# Puntos extremos y optimización

Veamos ahora que, dado un programa lineal, siempre que posea una solución óptima, entonces un punto extremo óptimo también existe.

## Teorema 2 (p68)

> !! Sea $A = \{x|Ax = b, x \geq 0\}$ no vacío. Entonces el conjunto de puntos extremos es no vaciío y contiene un número finito de puntos, digamos $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Además el conjunto de direcciones extremas es vacío si y sólo si $X$ es acotado.
>
> Si $X$ es no acotado, entonces el conjunto de direcciones extremas es no vacío y es finito, digamos $\{d_1, d_2, \cdots, d_i\}$. Además $x \in X$ si y sólo si puede ser representado como combinación lineal famosa de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ más una combinación lineal no negativa de $d_1, d_2, \cdots, d_n$, esto es
>
> $$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{i=1}^{l} u_i d_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, (\lambda_j, u_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l, \quad j = 1, 2, \cdots, k$$

Veamos que, siempre que un programa lineal tiene solución óptima, existe un punto extremo óptimo.

Consideremos el siguiente programa lineal:

| **Minimizar** | $cx$ |
|---|---|
| Sujeto a | $Ax = bx \geq 0$ |

Sean $x_1, x_2, \cdots, x_\alpha$ puntos extremos del conjunto $X$ (constraint set), sean $d_1, d_2, \cdots, d$ de direcciones extremas del conjunto $X$. Recuerde que cualquier punto $x$ de $X$ puede ser representado.

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + \sum_{i=1}^{l} u_i d_i \quad \text{donde} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \cdots, k \quad u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l$$

Por lo tanto el problema se puede transformar de la siguiente forma:

| | |
|---|---|
| **Minimizar** | $$\sum_{j=1}^{k}[(x_j)]\lambda_j + \sum_{i=1}^{l}[(d_i)]u_i$$ |
| Sujeto a: | $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \cdots, k \quad u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l$ |

Como los $\mu_i$ pueden ser escogidos relativamente grandes, si $cd_i < 0$ para algún $i \quad (1 \leq i \leq l)$ entnces el mínimo es $-\infty$.

Si $cd_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, l$ entonces