Soluciones básicas factibles

En esta parte del curso abordaremos a los puntos extremos desde un punto de vista algebraico.

Definición

> *Considere el sistema $Ax = b$ y $x \geq 0$ donde A es una matriz de dimensión $m \times n$ y b un vector de dimensión m. Supongamos que el $rango(A, b) = rango(A) = m$.*

Después de reacomodar (posiblemente) las columnas de A, sea $A = [B, N]$ donde B es una matriz de dimensión $m \times n$ invertible y N es una matriz de dimensión $m \times (n - m)$

$$mA^n = nB^m nN^{n-(m)}$$

El punto

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix},$$

$$X_B = B^{-1}b$$
$$X_N = 0$$

donde estrictamente una solución básica del sistema. Si $X_b \geq 0$

$$Ax = [B, N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = Bx_B + NX_N = BB^{-1}b + N0 = b$$

entonces X_B es llamada la **solución básica factible**. En este caso B es llamada la matriz básica y N la matriz no básica. Las componentes de X_B son llamadas variables básicas y las componentes de X_N variables no básicas. Si $x_B \geq 0$, entonces X es llamada **no degenerada**, si al menos una de las entradas de $X_B = 0$ entonces es llamada solución **degenerada**.

Ejemplo

Considere el poliedro definido por las siguientes desigualdades:

$$
\begin{gathered}
x_1 + x_2 \leq 6 \\
x_2 \leq 3 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{gathered}
$$

Introduciendo variables de oleura:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\
x_2 + 0 + x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

$$
X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq 0
$$

$$
Ax = b
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

$$
B \qquad N
$$

$$
X = \begin{bmatrix} x_B \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Para una matriz de dimensión $m \times n$ arbitraria podemos considerar, a lo más $\binom{n}{m}$.

Correspondencia entre soluciones factibles y puntos extremos

Veamos que un punto es una solución básica factible si y sólo si es un punto extremo.

Consideremos el siguiente problema lineal

Minimizar	cx
Sujeto a	$Ax = b$
	$x \geq 0$

Donde A es una de la matriz de dimensión $m \times n$ con rango m. Sea X un punto extremo de la región factible, veamos que x es solución básica factible de $Ax = b, \quad x \geq 0$. Consideramos $x_1, x_2, \cdots, x_p$ las entradas de $x > 0$ y $x_{p+1}, \cdots, x_n$ las entradas de $x = 0$. Veamos que $a_1, a_2, \cdots, a_p$ columnas de A , son linealmente independientes.

Si estos vectores no son linealmente independientes, entonces existen escalares $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_p$ no todos 0 tal que

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j a_j = 0$$

Exhibiremos 2 puntos de la región factible distintos tales que una de sus combinaciones lineales estricta es igual a x.

Defina x', x'' donde

$$x'_j = \begin{cases} x_j + \lambda\gamma_j & j = 1, 2, \cdots, p \\ 0 & j = p+1, \cdots, n \end{cases}$$

$$x''_j = \begin{cases} x_j - \lambda\gamma_j & j = 1, 2, \cdots, p \\ 0 & j = p+1, \cdots, n \end{cases}$$

$$\Gamma_m = \max_j\{|\gamma_j|\} > 0 \qquad \text{hint: l.i.}$$

$$X_{\min} = \min_j\{x_j\}$$

$$\lambda = \frac{X_{\min}}{\Gamma_m} \geq 0$$

Luego

$$x_j + \lambda\gamma_j \geq x_j \geq 0$$

$$x_j + \frac{x_{\min}\gamma_j}{\Gamma_m} \geq x_j - x_{\min} \qquad \gamma_j > 0 \quad \gamma \leq 0$$

$$\text{Si } X \text{ es punto extremo} \Rightarrow X \text{ es una soluci}ó\text{n factible}$$

$$\begin{aligned} Ax' = \sum_{j=1}^{p} a_j x'_j &= \sum_{j=1}^{p} (x_j + \lambda\gamma_j)a_j = \sum_{j=1}^{p} (x_j)a_j + \sum_{j=1}^{p} (\lambda\gamma_j)a_j \\ &= Ax + \lambda \cancelto{0}{\sum_{j=1}^{p} \gamma_j a_j} \\ &= b \end{aligned}$$

