774955(x21)^3 + 4.012104446668449e-05(x21)^4 + 1.1463155561909864e-05(x21)^5)^(-0.002384) \* (0.866145862129 + 0.025494671383375245(x21)^1 + 0.017559867262233474(x21)^2 + -0.0009254812358071115(x21)^3 + -0.00032344882847061145(x21)^4 + 6.0687294151287665e-06(x21)^5 + 1.4449355750306549e-06(x21)^6)^(0.006890) \* (0.949884327186 + -0.06774731462330005(x21)^1 + 0.00817210935809885(x21)^2 + 0.003724222224846672(x21)^3 + -0.00017831261993376255(x21)^4 + -4.967098845746467e-05(x21)^5 + 9.110531291094021e-07(x21)^6 + 1.8592921002232688e-07(x21)^7)^(-0.006410) \* (1.09952302606 + -0.03257935787991206(x21)^1 + -0.021765757945476867(x21)^2 + 0.002128846832489659(x21)^3 + 0.0007220815582082734(x21)^4 + -3.2574019852810304e-05(x21)^5 + -7.533414109610497e-06(x21)^6 + 1.3610504263072334e-07(x21)^7 + 2.430447189834338e-08(x21)^8)^(-0.008334) \* (1.0493130539 + 0.0643516352266168(x21)^1 + -0.012866194780248447(x21)^2 + -0.005662908463182134(x21)^3 + 0.0004913079681397748(x21)^4 + 0.0001322885216306953(x21)^5 + -5.738058496903047e-06(x21)^6 + -1.1332031506343508e-06(x21)^7 + 2.026564053876573e-08(x21)^8 + 3.216768339486624e-09(x21)^9)^(0.012837) \* (0.923186927573 + 0.039270704383154706(x21)^1 + 0.02520745153831719(x21)^2 + -0.003991814614888473(x21)^3 + -0.001301889307717166(x21)^4 + 0.0001047142960936062(x21)^5 + 2.3312349603431992e-05(x21)^6 + -9.845272143378623e-07(x21)^7 + -1.6948670725602596e-07(x21)^8 + 3.0103447027281327e-09(x21)^9 + 4.3004924324687483e-10(x21)^10)^(0.002803) \* (0.951657496036 + -0.060275374614644786(x21)^1 + 0.018394318260794098(x21)^2 + 0.007740475121072915(x21)^3 + -0.0010703854199378606(x21)^4 + -0.0002758590903904796(x21)^5 + 2.1097430475066758e-05(x21)^6 + 3.9940294158148456e-06(x21)^7 + -1.6559939412039025e-07(x21)^8 + -2.5244048684931024e-08(x21)^9 + 4.4638689832120457e-10(x21)^10 + 5.797232445729928e-11(x21)^11)^(0.000723) \* (1.78522658587 + -0.5917458650134522(x21)^1 + -0.3609278819052494(x21)^2 + 0.08593228578899852(x21)^3 + 0.026658203550907922(x21)^4 + -0.0033815398155917836(x21)^5 + -0.0007171844733844048(x21)^6 + 5.299436006276255e-05(x21)^7 + 8.708077026754802e-06(x21)^8 + -3.565318414944114e-07(x21)^9 + -4.8727443774726505e-08(x21)^10 + 8.593544566611406e-10(x21)^11 + 1.0230410198346931e-10(x21)^12)^(-0.002115) \* (0.0 + 0.32078013729389876(x22)^1)^(-0.020824) \* (2.0 + -0.8554136994503967(x22)^1 + 0.13719986197639006(x22)^2)^(0.008076) \* (0.0 + 1.6039006864694938(x22)^1 + -0.6173993788937552(x22)^2 + 0.06601648584223554(x22)^3)^(0.015547) \* (2.0 + -2.56624109835119(x22)^1 + 1.7287182609025147(x22)^2 + -0.4225055093903075(x22)^3 + 0.03388284382741287(x22)^4)^(-0.009271) \* (0.0 + 3.7424349350954853(x22)^1 + -3.8415961353389214(x22)^2 + 1.5843956602136529(x22)^3 + -0.2823570318951072(x22)^4 + 0.018114905491442047(x22)^5)^(-0.001909) \* (2.0 + -5.13248219670238(x22)^1 + 7.4087925467250635(x22)^2 + -4.52684474346758(x22)^3 + 1.3311117217912198(x22)^4 + -0.18632474219768963(x22)^5 + 0.009961546063904194(x22)^6)^(0.003851) \* (0.0 + 6.736382883171874(x22)^1 + -12.96538695676886(x22)^2 + 10.892720163968864(x22)^3 + -4.658891026269269(x22)^4 + 1.0597219712493597(x22)^5 + -0.12202893928282638(x22)^6 + 0.005592065699567699(x22)^7)^(0.004493) \* (2.0 + -8.554136994503967(x22)^1 + 21.12877874436407(x22)^2 + -23.23780301646691(x22)^3 + 13.459018520333442(x22)^4 + -4.395883732589938(x22)^5 + 0.8135262618855092(x22)^6 + -0.07953160106051838(x22)^7 + 0.0031890197384245836(x22)^8)^(0.001082) \* (0.0 + 10.585744530698658(x22)^1 + -32.598687205590274(x22)^2 + 45.31371588211048(x22)^3 + -33.916726671240276(x22)^4 + 14.836107597491036(x22)^5 + -3.904926057050444(x22)^6 + 0.6084167481129655(x22)^7 + -0.05166211976247826(x22)^8 + 0.0018413535411446243(x22)^9)^(0.000592) \* (2.0 + -12.83120549175595(x22)^1 + 48.1571515537129(x22)^2 + -82.38857433110995(x22)^3 + 77.08346970736427(x22)^4 + -43.159585738155734(x22)^5 + 15.087214311331264(x22)^6 + -3.318636807888903(x22)^7 + 0.44617285249413036(x22)^8 + -0.033479155293538614(x22)^9 + 0.0010739448031545074(x22)^10)^(0.001928) \* (0.0 + 15.29051987767584(x22)^1 + -68.66853091918323(x22)^2 + 141.60536213159523(x22)^3 + -161.50822224400133(x22)^4 + 112.0950351810434(x22)^5 + -49.78780722739317(x22)^6 + 14.449897767682932(x22)^7 + -2.7266118763530187(x22)^8 + 0.3222368697003091(x22)^9 + -0.0216578868636159(x22)^10 + 0.0006315836292369486(x22)^11)^(0.000586) \* (14.0 + -233.5279399499583(x22)^1 + 1236.033556545298(x22)^2 + -3020.914392140698(x22)^3 + 4118.459667222034(x22)^4 + -3458.9325141579106(x22)^5 + 1891.93667464094(x22)^6 + -693.5950928487808(x22)^7 + 171.77654821024018(x22)^8 + -28.356844533627203(x22)^9 + 2.9887883871789946(x22)^10 + -0.1818960852202412(x22)^11 + 0.004862387599180974(x22)^12)^(0.007787) \* (1.67567567568 + 0.018018018018018018(x31)^1)^(0.348684) \* (1.2753834916 + 0.032464897329762196(x31)^1 + 0.00043286529773016257(x31)^2)^(0.078097) \* (0.941267052297 + 0.03133740021979613(x31)^1 + 0.0013161444863417104(x31)^2 + 1.1699062100815205e-05(x31)^3)^(0.017443) \* (0.771274826442 + 0.012706130014088044(x31)^1 + 0.0020665602723921083(x31)^2 + 5.0590538814336026e-05(x31)^3 + 3.3727025876224017e-07(x31)^4)^(0.207178) \* (0.781581904823 + -0.013451519006272533(x31)^1 + 0.001831343322282448(x31)^2 + 0.00011123081979854676(x31)^3 + 1.8990442497873877e-06(x31)^4 + 1.012823599886607e-08(x31)^5)^(0.067341) \* (0.910381191332 + -0.031403222069136975(x31)^1 + 0.00022964167661016687(x31)^2 + 0.0001492692773635973(x31)^3 + 5.394458824145086e-06(x31)^4 + 7.038928493420433e-08(x31)^5 + 3.128412663742415e-10(x31)^6)^(-0.341638) \* (1.05784538546 + -0.02986936729407148(x31)^1 + -0.0020921634123148435(x31)^2 + 0.00010031867363854269(x31)^3 + 9.660988807629105e-06(x31)^4 + 2.457299449118606e-07(x31)^5 + 2.5893956169489593e-09(x31)^6 + 9.864364255043652e-12(x31)^7)^(-0.062597) \* (1.13918746435 + -0.00960148635681587(x31)^1 + -0.003648495926838822(x31)^2 + -6.261166100029595e-05(x31)^3 + 1.0622512131359402e-05(x31)^4 + 5.498849863308212e-07(x31)^5 + 1.0738293607152668e-08(x31)^6 + 9.479268953795706e-11(x31)^7 + 3.159756317931901e-13(x31)^8)^(0.428822) \* (1.12300574287 + 0.016732198461461265(x31)^1 + -0.003075028738681748(x31)^2 + -0.00027473385397077906(x31)^3 + 3.159832000134987e-06(x31)^4 + 8.16708988462889e-07(x31)^5 + 2.8822677990734137e-08(x31)^6 + 4.556658966443773e-10(x31)^7 + 3.4586521858443775e-12(x31)^8 + 1.0247858328427787e-14(x31)^9)^(-0.044182) \* (1.03723205358 + 0.032440960096070316(x31)^1 + -0.0002443961823655304(x31)^2 + -0.00038702119669486513(x31)^3 + -1.3809578851643856e-05(x31)^4 + 6.569382975882816e-07(x31)^5 + 5.3378231950099884e-08(x31)^6 + 1.4264603339455503e-09(x31)^7 + 1.891806264404609e-11(x31)^8 + 1.2589506545980084e-13(x31)^9 + 3.3572017455946884e-16(x31)^10)^(-0.195234) \* (0.94361600135 + 0.027472262929095954(x31)^1 + 0.003331404236617061(x31)^2 + -0.0002585464179164417(x31)^3 + -3.2524137597563506e-05(x31)^4 + -3.229881799141094e-07(x31)^5 + 6.380344988125651e-08(x31)^6 + 3.1505349936481142e-09(x31)^7 + 6.767263823573043e-11(x31)^8 + 7.723322009025107e-13(x31)^9 + 4.574565441632402e-15(x31)^10 + 1.1089855616078552e-17(x31)^11)^(-0.299181) \* (-0.323887698036 + 0.06426332524514064(x31)^1 + 0.0685910269068959(x31)^2 + 0.0015051957864920052(x31)^3 + -0.00048731693655380923(x31)^4 + -2.6528459368319243e-05(x31)^5 + 3.078194228764462e-07(x31)^6 + 6.298937401008144e-08(x31)^7 + 2.2516889552346096e-09(x31)^8 + 4.0403303801920324e-11(x31)^9 + 4.0447071265875415e-13(x31)^10 + 2.1580259577233932e-15(x31)^11 + 4.795613239385319e-18(x31)^12)^(0.149852) \* (1.67567567568 + 0.018018018018018018(x32)^1)^(-0.126816) \* (1.2753834916 + 0.032464897329762196(x32)^1 + 0.00043286529773016257(x32)^2)^(-0.108679) \* (0.941267052297 + 0.03133740021979613(x32)^1 + 0.0013161444863417104(x32)^2 + 1.1699062100815205e-05(x32)^3)^(0.052107) \* (0.771274826442 + 0.012706130014088044(x32)^1 + 0.0020665602723921083(x32)^2 + 5.0590538814336026e-05(x32)^3 + 3.3727025876224017e-07(x32)^4)^(0.065980) \* (0.781581904823 + -0.013451519006272533(x32)^1 + 0.001831343322282448(x32)^2 + 0.00011123081979854676(x32)^3 + 1.8990442497873877e-06(x32)^4 + 1.012823599886607e-08(x32)^5)^(0.055284) \* (0.910381191332 + -0.031403222069136975(x32)^1 + 0.00022964167661016687(x32)^2 + 0.0001492692773635973(x32)^3 + 5.394458824145086e-06(x32)^4 + 7.038928493420433e-08(x32)^5 + 3.128412663742415e-10(x32)^6)^(0.072967) \* (1.05784538546 + -0.02986936729407148(x32)^1 + -0.0020921634123148435(x32)^2 + 0.00010031867363854269(x32)^3 + 9.660988807629105e-06(x32)^4 + 2.457299449118606e-07(x32)^5 + 2.5893956169489593e-09(x32)^6 + 9.864364255043652e-12(x32)^7)^(-0.102030) \* (1.13918746435 + -0.00960148635681587(x32)^1 + -0.003648495926838822(x32)^2 + -6.261166100029595e-05(x32)^3 + 1.0622512131359402e-05(x32)^4 + 5.498849863308212e-07(x32)^5 + 1.0738293607152668e-08(x32)^6 + 9.479268953795706e-11(x32)^7 + 3.159756317931901e-13(x32)^8)^(0.049314) \* (1.12300574287 + 0.016732198461461265(x32)^1 + -0.003075028738681748(x32)^2 + -0.00027473385397077906(x32)^3 + 3.159832000134987e-06(x32)^4 + 8.16708988462889e-07(x32)^5 + 2.8822677990734137e-08(x32)^6 + 4.556658966443773e-10(x32)^7 + 3.4586521858443775e-12(x32)^8 + 1.0247858328427787e-14(x32)^9)^(0.064727) \* (1.03723205358 + 0.032440960096070316(x32)^1 + -0.0002443961823655304(x32)^2 + -0.00038702119669486513(x32)^3 + -1.3809578851643856e-05(x32)^4 + 6.569382975882816e-07(x32)^5 + 5.3378231950099884e-08(x32)^6 + 1.4264603339455503e-09(x32)^7 + 1.891806264404609e-11(x32)^8 + 1.2589506545980084e-13(x32)^9 + 3.3572017455946884e-16(x32)^10)^(-0.061947) \* (0.94361600135 + 0.027472262929095954(x32)^1 + 0.003331404236617061(x32)^2 + -0.0002585464179164417(x32)^3 + -3.2524137597563506e-05(x32)^4 + -3.229881799141094e-07(x32)^5 + 6.380344988125651e-08(x32)^6 + 3.1505349936481142e-09(x32)^7 + 6.767263823573043e-11(x32)^8 + 7.723322009025107e-13(x32)^9 + 4.574565441632402e-15(x32)^10 + 1.1089855616078552e-17(x32)^11)^(0.034365) \* (-0.323887698036 + 0.06426332524514064(x32)^1 + 0.0685910269068959(x32)^2 + 0.0015051957864920052(x32)^3 + -0.00048731693655380923(x32)^4 + -2.6528459368319243e-05(x32)^5 + 3.078194228764462e-07(x32)^6 + 6.298937401008144e-08(x32)^7 + 2.2516889552346096e-09(x32)^8 + 4.0403303801920324e-11(x32)^9 + 4.0447071265875415e-13(x32)^10 + 2.1580259577233932e-15(x32)^11 + 4.795613239385319e-18(x32)^12)^(-0.171632) + -204.0**

**F^2 in standard basis denormed:**

**161.156226795 \* (-3.30526315789 + 10.526315789473685(x11)^1)^(-0.151668) \* (25.3803878116 + -120.8494921514312(x11)^1 + 147.73776546629733(x11)^2)^(-0.174334) \* (-154.293346552 + 1160.12363318268(x11)^1 + -2862.224814112845(x11)^2 + 2332.7015599941687(x11)^3)^(0.242156) \* (1056.09772504 + -10534.377252476577(x11)^1 + 39166.491355959515(x11)^2 + -64274.52214148143(x11)^3 + 39287.60522095443(x11)^4)^(-0.042335) \* (-7466.26004159 + 93325.84777609189(x11)^1 + -463942.2398969778(x11)^2 + 1146774.179869222(x11)^3 + -1409528.9943307333(x11)^4 + 689256.2319465688(x11)^5)^(-0.077199) \* (54359.1065635 + -816009.8529160509(x11)^1 + 5080202.411027653(x11)^2 + -16789690.45946567(x11)^3 + 31068566.691918716(x11)^4 + -30522131.606560234(x11)^5 + 12437706.441141093(x11)^6)^(0.016027) \* (-403943.97363 + 7079329.179544338(x11)^1 + -52959118.24951024(x11)^2 + 219219657.95100284(x11)^3 + -542303747.0837862(x11)^4 + 801758925.2813376(x11)^5 + -655958091.5444965(x11)^6 + 229115644.96838856(x11)^7)^(-0.018263) \* (3049436.98429 + -61108307.80915665(x11)^1 + 533865967.36160356(x11)^2 + -2655852853.1789255(x11)^3 + 8228876785.125399(x11)^4 + -16261138178.787474(x11)^5 + 20014574831.32775(x11)^6 + -14028844731.444536(x11)^7 + 4287544233.3265696(x11)^8)^(0.099592) \* (-0.172727272727 + 0.09090909090909091(x12)^1)^(0.062489) \* (2.50038567493 + -0.284297520661157(x12)^1 + 0.011019283746556474(x12)^2)^(0.198055) \* (-1.05295116454 + 0.6592486851990985(x12)^1 + -0.05815176558978212(x12)^2 + 0.0015026296018031556(x12)^3)^(-0.117459) \* (3.95185150741 + -1.3650228263096782(x12)^1 + 0.19839300594221707(x12)^2 + -0.01127791817498805(x12)^3 + 0.00021856430571682266(x12)^4)^(-0.099571) \* (-3.40089383661 + 2.675750265443866(x12)^1 + -0.5558219446013996(x12)^2 + 0.051100996992671066(x12)^3 + -0.0021359693513234943(x12)^4 + 3.311580389648828e-05(x12)^5)^(-0.117352) \* (7.73904588311 + -5.090137814065029(x12)^1 + 1.392709414062352(x12)^2 + -0.18129885935140172(x12)^3 + 0.012101804969902654(x12)^4 + -0.00039945400855919886(x12)^5 + 5.1609045033488225e-06(x12)^6)^(-0.123004) \* (-9.5296896963 + 9.51165925073229(x12)^1 + -3.2511477412827134(x12)^2 + 0.5553163635706795(x12)^3 + -0.05207722762837151(x12)^4 + 0.0027202388689461393(x12)^5 + -7.414108492197255e-05(x12)^6 + 8.21052989169131e-07(x12)^7)^(0.170814) \* (17.7113274779 + -17.573140331402733(x12)^1 + 7.232169867976442(x12)^2 + -1.5421782740550882(x12)^3 + 0.1889087133024671(x12)^4 + -0.013777121070155243(x12)^5 + 0.0005901934564068232(x12)^6 + -1.3694168643596658e-05(x12)^7 + 1.3269543259299087e-07(x12)^8)^(0.064183) \* (1.05147058824 + 0.07352941176470587(x21)^1)^(-0.074127) \* (0.670198961938 + 0.010092272202998853(x21)^1 + 0.007208765859284888(x21)^2)^(0.011587) \* (0.948802125738 + -0.07236063759413795(x21)^1 + 0.0016696773865255456(x21)^2 + 0.0007950844697740684(x21)^3)^(0.051257) \* (1.19366432731 + -0.0180377539780414(x21)^1 + -0.012700772859520343(x21)^2 + 0.00026191017827851735(x21)^3 + 9.353934938518451e-05(x21)^4)^(-0.040911) \* (1.05074527759 + 0.07042644216144213(x21)^1 + -0.004413154407157559(x21)^2 + -0.0020640557904774955(x21)^3 + 4.012104446668449e-05(x21)^4 + 1.1463155561909864e-05(x21)^5)^(-0.002764) \* (0.866145862129 + 0.025494671383375245(x21)^1 + 0.017559867262233474(x21)^2 + -0.0009254812358071115(x21)^3 + -0.00032344882847061145(x21)^4 + 6.0687294151287665e-06(x21)^5 + 1.4449355750306549e-06(x21)^6)^(0.025690) \* (0.949884327186 + -0.06774731462330005(x21)^1 + 0.00817210935809885(x21)^2 + 0.003724222224846672(x21)^3 + -0.00017831261993376255(x21)^4 + -4.967098845746467e-05(x21)^5 + 9.110531291094021e-07(x21)^6 + 1.8592921002232688e-07(x21)^7)^(-0.022498) \* (1.09952302606 + -0.03257935787991206(x21)^1 + -0.021765757945476867(x21)^2 + 0.002128846832489659(x21)^3 + 0.0007220815582082734(x21)^4 + -3.2574019852810304e-05(x21)^5 + -7.533414109610497e-06(x21)^6 + 1.3610504263072334e-07(x21)^7 + 2.430447189834338e-08(x21)^8)^(-0.020035) \* (1.0493130539 + 0.0643516352266168(x21)^1 + -0.012866194780248447(x21)^2 + -0.005662908463182134(x21)^3 + 0.0004913079681397748(x21)^4 + 0.0001322885216306953(x21)^5 + -5.738058496903047e-06(x21)^6 + -1.1332031506343508e-06(x21)^7 + 2.026564053876573e-08(x21)^8 + 3.216768339486624e-09(x21)^9)^(0.042147) \* (0.923186927573 + 0.039270704383154706(x21)^1 + 0.02520745153831719(x21)^2 + -0.003991814614888473(x21)^3 + -0.001301889307717166(x21)^4 + 0.0001047142960936062(x21)^5 + 2.3312349603431992e-05(x21)^6 + -9.845272143378623e-07(x21)^7 + -1.6948670725602596e-07(x21)^8 + 3.0103447027281327e-09(x21)^9 + 4.3004924324687483e-10(x21)^10)^(-0.000971) \* (0.951657496036 + -0.060275374614644786(x21)^1 + 0.018394318260794098(x21)^2 + 0.007740475121072915(x21)^3 + -0.0010703854199378606(x21)^4 + -0.0002758590903904796(x21)^5 + 2.1097430475066758e-05(x21)^6 + 3.9940294158148456e-06(x21)^7 + -1.6559939412039025e-07(x21)^8 + -2.5244048684931024e-08(x21)^9 + 4.4638689832120457e-10(x21)^10 + 5.797232445729928e-11(x21)^11)^(0.003109) \* (1.78522658587 + -0.5917458650134522(x21)^1 + -0.3609278819052494(x21)^2 + 0.08593228578899852(x21)^3 + 0.026658203550907922(x21)^4 + -0.0033815398155917836(x21)^5 + -0.0007171844733844048(x21)^6 + 5.299436006276255e-05(x21)^7 + 8.708077026754802e-06(x21)^8 + -3.565318414944114e-07(x21)^9 + -4.8727443774726505e-08(x21)^10 + 8.593544566611406e-10(x21)^11 + 1.0230410198346931e-10(x21)^12)^(-0.005594) \* (0.0 + 0.32078013729389876(x22)^1)^(-0.070973) \* (2.0 + -0.8554136994503967(x22)^1 + 0.13719986197639006(x22)^2)^(0.026989) \* (0.0 + 1.6039006864694938(x22)^1 + -0.6173993788937552(x22)^2 + 0.06601648584223554(x22)^3)^(0.055387) \* (2.0 + -2.56624109835119(x22)^1 + 1.7287182609025147(x22)^2 + -0.4225055093903075(x22)^3 + 0.03388284382741287(x22)^4)^(-0.031453) \* (0.0 + 3.7424349350954853(x22)^1 + -3.8415961353389214(x22)^2 + 1.5843956602136529(x22)^3 + -0.2823570318951072(x22)^4 + 0.018114905491442047(x22)^5)^(-0.001165) \* (2.0 + -5.13248219670238(x22)^1 + 7.4087925467250635(x22)^2 + -4.52684474346758(x22)^3 + 1.3311117217912198(x22)^4 + -0.18632474219768963(x22)^5 + 0.009961546063904194(x22)^6)^(0.016734) \* (0.0 + 6.736382883171874(x22)^1 + -12.96538695676886(x22)^2 + 10.892720163968864(x22)^3 + -4.658891026269269(x22)^4 + 1.0597219712493597(x22)^5 + -0.12202893928282638(x22)^6 + 0.005592065699567699(x22)^7)^(0.001521) \* (2.0 + -8.554136994503967(x22)^1 + 21.12877874436407(x22)^2 + -23.23780301646691(x22)^3 + 13.459018520333442(x22)^4 + -4.395883732589938(x22)^5 + 0.8135262618855092(x22)^6 + -0.07953160106051838(x22)^7 + 0.0031890197384245836(x22)^8)^(-0.003829) \* (0.0 + 10.585744530698658(x22)^1 + -32.598687205590274(x22)^2 + 45.31371588211048(x22)^3 + -33.916726671240276(x22)^4 + 14.836107597491036(x22)^5 + -3.904926057050444(x22)^6 + 0.6084167481129655(x22)^7 + -0.05166211976247826(x22)^8 + 0.0018413535411446243(x22)^9)^(0.010880) \* (2.0 + -12.83120549175595(x22)^1 + 48.1571515537129(x22)^2 + -82.38857433110995(x22)^3 + 77.08346970736427(x22)^4 + -43.159585738155734(x22)^5 + 15.087214311331264(x22)^6 + -3.318636807888903(x22)^7 + 0.44617285249413036(x22)^8 + -0.033479155293538614(x22)^9 + 0.0010739448031545074(x22)^10)^(0.020477) \* (0.0 + 15.29051987767584(x22)^1 + -68.66853091918323(x22)^2 + 141.60536213159523(x22)^3 + -161.50822224400133(x22)^4 + 112.0950351810434(x22)^5 + -49.78780722739317(x22)^6 + 14.449897767682932(x22)^7 + -2.7266118763530187(x22)^8 + 0.3222368697003091(x22)^9 + -0.0216578868636159(x22)^10 + 0.0006315836292369486(x22)^11)^(-0.001041) \* (14.0 + -233.5279399499583(x22)^1 + 1236.033556545298(x22)^2 + -3020.914392140698(x22)^3 + 4118.459667222034(x22)^4 + -3458.9325141579106(x22)^5 + 1891.93667464094(x22)^6 + -693.5950928487808(x22)^7 + 171.77654821024018(x22)^8 + -28.356844533627203(x22)^9 + 2.9887883871789946(x22)^10 + -0.1818960852202412(x22)^11 + 0.004862387599180974(x22)^12)^(0.007277) \* (1.67567567568 + 0.018018018018018018(x31)^1)^(0.078023) \* (1.2753834916 + 0.032464897329762196(x31)^1 + 0.00043286529773016257(x31)^2)^(0.036640) \* (0.941267052297 + 0.03133740021979613(x31)^1 + 0.0013161444863417104(x31)^2 + 1.1699062100815205e-05(x31)^3)^(0.000930) \* (0.771274826442 + 0.012706130014088044(x31)^1 + 0.0020665602723921083(x31)^2 + 5.0590538814336026e-05(x31)^3 + 3.3727025876224017e-07(x31)^4)^(0.072212) \* (0.781581904823 + -0.013451519006272533(x31)^1 + 0.001831343322282448(x31)^2 + 0.00011123081979854676(x31)^3 + 1.8990442497873877e-06(x31)^4 + 1.012823599886607e-08(x31)^5)^(0.019469) \* (0.910381191332 + -0.031403222069136975(x31)^1 + 0.00022964167661016687(x31)^2 + 0.0001492692773635973(x31)^3 + 5.394458824145086e-06(x31)^4 + 7.038928493420433e-08(x31)^5 + 3.128412663742415e-10(x31)^6)^(-0.073160) \* (1.05784538546 + -0.02986936729407148(x31)^1 + -0.0020921634123148435(x31)^2 + 0.00010031867363854269(x31)^3 + 9.660988807629105e-06(x31)^4 + 2.457299449118606e-07(x31)^5 + 2.5893956169489593e-09(x31)^6 + 9.864364255043652e-12(x31)^7)^(-0.016915) \* (1.13918746435 + -0.00960148635681587(x31)^1 + -0.003648495926838822(x31)^2 + -6.261166100029595e-05(x31)^3 + 1.0622512131359402e-05(x31)^4 + 5.498849863308212e-07(x31)^5 + 1.0738293607152668e-08(x31)^6 + 9.479268953795706e-11(x31)^7 + 3.159756317931901e-13(x31)^8)^(0.098897) \* (1.12300574287 + 0.016732198461461265(x31)^1 + -0.003075028738681748(x31)^2 + -0.00027473385397077906(x31)^3 + 3.159832000134987e-06(x31)^4 + 8.16708988462889e-07(x31)^5 + 2.8822677990734137e-08(x31)^6 + 4.556658966443773e-10(x31)^7 + 3.4586521858443775e-12(x31)^8 + 1.0247858328427787e-14(x31)^9)^(0.014447) \* (1.03723205358 + 0.032440960096070316(x31)^1 + -0.0002443961823655304(x31)^2 + -0.00038702119669486513(x31)^3 + -1.3809578851643856e-05(x31)^4 + 6.569382975882816e-07(x31)^5 + 5.3378231950099884e-08(x31)^6 + 1.4264603339455503e-09(x31)^7 + 1.891806264404609e-11(x31)^8 + 1.2589506545980084e-13(x31)^9 + 3.3572017455946884e-16(x31)^10)^(-0.069600) \* (0.94361600135 + 0.027472262929095954(x31)^1 + 0.003331404236617061(x31)^2 + -0.0002585464179164417(x31)^3 + -3.2524137597563506e-05(x31)^4 + -3.229881799141094e-07(x31)^5 + 6.380344988125651e-08(x31)^6 + 3.1505349936481142e-09(x31)^7 + 6.767263823573043e-11(x31)^8 + 7.723322009025107e-13(x31)^9 + 4.574565441632402e-15(x31)^10 + 1.1089855616078552e-17(x31)^11)^(-0.089868) \* (-0.323887698036 + 0.06426332524514064(x31)^1 + 0.0685910269068959(x31)^2 + 0.0015051957864920052(x31)^3 + -0.00048731693655380923(x31)^4 + -2.6528459368319243e-05(x31)^5 + 3.078194228764462e-07(x31)^6 + 6.298937401008144e-08(x31)^7 + 2.2516889552346096e-09(x31)^8 + 4.0403303801920324e-11(x31)^9 + 4.0447071265875415e-13(x31)^10 + 2.1580259577233932e-15(x31)^11 + 4.795613239385319e-18(x31)^12)^(0.013061) \* (1.67567567568 + 0.018018018018018018(x32)^1)^(-0.032232) \* (1.2753834916 + 0.032464897329762196(x32)^1 + 0.00043286529773016257(x32)^2)^(-0.040979) \* (0.941267052297 + 0.03133740021979613(x32)^1 + 0.0013161444863417104(x32)^2 + 1.1699062100815205e-05(x32)^3)^(0.016247) \* (0.771274826442 + 0.012706130014088044(x32)^1 + 0.0020665602723921083(x32)^2 + 5.0590538814336026e-05(x32)^3 + 3.3727025876224017e-07(x32)^4)^(0.019297) \* (0.781581904823 + -0.013451519006272533(x32)^1 + 0.001831343322282448(x32)^2 + 0.00011123081979854676(x32)^3 + 1.8990442497873877e-06(x32)^4 + 1.012823599886607e-08(x32)^5)^(0.024178) \* (0.910381191332 + -0.031403222069136975(x32)^1 + 0.00022964167661016687(x32)^2 + 0.0001492692773635973(x32)^3 + 5.394458824145086e-06(x32)^4 + 7.038928493420433e-08(x32)^5 + 3.128412663742415e-10(x32)^6)^(-0.002846) \* (1.05784538546 + -0.02986936729407148(x32)^1 + -0.0020921634123148435(x32)^2 + 0.00010031867363854269(x32)^3 + 9.660988807629105e-06(x32)^4 + 2.457299449118606e-07(x32)^5 + 2.5893956169489593e-09(x32)^6 + 9.864364255043652e-12(x32)^7)^(-0.004275) \* (1.13918746435 + -0.00960148635681587(x32)^1 + -0.003648495926838822(x32)^2 + -6.261166100029595e-05(x32)^3 + 1.0622512131359402e-05(x32)^4 + 5.498849863308212e-07(x32)^5 + 1.0738293607152668e-08(x32)^6 + 9.479268953795706e-11(x32)^7 + 3.159756317931901e-13(x32)^8)^(0.003137) \* (1.12300574287 + 0.016732198461461265(x32)^1 + -0.003075028738681748(x32)^2 + -0.00027473385397077906(x32)^3 + 3.159832000134987e-06(x32)^4 + 8.16708988462889e-07(x32)^5 + 2.8822677990734137e-08(x32)^6 + 4.556658966443773e-10(x32)^7 + 3.4586521858443775e-12(x32)^8 + 1.0247858328427787e-14(x32)^9)^(0.002165) \* (1.03723205358 + 0.032440960096070316(x32)^1 + -0.0002443961823655304(x32)^2 + -0.00038702119669486513(x32)^3 + -1.3809578851643856e-05(x32)^4 + 6.569382975882816e-07(x32)^5 + 5.3378231950099884e-08(x32)^6 + 1.4264603339455503e-09(x32)^7 + 1.891806264404609e-11(x32)^8 + 1.2589506545980084e-13(x32)^9 + 3.3572017455946884e-16(x32)^10)^(-0.008668) \* (0.94361600135 + 0.027472262929095954(x32)^1 + 0.003331404236617061(x32)^2 + -0.0002585464179164417(x32)^3 + -3.2524137597563506e-05(x32)^4 + -3.229881799141094e-07(x32)^5 + 6.380344988125651e-08(x32)^6 + 3.1505349936481142e-09(x32)^7 + 6.767263823573043e-11(x32)^8 + 7.723322009025107e-13(x32)^9 + 4.574565441632402e-15(x32)^10 + 1.1089855616078552e-17(x32)^11)^(-0.011104) \* (-0.323887698036 + 0.06426332524514064(x32)^1 + 0.0685910269068959(x32)^2 + 0.0015051957864920052(x32)^3 + -0.00048731693655380923(x32)^4 + -2.6528459368319243e-05(x32)^5 + 3.078194228764462e-07(x32)^6 + 6.298937401008144e-08(x32)^7 + 2.2516889552346096e-09(x32)^8 + 4.0403303801920324e-11(x32)^9 + 4.0447071265875415e-13(x32)^10 + 2.1580259577233932e-15(x32)^11 + 4.795613239385319e-18(x32)^12)^(-0.023100) + -204.0**