Luego x' y x'' estan en la region factible y además

$$x = \frac{1}{2}(x' + x'')$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x' + x'')_j &= \frac{1}{2}(x'_j + x''_j) \\ &= \frac{1}{2}(x_j + \cancel{\lambda\gamma_j} + x_j - \cancel{\lambda\gamma_j}) \\ &= x_j \qquad j = 1, 2, \cdots, p \end{aligned}$$

Lo anterior contradice que x es punto extremo $\therefore \quad a_1, \cdots, a_p \quad l.i.$. Como A tiene rango completo ($rango(A) = m$), entonces podemos completar $\{a_1, \cdots, a_n\}$. Sea

$$B = [a_1, a_2, \cdots, a_m]$$

$$[a_1, \cdots, a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n]$$

$$[B \quad | \quad N]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad p < m \leq n$$

Se concluye que X es básica factible.

Supongamos que X es básica factible del sistema $Ax = b, \quad x \geq 0$. Sea B la base correspondiente a x, y $x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}$. Supongamos que $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$ donde $0 \leq \lambda \leq 1$ y x' y x'' soluciones factibles.

Sea $x' = \begin{bmatrix} x'_B \\ x'_N \end{bmatrix}$ y $x'' = \begin{bmatrix} x'_B \\ x'_N \end{bmatrix}$.

Luego

$$\begin{bmatrix} x'_B \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x'_B \\ x'_N \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} x''_B \\ x''_N \end{bmatrix} \qquad x'_N, x''_N \geq 0 \therefore \quad x'_N = 0 = x''_N$$

Ahora

$$\begin{aligned} b = Ax' &= Bx'_B + \cancel{Nx'_n} \\ &= Bx'_B \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b = Ax'' &= Bx''_B + \cancel{Nx''_n} \\ &= Bx''_B \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x'_B = B^{-1}b = x''_B$$
$$\therefore x' = x''$$

Existencia de los puntos extremos

Veamos que todo conjunto poliédrico

$$X = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$$

posee al menos una solución básica factible.

Primero supongamos que $ran(A) = m$ y sea x una solución factible. Además suponga que $x_1, \cdots, x_p \geq 0, \qquad x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$. Si $a_1, \cdots, a_p$ son linealmente independientes, entonces x es **solución básica factible óptima**. En otro caso existen $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$ con al menos un $\gamma_r > 0$ tal que $\sum_{j=1}^{p} \gamma_j a_j = 0$.

Considere el punto

$$x'_j = \begin{cases} x_j - \lambda\gamma_j & j = 1, 2, \cdots, p \\ 0 & j = p+1, \cdots, n \end{cases}$$

donde

$$\lambda = minimo \left\{ \frac{x_j}{\gamma_j} : \gamma_j > 0 \right\} = \frac{x_k}{\gamma_k} \geq 0$$

Sea $j \in \{1, \cdots, p\}$. Si $\gamma_j \leq 0$, entonces $x'_j > 0$(pues $x_j \quad y \quad \lambda_j$ son positivos), $\gamma_j > 0$, entonces por definición de λ

$$\frac{x_j}{\lambda_j} \geq \lambda \quad \therefore \quad x_j \geq \gamma_j\lambda \geq 0 \quad \therefore \quad x'_j > 0 \quad \& \quad x' \geq 0$$

Nota: Mínimo es el índice k

$$x_k = x_k - \lambda\gamma_k = \cancel{x_k - \frac{x_k}{\lambda_k}\lambda_k} = 0$$

Tarea: $Ax' = b$

Teorema 1

> *La colección de puntos extremos corresponde a la colección de soluciones básicas factibles, y ambos son no vacíos, dado que la región factible es no vacía*

Teorema 2

> *Asumiendo que la región factible es no vacía, una solución óptima finita existe si y sólo si $Cd_j \geq 0$ para $j = 1, \cdots, l$, donde $d_1, \cdots, d_l$ son las direcciones extremas de la región factible. De otra manera la solución óptima es no acotada.*

Teorema 3

> *Si una solución óptima existe, entonces un punto extremo óptimo existe.*

$$SF \rightarrow SBF$$

Mejorar una solución básica factible

Dada una solución básica factible, describimos un método para obtener una nueva solución básica factible, con una mejor solución en la función objetivo.