**Графіки відновлених функціональних залежностей**



Як бачимо з графіків, зміщені поліноми Чебишева другого роду дуже добре відновили функціональні залежності.

## 

## 3.2.2Власний варіант функцій

Так як власний варіант функцій містить експоненту, що при взятті натурального логарифму дозволяє швидко обчилювати дані фунції.

Перебір степенів здійснювався до 12 степеня включно. Тип основних поліномів – зміщені поліноми Чебишева другого роду. Опитмальний набір степенів – (8, 12, 12) з максимальною похибкою 0.2130.

## Результат

Error normalised (Y - F)

-------- --------

0.130187 0.179972

-------- --------

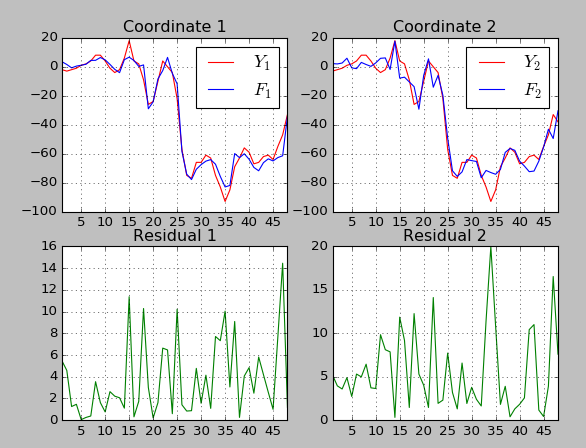
Error (Y\_ - F\_))

------- -------

14.4508 19.9769

------- -------

Графіки відновлених функціональних залежностей



## 4.Побудова приближаючих функцій в мультиплікативній формі для власної вибірки

Для роботи була вибрана вибірка за посиланням <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Condition+Based+Maintenance+of+Naval+Propulsion+Plants>

Назва вибірки: Condition Based Maintenance of Naval Propulsion Plants Data Set

Експерименти проводилися за допомогою імітатора морського судна. Різні блоки, що утворюють симулятор (пропелер, корпус, газова турбіна, коробка передач і контролер) були розроблені і перевірені протягом року на кількох подібних установках. З урахуванням цих спостережень наявні дані відповідають данним реального судна.

Симулятор також вираховує загасання продуктивності з плином часу компресора і турбіни.

1. Положення важеля.   
2. Швидкість корабля (вузли).   
3. Обертаючий момент валу газової турбіни (кН/м).   
4. Швидкість оборотів газової турбіни (рад/хв).   
5. Швидкість оборотів газогенератора (рад/хв).   
6. Оборотний момент правого пропеллера (кН).   
7. Оборотний момент лівого пропеллера (кН).   
8. Вихідна температура турбіни високого тиску (С).   
9. Температура повітря на вході компресора газової турбіни (С).   
10. Температура повітря на виході компресора газової турбіни (С).   
11. Тиск на виході турбіни високого тиску (бар).   
12. Тиск повітря на вході компресора газової турбіни (бар).   
13. Тиск повітря на виході компресора газової турбіни (бар).   
14. Тиск вихлопних газів газової турбіни (бар).   
15. Контроль турбінних вихлопів (%).   
16. Витрата палива (кг/с).   
17. **Вихід:** Оцінка стану компресора газової турбіни (%).   
18. **Вихід:** Оцінка стану самої турбіни (%)

Для демонстрації роботи розробленого алгоритму його було застосовано для прогнозування на підмножині цієї вибірки. Вектор вхідних даних розбили наступним чином:

***X1(внутрішні показники, що можна контролювати):***1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 14, 15

***X2(зовнішні показники, що можна контролювати):*** *10, 13*

***X3(зовнішні показники, що не можна контролювати):***9, 12, 16

9, 12 були відкинуті з розгляду тому що в данній вибірці вони не змінювались.

Для визначення оптимальних ступенів многочленів запустили підбір на зміщених мгогочленах Чебишева другого порядку.

## 

## 4.1.Робота алгоритму на заданих функціях

Перебір степенів здійснювався до 12 степеня включно. Тип основних поліномів – комбіновані поліноми. Опитмальний набір степенів – (12, 7, 8) з максимальною похибкою 0.2130.

## Результат

Error normalised (Y - F)

-------- --------

0.158882 0.201068

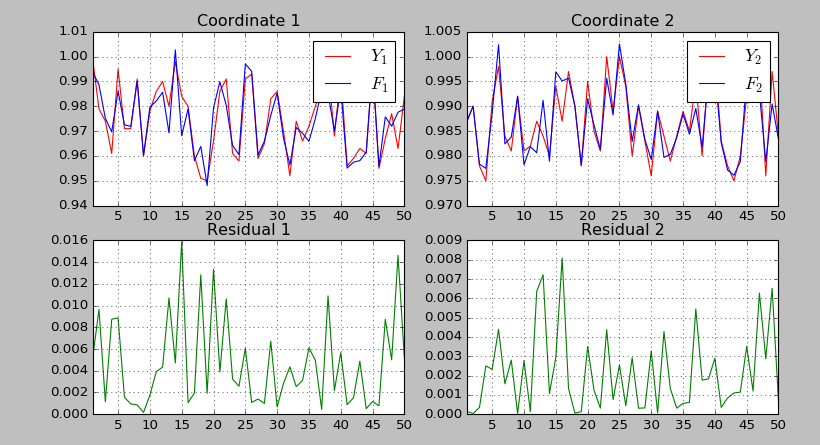
-------- --------

Error (Y\_ - F\_))

--------- ---------

0.0077852 0.0050267

--------- ---------



# 4.2 Робота алгоритму з використанням власних функцій

Перебір степенів здійснювався до 12 степеня включно. Тип основних поліномів – комбіновані поліноми. Опитмальний набір степенів – (12, 7, 8) з максимальною похибкою 0.5130.

Як бачимо даний результат гірший, ніж на основному наборі функцій.

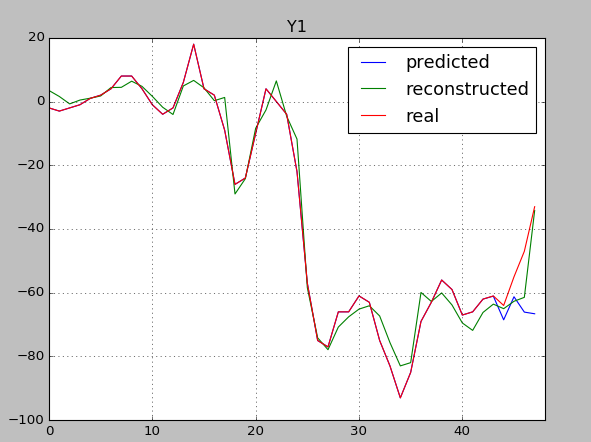
# 4.3 Порівняння результатів з адитивною формою

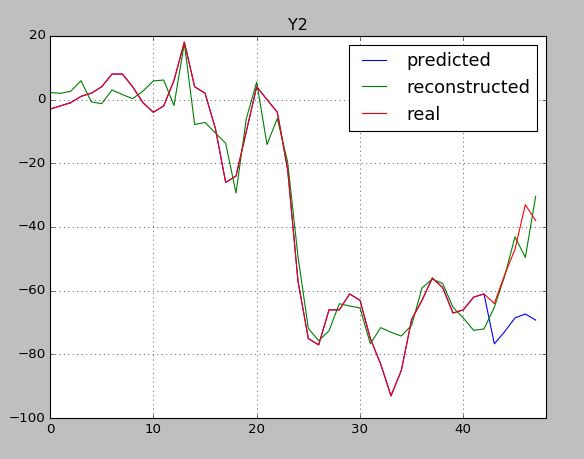
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Тип поліному** | **Оптимальний степінь** | **Максимальне відхилення** |
| **Адитивна форма(Зміщенний Чебишева)** | (7, 7, 4) | 0.1567 |
| **Мультиплікативна форма(власний набір функцій)** | (12, 7, 8) | **0.2156** |

Як бачимо максимальне відхилення більше при використанні мультиплікативної форми відновлення функціональних залежностей, ніж в адитивній формі.