Consideramos el problema

Minimizar	cx
Sujeto a	$Ax = b$ $x \geq 0$

A es una matriz de dimensión $m \times n$ con rango m. Supongamos que tenemos la solución **SBF** $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ con evaluación Z_0 dada por

$$Z_0 = C \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = (C_B, C_N) \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$C = (C_B, C_N) = C_B B^{-1} b$$

Como X es factible, se tiene que $X_B \geq 0 \quad X_N \geq 0$ y

$$b = Ax = Bx_B + Nx_N$$

multiplicando por B^{-1}

$$\begin{aligned} B^{-1}b = B^{-1}Ax &= x_B + B^{-1}NX_N \\ &= B^{-1}b - \sum_{j \in R} B^{-1} a_j x_j \end{aligned}$$
$$R = \{\text{Indices de las comlumnas NO-básicas}\}$$

$$\begin{aligned} Z = cx &= C_B x_B + C_N x_N \\ &= C_B \left(B^{-1}b - \sum_{j \in R} B^{-1} a_j x_j \right) + \sum_{j \in R} c_j x_j \\ &= C_B B^{-1} b - \sum_{j \in R} C_B B^{-1} a_j x_j + \sum_{j \in R} c_j x_j \\ &= z_0 + \sum_{j \in R} \left(c_j - C_B B^{-1} a_j \right) x_j \\ &= z_0 - \sum_{j \in R} \left(C_B B^{-1} a_j - c_j \right) x_j \\ &= z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \end{aligned}$$

$$Z_0 = C_B B^{-1} b = cx_1 \qquad x_1 = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = cx = z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

$$z \leq z_j \qquad \begin{matrix} z_j = C_B B^{-1} a_j \\ z_j - c_j \geq 0 \end{matrix}$$

X se construye tal que su evaluación en la función objetivo sea menos que la solución **BF** original, es decir:

$$z_0 \geq z$$

Si se encuentra $k \in R$ tal que $z_k - c_k > 0$, Tome $x_j = 0 \quad \forall j \in R \quad j \neq k$ entonces:

$$z = z_0 - (z_n - c_k)x_k \leq z_0$$

Será entonces de nuestro beneficio elegir x_k tan grande como sea posible.

$$\begin{aligned} X_B &= B^{-1}a_j x_j \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= B^{-1}b - B^{-1}a_k x_k \qquad x = (x_B, x_N) \\ &= \bar{b} - Y_k x_k \\ &= \bar{b} - x_k Y_k \end{aligned}$$

Si $Y_{ik} = (Y_K)_i \leq 0$ entonces X_{Bi} incrementa cuando x_k incrementa (no se genera problema alguno).

Si $Y_{ik} = (Y_K)_i > 0$ entonces la entrada X_{Bi} disminuye cuando x_k aumenta.

Escoga a x_k de la siguiente forma

$$x_k = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b_i}}{Y_{ik}} : Y_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b_r}}{Y_{rk}}$$

En el caso de escribir x_k como en la expresión inmediata anterior, la variable x_r sale de la base y la variable x_k entra a la base. Esta operación conserva la estructura de la matriz A, en el sentido de que esta está formada por un primer bloque, B el cual resulta nuevamente una base (es invertible).

Ejemplo 3.4

Minimizar	$x_1 + x_2$
Sujeto a	$x_1 + 2x_2 \leq 4$
	$x_2 \leq 1$

Minimizar $x_1 + x_2$ $x_1, x_2 \geq 0$