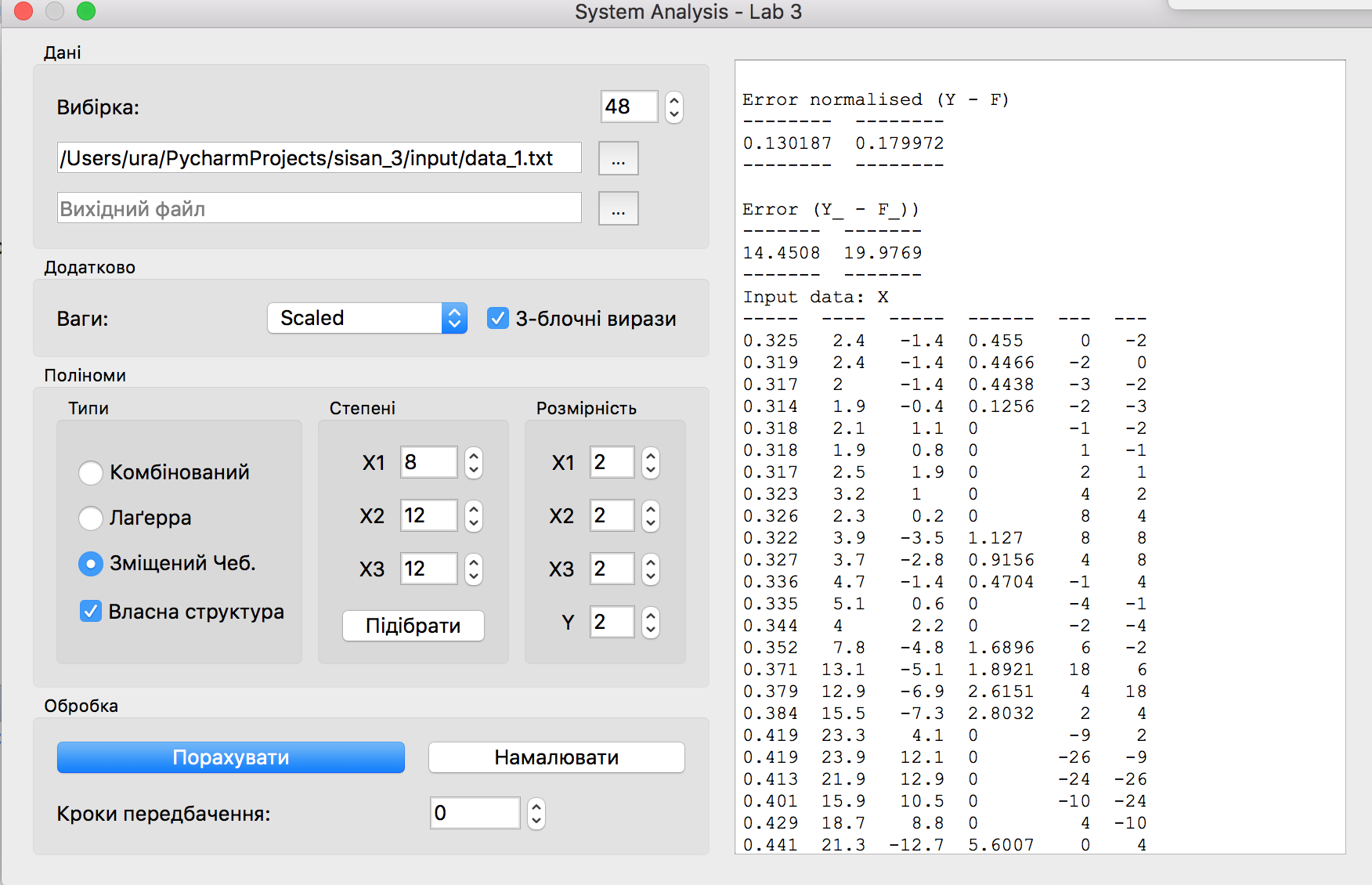
# 4.4 Передбачення

Прогнозні значення вихідних змінних будуються за допомогою застосування знайдених функціональних залежностей до спрогнозованих значень вхідних змінних. Прогноз для екзогенних змінних будується за допомогою моделі ARIMA, параметри (p, i, q) якої підбираються за критерієм мінімуму інформаційного критерію Акайке.

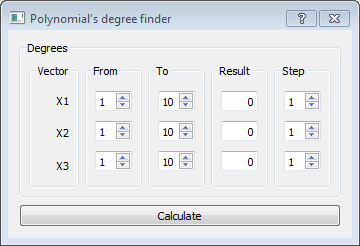




# 4.Інтерфейс



Для запуску необхідно обрати два файли, один у форматі txt, а інший у форматі Excel – із вхідними даними ***Input data file,*** а також зі значеннями цільових функцій ***Output values file***.



**Графіки у ненормованому вигляді*:***

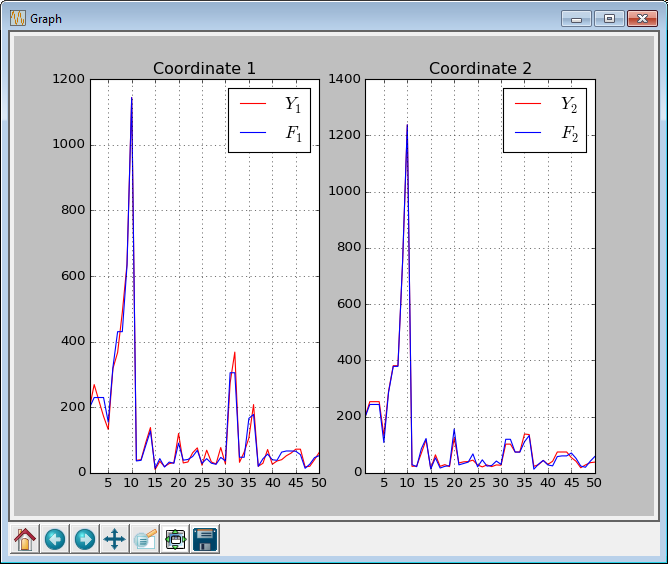


Figure 1

# Висновок

У даній роботі була вирішена задача пошуку функціональних залежностей в мультиплікативної формі. Дана форма підходить для ситуації, коли вхідні чинники можуть робити взаємний вплив один на одного. Алгоритм пошуку функціональної залежності в даній роботі передбачає роботу на вибір з різними видами поліномів Чебишева

Був запропонований власний варіант структур функцій і обгрунтована його доцільність.

Алгоритм був випробуваний на власній вибірці. Результати роботи алгоритму вийшли досить хорошими, що підтверджує застосовність методу і працездатність програми.

Знайдена функціональна залежність дозволяє обчислити значення функції усередині інтервалу області значень змінних даної вибірки, а також дає можливість прогнозування значень на виході за межами цієї області. Таким чином, в результаті рішення задачі стала можлива досить точна інтерполяція і екстраполяція вихідних даних, що має досить важливе значення на практиці.

# Огляд літератури з відновлення функціональних залежностей

1. «Восстановление многофакторных закономерностей в условиях концептуальной неопределенности», Н.Д. Панкратова, Е.Л. Опарина, — «Системные исследования и технологии», №3, 2004.

Запропоновано методологічний і математичний апарат вирішення завдань відновлення багатофакторних закономірностей в умовах концептуальної невизначеності взаємозв'язків показників області визначення шуканої функціональної залежності. Відновлення багатофакторних закономірностей базується на розробленій ієрархічній багаторівневій системі моделей в класі мультиплікативних функцій.

1. Дрейпер Н. Р., Смит. Г. Прикладной регрессионный анализ, 3-е изд.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2007

У книзі описуються методи підбору і дослідження лінійних і нелінійних регресійних моделей різного ступеня складності. Крім стандартного набору тем, що становлять ядро курсу регресійного аналізу, в це видання включені окремі глави, присвячені мультиколінеарності, узагальненим лінійним моделям, геометричним властивостям регресії, робастной регресії і процедурам тиражування вибірки (бутстрепа).

1. Математические методы прогнозирования и восстановления зависимостей: Методические указания к выполнению лабораторных работ / Сост. С. И. Чахоян (2014)

В пособии приводится методика восстановления функциональных зависимостей посредством построения интерполяционных полиномов, аппроксимации сплайнами, рядами Фурье, МНК, а также рассмотрены методы прогнозов Холта, с учётом сезонности и адаптивный прогноз.

1. Гроотуис-Оудсхорн К., Ван Тиль Д. А., Хаммел Д. М., М. Д. Изерман. Обзор и классификация подходов к решению проблемы неопределенности при многокритриальном анализе решений для здравоохранительных решений Хенка Вроэкхайзена. – [Электронный ресурс]: springerlink.com

Метою даного дослідження є розгляд шляхів явного включення невизначеності в багатокритеріальний аналіз рішень (МАР). Авторами було виділено 5 основних підходів вирішення поставленого завдання: теорія нечітких множин (45% оброблених досліджень), імовірнісний аналіз чутливості (15%), детермінований аналіз чутливості (31%), Байєсовські конструкції (6%), і сіра теорія (3%) . Виділені підходи були порівняні щодо можливості та зручності їх імплементації в задачах охорони здоров'я.